ستاره

سال ۳، شمارهٔ ۳، آذر ۱۳۶۹

مرکز نشر دانشگاهی

بسم الله الرحمن الرحیم

نشر ریاضی

مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

شمارهٔ ۸۵ خیابان پارک خیابان دکتر بهشتی، تهران ۱۵۱۳۴

بهای هر شماره ۴۵۰ ریال
حق اشتراک سالانه برای داخل کشور ۱۳۵۰ ریال

وجه اشتراک به حساب شمارهٔ ۹۰۰۰۹ بانک ملی شعبهٔ خیابان پارک تهران به‌نام مرکز نشر دانشگاهی واریز شود.

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر چهار ماه یک بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجّه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی پژوهان فارسی‌زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به‌ویژه مسائل مربوط به‌آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چهارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبک مقاله‌های چاپ شده در *نشر ریاضی* باشد. به‌همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به‌فارسی برگردانند و برای درج به‌مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حک و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخش‌بندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به‌منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ شدهٔ در *نشر ریاضی* باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۳، شمارهٔ ۳، آذر ۱۳۶۹

با همکاری لابنوترون مرکز نشر دانشگاهی

لیتوگرافی: کیان

چاپ و صحافی: مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه پیام‌نور

فهرست

روی جلد

آشفته‌بازار کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال. ر. ك. «ریاضیات سال اول» و «اصلاح حساب دیفرانسیل و انتگرال»

فرصتی از دست نرفته

افسوس خوردن بر فرصتهای از دست رفته، تاوانِ غفلت است. شواهد بلامنازعی در دست است که چهرهٔ زندگی مادی در این سیاره بر اثر دو تحول بزرگ در علم و تکنولوژی در حال دگرگونیِ کامل است و هر ملتی که با این تحولها همساز نشود توشهٔ انبوهی از افسوس برخواهد داشت. این دو تحول، یکی در زمینهٔ تکنولوژی ژنتیك است و دیگری آنچه که به انقلاب انفورماتیك معروف شده است. نشانه‌ای در دست نیست که در زمینهٔ اول حرکت دامنه‌دارِ مؤثری در کشور ما در جریان باشد، ولی در زمینهٔ انفورماتیك، شواهد و علائم امیدوارکننده‌ای به‌چشم می‌خورد که به آنها خواهیم پرداخت.

آثار انقلاب انفورماتیك هم‌اکنون به‌روشنی مشهود است. سرعت و ظرفیت ذخیره‌سازی، پردازش، و بازیابی اطلاعات، امکانات اطلاع‌رسانی سریع از راه دور، توان محاسباتی و تصویرنگاری کامپیوترهای جدید، و سایر دستاوردهایِ پیشرفتِ صنعت ریزپردازنده‌ها آن‌چنان بر همهٔ شئون زندگی روزمره، مسیر علم و تکنولوژی، و ارکان مدیریت و سازماندهی اقتصادی و اجتماعی اثر گذاشته و می‌گذارد که توصیف و تصور جهانی که نسل آینده در آن خواهد زیست بی‌شباهت به افسانه‌سرایی علمی نمی‌نماید. هرچند که ما هنوز در حاشیهٔ این تحولها بسر می‌بریم و بعید است که در آیندهٔ قابل پیش‌بینی بتوانیم جز به‌عنوان مصرف‌کننده در بازار سخت‌افزار کامپیوتر مطرح باشیم، لکن نشانه‌هایی وجود دارد که ممکن است بتوانیم در مسیر استفاده از کامپیوتر، مصرف‌کنندهٔ خردمند و خلاقی باشیم یعنی به‌راستی به انقلاب انفورماتیك بپیوندیم.

۱. برخلاف روند چنددههٔ گذشته که موضع ما در برابر تکنولوژی وارداتی کامپیوتر موضعی انفعالی بود- زیرا که نه توان علمی و نه زیربنای اجتماعی و فرهنگی لازم را برای استفادهٔ خردمندانه از سخت‌افزار وارد شده دارا بودیم- اکنون آگاهیِ به‌نسبت وسیعی، به‌خصوص در نسل جوان، در باب استفاده از ابزار انفورماتیك وجود دارد. در دانشگاهها، در نهادهایی چون جهاد دانشگاهی، در شرکتهای خصوصی و دولتی، و حتی در میان دانش‌آموزان دبیرستانی، وحشت و سوءظن نسبت به هیولای کامپیوتر جای خود را به انس و رغبت داده است. کلاسهای آموزش کامپیوتر، صرف‌نظر از کیفیت آنها، امروزه به موازات کلاسهای زبان طالب دارند. دامنهٔ کاربرد کامپیوتر و به‌خصوص جنبه‌های نرم‌افزاری آن چنان وسعتی یافته است که در زمینهٔ نرم‌افزار، کشور ما شاید امکان بالقوهٔ تبدیل شدن به یك قدرت تجاری منطقه‌ای را دارا باشد. در زمینهٔ سخت‌افزار، تکنولوژی ساختِ کامپیوتر در حال حاضر در دسترس ما نیست و شاید حرکت در این زمینه فعلا مقرون به‌صرفه هم نباشد. با این حال، شایان ذکر است که تعداد انبوهی متخصص ایرانی در قلب تکنولوژی کامپیوتر آمریکا، یعنی در ناحیه‌ای که به «درهٔ سیلیسیوم» معروف شده است به کار اشتغال دارند. در شرایط مناسب می‌توان از این نیروی عظیمِ کارامد و متخصص بهره گرفت.

۲. اقدامهای مثبت و مؤثری از سوی سازمانها و مقامهای مملکت مشاهده می‌شود که دلالت بر آینده‌نگری و دوراندیشی دارد. وزارت آموزش و پرورش از سال تحصیلی آینده برنامهٔ آزمایشی تدریس کامپیوتر در سال سوم دبیرستان را آغاز خواهد کرد و قرار است این برنامه به‌تدریج تعمیم یابد. در این مورد باید با مقاومتهای واپسگرایانه‌ای که گهگاه مشاهده می‌شود به‌طور منطقی رویارویی کرد. این توهم برای بعضیها وجود دارد که به کارگیری کامپیوتر و ماشین حساب موجب تنبلیِ فکری دانش‌آموزان خواهد شد. بسیاری از ما دورانی را به‌یاد می‌آوریم که بعضی از معلمان فکر می‌کردند تدریس جبر، ذهن دانش‌آموزان را تنبل بار می‌آورد، چون جبر معمولا راه‌حلهایی سرراست و ماشینی برای بسیاری از مسائل غامض حساب که نیاز به استدلال و ابتکار پیچیده دارند ارائه می‌کند. در برابر این گونه واهمه‌ها باید گفت که به‌کار گرفتن کمکهای ماشین نه‌تنها راه را به‌روی ابتکار و استدلال نمی‌بندد بلکه دانش‌آموز و دانشجو و محقق را سریعتر به میدانهای تازه‌تر تفکر می‌رساند که دست‌کم همان اندازه ابداع و ابتکار می‌طلبند. باید انتظار داشته باشیم که به‌تناسب تحولات علم و جامعه، قلمروهای تفکر و استدلال نیز متحول شوند. خبر نوید بخش دیگری که باید ذکر شود پیوستن کشور ما به شبکهٔ بین‌المللی پست الکترونیکی پژوهشی است. اخیراً مؤسسهٔ تحقیقات فیزیك نظری و ریاضیات به‌عنوان گره اصلی شبکه در ایران پذیرفته شده است و در آیندهٔ نه‌چندان دور پژوهشگران دانشگاهها و مؤسسات پژوهشی کشور خواهند توانست از طریق ترمینال کامپیوتر با پژوهشگران سرتاسر جهان تماس فوری بگیرند. امروزه در اروپا و آمریکا پست الکترونیکی یك وسیلهٔ ارتباطی نیرومند برای مشاورهٔ علمی و همکاری پژوهشی است.

۳. در سالهای گذشته علی‌رغم مشکلات ارزی تعداد زیادی کامپیوتر ریز و درشت به کشور ما وارد شده است. این جریان روز به‌روز گسترده‌تر می‌شود. همه‌گونه تسهیلات برای وارد کردن کامپیوتر باید فراهم کرد و از سوء استفاده‌های احتمالی نباید هراسید، زیرا ضرر چنین سوءاستفاده‌هایی کمتر از فایدهٔ فراوانیِ کامپیوتر در جامعه است.

۴. و بالاخره باید اشاره‌ای کوتاه به نقش کامپیوتر در ریاضیات بکنیم. از یك سو ریاضیدانان مانند پژوهشگران سایر رشته‌ها می‌توانند از امکانات پست الکترونیکی، بانکهای اطلاعاتی، و امثال اینها استفاده کنند. از سوی دیگر کامپیوتر به‌منزلهٔ یك وسیلهٔ اکتشاف در آستانهٔ تأثیرگذاری بر سرعتِ پیشرفتِ ریاضیات- حتی در مجردترین بخشهای آن- است. در سالهای اخیر شاهد کشفیات درخشانی در بررسی دستگاههای دینامیکی، رده‌بندی خمینه‌های سه‌بعدی، و بخشهای گوناگون ریاضیات گسسته بوده‌ایم که در غیاب کامپیوترهای نیرومند قابل تصور نبود. لازم است که در جوار درسهای کلاسیك ریاضی در دانشگاهها، دانشجویان و استادان به نوآوری در استفاده از کامپیوتر در همهٔ مواد ریاضی ترغیب شوند.

باید تأکید کرد که اجرای این برنامه‌ها بدون دسترسیِ آسان به کامپیوتر میسر نیست. حداقلِ نیازِ بخشهای ریاضی دانشگاهها، اختصاص یك ترمینال یا کامپیوتر شخصی به دفتر هر استاد و نصب ترمینالهای متعدد برای استفادهٔ دانشجویان است.

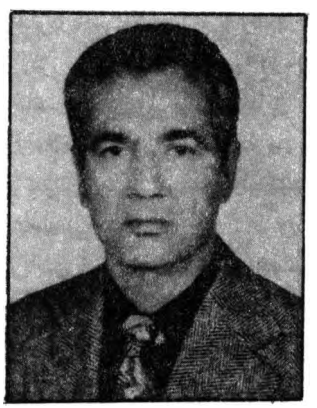
نشر ریاضی

ریاضیاتِ سال اول

در حال حاضر، ریاضیات سال اول دانشگاه عمدتاً شامل حساب دیفرانسیل وانتگرال است و مباحثی از مبانی ریاضیات، جبر، و جبر خطی را نیز کم و بیش در برمی گیرد. ارزیابی محتوا و روش تدریس ریاضیات سال اول، موضوع بحثِ پرحرارتی درمحافل دانشگاهی دنیاست. نقش پایه‌ای ریاضیات سال اول در تربیت علمی دانشجویان علوم و مهندسی باعث شده است که در کشورهای پیشرفته توجه خاصی به این ارزیابی مبذول شود. در این زمینه کنفرانسهای متعددی برگزار می‌شود و در برخی دانشگاهها برنامه‌های آزمایشی به اجرا در می‌آید تا راههای مختلف تجدید نظر در ریاضیات سال اول امتحان شود.

در خرداد ماه سال جاری دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف با حمایت و کمك امور پژوهشی این دانشگاه سمیناری ترتیب داد تا این مسأله در سطح ملی و در میان صاحبنظران داخلی به بحث گذاشته شود. بخش دیدگاه این شماره را به انعکاس نظریاتی که در این سمینار عرضه شد، اختصاص داده‌ایم. علاوه بر آن، نظر یکی از صاحبنظران خارجی را که نویسندهٔ کتابهایی در زمینهٔ حساب دیفرانسیل وانتگرال است به فارسی برگردانده‌ایم و در بخش کتاب همین شماره از نظرتان می‌گذرانیم.امیدواریم انتشار این مجموعه در جلبِ نظرِ دانشگاهیان و برنامه‌ریزان آموزشی به این موضوع، مفید باشد.

ریاضیات سال اول، هم آسان و هم دشوار



جواد بهبودیان
[دانشگاه شیراز]

من از دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف تهران به مناسبت برگزاری این سمینار سپاسگزارم. فکر می کنم تشکیل چنین سمیناری در دانشگاههای کشور ما، به‌طور متناوب، ضروری است، زیرا ریاضیات سال اول یا ریاضیات عمومی از نظر آموزشی و پژوهشی چندان مورد توجه نیست.

ریاضیات سال اول ظاهراً آسان است و شاید به همین دلیل این سمینار خلوت است، چون اغلب پنداشته‌اند که موضوع مورد بحث اهمیت ندارد. ولی جا داشت که بعضی از رؤسای گروههای ریاضی، کسانی که ریاضی عمومی درس می‌دهند، ریاضیدانان پژوهشگر، و دبیران ریاضی، در این گردهمایی می بودند تا مشکلات بهتر بررسی می شدند.

ریاضیات عمومی برای ریاضیدانان حرفه‌ای آسان است ولی برای انبوه دانشجویانی که هر مهرماه وارد دانشگاهها و مؤسسات آموزشی کشور می شوند و نمی خواهند ریاضیدان حرفه‌ای شوند، بلکه باید آن را به عنوان پیشنیاز برای رشتهٔ تحصیلی خود بیاموزند، سخت است. اگر بخواهیم ساعات درسی را برای دانشجو و استاد پرکنیم ریاضیاتِ سال اول آسان است، ولی اگر بخواهیم ریاضیات سال اول را مطابق نیاز دانشجو آموزش دهیم تا بتواند ریاضی فکر کند، تا بتواند الگوهای ریاضی را بشناسد، تا بتواند آن را در حرفهٔ خود به کار برد، ریاضیاتِ سال اول سخت است.

من این بحث را در چهار بخش دنبال می کنم:

۱. موادی که باید در ریاضیات عمومی آموزش دهند.
۲. ارتباط ریاضیات عمومی با ریاضیات دبیرستان.
۳. کسانی که باید ریاضیات عمومی را آموزش دهند.
۴. شیوهٔ آموزش ریاضیات عمومی.

۱. موادی که باید در ریاضیات عمومی آموزش دهند

در کشور ما بنیانگذار آموزش ریاضیات عمومی، به خصوص حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی، دانشگاه تهران بوده است. استادان این دانشگاه از نیم قرن پیش، با وجود همه کمبودها، در این راه زحمت کشیدند. بسیاری از ما شاگردان آنها هستیم و جا دارد که در این سمینار از آنها تشکر کنیم. در حدود ربع قرن پیش با توسعهٔ دانشگاههای کشور به تدریج کتابهای بیشتری در زمینهٔ ریاضیات عمومی ترجمه و تألیف شدند. بعد از انقلاب اسلامی ایران، در کمیته‌های تخصصی انقلاب فرهنگی تمام دروس ریاضی، و در ضمن آنها ریاضیات عمومی، برای رشته‌های گوناگون توسط ریاضیدانان و غیرریاضیدانان از نو برنامه‌ریزی گردیدند. اینك یك دهه بعد از انقلاب ما دارای انواع برنامه‌ها و کتابهای درسی برای ریاضیات عمومی هستیم ـ برای ریاضی، فیزیك، شیمی، بیولوژی، زمین شناسی،.... در این کتابها انواع و اقسام اصطلاحات و واژه‌های علمی برای یك مفهوم به کار می‌رود. به طور خلاصه، در مورد برنامه‌ها و کتابهای ریاضیات عمومی، با اینکه نمی‌خواهیم منکر ارزش تمام آنها شویم، یك نوع سردرگمی به چشم می‌خورد. عده‌ای از مدرسان هنوز جزوه‌های درسی را ترجیح می‌دهند. عده‌ای بر یك کتاب مسلط شده‌اند و حاضر نیستند برای آموزش بهتر کتابی دیگر را انتخاب کنند. اصلا پژوهشی در این راه نمی‌شود. این است وضع ما در آموزش ریاضیات عمومی.

اما در دنیا چه می گذرد؟ برای پیدا کردن بهترین روش آموزش و ارائه بهترین برنامه و بهترین کتاب، تلاش فراوان می‌شود. دائماً از راه انتشار مجله و مقاله و کتاب، از راه برگزاری سمینار و کنفرانس، سلیقه‌های

گوناگون با هم برخورد کرده مورد آزمایش قرار می‌گیرند. مثلا این روزها روی چند موضوع زیاد گفتگو می‌شود:

عده‌ای می‌گویند که باید حساب دیفرانسیل و انتگرال [-حسابان] را مانند قبل آموزش داد. عده‌ای معتقدند که در عصر کامپیوتر باید آموزش حسابان را با کامپیوتر آمیخت. گروهی تأکید روی ریاضیات گسسته دارند. عده‌ای اصرار دارند که به تجریدگرایی در آموزش ریاضیات عمومی توجه گردد. برای اینکه موضوع روشن و کوتاه‌شود، به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱. نزدیکترین نقطه از محیط دایرهٔ $x^2+y^2=1$ به نقطهٔ $(2, 0)$ را بیابید.

حل: با کشیدن شکل و به کمك هندسهٔ دبیرستانی، نقطهٔ $(1, 0)$ به دست می‌آید. ولی از راه حسابان باید تابع زیر را مینیمم کنیم:

$$D^2=(x-2)^2+(y-0)^2=(x-2)^2+(1-x^2)=5-4x=f(x).$$

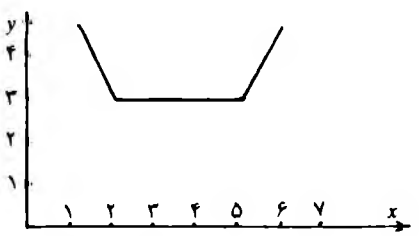
این یك تابع نزولی با دامنهٔ $[0, 1]$ است. از این رو مینیمم آن به ازای $x=1$ به دست می‌آید. پس نقطهٔ مطلوب می‌شود $(1, 0)$.

در این مثال اگر دانشجو ریزه‌کاریهای حسابان را به خوبی نیاموخته باشد، ممکن است دامنهٔ تابع را تشخیص ندهد و فوراً مشتق بگیرد. ملاحظه می‌شود که با کامپیوتر به تنهایی نمی‌توان مسأله را حل کرد و دانستن مفاهیم حسابان ضرورت دارد.

مثال ۲. مینیمم تابع زیر را بیابید

$$y=|x-2|+|x-5|.$$

حل: نمودار تابع به کمك کامپیوتر به صورت زیر رسم می‌شود.



از روی این نمودار به آسانی دیده می‌شود که هر یك از مقادیر x در بازهٔ $[2,5]$، تابع را مینیمم می‌کند و مقدار مینیمم تابع ۳ است.

ملاحظه می‌شود که اگر دانشجو نتواند مستقیماً مسأله را حل کند یا فرصت کافی برای این کارنداشته باشد، کامپیوتر به او کمك می‌کند و حتی باعث می‌شود که دانشجو بهتر بتواند طبیعت این تابع را تشخیص دهد.

البته چه بهتر که دانشجو به قدرکافی مفاهیم ریاضی را درك کرده باشد و مسأله را مستقیماً حل کند. مفهوم خیلی معمولیِ ماکسیمم و مینیمم در حقیقت همان حداکثر و حداقل است. بنابراین باید حداقلِ مقدار این تابع غیرمنفی را پیدا کند. با استفاده از نامساوی مثلثی داریم

$$y=|x-2|+|x-5|\geqslant|x-2+5-x|=3.$$

مثال ۳. مجموعهٔ $D=\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1,x_2,x_3=0,1\}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $U=x_1+5x_2+x_3$ و $W=x_1+x_2+x_3$. نشان دهید که W تابعی از U است.

حل: مجموعهٔ D هشت عضو دارد. به ازای هر یك، مقادیر U و W را حساب کرده در جدول زیر می‌نویسیم:

U	۰	۱	۲	۵	۶	۷
W	۰	۱	۲	۱	۲	۳

در این جدول یك تناظر تابعی از U به W مشاهده می‌شود. پس W تابع U است. اگر دانشجو به دنبال ضابطه یا فرم تابعی، به صورت $W=f(U)$ باشد، از حل این مسأله عاجز می‌ماند. او باید مفهوم تابع را به طور مجرد درك کرده باشد تا مسأله را حل کند.

در مثال بالا متغیرها گسسته‌اند. در حقیقت دههٔ گذشته، دههٔ رونق ریاضیات گسسته، با مقاله‌های متعدد و کتابهای متنوع در این زمینه، بوده است. کامپیوتر هم با این نوع ریاضیات کار می‌کند. مثلا نقاط متعدد یك نمودار را به صورت پیوسته برای ما مجسم می‌کند. در بسیاری از کتابهای حسابان هم، با توجه به بازار روز، یك یا دو فصل دربارهٔ ریاضیات گسسته مشاهده می‌شود که اغلب با برنامه‌های کامپیوتری توأم است.

مثالهای بالا نشان می‌دهند که برای آموزش ریاضیات سال اول به نحو احسن، باید تعادل نسبی میان آموزش مواد زیر برقرار باشد.

الف) حسابان، ب) مبانی ریاضی و مفاهیم مجرد، ج) ریاضیات گسسته، د) کامپیوتر، هـ) ریاضیات دبیرستان

فرهنگ ریاضی، جزئی از فرهنگ ملتها شده است. گسترش علم و تکنولوژی و حل مسائل جامعه انسانی بدون تفکر ریاضی مقدور نیست. دانشگاه محلی است که در آنجا هر دانشجو بر-حسب رشتهٔ خود باید قدری ریاضی بیاموزد تا بتواند اندیشهٔ ریاضی را در حرفهٔ خود درك کند و به کاربرد. حتی ادیب و مورخ هم در پژوهشهای خود به اندیشه و زبان ریاضی ممکن است نیاز پیدا کند.

به خاطر دارم مرحوم استاد مسعود فرزاد وقتی که در دانشگاه شیراز دربارهٔ حافظ پژوهش می‌کرد، فراوانی کلمات حافظ را با دقت می‌یافت و دربارهٔ مدل احتمالی و ریاضی آنها با بخش ریاضی مشورت می‌کرد. او با به کار بردن اندیشهٔ ریاضی می‌خواست رمززیبایی اشعار حافظ را دریابد.

برنامه‌های ریاضیات عمومی در دانشگاههای ما چندان مطابق روز نیست. با اینکه معلمان و استادان ما هر و علاقه‌مندی در این زمینه داریم، ولی هنوز روی مشتقگیری وانتگرالگیری تمرین و تأکید می‌شود و بعضیها از کنار مفاهیم مفید و زیبای ریاضی با عجله می‌گذرند.

وقت آن رسیده است که انجمن ریاضی ایران و کمیته‌های تخصصیِ ریاضیِ شورایعالیِ برنامه‌ریزی با همکاری گروههای ریاضی و آنهایی که به ریاضی نیاز دارند، چاره‌اندیشی نمایند. بهتر است که این سردرگمی را باارائهٔ سه‌نوع ریاضیات عمومی

۱. ریاضیات عمومی برای مهندسی و فیزیك و علوم تجربی
۲. ریاضیات عمومی برای علوم تجربی و اجتماعی
۳. ریاضیات عمومی برای علوم انسانی

برطرف کنند. پروژه‌ای جامع، با سرمایه‌گذاری کافی، برای تألیف یا ترجمه سه نوع کتاب مناسب و جامع ضروری است. با انجام این کار مواد مناسب در برنامه‌ها منظور می‌شود و دانشجو و استاد و ناشرین کتاب تکلیف خودرا می‌فهمند.

۲. ارتباط ریاضیات عمومی با ریاضیات دبیرستان

اگر فرزند دبیرستانی داشته باشید، حتماً با کتاب ریاضی خود برای پرسش یا حل مسأله به شما رجوع می‌کند. ملاحظه می‌فرمایید که کتابهای ریاضی دبیرستان پر از مطلب‌اند و انصافاً خوب تهیه شده‌اند. ولی حجم مطالب زیاد است؛ کتابها پر از مسائل سخت و آسان هستند؛ پر از مطالبِ ریاضیات عمومیِ دانشگاه و جبر جدید هستند.

یادم هست درسال ۵۰ـ۵۱ که اولین کلاسهای بازآموزی دبیران ریاضی برای آموزش ریاضیِ جدید در دانشگاه شیراز دائر شد، مقاومتی خاص در برابر کارآموزی و امتحان مشاهده می‌شد. دبیران آن دوره تنها ریاضیات سنتی را قبول داشتند و در آن ماهر بودند. ولی آهسته آهسته دانشگاههای ما

رشد کردند و ریاضیات جدید در برنامه‌ها گنجانده شد. این است که امروز کتابهای دبیرستانی پر از مطالب جبر جدید مانند گروه و حلقه و ماتریس و غیره می باشند. البته به نظر من تا حدودی در این کار افراط شده است. کار به جایی رسیده است که در کتاب ابتدائی اصرار دارند ثابت کنند $0 \times x = 0$. بعضی از دانشجویانی که وارد دانشگاه می شوند اغلب از حل یك معادلهٔ ساده عاجز هستند. عده‌ای هم می گویند ما حساب دیفرانسیل وانتگرال و مبانی ریاضی و جبر جدید را در دبیرستان خوانده‌ایم. بعضیها هم در گوشه و کنار کشور، معلم نداشته‌اند و مطالب برایشان سخت است. اصطلاحات کتابهای دبیرستان و دانشگاه اغلب با هم تفاوت دارند.

خلاصه یك نوع به هم ریختگی عجیب هم در ریاضیاتِ دبیرستان و هم در ریاضیاتِ دانشگاه مشاهده می شود. چاره چیست؟ ایکاش بعضی از متصدیان آموزش و پرورش یا دبیران ریاضی در این سمینار می بودند.

لازم است که کمیتهٔ کتابهای ریاضیِ آموزش و پرورش با کمیتهٔ کتابهای ریاضیات عمومیِ دانشگاهها جلسات مشترك تشکیل دهند، و با هم همکاری نمایند. یك هماهنگی معقول و منطقی در انتخاب مواد درسی و مسائل و لغات و اصطلاحات، بسیاری از مشکلات را حل می کند.

۳. کسانی که باید ریاضیات عمومی را آموزش دهند

موقعی که دانشجو وارد دانشگاه می شود، خیلی انتظار دارد استاد ببیند. فکر می کند دبیر با استاد فرقی دارد. نمی‌داند که استاد هم مانند دبیر مشکل دارد. با این حال انتظار دارد که با دبیر فرق داشته باشد. ولی متأسفانه گاهی سرخورده می‌شود و فکر می کند از دبیر راضیتر بود و بیشتر مطلب یاد می گرفت. علت چیست؟ علت این است که یك عده را که تخصص یا علاقه یا مجال ندارند به تدریس ریاضیات عمومی وامی‌داریم. ریاضیات عمومی را باید آنهایی تدریس کنند که با علاقه و کنجکاوی و صرف وقت فراوان مطلب را زیر و رو می کنند، مجلات علمی و مقاله‌های مربوط را مطالعه می نمایند، و در جریان روشها و اثباتهای جدید هستند. کلاس دانشگاه باید با کلاس دبیرستان فرق داشته باشد. دانشگاه جای نوآوری است، در دانشگاه باید جوانان، با راهنمایی استاد، چیزی به دانش بشری اضافه کنند. با کمال تأسف اغلب کلاسهای ما با کلاسهای دبیرستان تفاوت چندانی ندارند.

داشتن یا نداشتن درجهٔ دکتری، برای آموزش ریاضیات عمومی چندان مهم نیست. مهم این است که آموزش دهنده شخصی علاقه‌مند، پژوهشگر، و معلم باشد. در سالهای ۵۰، چند نفر از استادان ریاضی دانشگاه شیراز، با درجهٔ دکتری، ریاضیات عمومی را درس می‌دادند. با همهٔ تجربه و تخصصی که داشتند، باز هم ساعتها روی مطالب و مسائل و پرسشهای امتحان با هم مشورت می کردند. از این رو نتیجه کار بسیار خوب بود. بعداً تدریس ریاضیات عمومی، تحت راهنمایی استادان، به عهدهٔ چند نفر دانشجوی فوق لیسانس ریاضی آن دوره که امروز از استادان ریاضی هستند واگذار شد. این عده هم با علاقهٔ کافی کار می کردند و اغلب با هم دربارهٔ مسائل و مطالب تبادل نظر می نمودند. با اینکه درجهٔ دکتری یا حتی فوق لیسانس هم نداشتند، نتیجهٔ کار آنها هم کاملا مورد رضایت بود.

به نظر من اگر استادان پژوهشگر ما، ضمن تدریسِ ریاضیات دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد و دکتری، گاهی ریاضیات عمومی تدریس کنند، بهتر می توانند دِین خود را به فرهنگ ریاضی کشور ادا کنند. یقین داشته باشند که در این سطح مقدماتی هم می توان پژوهش کرد. مسلم بدانند که در بین مسائل خاکی، مسائل آسمانی هم یافت می شود. بدین طریق بهتر می توان در محیط دانشگاه جوانان را به نوآوری تشویق کرد.

۴. شیوهٔ آموزش ریاضیات عمومی

برای معلم نمی‌توان تکلیف تعیین کرد، زیرا معلمان از جمله انسانهایی هستند که در شیوهٔ کار خود قدری استقلال دارند. هر معلمی برحسب شخصیت، تجربیات، محیط و حرفهٔ خود به نحوی خاص در کلاس درس رفتار و تدریس می کند. همانندی در این مورد نه مقدوراست نه مقبول. با این حال برای هماهنگی در محیط آموزشی و به ویژه برای آموزش ریاضیات عمومی باید اصول و ضوابطی را دربارهٔ وقت شناسی، نظم، ادب و احترام، آمادگی درسی، انصاف در امتحان و نمره‌گذاری رعایت کرد.

چون دربارهٔ کلاس داری مطلب زیاد است، بهتر است صحبت را کوتاه کنم. تا آنجا که مربوط به آموزش ریاضی می شود خواندن کتابچهٔ زیر را به خصوص به معلمان تازه کار توصیه می نمایم.

Suggestion on the Teaching of College Mathematics, Mathematical Association of America, 1972

خوب، پیش از پایان سخن، باید بیفزایم که دنیای ریاضی برای دههٔ ۹۰ میلادی در زمینهٔ آموزش ریاضیات عمومی تدارك زیادی می بیند. مسلماً در قرن جدید تحولی بزرگ روی خواهد داد. امید است که ما هم بتوانیم با همکاری انجمن ریاضی ایران و تمام گروههای ریاضی کشور، با توجه به نیاز دانشگاهها، در این راه چاره اندیشی نماییم، و در دههٔ ۷۰ هجری شمسی ناظر دگرگونی و بهبود برنامه‌ها و آموزش ریاضیات عمومی کشورمان باشیم.

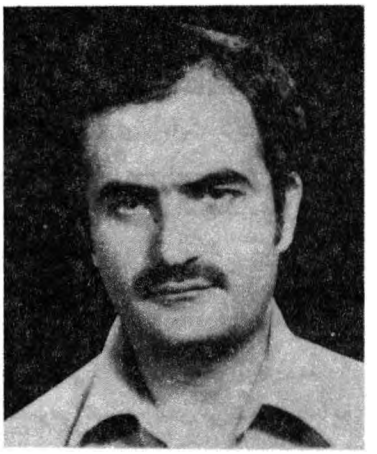
کامپیوتر و ریاضیات سال اول

تأثیرگذاری کامپیوتر در آموزش ریاضیات، حساب دیفرانسیل و انتگرال را نیز بی‌نصیب نگذاشته است. امروزه کتابهای متعددی در زمینهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال منتشر می‌شوند که «درس افزار»های کامپیوتری به همراه دارند. درس افزارهای کامپیوتری، برنامه‌هایی کامپیوتری هستند که به عنوان ابزار کمك آموزشی مورد استفاده قرار می گیرند.

هر «درس افزار» معمولا از دو بخش آموزش و آزمایش تشکیل شده است. در بخش آموزش به کمك گرافیك کامپیوتری، محاسبات عددی، و عملیات جبری امکان آموزش زنده‌ای فراهم می‌شود. و در بخش آزمایش، با سؤال و جواب و محاوره‌ای که کامپیوتر قادر به‌انجام آن است، متعلم وادار به تقلایی فکری می‌شود که حاصل آن، تکمیل و تکامل فراگرفته‌های اوست. این گونه درس افزارها درواقع مانند معلم خصوصی عمل می کنند و نحوهٔ استفاده از آنها به خواست متعلم بستگی دارد.

در کشور ما نیز در درسهای ریاضیات سال اول بایستی به استفاده از کامپیوتر توجه کافی شود. این امر از دو جهت حائز اهمیت است. یکی اینکه با توجه به طیف گسترده‌ای از دانشجویان که به دانشگاه راه می‌یابند و یکسان نبودن زمینهٔ تحصیلی آنها، درس افزارهای کامپیوتری امکانات ویژه‌ای فراهم می کنند که هر دانشجو متناسب با نیازهای خود می تواند از آنها استفاده کند و آموزش سریعتر و بهتری ببیند. دیگر اینکه، با توجه به اشاعهٔ نرم افزارهای آموزشی در خارج از کشور، ما نیز برای حفظ هویت علمی و فرهنگی خود باید تولید نرم‌افزار در داخل کشور را، به طوری که متناسب با سنتهای آموزشی ما باشد، در دستور کار قرار دهیم تا از امکانات و توانایی‌های کامپیوتر برای ارائهٔ آموزش سریعتر و بهتر بهره‌گیری کنیم.

عوامل ناخوشایندیِ تدریس ریاضیات عمومی



علی رجالی
[دانشگاه صنعتی اصفهان]

اینجانب از سال ۱۳۵۷ در دانشگاه شیراز و سپس دانشگاه اصفهان و صنعتی اصفهان تقریباً به‌طور مرتب ریاضیات عمومی تدریس کرده‌ام. آمار نشان می‌دهد که سال به سال وضعیت دانشجویان در این دروس بدتر می‌شود. از طرف دیگر به عنوان مدرس دروس احتمال و آمار و آنالیز ریاضی احساس کرده‌ام که اطلاعات دانشجویان از مطالب ریاضی عمومی بسیار اندك است. اینها همه شواهد دانشجویی مسأله است، ولی مدرسین دانشگاهی هم از تدریس این دروس بیزارند و بیشتر به فکر تدریس درسهای تخصصی و دوره‌های دکتری!!! هستند. (عدم استقبال بسیاری از استادان دانشگاهها از برگزاری همین سمینار بررسی ریاضیاتِ سالِ اول یکی از دلایل این مدعاست.)

ضمن استقبال از اقدام همکاران عزیز در دانشگاه صنعتی شریف تصمیم گرفتم به طور اختصار مواردی را که تجربه و مطالعات اینجانب در این زمینه نشان می‌دهد، برشمرم. امیدوارم با اظهارنظر همکاران و استادان محترم تصحیح و تکمیل گردد و همه با هم راههای علاج این مشکل را یافته و به حل آن کمك کنیم:

۱. اگرچه دروس ریاضی عمومی از مهمترین دروس رشته‌های علوم (مخصوصاً فیزیك و ریاضی) و همه رشته‌های فنی و مهندسی است و معمولا دانشجویانی که در این دروس موفق می‌شوند پایهٔ لازم جهت ادامهٔ تحصیل را به دست آورده‌اند، ولی در بسیاری از گروهها و دانشکده‌های ریاضی به تدریس آنها اهمیتی داده نمی‌شود و برخی از استادان از تدریس دروس عمومی اکراه دارند.

پیشنهاد می‌کنم دانشکده‌ها در تعیین مدرس دروس عمومی دقت و وسواس بیشتر داشته باشند و به این نکته هم توجه شود که اگر دانشجویان با پایهٔ قوی وارد دروس تخصصی شوند تدریس دروس تخصصی هم ساده‌تر خواهد شد. بحث و بررسی مسائل علمی مربوط به این دروس از اهم وظایف مدرسین این درس است.

۲. کیفیت ورودیهای این دروس بسیار ضعیف است. آمار نمرات ریاضی پذیرفته‌شدگان کنکور و شرکت کنندگان در امتحانات مربوط به ریاضی پایه در دانشگاه صنعتی اصفهان، سیر نزولی کیفیت دانشجویان را مشخص می‌کند.

پذیرش دانشجویان ضعیف و حضور آنها در کلاسهای این دروس که معمولا مشکلات اجرایی برگزاری امتحانات، تصحیح اوراق و اعلام نتایج و حتی تدریس را به همراه داشته از یك طرف، و برگزاری دوره‌های صوری تابستانه و دادن نمرات غیردقیق از طرف دیگر و عدم وجود قوانین مناسب برای حمایت از کنترل کیفیت و نبودن مکانیزمهای اجرایی لازم برای جلوگیری از تقلب، توهین به استادان و غیره که همه ساله مسائلی را در دانشگاهها به وجود آورده همه از عوامل ناخوشایندی تدریس ریاضی عمومی است.

چه باید کرد؟

وزارت فرهنگ و آموزش عالی بایستی به خود آید و دانشگاه را وسیله‌ای برای تشویق افراد قرار ندهد. پذیرش باید برحسب قدرت درك داوطلب از مطالب انجام شود. قوانین محکم برای حفظ حرمت دانشگاهها و جلسات امتحانی باید تنظیم گردد تا مدرسین بتوانند کیفیتها را به طور دقیق کنترل کنند. فکر می‌کنم زمان ایجاب می‌کند که دانشگاهها بازسازی شوند.

۳. مسألهٔ دیگر تفاوت فاحش بین استعداد و علاقه و اطلاعات دانشجویان در یك کلاس درس است. اکنون به سبب کتابهای متعدد فارسی و برگزاری المپیادهای ریاضی، بسیاری از دانش‌آموزان مطالب ریاضی عمومی را قبل از ورود به دانشگاه می‌دانند. اینها پس از شرکت در کلاس احساس می‌کنند که سطح درس پایین است. (و البته اگر معلم بخواهد بر طبق نظر آنها تدریس کند، بقیه دچار مشکل خواهند بود.)

در این مورد پیشنهاد می‌کنم در شروع دروس عمومی، امتحانی برگزار گردد و براساس آن دانشجویان به گروههای مختلف تقسیم شوند، برخی در همان درس ولی در گروههای خاص با کیفیت بالاتر شرکت کرده و یا حتی از گرفتن درس معاف شوند، و در کارنامه ضریب نوع درس هم به نوعی منظور گردد.

۴. همان طوری که اشاره شد، اگرچه این دروس از مهمترین دروس دانشگاهی هستند ولی نه تنها دانشکده‌های ریاضی و استادان به آنها توجهی ندارند، دانشگاهها و وزارت فرهنگ هم با آوردن لفظ پایه (به مفهوم غلط آن) از ارزش آنها کاسته‌اند. این ضربه که در اثر ضرایب مخصوص دروس پایه در طرح مخرب به اصطلاح تمام وقت!!! منظور شده بود بایستی در این بازسازی جبران شود.

۵. حجم مطالب این دروس بسیار زیاد است و این باعث شده که گاهی برای مطالب پر اهمیت فرصت کافی نباشد. لذا بررسی حجم مطالب این دروس ضروری است و پیشنهاد می‌کنم کمیته‌ای از این سمینار زیر نظر انجمن ریاضی ایران به این امر رسیدگی و پیشنهادی را ارائه کند.

۶. عدم توجه مدرسین به مثالهای ساده که دروس را قابل فهم می‌کنند و گاهی برگزاری امتحانات نامناسب و حتی تدریس مفاهیم و روشهای آنالیز ریاضی در این دروس مشکلاتی را به وجود می‌آورد. در این مورد هم توصیه می‌شود کمیتهٔ بند پنج یك برنامه‌ریزی اصولی ارائه کند.

۷. کم بودن جنبه‌های کاربردی و تجسمی و عدم استفاده از کتب جدید حساب دیفرانسیل و انتگرال مخصوصاً برای دانشجویان رشته‌های فیزیك و فنی و مهندسی، عدم علاقهٔ دانشجویان را به دنبال دارد. کمیتهٔ بند پنج در این زمینه هم بجاست به چاره‌اندیشی بپردازد.

و اما از همه مهمتر:

۸. نبودن پایه‌های قوی فکری و ریاضی در دانشجویان ورودی که حاصل شیوهٔ تدریس ریاضی در دبیرستانهاست، بزرگترین عامل عدم موفقیت دانش‌آموزان و در نتیجه عدم علاقه مدرسین است. یادآوری می‌کنم که زمانی که ما وارد دانشگاه می‌شدیم اصولا مفاهیم به‌اصطلاح ریاضیات جدید (نظریهٔ مجموعه‌ها و غیره) را نشنیده بودیم ولی در

دبیرستان به دلیل داشتن دبیران خوب ریاضی و تکیه روی مسائل فکری، قدرت اندیشیدن به ریاضی را داشتیم. من فراموش نمی‌کنم که در سال اول ورود به دانشگاه شیراز، ریاضی را از کتاب آپوستل به زبان انگلیسی می‌خواندیم و سرانجام موفق هم بودیم.

پس مشکل اصلی را در دبیرستانها باید جستجو کرد. به همین دلیل ما در اصفهان در خدمت دوستان، مرکزی را تشکیل دادیم و به مطالعه پرداختیم. مسائلی از قبیل افت ریاضی، عدم علاقه به ریاضی و ضعیف بودن بینش دانشجویان و دانش‌آموزان در مسائل ریاضی همه ریشه در مشکلات آموزش ریاضی در دبیرستانها دارند. نتیجهٔ مطالعات ما نشان می‌دهد: کم بودن معلمان مسلط و معتقد به روشهای جدید، کم بها دادن به دروس فکری ریاضی، انباشتن مفاهیم ریاضی مجرد در حافظه دانش‌آموزان، عدم برنامه‌ریزی برای تربیت و آشناسازی دبیران ریاضی مخصوصاً در دورهٔ راهنمایی همه باعث عدم آگاهی و درك صحیح ریاضی می‌شوند.

ما نمی‌دانستیم مجموعه چیست ولی با بیان مفهوم آن در دانشگاه و با کمك قدرت درك و تفکر ریاضی که در اثر مطالعه، حل مسأله و غیره در ما به وجود آمده بود آن را حس می‌کردیم. اما دانش‌آموز فعلی، یك بار در دورهٔ راهنمایی مجموعه را به طور ناقص و حتی غلط می‌خواند، بعد در دبیرستان باز غلط به او گفته می‌شود و یك سری مفاهیم مجرد در مغز خود جای می‌دهد، به دلیل آماده شدن برای کنکور هم از حل مسأله اکراه دارد، پس بینش ریاضی هم به دست نمی‌آورد. وقتی به دانشگاه می‌آید، ابتدا که در کلاسهای ریاضی عمومی حاضر می‌شود هرچه مدرس می‌گوید فکر می‌کند می‌داند، چون اسامی آنها را شنیده است. حد را می‌داند، پیوستگی را، مشتق را، و... اما واقعاً نمی‌داند. ابتدا فکر می‌کند می‌داند، لذا توجه نمی‌کند، مطالعه نمی‌کند. حتی گاهی از شرکت در کلاسهای ریاضی عمومی هم به دلیل تکرار مطالب خسته می‌شود تا امتحان وسط ترم فرا رسد، آنگاه می‌فهمد که هیچ نمی‌داند. که دیگر دیر شده است.

خوب باید چه کرد؟

۱.۸. ما اگر بدانیم نقاط ضعف دانشجوی ما چیست شاید بهتر بتوانیم به او درس بدهیم. لذا پیشنهاد سال ۱۳۵۸ خود را باز تکرار می‌کنم: ما باید خود را با برنامه‌های تدریس ریاضی در دبیرستان و مطالبی که در آن سطح تدریس می‌شود آشنا سازیم.

۲.۸. برنامه‌های دبیرستانی در زمان به اصطلاح انقلاب آموزشی تغییر کرد ولی بدون آمادگی لازم؛ این خطا نبایستی تکرار شود. گویا اخیراً کمیته‌ای در وزارت آموزش و پرورش در صدد تغییر برنامه‌هاست، آیا آمادگیهای لازم فراهم آمده است؟ آیا قصد دارید به طور آزمایشی برنامه‌ها را اجرا کنید؟ آیا معلم لازم را تربیت کرده‌اید؟ آیا با معلمان تا آن حد در تماس بوده‌اید که اعتقاد آنها را به تغییر برنامه‌ها جلب نمایید؟

۳.۸. معلمان، مخصوصاً معلمان ریاضی باید از میان نخبگان انتخاب شوند. آیا اقداماتی در این جهت شده است؟ آیا ابزارهای تشویق برای ایجاد جذابیت در شغل دبیری از نظر اجتماعی و اقتصادی به کار گرفته شده‌اند؟ آموزش و پرورش لازم است به این مسأله بیندیشد. (و البته ما برحسب وظیفه و احساس مسؤولیت پیشنهادهایی ارائه نموده‌ایم.)

۴.۸. اطلاعات معلمان باید تازه شود. چرا طرح آموزش مستمر که حاصل تلاش چند ساله عده‌ای از دانشگاهیان و دبیران است در دفتر آموزشِ ضمنِ خدمتِ وزارت آموزش و پرورش بایگانی شده است؟ در این مورد ما چه برنامه‌هایی داریم؟

۵.۸. حجم مطالب ریاضی دبیرستانی بسیار زیاد است؛ شاید لازم نباشد بسیاری از مفاهیم در دبیرستانها تدریس شوند؛ باید به مسائل فکری ریاضی بیشتر توجه نمود و از انباشتن حافظهٔ دانش‌آموزان اجتناب کرد. امیدوارم کمیتهٔ برنامه‌ریزی وزارت آموزش و پرورش در این زمینه به طور جدی عمل کند.

۶.۸. استفاده از کامپیوتر در تدریس مفاهیم ریاضی ضروری است. لازم است کمیتهٔ برنامه‌ریزیِ آموزشِ کامپیوترِ وزارت آموزش و پرورش در این زمینه و در مورد ساختن بسته‌های نرم‌افزاری مورد نیاز اندیشه نماید.

۷.۸. با خودداری از پذیرش دانشجویانی که شرایط علمی لازم را ندارند، و اضافه نمودن سؤالات تشریحی در کنکورها، می‌توان انگیزهٔ لازم را در دانش‌آموزان برای مطالعهٔ بیشتر و دقیقتر مطالب ریاضی به‌وجود آورد.

امیدوارم این سمینار و نتایج حاصل از آن بتواند در بهبود وضعیت آموزش دروس عمومی ریاضی مؤثر باشد.

درس ویژه برای ریاضیات سال اول

هر ساله درس ریاضی عمومی با طیف گسترده‌ای از دانشجویان با تواناییها و علائق گوناگون روبروست. وجود الگوهای متفاوت در ریاضیات دبیرستانی و دانشگاهی باعث ناهماهنگی بسیار در آموزش ریاضی عمومی می‌شود و بالاخره دسترسی عده‌ای از دانش‌آموزان برجستهٔ دبیرستان به متنهای دانشگاهی سبب می‌شود که درس ریاضی عمومی در نظر تعدادی از دانشجویان سال اول کسل‌کننده و بیهوده جلوه کند. عوامل فوق به نوبهٔ خود به بحثی پیرامون حذف، ابقا، یا ترمیم درس ریاضی عمومی انجامیده است. برگزاری کلاسهای ویژه راه‌حلی است عملیتر که دست‌کم مشکل دانشجویان برجسته‌تر یا علاقه‌مندتر را برطرف می‌سازد. این سیستم که سالهاست در دانشگاههای آمریکایی مورد استفاده است بر مبنای برگزاری کلاسی با متن درسی پیشرفته‌تر و غالباً با جمعیت کمتر استوار است که در آن، انتخاب موضوعات بیشتر به سلیقهٔ مدرس بستگی دارد. برحسب این سلیقه‌ها، این درس ممکن است علاوه بر حساب دیفرانسیل و انتگرال شامل برخی از موضوعات اضافی همچون جبر خطی و چند خطی، معادلات دیفرانسیل عادی، توابع متغیر مختلط، هندسهٔ دیفرانسیل مقدماتی، نظریهٔ انتگرالگیری، ریاضیات گسسته و... باشد.

در برگزاری این کلاس باید توجه داشت که این دوره حتی‌الامکان نباید جانشین هیچ درس رسمی در موضوعات فوق شود. بدین ترتیب، چنین دوره‌ای می‌تواند حداقل برای دانشجویان رشته‌های حاشیهٔ ریاضی نمایانگر تصویر وسیعتری از ریاضیات امروز باشد.

از جمله متنهای قابل استفاده برای چنین درسی عبارت‌اند از:

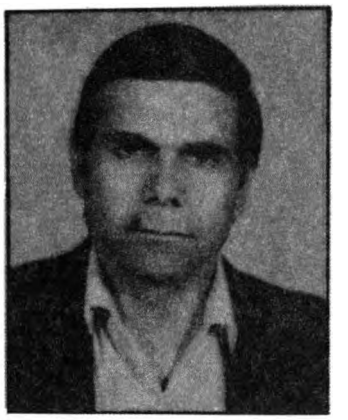
Calculus, M. Spivak
Primer of Modern Analysis, R. M. Smith
Advanced Calculus, Loomis & Sternberg

که همگی در دانشگاههای آمریکایی در چنین دوره‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند، و همچنین کتاب

Lectures on Geometry, Postnikov

که مؤلفش آن را در دانشگاه مسکو برای دانشجویان سال اول به کار گرفته و آنان را با مباحث زنده‌ای از هندسهٔ مدرن همچون هندسهٔ تصویری و هندسهٔ دیفرانسیل آشنا ساخته است.

ریاضیات عمومی برای رشتهٔ ریاضی بی‌معناست



احمد شفیعی ده آباد
[دانشگاه تهران]

مطالبی که من می‌خواهم اینجا در موردشان صحبت کنم، به ترتیب اینها هستند:

۱. چرا ریاضیات عمومی؟
۲. فرایند گذر از متناهی به بینهایت کوچك و برعکس، به عنوان جوهر حساب دیفرانسیل و انتگرال
۳. اعتبار حساب دیفرانسیل و انتگرال
۴. مفاهیم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و آگاهی ذاتی انسان
۵. زمان و نحوهٔ ارائهٔ مفاهیم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

البته بحث من در مورد اینها خیلی مختصر است و چند کلمه‌ای بیشتر اشاره نمی‌کنم.

قبل از هر چیز باید بگویم که من تا به حال نه ریاضی عمومی درس داده‌ام و نه تصمیم دارم درس بدهم. حرفهایی که می‌زنم بیشتر شرح تجربهٔ زمان دانشجویی من در این درس و مشاهداتی است که بعداً داشته‌ام و دیده‌ام دانشجویانی که درس ریاضیات عمومی را گذرانده و درسهای دیگری ـ به‌خصوص هندسه ـ را گرفته‌اند، چه نواقصی داشته‌اند.

در مورد مطلب اول، واقعیتش این است که من هیچ نمی‌دانم چیزی به نام ریاضیات عمومی اصلا کی به‌وجود آمده و این اصطلاح چه زمانی وضع شده و اولین کتابی که در این زمینه نوشته شده هدفش چه بوده و چه مطالبی دربرداشته است. اگر سیستم آموزشی طوری باشد که فردی که وارد دانشگاه می‌شود رشتهٔ اختصاصیش تا یکی دو سال معین نشود، درسی به عنوان ریاضیات عمومی قطعاً باید جزء دروس باشد، همان طوری که درس فیزیك عمومی باید باشد و شاید درسهای عمومی دیگری هم باید باشد. ما هم اگر وضعمان در اینجا به این صورت بود ـ که فکر می‌کنم خیلی هم خوب بود ـ یعنی دانشجو در یکی دو سال اول رشته‌اش مشخص نبود و بعد انتخاب رشته می‌کرد، نه نیازی به این بود که ما در ریاضی شش شاخه باز کنیم ـ چون بعد از دو سال می‌فهمید کدام رشته می‌خواهد برود و می‌رفت ـ و نه احتیاج بود به منظور جلب مشتری برای رشتهٔ ریاضی دست به دامن دانشجویان سایر رشته‌ها شویم. و نه اینکه مجبور بودیم درسهایی توی برنامه بگنجانیم که اصلا وجودشان در رشتهٔ ریاضی جای سؤال دارد و شاید خیلی فواید دیگر هم داشت. ولی الآن که نظام آموزشی به این صورت نیست به نظر من جا دارد سؤال شود که اصلا ریاضیات عمومی وجودش در شاخه ریاضی برای چیست؟ چرا این درس توی برنامه گذاشته شده؟ آن هم درسی که ۱۲ واحد به خود اختصاص داده است؟ تنها توجیهی که توانستم برای این مطلب پیدا کنم این است که گفته می‌شود ریاضیات عمومی دو منظور را برآورده می‌کند. اول اینکه ما درسهایی دیگر داریم که دانشجوی ریاضی مجبور است آنها را بگذراند ولی این دروس از نظر برنامه‌ریزی به صورتی است که مقدم است بر آنالیز. یعنی از نظر زمانی قبل از آنالیز ارائه می‌شود. خوب، معلوم است که این اشکال را می‌شود برطرف کرد، کافی است برنامه را تغییر دهید تا اشکال برطرف شود. دوم اینکه گفته می‌شود دانش‌آموزی که از دبیرستان آمده آمادگی این را ندارد که مفاهیم مجرد را درك کند و استدلالات ریاضی (آنالیزی) برایش قابل هضم نیست. ولی به نظر من عیب از جای دیگر است. اگر دبیرستان وظیفهٔ خودش را انجام نداده، تاوانش را دانشگاه نباید بدهد. اگر واقعاً این تقسیم‌بندی مقاطع تحصیلی ـ دورهٔ ابتدایی، راهنمایی، متوسطه، لیسانس، فوق لیسانس ـ بر طبق اصول و با در نظر گرفتن هدفها و نرمهایی انجام شده، پس دانش‌آموزی که دبیرستان را تمام کرده بایستی به آن مرحله‌ای رسیده باشد که بتواند مفاهیم مجرد را کاملا درك کند. اگر به چنین مرحله‌ای نرسیده نقص از دبیرستان است. دانشگاه نباید برنامهٔ خودش را به خاطر آن عقب بیندازد و به صورت دیگری ارائه کند.

قبلا گفته‌ام که ریاضیات عمومی باید در آنالیز ادغام شود. فعلا این منطقیترین کاری است که می‌شود کرد. بعضی از دلایلی که می‌توانم در این مورد ارائه کنم به این ترتیب است. اولا مسألهٔ عقب‌افتادگی ما هست. ما همه خودمان معترف هستیم که کشورهای دیگر در ریاضی به مراتب از ما جلوتر هستند و از طرف دیگر هدف ما این است که نه تنها به آنها برسیم بلکه از آنها جلو هم بیفتیم. خوب، طبیعی است که فردی که از قافله‌ای عقب می‌افتد ـ شب می‌خوابد و صبح بلند می‌شود و می‌بیند که قافله خیلی راه رفته است ـ اگر به همان عادات و رفتار سابق خودش پابند بماند، نیم ساعت از وقتش را صرف صبحانه کند، یك ساعت صرف ناهار، و... هرگز به قافله نمی‌رسد. او مجبور است از اینها بزند و با سرعت خیلی زیادی جلو برود. ما اگر بخواهیم از نظر علمی به پای کشورهای پیشرفته برسیم، مجبوریم کاری بکنیم که اگر دانشجویان آنها در سنین ۲۳ـ۲۴ سالگی به مرحلهٔ تحقیق می‌رسند، دانشجوی ما در سنین ۲۰ـ۲۱ سالگی به مرحلهٔ تحقیق برسد. چون در این سنین هم آمادگی و توانایی بیشتری دارد، هم اینکه در این صورت فرصت بیشتری برای کار کردن خواهد داشت. به همین دلیل چندین درس، نه تنها ریاضیات عمومی بلکه خیلی از درسهای دیگر دورهٔ لیسانس، باید حذف شود یا در درسهای دیگر ادغام شود و به جای آنها درسهای دیگری بیاید.

دلیل دیگری که دارم، عدم تعادلی است که بین درسها وجود دارد. اگر برنامه را نگاه کنید، سه درس ریاضیات عمومی هست که عملا به معنی سه تا آنالیز است. حالا اگر در جایی از کتاب ریاضی عمومی اسم جبر خطی آمده یا خمی رسم شده و یا انحنایی حساب شده یا اسم رویه آمده، اینها نه هندسهٔ دیفرانسیل است و نه جبر؛ فقط مطالبی است که می‌خواهد از آنها برای ارائهٔ مفاهیم آنالیز استفاده کند. سه تا ریاضیات عمومی، سه تا آنالیز، یك توابع مختلط، یك معادلات دیفرانسیل، یك معادلات با مشتقات جزئی، و توپولوژی هم که عملا (به این صورتی که ارائه می‌شود) جزء آنالیز به حساب می‌آید. پس در دورهٔ لیسانس ریاضی ده تا درس آنالیز داریم. ولی تعداد درسهای هندسه دو تا بیشتر نیست: یکی مبانی هندسه که به نظر من نبودنش به مراتب بهتر از بودنش است چون درسی است بی‌ریشه، نه به دروس قبل مربوط می‌شود نه به دروس بعد. دیگر درس هندسهٔ دیفرانسیل است که در چهار واحد ارائه می‌شود ولی تا جایی که من اطلاع دارم تقریباً

همهٔ دانشگاهها معترف هستند که در هیچ ترمی این درس به طور کامل مطابق برنامه ارائه نشده. واقعاً هم نمی‌شود ارائه کرد. تازه اگر بشود آن را به طور کامل در یك ترم عرضه کرد مگر از یك درس چهار واحدی چیزی دستگیر دانشجو می‌شود؟ به نظر می‌رسد که تمام کوششها در برنامه‌ریزی در این جهت بوده که درس آنالیز رو بیاید و هندسه عقب رانده شود. و این در حالی است که ما در دورهٔ فوق لیسانس و دورهٔ دکتری همان طور که شاخه‌ای به نام جبر و شاخه‌ای به نام آنالیز داریم، شاخه‌ای هم به نام هندسه ـ توپولوژی داریم. وقتی که در دورهٔ لیسانس تقریباً از هندسه اثری نیست، وجود شاخهٔ هندسه ـ توپولوژی در دوره‌های فوق لیسانس و دکتری در کنار شاخه‌های جبر و آنالیز چگونه توجیه می‌شود؟

مطلب دیگری که می‌خواستم بگویم این است که بعضی از درسهای دورهٔ دکتری ریاضی همان طور که ملاحظه کرده‌اید محل تلاقی تعداد خیلی زیادی از نظریه‌های ریاضی است و دانشجو برای اینکه به سطح تحقیق برسد مجبور است مطالب گوناگون زیادی را بخواند. اگر بخواهیم تمام این درسها را در دورهٔ دکتری بگنجانیم عملا غیرممکن است. واقعاً دانشجویی نیست که بتواند این همه مطلب را در مدتی کم خوب یاد بگیرد. راهی که به نظر من می‌رسد، این است که مقدار زیادی از این درسها از دورهٔ دکتری به دورهٔ فوق لیسانس برود و نیز بعضی از درسهای دورهٔ فوق لیسانس به دورهٔ لیسانس برود و بعد تعدادی از درسهای لیسانس مانند همین ریاضیات عمومی و یا مبانی ریاضی و یا مبانی هندسه و امثالهم به کلی حذف بشود یا در دروس دیگر ادغام شده و یا با تغییری که در آنها داده می‌شود به دبیرستان برود تا جا برای مطالب مناسبتری که باید خوانده شود باز شود.

حالا می‌پردازم به محتوای حساب دیفرانسیل و انتگرال. البته من به حساب دیفرانسیل و انتگرال نه به عنوان ریاضیات عمومی بلکه به عنوان قسمتی از آنالیز نگاه می‌کنم چون ریاضیات عمومی به نظر من واقعاً برای رشتهٔ ریاضی بی‌معناست. در هر حال، ببینیم محتوای حساب دیفرانسیل و انتگرال چیست؟ حساب دیفرانسیل و انتگرال عملا جز یك تکنیك چیز دیگری نیست، یعنی این تکنیك که برای حل یك مسأله دو مرحله را طی کنیم: اول، گذر از دنیای متناهی به دنیای بینهایت کوچکها و انجام اعمالی در آنجا و دوم، برگشت به جهان متناهی و به‌دست آوردن نتیجه. عمل اول به وسیلهٔ دیفرانسیلگیری انجام می‌شود و عمل دوم به وسیلهٔ انتگرالگیری. در تمام مواردی که از حساب دیفرانسیل و انتگرال در حل مسائل استفاده می‌شود همین فرایند به چشم می‌خورد و کل قدرت حساب دیفرانسیل و انتگرال هم در همین فرایند نهفته است. مسألهٔ اساسی که به اعتبار حساب دیفرانسیل مربوط می‌شود، درست همین جاست. برای حل یك مسأله آن را به مسأله‌ای در مورد بینهایت کوچکها تبدیل می‌کنیم و جواب این مسأله را می‌یابیم و بعد با استفاده از انتگرالگیری جواب مسألهٔ اول را به دست می‌آوریم. چه دلیلی داریم که واقعاً نتیجه‌ای که به دست می‌آوریم درست است؟ این مطلب به هیچ وجه بدیهی نیست. به عنوان مثال، اگر کره‌ای به شعاع ۳ را پر از آب کنیم و بعد بیاییم این آب را در استوانه‌ای که دایرهٔ قاعدهٔ آن هم شعاعش ۳ باشد بریزیم، چه دلیلی داریم که واقعاً ارتفاع آب استوانه ۴ است یعنی همان چیزی که حساب دیفرانسیل می‌گوید؛ و چگونه می‌توانیم این مطلب را ثابت کنیم؟ مثالهای ساده‌تری نیز در این مورد وجود دارد. مثلا طول قوس، از کجا معلوم که واقعاً طول قوس باشد؟ نخی به طول یك متر را به شکل دایره درآورید. به وسیلهٔ حساب دیفرانسیل محیط دایره را به دست آورید. از کجا معلوم همان یك متر به دست آید؟ منظورم از این مثالها این نیست که حساب دیفرانسیل اعتباری ندارد بلکه می‌خواهم بگویم نه تنها در کتابهای درسی در هیچ جا در این موارد توضیح داده نمی‌شود بلکه آموزش به گونه‌ای است که دانشجو به فکر این مسائل هم نمی‌افتد.

اگر یك کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال را ورق بزنید می‌بینید که قسمت زیادی از مفاهیم آن را کسی که حتی درس نخوانده می‌فهمد ولی اغلب این مفاهیم طوری بیان می‌شود که دانشجویی که چند سال درس خوانده نمی‌فهمد که اینها همان چیزهایی هستند که از قبل می‌دانسته است. مثال خیلی سادهٔ آن، مفهوم پیوستگی است. این مفهوم را همه می‌فهمند. فرض کنیم از دو شیر آب، دارد آب می‌ریزد، از یکی به طور پیوسته و از دیگری چکه‌چکه. به هر کس بگویید افزایش آب موجود در ظرفِ زیرِ شیر اول تابعی پیوسته از زمان است و در ظرفِ زیرِ شیر دوم تابعی ناپیوسته از زمان، بلافاصله می‌فهمد. ولی در کتابهای درسی، پیوستگی را به گونه‌ای بیان می‌کنند که کسی متوجه نمی‌شود که این همان مفهوم آشناست. مگر تعریف پیوستگی از کجا آمده است؟ از آگاهی ذاتی خود ما و از مشاهدهٔ اختلاف بین خم یك تکه و دو تکه، که آن را به صورت ریاضی و با دستور δ-ϵ بیان می‌کنیم. در اینجاست که مثل موارد مشابه سر و کلهٔ موجوداتی پیدا می‌شود که آدم هرگز انتظار نداشته است. عده‌ای این امر را به حساب تکامل می‌گذارند و عده‌ای به حساب نقص انسان. مثلا توابعی پیدا می‌شوند که همه جا پیوسته‌اند ولی قابل رسم نیستند. یا مفهوم مساحت را در نظر بگیرید. در حساب دیفرانسیل، مساحت بدون اینکه تعریف شود، حساب می‌شود. حجم نیز به همین صورت. ولی مساحت چیزی است که هر کسی آن را می‌فهمد. حالا بیان ریاضی آن را نداند مهم نیست. اگر مساحت دایرهٔ به شعاع r را این طور تعریف کنیم: «استوانه‌ای در نظر بگیرید که شعاع قاعده‌اش r باشد. آن را پر از آب کنید و سپس آب استوانه را توی یك مکعب مستطیل بریزید که مساحت قاعده‌اش یك باشد؛ ارتفاع آب هرچه باشد به آن می‌گویند مساحت دایره»، هر کسی منظور را می‌فهمد و به مفهوم پی می‌برد. چیزی که طبیعی به نظر می‌آید این است که برای معرفی موجودات ناشناخته باید از موجودات شناخته شده کمك بگیریم ولی در ریاضی عملا عکس این جریان روی می‌دهد. وقتی خط یا نقطه یا سطح را معرفی می‌کنیم هدف اصلی ما شناختن حجم است. حجم برای ما مهم است و نقطه که برای ما وجود خارجی ندارد قراردادی است که کرده‌ایم فقط برای اینکه بتوانیم مسائلمان را حل کنیم ولی تمام برنامه‌ریزی ما طوری است که وانمود می‌کنیم این اطلاع در مورد نقطه، خط و سطح است که به‌ما اطلاع در مورد حجم را می‌دهد. فکر می‌کنم این راه، راه غلطی است.

مطلب دیگری که می‌خواستم در موردش صحبت کنم، زمان و نحوهٔ ارائهٔ مفاهیم است. همان طور که اشاره کردم مثلا مفهومی مثل پیوستگی یا مساحت یا حجم را که در حساب دیفرانسیل می‌آید فکر کنم بچهٔ دبستانی هم بفهمد و خیلی ساده می‌شود این مفاهیم را در دبیرستان گفت. برای مفاهیمی مانند پیوستگی، طول، مساحت، و حجم احتیاجی نیست که فرمولهای آنها را هم بگوییم. مثلا لزومی ندارد در دبیرستان بگوییم منظور از پیوستگی یعنی همان که در دستور δ-ϵ آمده. به آنها کاری نداریم. تمام سعی ما در دوران دبستان و دبیرستان باید در این جهت باشد که دانش‌آموز این اعتماد به نفس و این بینش را پیدا کند که مفاهیم اساسی ریاضیات همان چیزهایی است که می‌داند، و بر آنها مسلط شود. و اگر جایی اشکالی یا ابهامی برایش وجود دارد، آن ایراد و اشکال برطرف شود.

ولی در مرحلهٔ دانشگاه به نظر من مفاهیم باید کاملا به صورت مجرد و به زبان ریاضی ارائه شود. خیلیها ایراد گرفته‌اند که من گفته‌ام فضای متریك

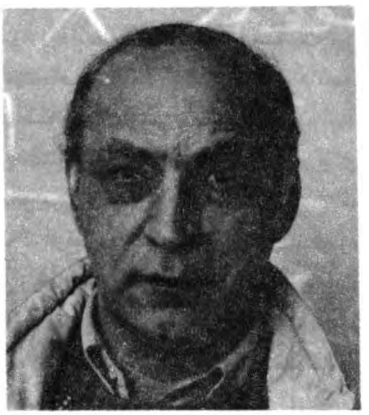
را باید در دبستان گفت. نمی‌گویم در دبستان، ولی در دبیرستان خیلی ساده می‌شود فضای متریك را معرفی کرد. قبول کنید که درك فضای متریك برای دانش‌آموز به مراتب ساده‌تر از درك مفهوم حد است. حد مفهومی تصنعی است. قراردادی است. آن را ساخته‌اند تا مفهوم پیوستگی را که طبیعی بوده، مسائلش را به روش ساده‌تری حل کنند. ولی مفهوم متریك طبیعی است. به هر کس بگویید فاصلهٔ دو نقطه، منظور را می‌فهمد. به کودك بگویید «فاصلهٔ دو نقطه روی کره به این صورت است که یك نخ را دست بگیرید، یك سرش را این نقطه و یك سرش را نقطهٔ دیگر بگذارید به طوری که نخ کشیده شده باشد. طول قسمتی از نخ را که بین این دو نقطه قرار دارد فاصلهٔ دو نقطه روی کره می‌نامیم». بلافاصله می‌فهمد و هیچ احتیاجی ندارد که ما فرمولهای پیچیده بنویسیم. فضای متریك را خیلی خوب در دبیرستان می‌فهمند. بعضی از قضایایی را هم که در ارتباط با آن است به خوبی می‌فهمند و فکر می‌کنم خیلی از مطالب توپولوژیك را هم می‌توانند بفهمند. آن طور که کارهای «پیاژه» نشان می‌دهد، کودك ابتدا مفاهیم توپولوژیك را درك می‌کند و سپس فضای تصویری و فضای متریك را. مفهوم درون و بیرون را بچه خیلی زود متوجه می‌شود. فضای متریك را هم به همین صورت به سادگی می‌تواند بفهمد. این مطلبی که در ریاضیات عمومی وجود دارد که سعی می‌کنند مفاهیم اساسی را براساس حد تعریف کنند به نظرم راه غلطی است. چیزی که یادم می‌آید این است که در دورهٔ لیسانس ـ سال اول ـ بودم و حد برای ما مسأله‌ای شده بود. با تمام استادها در میان گذاشتیم هیچ یك جواب قانع‌کننده‌ای نداد. آخر از دکتر هشترودی پرسیدم، گفت: باشد زمانی که توپولوژی را خواندی، می‌فهمی. این مفهوم به هیچ وجه برای ما جا نیفتاده بود. در حالی که به نظر من گفتن مفهوم حد لزومی ندارد. چرا مطالب را براساس همان مفهوم پیوستگی بنا نکنیم؟ حتماً کسانی هستند که کتاب «دیودونه» را نگاه کرده‌اند. «دیودونه» اصلا حد را براساس پیوستگی تعریف می‌کند. در بعضی کاربردهایی که حد در مسألهٔ پیوستگی دارد و در تمام مواردی که پای حد به وسط می‌آید ما می‌توانیم به جایش مفهوم پیوستگی را به کار ببریم و هیچ کجا پای این مفهومی را که به این سادگی قابل فهم نیست برای دانشجو و دانش‌آموز به میان نکشیم.

مسألهٔ دیگری که می‌خواستم در موردش صحبت کنم، مسألهٔ خود دانشجویان است که صبح هم اشاره شد که دانشجویان ضعیف هستند. چیزی که به نظر من می‌رسد، این است که اگر نظام آموزشی در دبیرستان و دانشگاه درست باشد هیچ وقت نباید این مسأله به وجود بیاید. اصلا کنکور برگزار کردن به این معنی نیست که ما می‌خواهیم بین تمام فارغ‌التحصیلان دبیرستانها، آنهایی را که شایستگی ورود به دانشگاه را دارند انتخاب کنیم. بلکه منظور اصلی این است که چون امکانات دانشگاه کم است، بین تمام کسانی که شایستگی ورود به دانشگاه را دارند بهترینها را انتخاب کنیم چون مسلماً بهترینها امکانات کمتری لازم دارند. و در نتیجه دانشگاه می‌تواند در خدمت تعداد بیشتری باشد و الاّ هیچ معنی ندارد که بگوییم یك نفر دیپلم گرفته ولی لیاقت ورود به دانشگاه را ندارد. مثل این است که بگوییم یك نفر کلاس سوم را تمام کرده ولی لیاقت رفتن به کلاس چهارم را ندارد. ورود دانشجویان سهمیه‌ای به دانشگاه فرصت مناسبی بود که متوجه نواقص و عدم کارایی دبیرستان در وظایف محوله‌اش شویم.

نکتهٔ دیگر اینکه می‌خواهیم هرچه زودتر دانشجو را برسانیم به مرحلهٔ تحقیق و برای این کار نمی‌توانیم کاملا پایبند برنامه‌های موجود باشیم. اگر واقعاً دانشجو لیاقتی از خود نشان داد و مشخص شد که زودتر از زمان عادی به مرحلهٔ تحقیق می‌رسد باید تمام سعی ما این باشد که درسهای جنبی را حذف کرده و برسانیمش به مرحله‌ای که در شاخه‌ای خاص تحقیق کند. مطالب جنبی را بعداً هم می‌تواند بخواند. فکر می‌کنم اگر کسی در یك شاخهٔ ریاضی عمیق شود، زمانی که به یك مرحلهٔ معین برسد دیگر خواندن مطالب دیگر برایش چندان مشکل نیست. چون این مطالب همه با هم ارتباط دارند. کسی که جبر خوانده و در جبر عمیق شده باشد، وقتی که مطلبی را در آنالیز می‌خواند، با وجود اختلاف ظاهری استدلالها با هم، می‌تواند کم و بیش مطالب را متوجه شود. همچنین نباید خودمان را مقید کنیم که برنامه‌های درسی ما در دانشگاههای مختلف یکسان باشد. حتی به نظر من یکسان بودن برنامه‌ها طبیعی هم نیست.

با توجه به اینکه تعداد دانشجویانی که در یك دانشگاه پذیرفته می‌شوند، زیاد است، چه بهتر آنکه در کلاسهای مختلفی که تشکیل می‌شود سعی شود افرادی که از نظر سطح معلومات در یك ردیف هستند، با هم در یك کلاس قرار بگیرند و به جای آنکه یك کتاب به همهٔ آنها تدریس شود، کتابهای مختلف ارائه شود. و در این صورت تجربهٔ تازه‌ای نیز به دست می‌آید. آخر این به قول شما ریاضیات عمومی! که تنها به این شکل بیان نمی‌شود. همین حساب دیفرانسیل و انتگرال در جاهای دیگر به صورتهای دیگر گفته می‌شود. در بعضی از جاها دانشجو از همان سالهای اوّل دورهٔ لیسانس با فضای باناخ آشنا می‌شود. همان توابع یك متغیره را توابع روی R می‌گیرد با یك مقدار در فضای باناخ. گذشته از آن سبك بیان مطالب به صورتی است که من فکر می‌کنم این کتابهای ریاضیات عمومی که الآن تدریس می‌شود در مقام مقایسه با آن کتابها مانند کتاب «گورسا»ست نسبت به کتاب «دیودونه». روش آنها به کلی فرق دارد، مثلا در بعضی موارد به طور واضح دیده می‌شود که این کتابهای معمولی نقص دارد. مثال خیلی ساده‌اش تعریف انتگرال ریمان است. در همین کتابهای ریاضی عمومی، انتگرال ریمان را به آن صورتی که تعریف می‌کنند نمی‌توانیم به انتگرال تابع از R در یك فضای برداری نرمدار با بعد متناهی تعمیم دهیم، مگر آنکه از یك پایه برای فضای برداری استفاده کنیم و در این صورت باید استقلالش از پایه ثابت شود، تا چه برسد به اینکه فضای برداری را بینهایت بعدی بگیریم. در حالی که با روشی که آنها در پیش گرفته‌اند خیلی ساده، انتگرال توابع از R در R و از R در یك فضای باناخ را درست به یك شکل تعریف می‌کنند بدون اینکه مشکلی باشد و تازه دنبال آن هم انتگرال لبك را تعریف می‌کنند. یعنی حتی می‌توان به دانشجوی سال دوم دورهٔ لیسانس انتگرال لبك را معرفی کرد. «بورباکی» را نگاه کنید، هنگامی که می‌خواهد انتگرال را معرفی کند تقریباً در ده صفحه همهٔ مطالب را می‌گوید. آن هم به روشی کاملا طبیعی، و در دنبالهٔ مطالبی است که دانش‌آموز در دبیرستان خوانده. یعنی انتگرال را به صورت تابع اولیه تعریف می‌کند. همان انتگرال ریمان را؛ و درست در همانجا هم وصل می‌کند به انتگرال لبك. بنابراین راههای دیگری هم وجود دارد و خیلی بهتر است که ما با تشکیل کلاسهای مختلف این راههای مختلف را تجربه کنیم و ببینیم کدام یك از آنها برای دانشجویان ما مناسبتر است.

ریاضیات عمومی برای رشتهٔ ریاضی لازم است



سیاوش شهشهانی
[دانشگاه صنعتی شریف]

خواهش کردم سخنرانی مرا بعد از سخنرانی آقای دکتر شفیعی بگذارند چون خودم صحبت زیادی نداشتم و فکر کردم بعد از ایشان همیشه فرصت زیادی برای بحث کردن پدید می آید. البته دکتر شفیعی از افراد بسیار مورد علاقهٔ من است. او از افرادی است که واقعاً راجع به مسائل فکر می کند و همیشه ایده‌های اصیل و بدیع دارد؛ ایده‌های اصیل هم همیشه بحث انگیز است. هیچ وقت نشنیده‌ایم دکتر شفیعی یك حرف کلیشه‌ای را تکرار کند. البته همهٔ حرفهایی هم که من خواهم زد، علیه ایشان نیست.

قبل از اینکه صحبت اصلی را شروع کنم به این نکته اشاره می کنم که خیلی از سخنرانها به دبیرستانها و زمینهٔ ضعیف دانشجویان در ریاضیات دبیرستانی ایراد گرفتند. ولی تجربهٔ شخصی من عکس این بوده است. من ریاضی عمومی خیلی درس داده‌ام. ریاضی یك را امسال درس می‌دهم و سالهای ۵۴، ۵۸، و ۶۳ هم درس داده‌ام و ریاضی دو را هم شاید هفت یا هشت بار تدریس کرده‌ام. نظر من این است که دانشجویان سال به سال بهتر شده‌اند. اقلا ده یا بیست درصد بالای دانشجویان واقعاً بهترند. دانشجویانی را که امروز وارد دانشگاه می شوند مقایسه کنید با دانشجویان ده سال پیش؛ به طور مشخص بهترند؛ مقایسه کنید با سی سال پیش که من از دبیرستان فارغ التحصیل شدم؛ می بینید که قابل مقایسه نیستند. من سی سال پیش در این شهر فارغ التحصیل شدم و یکی از دو سه تا معدل بالای این شهر را داشتم و خودم را مقایسه می کنم، نه با دو سه نفر اول حالا بلکه با پنجاه نفر اول حالا، و می بینم که وضع به مراتب بهتر است. دانشگاهها هم به مراتب بهترند. بنابراین می خواهم بگویم که مأیوس نباشید. من خوشبین هستم به سیستم آموزشی‌مان. ببینید، ایراد گرفتن خیلی راحت است. ما از سیستمی که سی سال پیش هندسهٔ ترسیمی ورقومی می خواندیم آمده‌ایم به سیستمی که با دنیا کاملا هماهنگ است. ما در دورهٔ انتقال و تطبیق هستیم و این مشکلات و مسائلی که وجود دارد، طبیعی است. البته، انتقادهایی که دوستان می کنند باعث می شود برنامه‌ها بهتر شوند ولی اینکه بگوییم دبیرستانها کارشان را خوب نمی کنند و بنابراین هر کاری که ما می کنیم عبث است، بی انصافی است. شما همین برنامه‌ریزی را که در سطح دبیرستان شده مقایسه کنید با آن چیزی که بعد از دورهٔ تعطیلی دانشگاهها به عنوان برنامهٔ جدید دانشگاهی ارائه شد، می بینید که برنامه‌ریزی دبیرستانها خیلی منطقی‌تر بوده و خیلی بیشتر در موردش فکر شده.

حالا می خواهم صحبتم را شروع کنم. سؤال اول دکتر شفیعی این بود که «چرا ریاضیات عمومی؟». دو مطلب هست. یکی اینکه، منشأ این ریاضیاتی که الآن به عنوان ریاضیات عمومی درس داده می شود چیست. می خواهم دفاع بکنم از اینکه ریاضیات عمومی که به دانشجویان ریاضی تدریس می شود باید همانی باشد که به دانشجویان فیزیك و مهندسی تدریس می شود. بعد از این صحبت می کنم در مورد اینکه به نظر من محتوایش چه تغییراتی باید بکند.

اول در مورد تاریخچه‌اش توضیحی می‌دهم. می شود گفت که قبل از برنامه‌ریزیهای ستاد انقلاب فرهنگی دو سیستم در دورهٔ لیسانس ریاضی در ایران وجود داشت. یك سیستم را می شود گفت سیستم اروپایی بود و دیگری، آمریکایی. در سیستم اروپایی یا فرانسوی که اجرای آن از دانشگاه مادر، دانشگاه تهران، شروع شده بود و در بیشتر دانشگاهها معمول بود، دانشجوی ریاضی علی الاصول از دانشجویان رشته‌های دیگر جدا بود. در شروع تحصیل هم مثل سنت اروپایی، آنالیز می خواند و چیزی به نام ریاضیات عمومی در کار نبود. در دو تا دانشگاهی که به اصطلاح به سبك آمریکایی تأسیس شد، اول دانشگاه شیراز و بعد هم دانشگاه صنعتی، درسی که در آمریکا به اسم کلکولس یا کلکولس با هندسهٔ تحلیلی و یا کلکولس با جبر خطی تدریس می شود به عنوان ریاضیات عمومی ارائه شد. این دو سیستم به طور همزمان معمول بود. بعدها که به دلایلی خواستند برنامه‌ها را هماهنگ کنند (در اینجا کاری ندارم که این هماهنگیها خوب است یا بد، و بیشتر فکر می کنم بد است)، طرفداران به اصطلاح ریاضیات عمومی پیروز شدند. این پیروزی را آنهایی که شاهد جلسات برنامه‌ریزی بودند می‌دانند چطوری به دست آمد. یك وقت یك عده در جلسه‌ای اکثریت داشتند و برنامه‌ای تصویب می شد، ریاضیات عمومی هم به همین صورت تصویب شد. یعنی برنامه‌ریزی آن دقیقتر از برنامه‌ریزیهای دبیرستان نبود. حالا از قضا خود من هم طرفدار این ریاضیات عمومی هستم هرچند که روش تصویب و تثبیت آن را نمی‌پسندم. نکات مثبتی در این ریاضیات عمومی هست که به آن اشاره خواهم کرد.

ببینیم این دو سیستمی که وجود دارد و یکی را فرانسوی و دیگری را آمریکایی خواندیم، از کجا نشأت می‌گیرند. در سیستم فرانسوی [اروپایی] که دنبالهٔ سیستم کلاسیك است، فرض بر این است که عده‌ای نخبه وارد دانشگاه می‌شوند و تعدادی از آنها می‌خواهند مثلا ریاضی بخوانند. این نخبگان جزءِ خیلی کوچکی از جمعیت یك مملکت را تشکیل می‌دهند. در این سیستم از اول چیزهایی به ایشان یاد داده می شود که آنها را سوق بدهد به سمت مرزهای دانش. حالا این ریاضیات عمومی که در برنامه‌های جدید ما گنجانده شده [طبق سیستم به اصطلاح آمریکایی] چیست؟ خصوصیاتش می شود گفت سه چیز است. یکی اینکه محتوایش زیاد است. شما مثلا نگاه کنید به ریاضیات عمومی ۱ و ۲ که به دانشجویان رشته‌های مهندسی تدریس می شود. درس ریاضی عمومی ۲ی ما شروع می شود از مقدار زیادی جبر خطی و بعد از جبر خطی، خمیدگی خمها، و بعد توابع چند متغیره به تفصیل، آنگاه انتگرال چندگانه و بعد آنالیز برداری. شما این را با آنالیز ۱ و آنالیز ۲ مقایسه کنید و ببینید چقدر محتوایش بیشتر است. خصوصیت دومش این است که بیشتر مطالب این ریاضیات عمومی را همان مباحث حساب دیفرانسیل و انتگرال تشکیل می‌دهد. خصوصیت سومش این است که با استانداردهای امروزی، چندان از دقت ریاضی برخوردار نیست. حالا چرا می‌گویند این درس ریاضیات عمومی، آمریکایی است؟ فکر می کنم به علت ویژگیهای خاص سیستم دانشگاهی آمریکایی. دو تا چیز در آنجا وجود دارد. یکی اینکه علی‌الاصول یك خصوصیت آمریکاییها این است که می گویند اگر چیزی خوب است، بهتر

است مقدار زیادی از آن داشته باشیم. آنها طرفدار «آموزش انبوه»اند. می‌گویند مثلا اگر رشتهٔ مهندسی به درد می‌خورد چرا فقط یك یا چند پلی‌تکنیك یا مدرسهٔ مهندسی سطح بالا ـ مثل پلی‌تکنیك فرانسه ـ داشته باشیم که فقط نخبه‌ها را بگیرد؟ می‌توانیم هزاران مهندس تربیت کنیم. در نتیجه چون می‌خواهند هزاران مهندس تربیت کنند و برای اینها هم مثلا حساب دیفرانسیل و انتگرال لازم است، حساب دیفرانسیل و انتگرال را باید بیاورند در سطحی که بشود به عدهٔ زیادی یاد داد. بنابراین، یك دلیل وجودی ریاضیات عمومی، همین «آموزش انبوه» است. دلیل دیگرش یکی دیگر از خصوصیات سیستم آموزشی آمریکاست که از شیوهٔ آموزش در قرون وسطای اروپا ریشه می‌گیرد و آن سیستم liberal education است که فلسفه‌اش تا حدودی عکس فلسفهٔ آموزش تخصصی است. هدف از آن، پروراندن شهروندان آگاه و آزاده است، افرادی که از رشته‌های مختلف آگاهی داشته و با میراث فرهنگی بشر آشنا باشند و بتوانند در موضوعهای مختلف فکر کنند و در مورد چیزهایی که می‌شنوند هوشمندانه قضاوت کنند. در این سیستم آموزشی عدهٔ زیادی باید ریاضی بخوانند، فیزیك بخوانند، فلسفه بخوانند و علوم اجتماعی بخوانند. همهٔ این درسها هم جدی گرفته می‌شود. خلاصه، آموزش انبوه مستلزم این است که در مورد نخبه‌گرایی تخفیف بدهید و بیایید مطالب را در سطحی ارائه کنید که عدهٔ بیشتری از دانشجویان معمولی بتوانند اینها را یاد بگیرند.

حالا دلایل مخالفت با این درس ریاضیات عمومی برای رشتهٔ ریاضی چیست؟ این طوری که من فهمیده‌ام دو نوع دلیل ارائه می‌شود. یکی اینکه گفته می‌شود این درس علی‌الاصول به چه دردی می‌خورد و مگر درس آنالیز معمولی چه عیبی دارد که بیایند حساب دیفرانسیل و انتگرال را این طوری یاد بگیرند. دیگر اینکه گفته می‌شود این درس واقعاً از دقت کافی برخوردار نیست. من فکر می‌کنم هر دو تای اینها غلط است و حالا می‌خواهم توضیح بدهم چرا.

اولا این درس واقعاً به درد می‌خورد. چرا؟ چون شما می‌توانید بعد از اینکه ریاضیات عمومی ۱ و ۲ را خواندید کارهایی بکنید که قبلا نمی‌توانستید. بعد از گذراندن این درس دانشجو می‌تواند مقدار زیادی از سؤالات طبیعی را که در دبیرستان برایش مطرح بوده، جواب بدهد. می‌تواند حجم بخشی از هذلولیوار را پیدا کند، می‌تواند مساحت زیر سهمی را پیدا کند، می‌تواند مساحت، حجم و بسیاری از چیزهای هندسی دیگر را به دست آورد، می‌تواند مسائل ماکسیمم و مینیمم پیچیدهٔ چند متغیری را حل کند. اینها مسائل مصنوعی نیست که در این درس برای اولین بار مطرح شده باشد. به نظر من، فایدهٔ این درس همین است که پاسخگوی سؤالاتی ریاضی است که از قبل، در دبیرستان، برای فرد وجود داشته است. حالا شما کدام درس ریاضی دانشگاهی را سراغ دارید که از این لحاظ بیشتر به درد بخورد؟

در مورد دقت، خوب این مسأله البته سر دراز دارد؛ ولی من می‌خواهم بگویم که دقت، همان طور که دیگران هم گفته‌اند، چیزی نیست که استاندارد مطلقی داشته باشد. استاندارد دقت تا حد زیادی وابسته است به زمان و محیط و شرایط و وضعیت تحول یك علم در یك مقطع به خصوص. اتفاقاً صحبت امروز صبح آقای مهندس معصومی مؤید این نظر من است. یکی از نظریاتی که ایشان اعلام کردند، این بود که یك علت اینکه حساب دیفرانسیل و انتگرال تا قرن هفدهم به وجود نیامد در حالی که ریشه‌هایش قبلا وجود داشت، یك نوع دگماتیزم فلسفی در مورد دقت ریاضی بود. یعنی یك نوع دگماتیزم ضد اتمی باعث شد که نظایر ارشمیدس نتوانند ایده‌هایشان را به طور عریان بیان کنند و به طور رسمی پیگیری کنند. همیشه سعی می‌کردند. ایده‌هایشان را در لفاف چیزهای دیگری که از نظر استانداردهای دقت زمان قابل بود ارائه دهند. ببینید، این دگماتیزم در مورد

کتابهای ریاضیات عمومی

عده‌ای عقیده دارند که امروز کتابهای ریاضیات عمومی در کشورهای غربی حالتِ یك نوع «کالا» را پیدا کرده‌اند و تولید آنها احتمالا بیشتر از قوانین بازار تبعیت می‌کند تا از ضروریات آموزشی و علمی. ولی در آغاز شاید وضع چنین نبوده است. نخستین کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال درسال ۱۶۹۶ با عنوان

L' Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes

در پاریس منتشر شد. این کتاب که نوشتهٔ مارکی دولوپیتال [در فارسی، معروف به هوپیتال] بود با موفقیت زیادی روبرو شد و چاپ دوم آن در سال ۱۷۱۵ به بازار آمد و تا حدود ۱۰۰ سال، چاپهای بعدی آن مورد استفادهٔ علاقه‌مندان قرار می‌گرفت. در قرن نوزدهم، درس حساب دیفرانسیل و انتگرال در آمریکا یك درس عمومی دانشگاهی شد و به دنبال آن کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرالِ متعددی روانهٔ بازار شدند. از آن میان می‌توان از

Elements of the Differential and Integral Calculus

نوشتهٔ الیاس لومیس[1] استاد فلسفهٔ طبیعی در کالج ییل نام برد که چاپ اول آن در سال ۱۸۵۱ انتشار یافت.

از بین کتابهایی که حساب دیفرانسیل وانتگرال را به زبان ساده بیان می‌کردند، کتاب *حساب دیفرانسیل وانتگرال* در دسترس همه تألیف سیلوانوس تامسن[1] قابل ذکر است که درسال ۱۹۱۴ منتشر شد. ترجمه‌ای فارسی از این کتاب در سال ۱۳۲۷ به قلم احمد آرام انتشار یافت.

در کشور ما پس از تأسیس دانشگاه تهران تهیهٔ کتابهای ریاضیات عمومی به زبان فارسی برای سال اول رشته‌های علوم و مهندسی مورد توجه قرار گرفت و عده‌ای از استادان ریاضی، متعلق به اولین نسلِ ریاضیدانانی که در دانشگاههای خارجی [بیشتر، فرانسوی زبان] تحصیل ریاضی کرده بودند، دست به نگارش کتابهایی در این زمینه زدند که از آن میان می‌توان *جبر و آنالیز* (دکتر محمدعلی مجتهدی)، *هندسهٔ تحلیلی* (دکتر مصطفی کامکار پارسی)، *حساب جامع و فاضل* (دکتر محمد علی مجتهدی)، *ریاضیات عمومی* (دکتر منوچهر وصال)، *جبر و آنالیز* (دکتر مصطفی کامکار پارسی)، و *هندسهٔ تحلیلی* (دکتر احمد سادات عقیلی) را نام برد. در جوار این کتابها، استفاده از جزوه‌های درسی هم رواج داشت.

1. Elias Loomis

1. Sylvanus P. Thompson

دقت، باعث جلوگیری از پیشرفت ریاضیات شد. البته ممکن است شما با آقای معصومی همعقیده نباشید، ولی خیلیها هستند.

مطلب دیگری نیز در صحبتهای دکتر شفیعی بود که باید به آن اشاره کنم. ایشان سؤال می‌کنند که چرا مثلا ما از اول انتگرال را به صورت انتگرال یك تابع یك متغیره با مقدار در یك فضای برداری یا فضای باناخ ارائه نکنیم. این طرز فکر نشأت می‌گیرد از ساختارگرایی. به نظر من اکثر ریاضیدانها به نوعی افلاطونی مشرب هستند یعنی فکر می‌کنند مفاهیم ریاضی واقعاً به نوعی وجود دارند. اگر شما برای مفاهیم ریاضی شیئیت قائل باشید باید این را قبول کنید که مسأله، فقط ساختار نیست. مسأله فقط این نیست که از چه راهی سریعتر می‌توان به اثبات رسید یا بهترین و طبیعیترین راه ارائهٔ اثبات چیست. اثبات یا تعریف مطلب در سیستم نظریهٔ مجموعه‌ای، نباید با محتوای مطلب اشتباه شود. خیلی وقتها محتوای مفاهیم واقعاً بر تعریف ریاضی آنها یا اثباتشان تقدم دارد. حالت افراطی این موضوع را در نظر بگیرید. می‌دانید که در زمینهٔ مفهوم پیوستگی، اثبات قضیهٔ ژوردان که یك خم پیوستهٔ بستهٔ ساده در صفحه، صفحه را به دو قسمت تقسیم می‌کند، دشوار است. حالا ما اگر واقعاً به تسلسل مطالب ریاضی معتقد باشیم، باید هیچ مطلبی که از این استفاده می‌کند نگوییم تا اینکه مثلا در توپولوژی جبری یا در یك درس پیشرفته اثبات این موضوع را ببینیم و بعد از این هم تازه شما اجازه خواهید داشت راجع به قضیهٔ گیری و چیزهای نظیر آن صحبت کنید. فکر می‌کنم حتی به نظر صورتگراترین ریاضیدانها این طرز فکر خیلی افراطی است. قبول کنید عیبی ندارد که ما مثلا قضیهٔ ژوردان را بپذیریم و بر اساسش کار بکنیم. بیش از ۲۰۰۰ سال است که ریاضیات وجود دارد ولی از عمر نظریهٔ مجموعه‌ها فقط ۱۰۰ سال می‌گذرد و از عمر این اعتقاد هم که اشیاءِ مشروع ریاضی را آنهایی بدانیم که در داخل دستگاه اصول موضوع تسرملو ـ فرانکل قرار بگیرند و بر اساس این اصول تعریف بشوند، کمتر از ۱۰۰ سال می‌گذرد. این اعتقاد، دگماتیسمی است خاص زمان ما که البته منافعی هم داشته است ولی هیچ وقت نباید واقعیات تاریخ ریاضی را فراموش کنیم. من مخالف نظریهٔ مجموعه‌ها نیستم، مخالف دقت ریاضی نیستم، ولی به هر حال افراط در مسألهٔ قطعیت نباید مانع از این شود که مسائل از پیش مطرح شده را حل کنیم و به مسائل واقعی بپردازیم. منظورم از «واقعی» فقط مسائل علوم تجربی و مهندسی نیست. «واقعی» یعنی هر چیزی که ما، عدهٔ زیادی از ما، تصویر مشابهی از آن داشته باشیم و بتوانیم به طور دقیق در موردش صحبت کنیم.

خوب، حالا من چه دلایلی دارم برای اینکه بگویم ریاضیات عمومی برای رشتهٔ ریاضی باید مثل ریاضیات عمومی برای رشته‌های مهندسی و فیزیك و نظایر اینها باشد؟ یکی از دلایل من، عدم اعتقاد به تجرید پیش از موقع است. به نظر من درس ریاضیی که ارائه می‌شود باید در ارتباط با ریاضیاتی باشد که دانشجو با آن تجربه داشته. مسائل نباید به صورت مصنوعی مطرح بشوند. اگر شما دیدید همهٔ مسائلی که در داخل یك درس مطرح می‌کنید مربوط می‌شود به مفاهیمی که در همان درس معرفی کرده‌اید، باید شك کنید در مورد اینکه واقعاً دارید چیز با محتوایی ارائه می‌دهید. هر درس ریاضی باید مبتنی باشد بر تجربهٔ ریاضیِ قبلیِ دانشجویی که آن درس را می‌خواند. اگر شما بیایید در سال اول دانشگاه انتگرال با مقدار در فضای باناخ را ارائه کنید، عده‌ای تا حدی آن را خواهند فهمید ولی اکثریت نه تنها درك نمی‌کنند بلکه ممکن است از ریاضی زده هم بشوند. همین حالا عدهٔ زیادی از دانشجویان اعتقاد دارند که این δ-ε دکانی است که ریاضیدانان باز کرده‌اند برای نمرهٔ کم دادن به دانشجویان. مطلب دوم، حجم عظیم گنجینهٔ مطالب ریاضی است. اگر شما حجم ریاضیات محکم و ثابتی را که در دنیا هست در نظر بگیرید، شاید چندین برابر رشته‌های دیگر باشد. مثلا فقط در نظریهٔ اعداد احتمالا چند برابر کل

از اواسط دههٔ چهل با تأسیس دانشگاههای جدید و آمدن نسل جدیدی از ریاضی‌خواندگان که خیلی از آنها در دانشگاههای آمریکایی تحصیل کرده بودند، مرحلهٔ جدیدی در انتشار کتابهای ریاضیات عمومی آغاز شد که عبارت بود از ترجمهٔ کلکولسهای جورواجور خارجی (بیشتر، آمریکایی). علاوه بر ترجمه، افست کردن اصل این کتابها هم متداول شد. رواج ترجمهٔ کتابهای کلکولس شاید از این فکر ناشی می‌شد که ترجمهٔ کتابی که در محافل دانشگاهی کشورهای پیشرفته از تأیید و استقبال وسیعی برخوردار شده بهتر از تألیفی است که به وسیلهٔ یك ریاضیدان ایرانی انجام شود. شاید هم نارضایی از کیفیت برخی از کتابهای تألیفی در این امر مؤثر بود. این جریان تا به امروز ادامه یافته و پس از انقلاب، شدتِ بیشتری هم یافته است. البته در دورهٔ بعد از انقلاب، مسألهٔ دقت در ترجمه و ویرایش دقیق ترجمه‌ها بیشتر از سابق مورد توجه بوده است. از میان کتابهای ترجمه‌ای که بیشترین موفقیت را در جلب خواننده داشته‌اند می‌توان از کلکولسهای اپوستل، توماس، لیت هولد، و سیلورمن نام برد.

افزایش سریع تعداد دانشجویان، تقاضا برای کتابهای ریاضیات عمومی را در سالهای اخیر فوق‌العاده افزایش داده است و براوردن نیاز این همه متقاضی به علت کمبود کاغذ و مشکلات چاپ با دشواری توأم بوده و تعدادی از کتابهای حساب دیفرانسیل وانتگرال بازار سیاه پیدا کرده‌اند.

تردیدی نیست که این جریانِ ترجمه دستاوردهای مفیدی داشته و باعث شده که تعدادی از معروفترین کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال به زبان فارسی در دسترس دانشجویان ایرانی قرار گیرد. امروز دانشجوی ریاضیات عمومی متن درسی مبسوط و منسجمی در اختیار دارد که به هر حال از جزوه‌ها و درسنامه‌ها و بیشترِ تألیفهای سابق بهتر است. به کمك این متنها، فرهنگ صحیح استفاده از کتاب درسی هم به تدریج در دانشگاههای ما جا می‌افتد. ولی در خودِ کشورهای پیشرفته در مورد مباحثی که در این کتابها مطرح می‌شود و شیوهٔ عرضهٔ آنها و مخصوصاً حجم آنها سؤالات و بحثهایی مطرح است که قسمتی از آنها را در مقالهٔ «اصلاح حساب دیفرانسیل و انتگرال» در همین شمارهٔ مجله خواهید خواند. نویسندهٔ این مقاله تأثیر عامل بازار را در شکل‌گیری این کتابها تشریح می‌کند.

آیا وقت آن نرسیده است که مرحلهٔ سومی در انتشار کتابهای ریاضیات عمومی به زبان فارسی آغاز شود و افراد ذیصلاحی دست به تألیف کتابهای جمع وجور و معقولی بزنند که هم تجربیات آموزشی کشورهای پیشرفته در آنها ملحوظ باشد و هم مقتضیات محیط آموزشی ما در نظر گرفته شده باشد و هم مطالب حاشیه‌ای غیرلازم که باعث می‌شود این کتابها حجم غول‌آسایی داشته باشند، در آنها نیاید؟

علم کامپیوتر مطالب هست. ولی ما یك دپارتمان ریاضی داریم. رشته‌های دیگر شاخه‌بندی می‌شوند و دپارتمانهایشان جدا می‌شود ولی دپارتمان ریاضی همیشه یك دپارتمان ریاضی است و ما خیلی هم خوشحالیم از این موضوع. ولی این مطالب زیاد باید به نحوی ارائه شود. اگر ارائه نشود، ما تخصصهای خیلی باریکی خواهیم داشت و اکثر ریاضیدانهای ما در وضعیتی خواهند بود که حتی مفاهیمی را که بعضی از استفاده‌کننده‌های ریاضیات از ریاضی می‌دانند، نخواهند دانست، تا حدی که حتی ممکن است به گوششان هم نخورده باشد. به این دلیل هیچ عیبی ندارد که مقدار زیادی از مطالب ریاضی به نوعی ارائه شود که دانشجو بتواند در عمل از آن استفاده کند ولو آنکه عرضهٔ مطالب از دقّت صد درصد برخوردار نباشد. این تصور اشتباهی است که بگوییم حد و پیوستگی را یا صددرصد می‌فهمی یا اصلا نمی‌فهمی. فهم آدم از یك موضوع می‌تواند مراحل مختلفی داشته باشد. شما می‌توانید در حساب دیفرانسیل و انتگرال ایده‌ای راجع به حجم و سطح و آنالیزبرداری و این چیزها پیدا کنید. بعد در یك درس بعدی ممکن است این ایده تعمیق پیدا کند و در درس بعد از آن تعمیق بیشتری پیدا کند ولی به هر حال در هر مرحله چیز معنی‌داری دستتان می‌آید که توانایی عملی شما را افزایش می‌دهد. منظورم از «توانایی عملی»، لزوماً توانایی کاربرد ایده‌ها در خارج از ریاضیات نیست بلکه داخل ریاضیات را هم شامل می‌شود. به نظر من دانشجویی که لیسانس ریاضی می‌گیرد باید یك مقداری آشنایی سطحی و وسیع داشته باشد با خیلی از چیزها. البته آشنایی دقیق و عمیق هم باید با پاره‌ای از مفاهیم داشته باشد. این ریاضیات عمومی هم گام اول است در این راه. من در این زمینه پیشنهاد خاصی ارائه خواهم کرد. و حالا چرا باید دانشجوی ریاضی درس ریاضیات عمومی را با بقیهٔ دانشجویان بگیرد؟ اولا ما میراث فرهنگی مشترکی داریم با سایر رشته‌ها. تا جایی که می‌شود نباید تفکیك کرد. اندرکنشهایی که بین رشته‌هاست، چیز سالم و مفیدی برای همهٔ رشته‌هاست. دانشجویی که وارد دانشگاه می‌شود براساس فرضهایی، رشته‌ای را انتخاب کرده و وارد شده است. این دانشجو اگر درسهای مشترکی با رشته‌های دیگر داشته باشد، چه بسا تشخیص بدهد رشته‌ای که بیش از همه به آن علاقه دارد ریاضی نیست بلکه فیزیك یا مهندسی است، و به عکس؛ و رشته‌اش را تغییر بدهد.

پیشنهاد خاص من در مورد ریاضیات سال اول این است که دو دوره درس عمده داشته باشیم، یکی ریاضیات عمومی پیوسته و دیگری، ریاضیات عمومی گسسته. ریاضیات عمومی پیوسته به نظر من باید شامل جبر خطی و حساب دیفرانسیل و انتگرال باشد. ریاضیات گسسته هم باید شامل یك مقدار زبان مجموعه‌ها، که البته حالا دیگر افراد در دبیرستانها یاد می‌گیرند، مقداری جبر مجرد و ساختارهای گسستهٔ ریاضی، نظریهٔ اعداد و این جور چیزها باشد. همهٔ اینها را می‌توان در سال اول عرضه کرد. در سالهای بعد هم فکر می‌کنم دانشجویی که رشتهٔ ریاضی می‌خواند باید حتماً با چیزهای دیگری نیز، حتی به طور سطحی هم شده، آشنا شود. مثلا باید درس یکساله‌ای در احتمال و آمار ببیند. اینکه بگوییم احتمال مفهومی است در نظریهٔ اندازه‌ها واقعاً یك حرف ضد تاریخی و اشتباه است. نظریهٔ احتمال هویت خاص خودش را دارد. همچنین دانشجوی ریاضی حتماً باید دورهٔ یکساله‌ای در ریاضیات عددی و استفاده از کامپیوتر بگذراند. همین طور درس یکساله‌ای در معادلات دیفرانسیل و کاربردهای آنالیز، کاربردهای کلاسیك آنالیز، باید ببیند. منظورم همان معادلات دیفرانسیل جزئی و عادی و توزیعها و این جور چیزهاست که مهندسها غالباً یاد می‌گیرند. یك درس یکسالهٔ هندسه هم لازم است. من با دکتر شفیعی همعقیده‌ام که در جایی گفته‌اند این درسی که به نام مبانی هندسه ارائه می‌شود ربطی به هندسه ندارد. البته من به شدت ایشان مخالف این درس نیستم و فکر نمی‌کنم کاملا بیهوده باشد و برای کسانی که دبیری ریاضی می‌خوانند مفید است ولی برای کسی که بخواهد ریاضیدان حرفه‌ای بشود، محلی از اعراب ندارد جز به عنوان یك مطالعهٔ تاریخی جانبی. ولی یك درس یکسالهٔ هندسه به مفهوم عام لازم است یعنی هندسه‌ای که شامل به اصطلاح توپولوژی باشد. (البته نه توپولوژی مجموعهٔ نقاط که باید در زمرهٔ درسهای آنالیز بیاید.) درسهای دقیقتر هم البته لازم است. البته بعضی از مباحث این درسها را در برخی از گرایشها می‌توانند به طور غیر دقیق هم ببینند. مثلا اگر شما نتوانید دقیقاً برای دانشجو ثابت کنید که یك رویه را می‌شود مثلث‌بندی کرد، فکر می‌کنم دانشجو بتواند این را به طور شهودی قبول کند و براساس آن شاید بتواند اثبات قضیهٔ گاوس ـ بونه در هندسه را بفهمد. هیچ ایرادی هم ندارد.

حالا برمی‌گردم به ریاضیات عمومی. در مورد ریاضیات عمومی پیوسته توضیح دادم و در مورد گسسته من تخصصی ندارم و البته تصور می‌کنم که به هیچ وجه رقیبی برای حساب دیفرانسیل و انتگرال نیست. ولی مسلماً ساختارهای گسسته امروز در ریاضیات و کاربردهای آن خیلی اهمیت دارند. این را باید از همان سال اول تدریس کرد و باید با درس جبر مجرد توأم باشد. در مورد ریاضیات عمومی پیوسته، وقت آن رسیده است که قالبهای متداول سنتی را بشکنیم. من صبح امروز در مقدمهٔ سمینار گفتم که یك علت ادامهٔ انتشار کتابهای حجیم در زمینهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال، ملاحظات تجارتی شرکتهای انتشاراتی آمریکاست. از نظر اقتصادی برای آنها صرف نمی‌کند که به طور ناگهانی تغییرات عمده‌ای بدهند. هر نوع سرمایه‌گذاری جدید یك مقدار ریسك دارد. یك مقدار اشکالات جدید دارد. من واقعاً فکر می‌کنم آن نکته‌ای که آقای تابش گفتند در مورد تألیف باید خیلی جدی گرفته شود. کشورهایی مثل ما ـ حالا ما شاید آنقدر در ریاضی پیشرفته نباشیم ولی کشورهای دیگر ـ می‌توانند به رقابت برخیزند و کتابهای کوچکتر و معقولتری ارائه کنند.

در این کتابها چه باید باشد؟ با توجه به زمینه‌ای که دانشجویان ما در دبیرستان کسب می‌کنند نباید در مورد مفاهیمی مثل فضای n بعدی پرده‌پوشی بشود. ریاضیات سال اول می‌تواند شامل جبر خطی باشد با محتوای نسبتاً زیاد ولی نه خیلی مجرد. وقتی حساب دیفرانسیل و انتگرال را با جبر خطی توأم بکنیم، هم از نظر ساختاری ـ آن طور که دکتر شفیعی می‌خواهند ـ بهتر است و هم از نظر عملی، چون تکنیکهای بیشتری به دانشجو می‌توان یاد داد. به نظر من جبر خطی می‌تواند از اول ارائه بشود، منتها در سطحی که بشود به عنوان دنبالهٔ ریاضیات دبیرستانی در نظرش گرفت. من از انتقاداتی که از ریاضیات دبیرستانی شده آگاهم. ممکن است در کتابهای دبیرستانی بدآموزیهایی باشد. ولی به هر حال، دانش‌آموزی که از دبیرستان فارغ‌التحصیل می‌شود و به دانشگاه می‌آید آمادگی این را دارد که در اینجا به او درست چیز آموخته شود. می‌دانم به علت اینکه دانشجویان ضعیفتری از طریق سهمیه‌های مختلف وارد دانشگاه می‌شوند اشکالات خاصی هست. ولی این اشکالات، موضعی است. در آمریکا هزاران دانشجو هر سال وارد دانشگاه می‌شوند که خیلی از آنها وضعشان از دانشجویان سهمیه‌ای ما بدتر است ولی تحصیل چهار ساله‌شان اتلاف وقت نیست. سیستم آموزشی آنجا انعطاف دارد و نمی‌گوید همهٔ دانشگاهها و همهٔ گروههای یك درس باید در یك سطح باشند. ما هم اگر انعطاف کافی در سیستم آموزشی خود داشته باشیم خیلی چیزها را به خیلیها می‌توانیم یاد بدهیم.

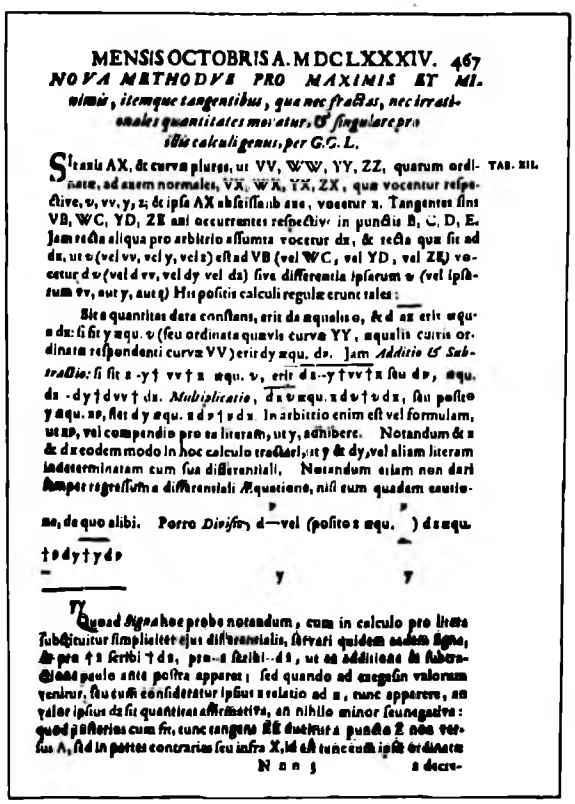
در مورد نحوهٔ برخورد با مفاهیم حد و پیوستگی، نظر من هم مثل دکتر شفیعی این است که پیوستگی مقدم بر حد است. گاهی اوقات سر کلاس

می گویم حدِ تابع چیزی است که اگر تابع داشته باشد، پیوسته است. ولی باز سؤال اصلی باقی می‌ماند و آن این است که بالاخره با این ϵ و δ چکار بکنیم. من چند سال پیش صحبتهایی در این زمینه کردم که الآن نمی‌خواهم تکرارشان کنم. ولی هنوز هم بر آن اعتقادات هستم. در صحبتی که در دانشگاه تربیت معلم داشتم، این فکر را مطرح کردم که محاسبات عددی یا روشهای آنالیز عددی را مبنای معرفی پیوستگی و حد قرار بدهیم یعنی پیوستگی را به عنوان پایداری محاسبه مطرح کنیم. به نظر من واقعاً می‌شود پیوستگی را با تکیه بر اینکه هدف ما کنترل خطاست، مطرح کرد.

سؤال دیگری که پیش می‌آید راجع به ساختار اعداد است مثلاً سوپرمم، اینفیمم و تمامیت اعداد. من راجع به اینها هم صحبتهایی داشته‌ام که حالا تکرار نمی‌کنم. معتقدم که اصل تمامیت را این بگیریم که هر بسط اعشاری که می‌نویسید معرف یك عدد است. این را دانشجو می‌تواند به عنوان اصل تمامیت اعداد بپذیرد. به کمك آن می‌توان همهٔ قضایای مقدار میانی، اینکه تابع پیوسته روی یك بازهٔ بسته ماکسیمم و مینیمم دارد، همهٔ این چیزها را می‌توان «دقیقاً» ثابت کرد. منظورم از «دقیقاً» این است که می‌توان استدلالی آورد که افراد باهوش را قانع کند و در آن هیچ تقابلی هم نباشد.

خیلی وقتها آدم می‌شنود که در درس ریاضیات عمومی می‌گویند اینها ریاضیات واقعی نیست. برعکس، به عقیدهٔ من ریاضیات عمومی خیلی واقعی است. یا گفته می‌شود مثلاً ϵ و δ ، به همین شکلی که ارائه می‌شود، بعداً به دردتان می‌خورد. همه می‌دانید که بعداً هم به هیچ دردی نمی‌خورد. آنهایی که ریاضی می‌خوانند در جاهای دیگر به موقع خودش یاد می‌گیرند ولی آنهایی که ریاضی نمی‌خوانند هیچ وقت به دردشان نمی‌خورد. با این چیزها به نظر من باید صادقانه برخورد کرد. دقت را نباید به مفهوم دگماتیك مجموعه‌ای اش در نظر گرفت بلکه باید مفهوم عملی اش را در نظر داشت یعنی آن چیزی که واقعاً فرد را از خطا دور می‌کند و می‌تواند افراد آگاه و باهوش را قانع بکند.

در این مورد که کامپیوتر تا چه حد باید وارد این جریانات شود، من البته خودم چون تسلطی بر این امر ندارم شاید شایستگی نداشته باشم در موردش صحبت کنم. نظر فعلی من این است که با وجود اعتقاد شدیدم به استفاده از کامپیوتر، نباید این را با آموزش حساب دیفرانسیل و انتگرال تلفیق کرد. در حساب دیفرانسیل و انتگرال و جبر خطی یك سری ایده‌های بزرگ و مهم ریاضی وجود دارد که باید به همان صورتی که هست ارائه شود و درست فهمیده شود. اینکه شما بیایید مثلاً بار دیگری هم به آن اضافه کنید یعنی بار الگوریتم نویسی، فکر نمی‌کنم درست باشد؛ همان طور که قاطی کردن آنالیز برداری با فیزیك هم می‌تواند گمراه کننده باشد، چون خیلی از مفاهیم هندسی برای دانشجو ملموستر است تا فرض کنید یك میدان نامرئی الکتر ومغناطیسی که تا قرن نوزدهم هم کسی آن را نشناخته بود. به هر حال، در مورد کامپیوتر به نظر من باید دانشجو در همان سال اول یاد بگیرد که با کامپیوتر کار کند. در سال دوم هم باید درس محاسبات عددی و درس استفاده از کامپیوتر داشته باشد ولی من صلاح نمی‌دانم که این قاطی بشود با درس حساب دیفرانسیل و انتگرال. در این درس می‌شود بر روشهای عددی و تقریبی تأکید بیشتری شود ولی حقایق ریاضی نباید در گرو یك چیز بیرونی قرار بگیرد. مطالب دیگری هم در این زمینه هست ولی من به همین مقدار بسنده می‌کنم.



MENSIS OCTOBRIS A. M DC LXXXIV. 467

NOVA METHODVS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G.G.L.

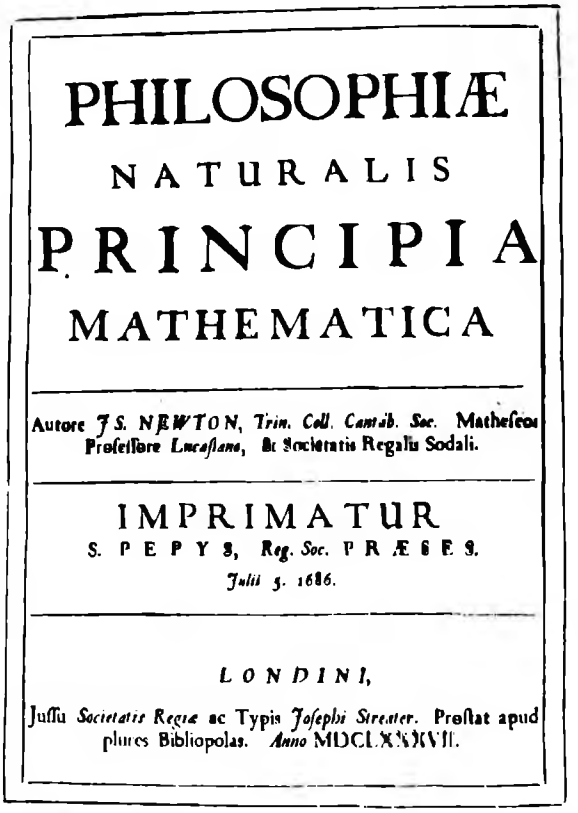
Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad easdem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, v, vv, y, z, & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE ani occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad dx, ut v (vel vv, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur dv (vel dvv, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum vv, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales:

Si a quantitas data constans, erit da æqualis 0, & d ax erit æqu. a dx: si sit y æqu. v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuiris ordinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio*: si fit z - y + vv + x æqu. v, erit dz - dy + dvv + dx seu dv, æqu. dz - dy + dvv + dx. *Multiplicatio*, dx v æqu. x dv + v dx, siu posito y æqu. xv, fiet dy æqu. x dv + v dx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari semper regressum a differentiali ad æquationem, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*, d — vel (posito z æqu.) dz æqu. + v dy + y dv / y y

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera subducitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, ac pro + x scribi + dx, pro - x scribi - dx, ut ea additione & subtractione paulo ante posita apparet; sed quando ad exequiin valorum veniunt, siu cum consideratur ipsius x relatio ad x, tunc apparere, an valor ipsius dx sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa: quod si posterius cum sit, tunc tangens BE ducitur a puncto Z non versus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsa ordinata

Nnn 3 a decre-

صفحهٔ اول مجلهٔ *آکتا اریودیتوروم* لایبنیتس، شمارهٔ ۳، (۱۶۴۸) که نخستین چاپ حساب دیفرانسیل را در بردارد.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

صفحهٔ عنوان کتاب *پرینکیپیا ماتماتیکا*، که نیوتن حساب دیفرانسیل و انتگرال را نخستین بار در آن (در ۱۶۸۶) عرضه کرد.

نگاهی اجمالی به
نظریهٔ خمینه‌های سه‌بعدی

ابوالقاسم لاله

مقدمه

منظور از خمینهٔ n بعدی به طور شهودی همان شیء خمیدهٔ n بعدی است. درحالت یك بعدی می‌توان خط اعداد حقیقی، $\mathbf{R}$، دایره، S^1، و بازه‌های باز را به‌عنوان مثال ذکر کرد. در حالت دوبعدی، صفحهٔ مختصات، $\mathbf{R}^2$، سطح کره، S^2، چنبره، نوار موبیوس، بطری کلاین، صفحهٔ تصویری حقیقی، $\mathbf{R}P^2$، مثالهایی ازخمینه‌های دوبعدی هستند. به‌همین ترتیب، فضای n تاییهای حقیقی مرتب، $\mathbf{R}^n$، وکرهٔ n بعدی متشکل از $(n+1)$ تاییهای $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ که $\sum x_i^2 = 1$، مثالهای خمینه‌های n بعدی‌هستند. مشخصهٔ خمینهٔ nبعدی این است که می‌توان یك همسایگی حول هر نقطهٔ آن‌را با n پارامتر مدرج کرد. وقتی می‌نویسیم M^m، مقصود این است که خمینهٔ M یك خمینهٔ m بعدی است.

مطالعهٔ خمینه‌های سه‌بعدی، از یك دیدگاه، تعمیمی از مطالعهٔ خمینه‌های دو بعدی یا رویه‌هاست. بیش از یك قرن است که توپولوژیدانها می‌دانند که چگونه خمینه‌های دو بعدی را تشریح و رده‌بندی کنند، اما این مسأله در مورد خمینه‌های سه‌بعدی هنوز حل نشده‌است. این به‌علت پیچیدگیهای فزاینده‌ای است که خمینه‌های سه بعدی، ممکن است دارا باشند. روشی در توپولوژی موسوم به«جراحی» در بررسی میزان پیچیدگی خمینه‌های سه‌بعدی کارایی قابل توجهی دارد.

نظریهٔ خمینه‌ها درقرن نوزدهم برای براوردن نیازی که به‌درك هندسی رابطه‌های کیفی وجود داشت، پدید آمد. مثلا مجموعهٔ جوابهای یك‌معادلهٔ دومتغیری را می‌توان به‌صورت مجموعهٔ نقاطی از صفحه مشخص کرد. هرنقطه، جفتی از مقادیر برای متغیرها را نشان می‌دهد که درمعادلهٔ مزبور صدق می‌کنند. مجموعهٔ نقاط نوعاً یك‌خم یا مجموعه‌ای ازخمهاست. به‌همین ترتیب مجموعهٔ جوابهای یك‌معادلهٔ سه‌متغیری را اغلب به‌صورت یك رویهٔ دوبعدی درفضای سه‌بعدی می‌توان درنظر گرفت. برای معادلاتی با بیشتر از سه‌متغیر مجموعهٔ جوابها را می‌توان به‌طور هندسی به‌طریق زیر توصیف کرد: این‌مجموعه یك‌خمینهٔ چندبعدی درفضایی با بعد بالاتر است.

در واقع توپولوژی قادر به‌حل معادلات نیست، ولی این امکان‌را فراهم می‌آورد که بدون پرداختن به‌جزئیات کمی، مجموعهٔ جوابها به‌طورکلی مورد بررسی قرار گیرد. ازاین‌رو، گرچه‌خمینهٔ نقاطی که مجموعهٔ جوابهای یك معادله را تشکیل می‌دهند شکلی بدون ابهام دارد، توپولوژی خمینه وابسته به‌خواص این شکل نیست، بلکه شامل آن دسته ازخاصیتهایی است که تحت تغییرشکل خمینه به طریقی اختیاری، البته بدون ایجاد بریدگی، شکاف و سوراخ، حفظ می‌شوند.

اولین‌قدمهای اساسی درنظریهٔ توپولوژیك خمینه‌های سه‌بعدی اواخر قرن گذشته به وسیلهٔ پوانکاره، دن، و هگارد[1] برداشته شد.

یك اشکال درمطالعهٔ خمینه‌های سه بعدی این است که تجسم مستقیم تمامی یك خمینه دشوار است و ازاین‌رو نمایش تجریدی نقش مهمتری ایفا می‌کند. بسیاری از رویه‌ها را می‌توان تجسم کرد بدین سبب که آنها را می‌توان ازبیرون یعنی از بعد سوم دید؛ یك بعد اضافی به‌رویه جای کافی برای خم‌شدن و بسته شدن می‌دهد.

در قرن نوزدهم ریاضیدانان دریافتند که خمینه‌های دو بعدی را می‌توان به‌صورت چند ضلعیهایی که اضلاع آنها به‌طریقی‌معین برهم منطبق می‌شوند نمایش داد. با این ایده می‌توان خمینه‌های سه بعدی را با استفاده از چندوجهیها مورد مطالعه قرار داد. مثلا چنبرهٔ سه‌بعدی را می‌توان ازانطباق تجریدی وجوه مقابل یك‌مکعب مستطیل به‌دست آورد. به‌عنوان‌مثالی دیگر، یك دوازده‌وجهی‌منتظم را درنظر بگیرید. دوازده وجه این‌شکل پنج‌ضلعیهایی منتظم هستند و دوتا دوتا طوری قرار گرفته‌اند که اعضای هرجفت موازی می‌باشند و یالهای هرجفت از وجوه موازی را می‌توان دو به‌دو به‌قسمی درنظر گرفت که صفحهٔ مار برآنها ازمرکز بگذرد. هرجفت از پنج‌ضلعیهای متقابل‌را درنظر بگیرید. پنج‌ضلعی اول را به‌اندازهٔ ۱/۱۰ دور کامل در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حول محور عمود برسطح آن دوران داده و به‌طور تجریدی بر پنج‌ضلعی دوم منطبق کنید. این‌کار خمینه‌ای سه‌بعدی موسوم به‌خمینهٔ پوانکاره پدید می‌آورد(این‌خمینه هم‌ارز خمینه‌ای است که پوانکاره درسال ۱۹۰۲ کشف کرد و دارای اهمیت ویژه‌ای در نظریهٔ خمینه‌های سه‌بعدی است). اگرهمین‌کار را به‌جای ۱/۱۰ دور با ۳/۱۰ دور دوران انجام دهیم به‌خمینه‌ای سه‌بعدی موسوم به‌فضای دوازده وجهی زایفرت-وبر[2] می‌رسیم. این‌کار را می‌توان با هرچندوجهی منتظم یا نامنتظم انجام داد و خمینه‌های پیچیده‌ای حاصل می‌شوند.

به‌زبان شهودی، مقصود از هندسهٔ ذاتی یك رویه بررسی آن دسته از خواص هندسی رویه است که برای یك موجود خیالی که جهانش به‌آن رویه محدود می‌شود معنی‌دار باشند. مثلا طول، مساحت و زاویه مفاهیم ذاتی هستند. همهٔ مفاهیم ذاتی را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان کرد، بدین معنی که هرگاه در هرنقطهٔ

1. Heegaard 2. Seifert-weber

رویه یك‌مفهوم ضرب داخلی برای‌مجموعهٔ بردارهای‌مماس برروبه درآن‌نقطه منظورکنیم، می‌توانیم به‌مفاهیم طول، مساحت و زاویه دست یابیم. زاویه و طول بردار از فرمولهای معمولی مثلثاتی استخراج می‌شوند. طول به‌صورت انتگرال سرعت حرکت یك نقطهٔ مادی روی مسیر موردنظر تعریف می‌شود، و غیره. خواص ذاتی تحت تبدیلات همانمتری حفظ می‌شوند (مقصود ازهمانمتری تبدیلی است که ضرب داخلی بردارهای مماس را حفظ می‌کند). با منظورکردن‌ضربهای داخلی گوناگون می‌توان هندسه‌های‌مختلفی روی یك مجموعه وضع کرد. مثلا، می‌دانیم یك چنبره و یك مربع که اضلاع مقابلش برهم منطبق شده‌اند توپولوژی یکسانی دارند. به‌کمك این مطالب می‌توانیم نوعی «هندسهٔ مسطح» روی چنبره بنا کنیم که متمایز ازهندسهٔ متداول چنبره به‌عنوان یك زیرمجموعهٔ فضای سه‌بعدی اقلیدسی است. هندسهٔ ذاتی یك ناحیهٔ کوچك حول هر نقطه در مربع، شبیه هندسهٔ ذاتی یك ناحیهٔ کوچك از صفحه است. خاصیت مزبور حتی برای نقاط واقع بر اضلاع یا رأسهای مربع نیز برقرار است. وقتی همهٔ همسایگیهای یك فضا هندسهٔ قابل‌انطباق داشته باشند، یعنی بتوان فقط با توسل به‌هندسهٔ ذاتی نقاط گوناگون را از هم تمیز داد، می‌گوییم هندسه موضعاً همگون است.

دست‌کم دو تفاوت اساسی بین هندسهٔ خمینه‌های دو بعدی و هندسهٔ خمینه‌های سه‌بعدی وجود دارد. اول اینکه درحالت دوبعدی فقط سه هندسهٔ موضعاً همگون وجود دارند (اقلیدسی، کروی، هذلولوی) در صورتی که پنج هندسهٔ موضعاً همگون دیگر (اضافه بر سه‌تای قبل) هستند که می‌توان خمینه‌های سه بعدی را به‌آنها مجهز ساخت. اما تفاوت دیگری نیز هست که منشأ پیچیدگیهای برطرف ناشدنی است. ممکن‌است دوخمینهٔ سه‌بعدی موضعاً همگون را طوری باهم «ترکیب» کرد (به‌صورت مجموع همبند که بعداً شرح آن خواهد آمد) که خمینهٔ سه بعدی حاصل نتواند هندسهٔ موضعاً همگون را بپذیرد. نکتهٔ امیدوارکننده این است که توپولوژیدانها می‌توانند به وسیلهٔ روشهای کاملا توپولوژیك خمینه‌های سه‌بعدی را به‌قطعات بسیارساده‌ای تجزیه‌کنند. مطالعات بسیار عمیق دراین رشته این‌حدس پایه‌دار را به‌وجود آورده‌است که در مورد «اغلب» خمینه‌های سه‌بعدی این‌گونه پیچیدگیها نقش عمده‌ای ندارند. در واقع ثابت شده‌است که «اغلب» خمینه‌های سه بعدی می‌توانند ساختار هندسهٔ موضعاً هذلولوی را بپذیرند. و این‌جای امیدواری بسیاری‌است زیرا خمینه‌های هذلولوی سه‌بعدی دارای خواص جالبی هستند. مثلا موستو[1] ثابت‌کرده است که اگر یك‌خمینهٔ سه‌بعدی‌ساختار موضعاً هذلولوی را بگیرد، هندسهٔ مزبور به‌وسیلهٔ توپولوژی کاملا تعیین می‌شود. نتیجه‌ای از قضیه موستو این است که همهٔ خمینه‌هایی را که دارای هندسهٔ موضعاً همگون هستند می‌توان علی‌الاصول رده‌بندی‌کرد. دربخش آخر این مقاله توضیحات بیشتری دراین موارد داده می‌شود. چرا بعد سه برای رده‌بندی خمینه‌ها مهم است؟

اساساً سه نوع مسألهٔ رده‌بندی در ارتباط با رستهٔ خمینه‌های هموار، قطعه به‌قطعه‌خطی (مانند «چندوجهیها»)، وتوپولوژیك وجود دارند که این رسته‌ها را به‌ترتیب با Diff، PL، و Top نشان می‌دهیم. درابعاد ۵ یا بیشتر، براساس کارهای کربی[1] و زیبنمان[2] می‌دانیم که رده‌بندی خمینه‌های PL و Top متفاوت است. در ابعاد ۷ یا بیشتر، بر اساس کارهای میلنر[3] و هرش[4]، می‌دانیم که رده‌بندیهای PL و Diff متفاوت هستند. اما در بعد سه یا کمتر، همه رده‌بندیها یکسان می‌باشند(کارهای موئیز[5])، لذا دراین‌مورد، رستهٔ PL درائباتها ساده‌تر است.

1. Mostow

گروه بنیادی

یك کمان دریك‌فضای توپولوژیك X، یك‌خم است که دونقطه ازفضا را به‌هم وصل می‌کند. اگر یك کمان در جایی خاتمه یابد که کمان دیگری شروع می‌شود، می‌توانیم این دو کمان را با پیمودن درامتداد اولی وسپس درامتداد دومی«ترکیب» کنیم. این ایدهٔ «ترکیب» را به‌عنوان عمل «ترکیب» کمانها درنظر می‌گیریم. این عمل روی مجموعهٔ کمانها عملی بسته و شرکتپذیر است.

اگر نقطهٔ شروع و نقطهٔ خاتمهٔ یك کمان برهم منطبق باشند آن کمان را یك طوقه[6] گوییم. حال اگر یك نقطهٔ p را در فضای توپولوژیك مورد نظرمان تثبیت‌کنیم و آن را نقطهٔ پایه برای طوقه‌ها بنامیم، می‌توانیم هردوطوقه به‌پایهٔ p را باهم «ترکیب» کنیم.

منظورمان از یك طوقهٔ بدیهی در نقطهٔ p، طوقهٔ ثابت درآن نقطه است.این طوقه را به O یا O_p نمایش می‌دهیم. وارون یك طوقه، طوقه‌ای است منطبق برطوقه اول با جهت سیرمعکوس. دوطوقه درفضای X را هوموتوپ نامیم اگر در داخل X یکی را بتوان به‌طور پیوسته به‌دیگری تبدیل‌کرد. اکنون به‌جای طوقه‌ها ردهٔ هوموتوپی طوقه‌ها را در نظر می‌گیریم. حال اگر $[\alpha]$، $[\beta]$ رده‌های هم‌ارزی دوطوقهٔ α، β باشند تعریف می‌کنیم

$$[\alpha]\circ[\beta]=[\alpha * \beta]$$

(«$*$» عمل روی طوقه‌ها و «$\circ$» عمل روی ردهٔ هوموتوپی طوقه‌هاست).

مجموعهٔ رده‌های هوموتوپی طوقه‌ها به‌پایهٔ p تحت‌عمل فوق، یك گروه را تشکیل می‌دهند که به گروه بنیادی فضای X با نقطهٔ پایهٔ $p\in X$ موسوم است وآن‌را با $\pi_1(X, p)$ نشان می‌دهند. می‌توان ثابت کرد که اگر X کمانی‌همبند باشد، یعنی بتوان هردو نقطهٔ آن را با یك‌کمان پیوسته به‌هم وصل کرد، آنگاه $\pi_1(X,p_1)$ و $\pi_1(X,p_2)$ برای هر دونقطهٔ p_1 و p_2 از X یکریخت هستند. مقصود ازیك فضای ساده‌همبند فضایی است که‌گروه بنیادی آن به پایهٔ هر نقطه، گروه بدیهی (تك عنصری) باشد.

1. Kirby
2. Siebenmann
3. Milnor
4. Hirsch
5. Moise
6. loop

علت دیگر اهمیت بعد سه،مطلبی است درارتباط با نظریهٔ گروهها. می‌توان ثابت کرد که هر گروه شمارا، گروه بنیادی یك خمینهٔ چهاربعدی است، و هر گروه متناهیاً تولید شده گروه بنیادی یك خمینهٔ چهاربعدی بسته است.

هیچ یك‌ازاین‌احکام دربعد سه درست نیست. بدین ترتیب مسألهٔ رده‌بندی خمینه‌ها در بعد چهار یا بیشتر، حتی اگر توجه خود را به‌خمینه‌های فشرده محدود کنیم، حل شدنی نیست زیرا ثابت شده است که رده‌بندی گروههای متناهیاً تولیدشده یك مسألهٔ حل‌ناپذیر است. این بدان‌معناست که هیچ الگوریتمی برای رده‌بندی‌خمینه‌ها وجود ندارد. مسألهٔ رده‌بندی در بعد سه هنوز حل نشده است.

مثالهایی ازخمینه‌های سه بعدی فشرده

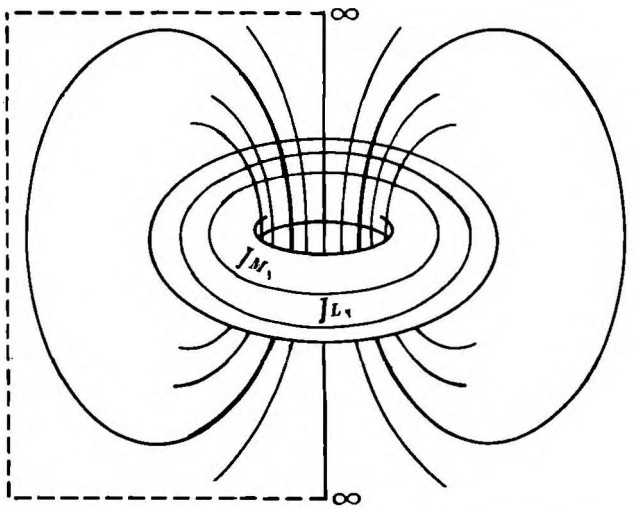
الف) کرهٔ سه‌بعدی، S^3

مدل ۱: کره سه‌بعدی S^3 به‌عنوان مرز یك سادك چهاربعدی. این مدل خوبی نیست چون از خود S^3 پیچیده‌تر است. اگر S^3 را ازطریق‌مثلث‌بندیی که توسط یك سادك چهاربعدی‌تولید می‌شود در نظر بگیریم، S^3 اجتماعی از پنج چهاروجهی است (در فضای چهاربعدی). مثلا اگر S^1 را مرز یك سادك دوبعدی که یك مثلث است بگیریم، مرز این‌سادك دوبعدی از سه سادك یك‌بعدی(اضلاع مثلث) تشکیل‌می‌یابد، و هریك ازاین سادکهای یك‌بعدی روبه‌روی یك رأس ازمثلث است. درحالت کرهٔ S^2، می‌توان آن را مرز یك سادك سه‌بعدی که یك چهاروجهی است در نظر گرفت؛ مرز این چهاروجهی از چهار سادك دوبعدی تشکیل یافته است و هریك از این مثلثها روبه‌روی رأسی از این چهاروجهی است. در مورد S^3 انتظار داریم‌که مرز یك سادك چهاربعدی باشد و این مرز از پنج سادك سه‌بعدی (یعنی چهاروجهی) تشکیل یافته باشد.

مدل ۲: S^3 به‌عنوان اجتماع گویها. با الهام‌گرفتن ازحالت ابعاد پایینتر، S^3 را می‌توان با دوختن دوگوی سه‌بعدی B^3_1 و B^3_2 به‌هم توسط یك همسانریختی درامتداد مرزهایشان به‌دست‌آورد.

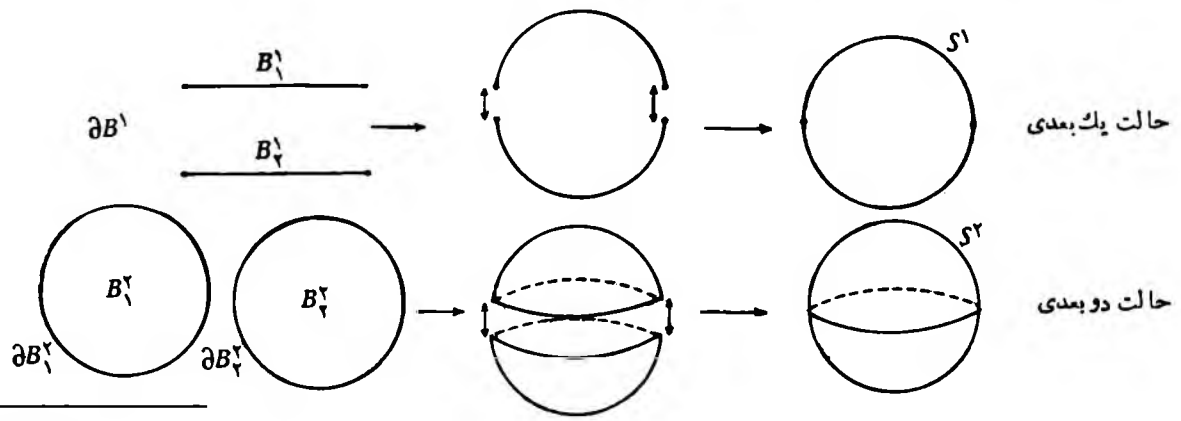
مدل ۳: S^3 به‌صورت فشرده‌شدهٔ یك نقطه‌ای $\mathbb{R}^3$. این مفهوم با استفاده ازتصویر کنجنگاری، شبیه‌حالت دوبعدی ارائه می‌شود.

مدل ۴: S^3 به‌صورت اجتماع دوچنبرهٔ توپر. فرض‌کنید T یك چنبرهٔ توپر باشد که از دوران قرص $(x-2)^2+y^2\leqslant 1$ حول محور y درفضای سه‌بعدی به‌دست می‌آید. خم بستهٔ سادهٔ J_M را با ضوابط $z=0$، $(x-2)^2+y^2=1$، تعریف می‌کنیم. این خم مرز یك‌گوی در T است اما روی مرز T هیچ ناحیه‌ای را محصور نمی‌کند. آن را یك نصف‌النهار مرز T می‌نامیم. خم بستهٔ سادهٔ J_L را که با ضوابط $y=0$، $x^2+z^2=1$ تعریف می‌شود یك خم مداری از مرز T می‌نامیم. فرض‌کنید T_1 و T_2 دونسخه از T باشند و J_{M_1}، J_{L_1}، J_{M_2}، J_{L_2} خمهای بستهٔ سادهٔ نصف‌النهاری و مداری متناظر آنها باشند. اگر h یك همسانریختی ازمرز T_1 برروی‌مرز T_2 باشدکه J_{M_1} را برروی J_{L_2} می‌فرستد آنگاه فضای به‌دست‌آمده از دوختن دوچنبرهٔ توپر در طول نقاط نظیر مرزی، ازنظر توپولوژیك همان S^3 است.



نمایهٔ یك‌گروه

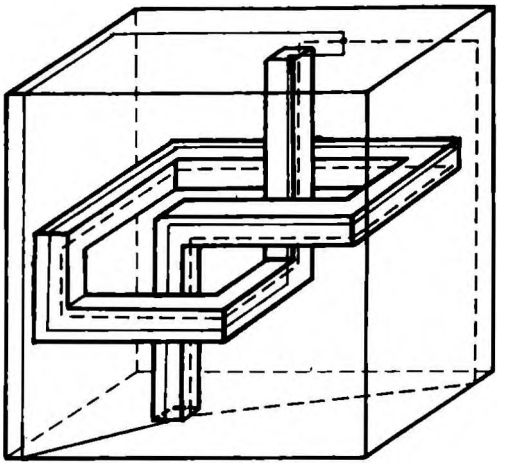
منظور ازنمایهٔ یك‌گروه[1] G عبارت است از جفت $(S,\{r_j\})$ که شامل یك مجموعه از مولدهای G مانند S، و مجموعهٔ کاملی از رابطه‌های بین این مولدها، مانند $\{r_j\}$، است. مقصود ازیك‌مجموعهٔ‌کامل روابط، مجموعه‌ای از روابط است که بتوان هررابطه بین عناصر گروه را ازآن نتیجه گرفت. نمایهٔ یك‌گروه را متناهی گویند اگر هر S و $\{r_j\}$ مجموعه‌هایی متناهی باشند. گروه G را متناهیاً تولید شده گویند اگر دست‌کم یك نمایهٔ متناهی داشته باشد.



1. group presentation

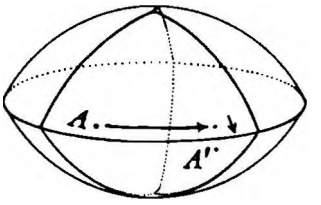
ب) کرهٔ هومولوژی

فرض کنید C_1 و C_2 دو مکعب باشند هر یک با یک سوراخ گره‌دار؛ و نیز فرض کنید J_{M_i} یک خم بستهٔ ساده روی مرز C_i باشد به‌طوری که J_{M_i} یک خمینهٔ جهت‌پذیر دوبعدی در C_i را محصور کند اما روی مرز C_i هیچ ناحیه‌ای را محصور نکند. و همچنین فرض کنید J_{L_i} خم بستهٔ سادهٔ دیگری روی مرز C_i باشد که J_{M_i} را فقط در یک نقطه قطع می‌کند و از آن عبور می‌کند. اگر h یک همسانریختی از مرز C_1 برروی مرز C_2 باشد که J_{M_1} و J_{L_1} را به‌ترتیب برروی J_{L_2} و J_{M_2} می‌فرستد، آنگاه فضای به‌دست‌آمده از دوختن دو مکعب C_1 و C_2 در امتداد نقاط نظیر مرزی یک‌خمینهٔ سه‌بعدی است که از نظر گروههای هومولوژی مانند S^3 است یعنی همهٔ گروههای هومولوژی S^3 و این خمینهٔ سه‌بعدی یکریخت هستند.



پ) فضای عدسی[1]

فرض کنید B گوی واحد در $\mathbf{R}^3$ باشد، $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$؛ و نیز فرض کنید p و q دو عدد صحیح نسبت به‌هم اول باشند. $L(p, q)$ را می‌توان به‌صورت به‌اصطلاح یک‌فضای خارج‌قسمت از B به‌دست‌آورد، یعنی فضایی که از برهم منطبق‌کردن بخشهایی از B، به‌ترتیبی که ذکر خواهد شد، حاصل می‌شود. به‌طور دقیق، هر نقطهٔ A روی سطح نیمکره بالا را به زاویهٔ $2\pi p/q$ در طول مدار افقی که از آن می‌گذرد دوران می‌دهیم وسپس آن را بر نقطهٔ قرینهٔ خود نسبت به‌صفحه xy، A'، منطبق می‌کنیم. توجه کنید که برای حفظ پیوستگی این انطباق، باید هر نقطهٔ استوا بر $(q-1)$ نقطهٔ دیگر در استوا منطبق شود. (ر.ك. شکل مربوط به $p=1$ و $q=3$). نیز توجه کنید که از نظر توپولوژیک، $L(1, 1)=S^3$.



1. lens space

ت) فضای تصویری سه‌بعدی $L(1, 2)=\mathbf{R}P^3$

$\mathbf{R}P^3$ از منطبق‌کردن نقاط روبه‌رو به قطر سطح کرهٔ توپر برهم به‌دست می‌آید.

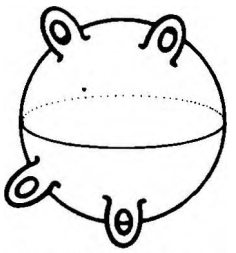
ث) در واقع هر خمینهٔ سه‌بعدی فشرده را می‌توان با برداشتن مجموعه‌ای متناهی از چنبره‌های توپر دو به‌دو مجزا از S^3 و بازگرداندن آنها به‌نحوی دیگر (به‌وسیلهٔ همسانریختیها) به‌دست آورد.

روشهای مطالعهٔ خمینه‌های سه‌بعدی

احتمالا طبیعیترین روش مطالعه خمینه‌های سه‌بعدی، تجزیهٔ آنها به‌قطعات کوچکتر است. برای این‌منظور روشهای گوناگونی‌وجود دارند.

۱. تقسیم هگارد[1]

در این روش، خمینه را به دو تکهٔ همسانریخت با زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^3$ تقسیم می‌کنند، که به آنها دستواره[2] می‌گویند. هردستواره تشکیل شده است از یک‌گوی بستهٔ توپر که بر آن تعدادی «دستهٔ» توپر نصب شده است (ر.ك. شکل زیر). تعداد دسته‌ها را گونهٔ[3] دستواره می‌نامند.



دستواره با گونهٔ چهار

می‌توان نشان داد که هر خمینهٔ همبند بستهٔ جهت‌پذیر سه‌بعدی دارای یک تقسیم هگارد است، و هرخمینهٔ سه‌بعدی را می‌توان از دو دستواره با گونهٔ برابر به‌وسیلهٔ انطباق مرزهای آنها به‌هم به‌دست آورد. مجموعهٔ همسانریختیهای انطباق، بسیار بزرگ و پیچیده است، و اینکه آیا دو همسانریختی انطباق، خمینهٔ سه‌بعدی یکسانی را به‌وجود می‌آورند یا نه مسألهٔ دشواری است.

۲. جراحی[4]

با این روش، می‌توانیم هر خمینهٔ جهت‌پذیری را بسازیم: برای این منظور چنبره‌های توپر T_1، ...، T_n را از S^3 حذف می‌کنیم و مجدداً آنها را در امتداد مرزهایشان به طریقی دیگر به S^3 می‌دوزیم. به‌بیان دقیقتر، یک چنبرهٔ توپر را درامتداد مرز ایجادشده به‌کرهٔ سوراخدار می‌چسبانیم به‌طوری که هر نقطهٔ مرزی بر نقطهٔ مرزی جدیدی از چنبره که توسط یک همسانریختی مرز چنبره معین می‌شود، منطبق‌می‌گردد. به‌علت اینکه چنبره همسانریختیهای بسیاری دارد این‌کار را به‌طرق گوناگونی می‌توان انجام داد.

1. Heegaard splitting 2. handlebody 3. genus 4. surgery

فضای پوششی

اگر X یك فضای توپولوژیك باشد، آنگاه جفت مرتب $(\tilde{X}, p)$ یك فضای پوششی است اگر:

(i) $\tilde{X}$ یك فضای توپولوژیك کمانی‌همبند باشد؛

(ii) $p: \tilde{X} \to X$ پیوسته باشد؛

(iii) هر $x \in X$ یك همسایگی باز $U = U_x$ داشته باشد به‌طوری که $p^{-1}(U)$ اجتماع مجزایی از مجموعه‌های باز S_i در $\tilde{X}$، موسوم به لایه‌ها باشد که $p|_{S_i}: S_i \to U$ یك همسانریختی برای هر i است.

فضای پوششی را اکمل گویند اگر $\tilde{X}$ ساده‌همبند باشد.

۳. پوششهای شاخه‌دار[1] S^3

در آنالیز مختلط، خصوصاً در نظریهٔ ادامهٔ تحلیلی، ساختن خمینه‌های دوبعدی (رویه‌های ریمان) و نگاشتهایی از آنها برروی کرهٔ ریمان $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ که نگاشتهای پوششی شاخه‌دار هستند بسیار متداول است. این‌کار به‌ابعاد بالاتر نیز قابل تعمیم است، و وسیله‌ای برای ساختن خمینه‌های سه‌بعدی است.

تعریف. فرض کنید M^n و N^n خمینه‌های فشرده باشند با زیرخمینه‌های سرهٔ $A^{n-2} \subset M$ و $B \subset N^{n-2}$. دراین‌صورت، یك نگاشت پیوستهٔ $f: M \to N$ پوشش شاخه‌داری با مجموعه‌های شاخه‌ای A (دربالا) و B (درپایین) است اگر:

۱. مؤلفه‌های پیش‌تصویر مجموعه‌های باز N پایه‌ای برای توپولوژی M باشند، و

۲. $f(A) = B$، $f(M - A) = N - B$، و $N - B$ دقیقاً مجموعهٔ نقاط در N باشد که به‌طور یکسان پوشیده می‌شوند، یعنی همسایگیهایی چون U دارند به‌طوری که f هر مؤلفه $f^{-1}(U)$ را به‌طور همسانریخت برروی U می‌فرستد.

تذکر: $f: M - A \to N - B$ یك نگاشت پوششی است.

مثال ۱. نگاشت مختلط $z \mapsto z^k$ که درآن، قرص واحد k بار خودش را می‌پوشاند، در مبدأ، k بار شاخه‌دار است. نگاشت مختلط $z \mapsto z^k/|z^{k-1}|$ فاصله ازمبدأ را حفظ می‌کند و به‌نگاشت پیوسته‌ای ازکرهٔ ریمان به‌خود آن توسعه می‌یابد

$$\mathbf{C} \cup \{\infty\} \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

که در دونقطهٔ ۰ و ∞ با شاخص k شاخه‌دار می‌شود.

مثال ۲. به‌عنوان حالت خاص مثال بالا، برای $k = 2$، یك‌پوشش شاخه‌دار دولایه‌ای، $S^2 \to S^2$ را توصیف می‌کنیم. اگر یك قرص باز را ازتصویر برداریم، که بستار آن نقاط شاخه را شامل نباشد، و دو قرص در بالا را برداریم که برروی قرص مزبور فرستاده می‌شوند، آنگاه چیزی که باقی می‌ماند یك‌پوشش شاخه‌دار ازیك قرص به‌وسیلهٔ یك حلقه[1] است.

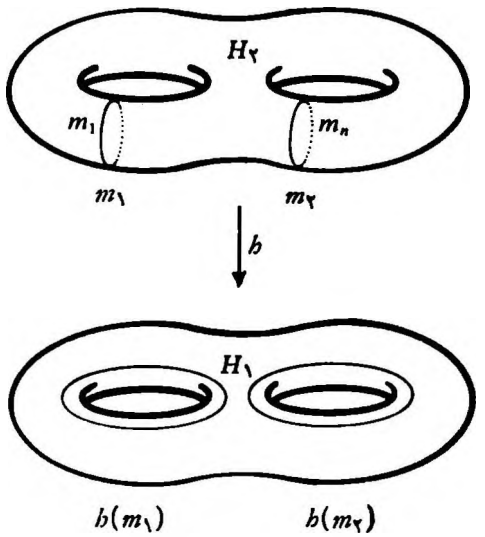
ازمیان این سه روش، به‌شرح روش اول می‌پردازیم.

(نمودارهای) تقسیم هگارد

فرض کنید D^2 یك قرص باشد. یك دستواره از گونهٔ g، نتیجهٔ اتصال g «دسته»، $D^2 \times [-1, 1]$، به‌یك گوی سه‌بعدی B^3 به وسیلهٔ دوختن اجزاء $D^2 \times \{\pm 1\}$ به $2g$ قرص مجزا از ∂B^3 است به‌نحوی که‌حاصل یك‌خمینهٔ سه‌بعدی جهت‌پذیر مرزدار باشد. دو دستواره ازیك گونه همسانریخت هستند. مرز یك‌دستواره از گونهٔ g، یك خمینهٔ دوبعدی بسته از گونهٔ g است. فرض کنید H_1، H_2 دو دستواره باشند از یك‌گونه، مثلا g، و فرض کنید $h: \partial H_2 \to \partial H_1$ یك همسانریختی باشد، دراین‌صورت، فضای انطباق زیر را داریم

$$M^3 = H_1 \cup_h H_2$$

M^3 یك‌خمینهٔ سه‌بعدی بستهٔ جهت‌پذیر است. سه‌تایی (H_1, H_2, h) یك تقسیم هگارد (یا نمودار هگارد) از گونهٔ g برای خمینهٔ M^3 نامیده می‌شود. در واقع خمینهٔ M^3 تا حد همسانریختی به‌وسیلهٔ تصاویر $h: \partial H_2 \to \partial H_1$ مشخص می‌شود. در واقع M^3 به‌وسیلهٔ تصاویر $h(m_1)$، ...، $h(m_n)$ روی ∂H_1 (نمودار هگاردآن) که دراینجا m_1،...، m_n نصف‌النهارها[2]ی متعارف روی ∂H_2 هستند تعیین می‌شود.

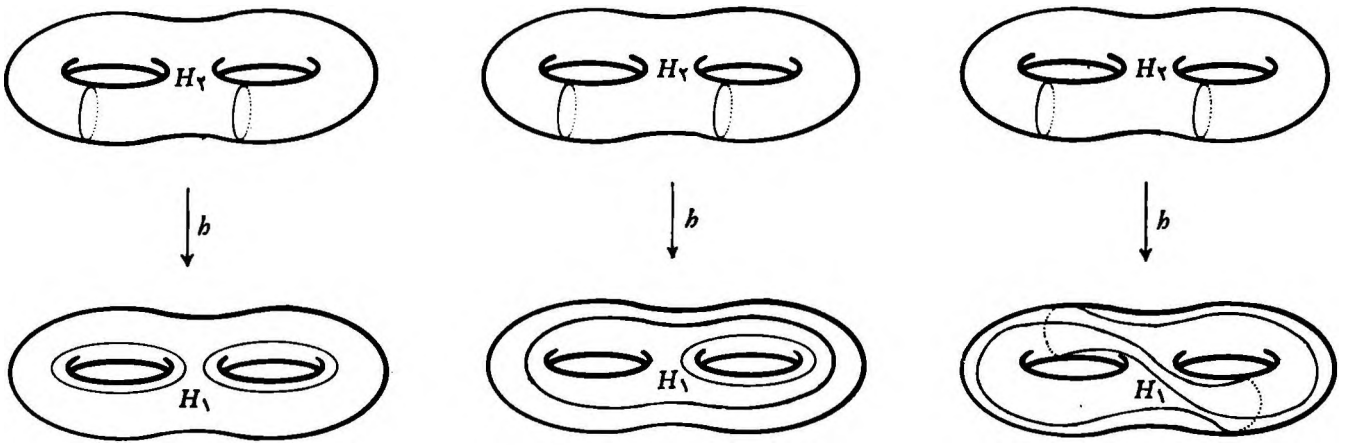


تصویر m_i روی ∂H_1 تحت همسانریختی انطباق $h: \partial H_2 \to \partial H_1$ خمهای شاخص نمودار نامیده می‌شود.

متأسفانه یك خمینهٔ سه بعدی بینهایت نمودار هگارد متمایز دارد، ولذا مسألهٔ رده‌بندی، به‌رده‌بندی نمودارها موکول می‌شود. مثلا سه‌نمودار زیر همگی S^3 را ایجاد می‌کنند.

1. branched coverings

1. annulus 2. meridians



قضیهٔ زیر برای اثبات این مطلب به‌کار می‌رود.

قضیهٔ ۱. یك خمینهٔ سه‌بعدی ساده‌همبند M^3 به‌طور توپولوژیك S^3 است، اگر بتوان آن را به صورت پیوند دو چنبرهٔ توپر M_1 و M_2 نوشت به‌طوری‌که $M_1 \cap M_2 = \partial M_1 = \partial M_2$.

همچنین قضیهٔ زیر را برای رابطهٔ بین یك خمینه و نمودارهای هگارد آن داریم.

قضیهٔ ۲. از خمینه‌های «هم‌ارز» به نمودارهای هگارد «هم‌ارز» می‌رسیم و از نمودارهای هگارد «هم‌ارز» به خمینه‌های «هم‌ارز».

مجموع همبند

روش دیگر مطالعهٔ خمینه‌های سه بعدی به‌کمك «مجموع همبند[1]» است. اگر M_1 و M_2 دو خمینهٔ n بعدی باشند، «مجموع همبند» آنها، $M_1 \# M_2$، به‌وسیلهٔ برداشتن درون یك‌گوی n بعدی B_i از M_i و انطباق خمینه‌های سوراخ شده $M_i - \operatorname{int} B_i$ برهم به‌وسیلهٔ همسانریختی عکس‌کنندهٔ جهت $h: \partial B \to \partial B_2$ به‌دست می‌آید به‌طوری‌که

$$M_1 \# M_2 = (M_1 - \operatorname{int} B_1) \cup_h (M_2 - \operatorname{int} B_2) .$$

در واقع «#» عمل شرکت‌پذیر و تعویض‌پذیر خوشتعریفی روی رستهٔ خمینه‌های سه بعدی جهت‌پذیر و همسانریختیهای حفظ‌کنندهٔ جهت است.

تعریف. یك خمینهٔ سه‌بعدی M^3 را اول گویند اگر $M = M_1 \# M_2$ نتیجه دهد M_1 و یا M_2 برابر S^3 است.

قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۳. هرخمینهٔ سه‌بعدی فشرده که یکریخت با S^3 نباشد، با مجموعی همبند چون $P_1 \# P_2 \# \dots \# P_k$ ازخمینه‌های اول یکریخت است. P_iها تا حد یکریختی به‌طور یکتا تعیین می‌شوند.

تعریف. یك خمینهٔ سه‌بعدی M^3 را کرهٔ هوموتوپی سه‌بعدی گوییم اگر M^3 بسته، همبند، و ساده‌همبند باشد.

تعریف. خمینه‌های سه‌بعدی جهت‌پذیر M_1 و M_2 را همنهشت گوییم اگر دو کرهٔ هوموتوپی سه‌بعدی S_1، S_2 موجود باشند به‌طوری‌که $M_1 \# S_1$ و $M_2 \# S_2$ یکریخت باشند (یعنی یك همسانریختی حفظ‌کنندهٔ جهت بین آنها موجود باشد).

تعریف. یك خمینهٔ سه‌بعدی جهت‌پذیر M^3 را که کرهٔ هوموتوپی سه‌بعدی نباشد، تجزیه‌پذیر[1] گوییم اگر M همنهشت با $M' \# M''$ باشد که هیچ‌یك از M' و M''، کرهٔ هوموتوپی سه بعدی نباشد. M تجزیه‌ناپذیر خوانده می‌شود اگر تجزیه‌پذیر نباشد.

قضیهٔ ۴. هرخمینهٔ سه‌بعدی تجزیه‌ناپذیر M یا همنهشت است با $S^2 \times S^1$، یا ناکروی[2] است (یعنی $\pi_i(M) = 0$ برای $i \geqslant 2$) و یا دارای گروه بنیادی غیربدیهی متناهی است.

با توجه به قضیهٔ ۴ این مسائل مطرح می‌شوند: خمینه‌های سه‌بعدی بستهٔ جهت‌پذیری که ناکروی هستند یا گروه بنیادی آنها غیربدیهی و متناهی است چیستند و کره‌های هوموتوپی سه بعدی چه می‌باشند. مطلب اخیر ما را به‌حدس پوانکاره می‌رساند که در حالت سه‌بعدی مسأله‌ای حل نشده‌است.

گروههای هوموتوپی بالاتر

مفهوم گروه بنیادی را می‌توان به ابعاد بالاتر نیز تعمیم داد. به‌این‌منظور به‌جای طوقه‌های یك‌بعدی باید طوقه‌های nبعدی را در نظر گرفت. منظور از یك طوقهٔ n بعدی، یك نگاشت پیوسته ازمکعب n بعدی است به‌طوری‌که مرز آن به‌یك‌نقطه فرستاده شود. بقیهٔ‌کار با الهام از حالت یك‌بعدی ادامه می‌یابد و به گروههای هوموتوپی مراتب بالاتر می‌رسیم.

می‌توان ثابت کرد که همهٔ گروههای هوموتوپی مرتبهٔ بالاتر، یعنی بزرگتر از ۱، تعویض‌پذیر (آبلی) هستند.

1. connected sum

1. decomposable
2. aspherical

حدس پوانکاره. هر کرهٔ هوموتوپی سه بعدی، همسانریخت با کرهٔ سه‌بعدی است.

اگر حدس پوانکاره درست باشد، قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۵. هرخمینهٔ سه‌بعدی بستهٔ جهت‌پذیر که گروه بنیادی آن یك گروه آزاد با $n > 0$ مولد باشد، «مجموع همبند» n نسخه از $S^2 \times S^1$ است.

سه قضیهٔ اساسی درباره خمینه‌های سه‌بعدی

سه‌قضیه اساسی دربارهٔ خمینه‌های سه‌بعدی عبارت‌اند از لم دن[1]، قضیهٔ طوقه[2]، و قضیهٔ کره[3].

لم دن. فرض‌کنید M^3 یك‌خمینه سه‌بعدی و $f: D \to M$ نگاشتی از یك قرص باشد که هیچ تکینه‌ای روی ∂D نداشته باشد (یعنی اگر $x \in \partial D$، $x \neq y$، $y \in D$، آنگاه $f(x) \neq f(y)$). دراین صورت یك‌نشانندهٔ[4] $g: D \to M$ با خاصیت $g(\partial D) = f(\partial D)$ وجود دارد.

قضیهٔ طوقه. فرض کنید M^3 یك خمینهٔ سه بعدی باشد که درآن ∂M از تعدادی رویه تشکیل شده است و نیز فرض‌کنید L یك‌طوقهٔ متعلق به‌مجموعهٔ باز U از یك مؤلفهٔ جهت‌پذیر N از ∂M باشد به‌طوری‌که L در M هوموتوپ با صفر باشد ولی در ∂M، هوموتوپ با صفر نباشد. آنگاه یك طوقه سادهٔ L_0 در U با همان خاصیت وجود دارد. (مقصود از یك طوقهٔ ساده، یك خم بسته است که خود را قطع نکند.)

قضیهٔ کره. فرض‌کنید M^3 یك خمینهٔ سه‌بعدی جهت‌پذیر باشد به‌طوری‌که $\pi_2(M) \neq 0$. دراین صورت، یك کرهٔ دوبعدی S^2 نشانده شده در M وجود دارد به‌طوری‌که S^2 در M هوموتوپ با صفر نباشد.

تذکر: شرط $\pi_2(M) \neq 0$ این مطلب را بیان می‌کند که در M تصویر یك کرهٔ دوبعدی وجود دارد که‌احتمالا خودش را قطع می‌کند و نمی‌توان آن را در M به‌طور پیوسته به‌یك نقطه تبدیل کرد. حکم قضیه، وجود تصویر یك‌کرهٔ دوبعدی با همان خاصیت را بیان می‌کند که این تصویر با کره همسانریخت است.

می‌توان ثابت کرد که وجود یك‌کرهٔ دوبعدی غیر قابل انقباض در M نتیجه می‌دهد که (اگر M فشرده باشد و $\partial M = \varnothing$) $\pi_1(M)$ یك گروه دوری‌نامتناهی یا یك‌حاصلضرب‌آزاد غیر بدیهی است. لذا قضیهٔ کره نتیجه می‌دهد که اگر یك‌گروه را بتوان به‌صورت $\pi_1(M)$ نمایش داد که $\pi_2(M) \neq 0$، آنگاه گروه را می‌توان به‌حاصلضرب آزاد تجزیه کرد (احتمالا زیرگروههای متناهی نیز با آن همراه است).

نکته: وجه مشترك این سه‌قضیه، یافتن یك شیء هندسی از ساده‌ترین نوع با خواص ذکر شده است.

1. Dehn lemma
2. loop theorem
3. sphere theorem
4. embedding

ساختار هندسی

یك متریك روی یك خمینهٔ M موضعاً همگون نامیده می‌شود اگر برای هر x و y مفروض در M همسایگیهای U و V به‌ترتیب حول x و y و یك همانمتری $(U, x) \to (V, y)$ موجود باشند.

می‌گوییم M یك ساختار هندسی می‌گیرد اگر M یك متریك موضعاً همگون، و کامل را بپذیرد.

مطالب فوق گویای بخشی از پیشرفتهای نظریهٔ خمینه‌های سه‌بعدی تا اوائل دههٔ ۱۹۶۰ است که بیشتر ناشی از تحقیق در مورد حدس پوانکاره بود. اما نظریه خمینه‌های سه بعدی در حال حاضر وضعیت بسیار پیشرفته‌تری دارد. اکنون علاوه برتعداد بسیار زیادی ازمسائل‌حل‌نشده و مددگیری ازبسیاری ازشاخه‌های متنوع ریاضی، تحقیق در مورد حدس ترستن[1] که دربرگیرندهٔ حدس پوانکاره نیز هست یکی از مسائل بسیار مهم و محوری این نظریه می‌باشد. در ادامهٔ مقاله، توضیحاتی اجمالی در جهت روشن‌شدن حدس مزبور می‌آید، هرچندکه مقدمات‌ریاضی زیادی برای درك واقعی آن لازم است.

حدس ترستن. درون هرخمینهٔ سه‌بعدی فشرده تجزیه‌ای متعارف می‌پذیرد که هربخش آن دارای ساختار هندسی است.

برای پرداختن به‌این حدس، خمینه‌های سه بعدی فشرده، جهت‌پذیر، و اول را در نظر می‌گیریم (تعمیم بحث به خمینه‌های سه‌بعدی‌جهت‌ناپذیر نیز چندان دشوار نیست ولی بدان نمی‌پردازیم). اصولا سه‌نوع ازاین‌گونه خمینه‌ها وجود دارند:

۱. خمینه‌هایی که گروه بنیادی آنها متناهی است. این‌گونه خمینه‌ها گوی سه‌بعدی هستند و خمینه‌های بسته‌ای می‌باشند که به‌وسیلهٔ یك کرهٔ هوموتوپی پوشیده می‌شوند. برای این خمینه‌ها حدس ترستن به‌صورت زیر مطرح می‌شود:

حدس. اگر M^3 خمینه‌ای بسته و جهت‌پذیر باشد با $\pi_1(M)$ متناهی، آنگاه M ساختار هندسی نوع S^3 را می‌گیرد.

این‌حدس متضمن‌حدس پوانکاره است وعلاوه بر آن می‌گوید همهٔ کنشها[2]ی آزاد گروههای متناهی روی S^3، مزدوج با کنشهای متعامد[3] هستند.

این مطلب اثبات شده‌است که اگر یك گروه متناهی G کنشی آزاد روی S^3 داشته باشد آنگاه G یکریخت با زیرگروهی از SO_4 است (گروه دورانهای فضای اقلیدسی چهاربعدی). همچنین ثابت شده است که اگر G ازمرتبهٔ 2^k باشد یا گروهی غیردوری از مرتبهٔ $3 \cdot 2^l$ به‌ازای $l \geq 1$ باشد آنگاه همهٔ کنشهای آزاد G روی S^3 با کنشهای متعامد مزدوج هستند. همین حکم در مورد هر گروه Gی غیردوری و غیر دووجهی[4] ازمرتبهٔ $3^m 2^k$ ثابت شده است.

1. Thurston
2. actions
3. orthogonal
4. non-dihedral

۲. خمینه‌های سه‌بعدی فشردهٔ جهت‌پذیر با گروه بنیادی نامتناهی. این گونه خمینه‌ها برحسب موجودبودن یا نبودن یك کرهٔ دوبعدی نشانده شده در آنها، که وقتی خمینه را در امتداد آن می‌بریم خمینه دو تکه شود، به دو دسته تقسیم می‌شوند. ازطرفی فرض اول بودن خمینهٔ سه‌بعدی نتیجه می‌دهد هر کره‌ای که بریدن خمینه‌درامتداد آن،خمینه را به‌تکه‌هایی‌تقسیم کند باید مرز یك گوی باشد.

ثابت شده‌است که $S^2 \times S^1$ تنها خمینهٔ اول جهت‌پذیر شامل یك کره نشانده شده‌است که بریدن خمینه در امتداد آن خمینه را تکه نمی‌کند.

بقیهٔ خمینه‌های سه بعدی فشرده، جهت‌پذیر، و اول، تحویل‌ناپذیر[1]اند، یعنی‌هر کرهٔ دوبعدی‌نشانده‌شده درآنها مرز یك گوی‌سه‌بعدی است. اکنون بنابه قضیهٔ کره،اگر M جهت‌پذیر و تحویل‌ناپذیر باشد آنگاه $\pi_2(M)=0$. به‌علاوه اگر $\pi_1(M)$ نامتناهی باشد اثبات شده‌است که پوشش اکمل M انقباض‌پذیر[2] است و M خود ناکروی می‌باشد. در این مرحله برحسب اینکه مرز خمینهٔ سه‌بعدی M، «نافشردنی[3]» باشد یا نه کارمان ادامه می‌یابد. گفته می‌شود یك رویهٔ بستهٔ جهت‌پذیر F در درون M نافشردنی است اگر $\pi_1(F) \to \pi_1(M)$ یك تکریختی باشد، و F مرز یك گوی سه‌بعدی در M نباشد.

اکنون یك‌خمینهٔ سه‌بعدی فشرده، جهت‌پذیر، و تحویل‌ناپذیر M با گروه بنیادی نامتناهی را در نظر بگیرید. ممکن است M مرز داشته باشد یا نداشته باشد. اگر ∂M نافشردنی نباشد، با استفاده از قضیهٔ طوقه و روشهای بریدن خمینه‌ها می‌توان اثبات کرد M به‌تکه‌هایی بریده می‌شودکه دارای مرز نافشردنی هستند.

اکنون مسألهٔ ما به‌حالت یك‌خمینهٔ سه‌بعدی‌فشرده،جهت‌پذیر، تحویل‌ناپذیر با مرز نافشردنی ساده شده است (این‌شامل حالت $\partial M=\varnothing$ نیز می‌باشد).

تعریف. یك فضای تاری زایفرت[4] یك خمینهٔ سه بعدی M است اگر بتوان آن را به دایره‌هایی مجزا، موسوم به تارها، تجزیه کرد، به‌طوری‌که هرتار دارای یك‌همسایگی غلافی (چنبرهٔ توپر) باشدکه از تارهایی تشکیل‌یافته که نصف‌النهارهای آن نیستند.

در مورد چنبره‌های نافشردنی دوطرفه[5] (یك رویهٔ N^2 نشانده‌شده‌در یك خمینهٔ M^3 دوطرفه‌است‌اگر N^2 همسایگی‌غلافی N^2 را به‌دوتکه تقسیم کند)ثابت شده‌است که‌خانوادهٔ متناهی‌مجزایی از این چنبره‌ها نشانده‌شده در M،که M را به تکه‌هایی تقسیم می‌کند وجود دارد،که یا فضای‌تاری زایفرت است یا هیچ چنبرهٔ نافشردنی نشانده‌شده را احتمالا به‌جز آنهایی‌که «موازی» با مرز هستند نمی‌پذیرد.

به‌علاوه ثابت شده است‌که یك‌چنین خانوادهٔ‌کمین ازچنبره‌ها در M تا ایزوتوپی یکتاست. تکه‌های این تقسیم آخری است که حدس زده‌شده ساختارهای هندسی می‌پذیرند. نیز ثابت شده است که فضای تارهای زایفرت ساختارهای هندسی می‌گیرند، بنابراین فقط باید حالتی را درنظر گرفت که خمینهٔ سه‌بعدی M فشرده، جهت‌پذیر، و تحویل‌ناپذیر است و هرچنبرهٔ نافشردنی نشانده شده در آن «موازی» با ∂M می‌باشد.

یك خمینهٔ سه‌بعدی M هاکن[1] نامیده می‌شود اگر M اول باشد و شامل یك رویهٔ دوطرفهٔ نافشردنی غیرهمسانریخت با S^2 باشد (که مرز آن، درصورت وجود، روی ∂M قرار گیرد). اگر M یك‌خمینهٔ هاکن باشد که فضای تاری زایفرت نباشد، آنگاه می‌توان ثابت کرد که هر زیرگروه $\pi_1(M)$ یکریخت با $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ مزدوج باگروه بنیادی مؤلفه‌ای از ∂M است. یك چنین خمینه‌ای ناچنبره‌ای[2] نامیده می‌شود.

اکنون ترستن ثابت کرده است که یك چنین خمینه‌ای دارای ساختار هذلولوی است. درنتیجه حدس هندسی‌سازی ترستن برای همهٔ خمینه‌های هاکن، و از آنجا، برای همه مجموعهای هیبند خمینه‌های هاکن برقرار است.

آنچه باقی مانده است، خمینه‌های سه‌بعدی بستهٔ جهت‌پذیر و تحویل‌ناپذیر غیرهاکن است با گروه بنیادی نامتناهی. همهٔ این‌گونه خمینه‌ها باید بسته باشندولذا حدس‌ترستن به‌صورت زیر مطرح می‌شود.

حدس. فرض کنید M یك خمینهٔ سه‌بعدی بسته، جهت‌پذیر و تحویل‌ناپذیر با گروه بنیادی نامتناهی،و غیرهاکن باشد. آنگاه M یك فضای تاری زایفرت است یا ساختار هذلولوی را می‌پذیرد.

در جهت اثبات این حدس پیشرفت کمی به‌دست آمده یا دست‌کم انتشار یافته است.

1. irreducible 2. contractible 3. incompressible
4. Seifert fibre space 5. two-sided

1. Haken 2. atoroidal

مراجع

1. Hemple, *3-Manifolds*, Ann. of Math. Studies (86), Princeton University Press, Princeton, Newjersey (1976).
2. Moise, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Springer-Verlag, NewYork (1977).
3. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish Inc., Berkeley (1977).
4. Stillwell, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, NewYork (1980).
5. Scott, "The geometries of 3-manifolds," *Bull. London Math. Soc.*, (15) (1983) 401-487.
6. Thurston, *The Geometry and Topology of 3-Manifolds*, preprint, Princeton Univ. Press (1977).
7. Weeks, J., *The Shape of Space*, Marcel-Dekker, NewYork (1985).

مرجعهای ۲ و ۳ و ۴ و مقالهٔ ۵ پیشنیاز کمتری می‌طلبد. مرجع ۶ هنوز به صورت کتاب انتشار نیافته است. مقالهٔ ۵ بسیار خواندنی است.

وقتی‌که‌شبه‌نرمال بودن برنرمال بودن دلالت می کند*

دین هیکرسن، شرمن استاین، کنیا یاماتوکا*

ترجمهٔ طیبه کوچکپور

اُره در ۱۹۳۷ در مقالهٔ «ساختارها، و نظریهٔ گروهها» [۷] مفهوم زیرگروه شبه‌نرمال یك گروه را به‌عنوان تعمیمی اززیر گروه نرمال معرفی کرد. دراینجا ما شرطی‌را ارائه می کنیم که برحسب شاخص زیر گروه بیان می‌شود وضامن نرمال بودن یك زیر گروه‌شبه نرمال است. بحثها و استدلالهایی که در زیر می‌آید، الهامبخش تمرینهای متعددی در درس نظریهٔ گروهها و نظریهٔ گالواست.

۰. تعریف زیرگروه شبه نرمال. فرض کنیم H زیرگروهی از گروه G است. اگر به‌ازای هر $g \in G$ داشته باشیم $gH = Hg$، آنگاه H یك زیرگروه نرمال G است. این نشان می‌دهد که برای همهٔ زیرگروههای J از G داریم

$$JH = HJ. \qquad (*)$$

(به‌ازای‌زیرمجموعه‌های $A, B \subset G$، $AB = \{ab: a \in A, b \in B\}$.) هر زیرگروه H از G که به‌ازای همهٔ زیرگروههای J از G در (*) صادق باشد، یك زیرگروه شبه نرمال نامیده می‌شود. اگر H زیرگروهی از G باشد، آنگاه شرایط زیر هم‌ارزند

(۰) H در G شبه نرمال است.

(۱) برای هر زیرگروه دوری J از G، $JH = HJ$.

(۲) برای هر $g \in G$ و $h \in H$، $r \in \mathbb{Z}$ و $h' \in H$ موجودند به‌طوری‌که $hg = g^r h'$.

(۳) برای هر زیرگروه J از G، $HJ = \langle H, J \rangle$ زیرگروه تولید شده توسط J و H است.

اگر G متناهی باشد، شرایط بالا همچنین با شرط زیر هم‌ارزند

(۴) برای هر زیرگروه J از G،

$$[\langle H, J \rangle : H] = [J : H \cap J].$$

هم‌ارزی (۰) و (۱) ازاین واقعیت ناشی می‌شود که هر زیرگروه G اجتماعی اززیرگروههای دوری‌است. شرط(۲) همان شرط (۱) است که برحسب عناصر بیان شده. شرط (۳) به این واقعیت ارتباط پیدا می‌کندکه $HJ = JH$ اگر و تنها اگر HJ یك گروه‌باشد. شرط(۴) ازتساوی $|HJ| = |H||J|/|H \cap J|$ نتیجه می‌شودکه برای زیرگروههای متناهی J و H معتبراست.

زیرگروههای شبه نرمال، موضوع تحقیقات زیادی بوده‌اند (نگاه‌کنید به [۳، ۷، ۹، ۱۱] ومقالهٔ دسکینز و ونتسکه در [۱۲]).

۱. چه‌وقت شبه نرمال بودن بر نرمال بودن دلالت می‌کند؟

اره در [۷] نشان دادکه زیرگروه شبه نرمال یك گروه متقارن، نرمال است. ما به‌روشی مشابه نشان می‌دهیم که اگر H یك زیرگروه شبه نرمال G باشد و $[G : H]$ یك‌عدد صحیح بی‌مجذور[۱] یا دوبرابر یك‌عدد بی‌مجذور باشد، آنگاه H یك زیرگروه نرمال G است. چگالی چنین اعداد صحیحی برابر است با

$$۷/\pi^۲ \cong ۰٫۷۱۰$$

لم ۱.۱. یك زیرگروه شبه نرمال H از گروه G به‌طوری که $[G : H]$ اول باشد، زیرگروه نرمالی از G است.

برهان. فرض کنیم که H در G نرمال‌نباشد و $H' = a^{-1}Ha$ زیرگروهی مزدوج با H و مجزا از H باشد و نیز فرض کنیم $K = HH' = H'H$. چون $[G : H]$ اول‌است و $H \subset K \subset G$، پس $K = G$. به‌ازای یك $h' \in H'$، $h \in H$ داریم $a^{-1} = h'h$ یعنی $a^{-1} = a^{-1}h^*ah$ به‌ازای $h^*, h \in H$. ازاین‌نتیجه می‌شود که $a \in H$ که با فرض $a^{-1}Ha \neq H$ متناقض است. پس H در G نرمال است.

در لم بعدی ازاین‌مطلب استفاده می‌کنیم که اگر G یك گروه، $N \subset H \subset G$ زیرگروههایی ازآن، و N در G نرمال باشد، آنگاه H یك زیرگروه شبه‌نرمال G است اگر وتنها اگر H/N در G/N شبه نرمال باشد. اثبات به‌خواننده واگذار می‌شود.

لم ۲.۱. هر زیرگروه شبه نرمال H از گروه G به‌طوری که $[G : H] = ۴$، زیرگروه نرمال G است.

برهان. فرض می‌کنیم که H در G نرمال نباشد؛ و $a \in H'$ و K را مطابق برهان لم ۱.۱ تعریف می‌کنیم. چون $H \subset K \subset G$ و $[G : H] = ۴$، نتیجه می‌شودکه K یا با H یا با G مساوی است ویا $[K : H] = ۲$. مانند اثبات لم ۱.۱ حالتهای اول و دوم نمی‌توانند اتفاق بیفتند، پس $[K : H] = ۲$ و H در K نرمال‌است. به این ترتیب K نرمالساز H است و در نتیجه دقیقاً دو مزدوج H وجود داردکه عبارت‌اند از: H و H'.

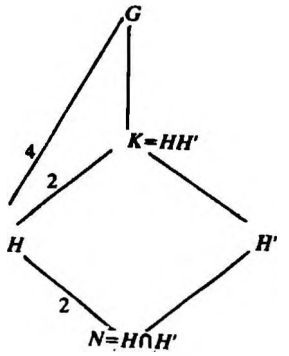
حال قرار می‌دهیم $N = H \cap H'$. دراین صورت

$$N = \cap \{g^{-1}Hg : g \in G\}$$

و لذا N زیرگروه نرمال G است. به‌علاوه چون H در G شبه‌نرمال است، $[K : H] = [H' : N] = [H : N]$ و بنابراین $[H : N] = ۲$. (نگاه‌کنید به‌شکل ۱)

---

۱. مخفف «بی عامل مجذور»؛ منظور، عدد صحیحی است که بر مجذور هیچ عدد صحیحی تقسیم‌پذیر نباشد.



شکل ۱

داریم $N \subset H \subset G$ و $[G:H]=4$ و $[H:N]=2$، و N در G نرمال است. پس گروه G/N دارای مرتبهٔ ۸ است، H/N در G/N شبه نرمال است و شاخص آن در G/N، ۲ می‌باشد. با آزمایش پنج گروه مرتبهٔ ۸ معلوم می‌شود که یك زیرگروه شبه نرمال باشاخص ۲ در یك گروه مرتبهٔ ۸ نرمال‌است. (۳ تا از این گروهها آبلی هستند. دوتای دیگر را می‌توان به‌طورمستقیم یا به‌کمك[۱۰] بررسی کرد. مرجع [۱۰] شبکه‌های زیرگروههای گروههای با مرتبهٔ پایین را نشان می‌دهد.)

بنابراین H/N در G/N نرمال است و لذا H در G نرمال است که با فرض اولیه متناقض‌است. ازاین نتیجه می‌گیریم H در G نرمال است.

همان‌طوری که داور این مقاله متذکر شده است، می‌توانیم به‌روش زیر نیز استدلال کنیم. گیریم $\bar{G}=G/N$ و $\bar{H}=H/N=\langle\bar{h}\rangle$. برای هرعضو $\bar{a}\in\bar{G}$ گروه $\langle\bar{a},\bar{h}\rangle$ را درنظر می‌گیریم. اگر این گروه $\bar{G}$ نباشد، یك گروه مرتبهٔ ۲ یا مرتبهٔ ۴است وبنابراین آبلی بوده و $\bar{a}$ و $\bar{h}$ باهم‌تعویض می‌شوند. پس $\bar{H}$ در $\bar{G}$ نرمال است. بنابراین H در G نرمال است. از طرف دیگر فرض‌کنیم $\langle\bar{a},\bar{h}\rangle=\bar{G}$. حال $\bar{a}$ ازمرتبهٔ ۲، ۴، یا ۸ است. اگر $\bar{a}$ از مرتبهٔ ۸ باشد $\bar{G}$ آبلی است. اگر $\bar{a}$ از مرتبهٔ ۲ باشد شرط (۲) نتیجه می‌دهد که $\bar{h}\bar{a}=\bar{a}\bar{h}$ و بنابراین $\bar{G}$ آبلی است. اگر $\bar{a}$ از مرتبهٔ ۴ باشد، $\langle\bar{a}\rangle$ یك زیرگروه نرمال $\bar{G}$ است. پس $\bar{h}^{-1}\bar{a}\bar{h}=\bar{a}$ یا $\bar{h}^{-1}\bar{a}\bar{h}=\bar{a}^3$. از حالت اول نتیجه می‌شود که $\bar{G}$ آبلی است. در حالت دوم داریم $\bar{a}\bar{h}=\bar{h}\bar{a}^3$ و از این‌رو $\bar{h}\bar{a}\bar{h}\bar{a}=\bar{a}^4=1$. بابه‌کار بردن شرط (۲) برای $\bar{h}$ و $\bar{h}\bar{a}$ داریم $\bar{h}\bar{h}\bar{a}=\bar{h}\bar{a}\bar{h}$. به این ترتیب $\bar{h}\bar{a}=\bar{a}\bar{h}=\bar{h}\bar{a}^3$ و $\bar{a}=\bar{a}^3$ که یك تناقض است.

قضیهٔ ۳.۱. اگر H یك زیرگروه شبه نرمال از G باشد و $[G:H]=n$ یك عدد صحیح بی‌مجذور یا دوبرابر یك عدد صحیح بی‌مجذور باشد، آنگاه H زیرگروه نرمال G است.

برهان. قضیه را با استقرا نسبت به‌آن نوع nی که در قضیه مشخص‌شده ثابت می‌کنیم. اگر $n=1$، قضیه بدیهی است. برای $n=2$، درستی قضیه از لم ۲.۱ نتیجه می‌شود. لذا فرض‌می‌کنیم n عدد صحیح دیگری از نوع مشخص شده در صورت قضیه باشد و ادعای‌ما برای تمام اعدادکوچکتر از n که به‌شکل مشخص شدهٔ فوق هستند صادق باشد. قرار می‌دهیم $n=pm$ که درآن p اول است و m را عاد نمی‌کند.

فرض می‌کنیم که H زیرگروه شبه نرمالی در G است، و $[G:H]=n$. عضو دلخواه $g\in G$ را درنظر می‌گیریم. چون H در G شبه نرمال است، پس $H\langle g\rangle$ یك زیرگروه G است و H در $H\langle g\rangle$ شبه نرمال است. اگر $H\langle g\rangle\neq G$، بنابه‌فرض استقرا، H در $H\langle g\rangle$ نرمال است و $Hg=gH$.

اگر $H\langle g\rangle=G$ آنگاه $[H\langle g\rangle:H]=n$، و این دلالت می‌کندکه n کوچکترین عدد صحیح مثبت k است به‌طوری‌که $g^k\in H$. گیریم $x=g^p$ و $y=g^m$. دراین صورت کوچکترین عدد صحیح مثبت k به‌طوری‌که $x^k\in H$ عبارت است از $n/p=m$. لذا $[H\langle x\rangle:H]=m$. همین‌طور، $[H\langle y\rangle:H]=p$. چون H در هردوی $H\langle y\rangle$ و $H\langle x\rangle$ شبه نرمال است، فرض استقرا نشان می‌دهدکه $Hx=xH$ و $Hy=yH$. ازاین‌واقعیت که $(p,m)=1$، نتیجه می‌شود $g\in\langle x,y\rangle$ وبنابراین $gH=Hg$.

۲. چه‌وقت شبه نرمال بودن دلیل نرمال بودن نیست؟ برای هرعدد صحیح مثبت m که بر ۸ یا برمربع یك عدد اول فرد تقسیمپذیر باشد یك‌گروه متناهی چون G داریم که H زیرگروه شبه نرمال آن باشد به‌طوری‌که $[G:H]=m$ و H در G نرمال نباشد. در لم بعدی، گروه توصیف شده در [۲،ص. ۱۳۴؛ ۴، ص. ۱۸۷] را به‌کار می‌بریم.

در برهان لم دو خاصیت از تعویضگرها را به‌کار خواهیم برد. به‌ازای‌گروه داده شدهٔ G و $a,b\in G$، تعویضگر a و b که با $[a,b]$ نشان داده‌می‌شود عبارت از $a^{-1}b^{-1}ab$ است. آنگاه داریم ([۵، ص. ۲۵۳؛ ۱، ص. ۲۶؛ ۸، ص. ۱۷۷])

(i) اگر $[a,b]$ با a تعویض شود آنگاه برای هر $n\in\mathbf{Z}$، $[a,b]^n=[a^n,b]$.

(ii) اگر $[a,b]$ با a وبا b تعویض شود آنگاه برای هر $n\geqslant 0$،

$$(ab)^n=a^nb^n[b,a]^{\binom{n}{2}}.$$

لم ۲.۱. برای هرعدد اول فرد p و $n\geqslant 3$ یا برای $p=2$ و $n\geqslant 4$ فرض می‌کنیم G گروهی ازمرتبهٔ p^n با مولدهای a و b و روابط $a^{p^{n-1}}=1$ و $b^p=1$ و $ba=a^{1+p^{n-2}}$ است. و قرار می‌دهیم $H=\langle b\rangle$. آنگاه $[G:H]=p^{n-1}$، و H در G شبه‌نرمال است اما نرمال نیست.

برهان. هرعضو G نمایش یکتایی به‌شکل a^ib^j با ضوابط $0\leqslant i<p^{n-1}$ و $0\leqslant j<p$ دارد. چون

$$a^{-1}ba=a^{p^{n-2}}b\notin H$$

H در G نرمال نیست.

برای نشان دادن این مطلب که H در G شبه نرمال است، ابتدا به‌نکات زیر توجه می‌کنیم. چون

$$ba^pb^{-1}=(bab^{-1})^p=(a^{1+p^{n-2}})^p=a^{p+p^{n-1}}=a^p$$

داریم $a^p\in Z(G)$ و $a^{p^{n-2}}\in Z(G)$. و چون

$$[b,a]=b^{-1}(a^{-1}ba)=b^{-1}a^{p^{n-2}}b=a^{p^{n-2}}$$

داریم $[a,b],[b,a]\in Z(G)$ (زیرا $[a,b]=[b,a]^{-1}$). (نگاه‌کنید به[۱، صص. ۱۰۵، ۱۵۷، وتمرین ۲.۸، ص. ۱۱۵].)

لذا به‌ازای هر $i, j \in \mathbf{Z}$، بنابه (i) داریم

$$[b^j, a^i] = [b, a]^{ij} \in Z(G)$$

و همین‌طور $[a^i, b^j] \in Z(G)$. همچنین

$$[b, a]^p = (a^{p^{n-2}})^p = a^{p^{n-1}} = 1.$$

فرض می‌کنیم $g \in G$ و $h \in H$. در این صورت $g = a^i b^j$ و $h = b^k$ $(i, j, k \geqslant 0)$. قرار می‌دهیم $r = 1 + p^{n-2}k$. بنابه شرط (۲) در بخش صفر کافی است نشان دهیم که

$$hg = g^r h.$$

بنابه (ii)

$$g^r = (a^i b^j)^r = a^{ir} b^{jr} [b^j, a^i]^{\binom{r}{2}}.$$

توجه کنید که

$$a^{ir} = a^i (a^{p^{n-2}})^{ik} = a^i [b, a]^{ik} = a^i [b^k, a^i]$$

و اینکه

$$b^{jr} = b^{j + p^{n-2}jk} = b^j.$$

همچنین با توجه به‌شرایطی که درصورت‌قضیه روی p و n گذاشته شده‌است، p عدد $\binom{r}{2}$ را عاد می‌کند و

$$[b^j, a^i]^{\binom{r}{2}} = [b, a]^{ij\binom{r}{2}} = 1$$

زیرا $[b, a]^p = 1$. پس $g^r = a^i [b^k, a^i] b^j$. در نتیجه

$$g^r h = g^r b^k = a^i [b^k, a^i] b^{j+k} = a^i b^k [b^k, a^i] b^j$$
$$= a^i b^k (b^{-k} a^{-i} b^k a^i) b^j = b^k a^i b^j = hg.$$

لم ۲.۲. فرض کنید که H یك زیرگروه شبه نرمال از گروه متناهی G است. اگر $(n, |G|) = 1$، آنگاه H در گروه $G \times C(n)$ شبه‌نرمال است، که درآن $C(n)$ گروه دوری، از مرتبهٔ n است.

برهان. فرض می‌کنیم $k \in G \times C(n)$ و $h \in H$. ما باید نشان دهیم که به ازای عدد صحیحی چون r' و $h' \in H$ داریم $hk = k^{r'} h'$.

به ازای g یی متعلق به G و عدد صحیح s داریم $k = ga^s$ که درآن $\langle a \rangle = C(n)$. چون H در G شبه نرمال است، برای عددی صحیح چون r و $h' \in H$ داریم $hg = g^r h'$. چون که $(n, |G|) = 1$، عددی صحیح چون r' موجود است به طوری که $r' \equiv r (\mathrm{mod} |G|)$ و $r' \equiv 1 (\mathrm{mod} n)$. ازاین‌رو

$$hk = hga^s = g^r h' a^s = g^{r'} h' a^s = g^{r'} a^s h' = g^{r'} a^{r's} h'$$
$$= (ga^s)^{r'} h' = k^{r'} h'.$$

و H در $G \times C(n)$ شبه نرمال است.

دو لم بالا قضیهٔ زیر را نتیجه می‌دهند.

قضیهٔ ۳.۲. عدد صحیح مثبت m را که نه بی‌مجذور و نه دو برابر یك عدد بی‌مجذور است در نظر می‌گیریم. آنگاه گروه متناهی G و یك زیرگروه شبه نرمال H وجود دارند به‌طوری که $[G:H] = m$ و H در G نرمال نباشد.

۳. توسیعهای شبه نرمال هیأت. مفهوم توسیع شبه نرمال هیأت را می‌توان در درسی درنظریهٔ گالوا به‌شرح زیر معرفی کرد.

فرض کنیم F یك هیأت و S یك توسیع نرمال F با بعد متناهی باشد. می‌گوییم E توسیع شبه نرمال F است هرگاه $F \subset E \subset S$ و برای همهٔ هیأتهای K با فرض $F \subset K \subset S$ داشته باشیم

$$[EK : K] = [E : E \cap K]. \qquad (**)$$

(EK هیأت تولید شده توسط K و E است.) می‌توان نشان داد که این تعریف مستقل از توسیع نرمال S است. با استفاده از «قضیهٔ اصمیت طبیعی» (ر. ك. [۶، ص. ۱۹۶])، اگر E توسیع نرمال F باشد، یك توسیع شبه نرمال F نیز هست.

گیریم $G = G(S, F)$ گروه گالوای S روی F باشد. و نیز فرض کنیم $H = G(S, E)$ گروه گالوای S روی E باشد و قرار می‌دهیم $J = G(S, K)$. آنگاه $G(S, EK) = H \cap J$ و $G(S, E \cap K) = \langle H, J \rangle$. با توجه به (**) برای تمام زیرگروههای J در G داریم $|\langle H, J \rangle| / |H| = |J| / |H \cap J|$. بنابه‌شرط(۴) در بخش صفر، H یك زیرگروه شبه نرمال G است. برعکس، اگر H زیرگروه شبه نرمال G باشد، هیأت ثابت آن یك زیر هیأت شبه نرمال از S است.

مراجع

1. M. Aschbacher, Finite Group Theory, Cambridge, N. Y., 1986.
2. W. Burnside, Theory of Groups of Finite Order, 2nd Edition, Dover, N.Y., 1911 or 1955.
3. W. E. Deskins, Quasinormal subgroups of finite groups, *Math Z.*, 82 (1963) 125-132.
4. M. Hall, The Theory of Groups, Macmillan, N.Y., 1959.
5. B.Huppert Endliche Gruppen I. Springer; N.Y., 1967.
6. S. Lang. Algebra, Addison-Wesley, Reading,, Mass., 1965.
7. O.Ore, Structures and group theory I. *Duke Math. J.*, 3(1937) 149-174.
8. E. Schenkman,, Group Theory, D. Van Nostrand, N.Y., 1965.
9. S.E. Stonehewer, Permutable subgroups of infinite groups, *Math Z.*, 125 (1972) 1-16.
10. A.D. Thomas and G. V. Wood, Group Tables, Shiva Publishing, Orpington, England, 1980.
11. J. G. Thompson, An example of core-free quasinormal subgroups of *p*-groups, *Math Z.*, 96(1967) 225-227.
12. M. Weinstein,, editor, Between Nilpotent and Solvable, Polygonal Pub., Passaic, N.J., 1982.

****

• Dean Hickerson, Sherman Stein, Kenya Yamaoka, "When quasinormal implies normal," *The Teaching of Mathematics*, (June-July 1990), 514-518.

★ هیکرسن، استاین، یاماثوکا، دانشگاه کالیفرنیا در دیویس، آمریکا

رامانوجان*

بروس برنت*
ترجمهٔ کورس ضیائی، محمد باقری

تخیل مهمتر از دانش است.
آلبرت اینشتین

برگزاری جشن تولد برای همه خوشایند است. ولی باید پذیرفت که گویا هرچه بیشتر پا به سن می‌گذاریم ازجشن تولددیگران بیش‌ازمال خودمان لذت‌می‌بریم. بزرگداشت سالروز تولدکسانی که‌قبل‌ازما جهان‌را ترک گفته‌اند نیز برایمان دلپذیراست. یادآوری دستاوردها و کارهای آنها شور و الهام لازم‌را برای زندگی خود ما فراهم می‌آورد و به‌تلاشهایمان جهت می‌بخشد. درسال ۱۹۸۵ جهان موسیقی سیصدمین سال تولد سه موسیقیدان بزرگ، یوهان سباستیان باخ، گئورك فریدریش هندل و دومینکو اسکارلاتی را جشن گرفت. جامعهٔ موسیقی مراسمی در بزرگداشت این سه‌تن برپا داشت ودستاوردهای آنها وتأثیری که آنان سالها پس‌ازمرگ خود برموسیقی نهادند طی سخنرانیها و مقالات پرشمار بررسی شد.

سال۱۹۸۷ صدمین سالگرد تولد دوتن از ریاضیدانانی بود که تأثیر عمیقی برریاضیات گذاشته‌اند: اریش هکه و سرینی واسا رامانوجان[1]. بی‌شك بررسی تأثیرونفوذ هکه از رامانوجان آسانتر است، چراکه‌بسیاری‌ازکارهای رامانوجان هنوز ارزیابی‌نشده‌اند، انتشار نیافته‌اند یا هنوزکسی آنهارا درك نکرده‌است. به‌هیچ‌روی ادعا نمی‌کنیم که دراین مقالهٔ کوتاه می‌توانیم موضوع را روشن کنیم، اما شاید بتوانیم موجبات آشنایی بیشتر خوانندگان را با دستاوردهای رامانوجان فراهم آوریم. روال زندگی رامانوجان چنان نامعمول بودکه آن‌را با زندگی هیچ ریاضیدان دیگری نمی‌توان مقایسه‌کرد. اما جالب اینجاست‌که با روال زندگی باخ (البته درحدی نازلتر) شباهتهایی داردکه دراین‌مقاله به‌اختصار نشان داده خواهد شد. درواقع به‌خاطر مهارت بی‌نظیر باخ در چندنوایی حساب‌شده و رهیافت برنامه‌ریزی شده و روشمند او، اغلب وی‌را باخ «ریاضیاتی» نامیده‌اند.

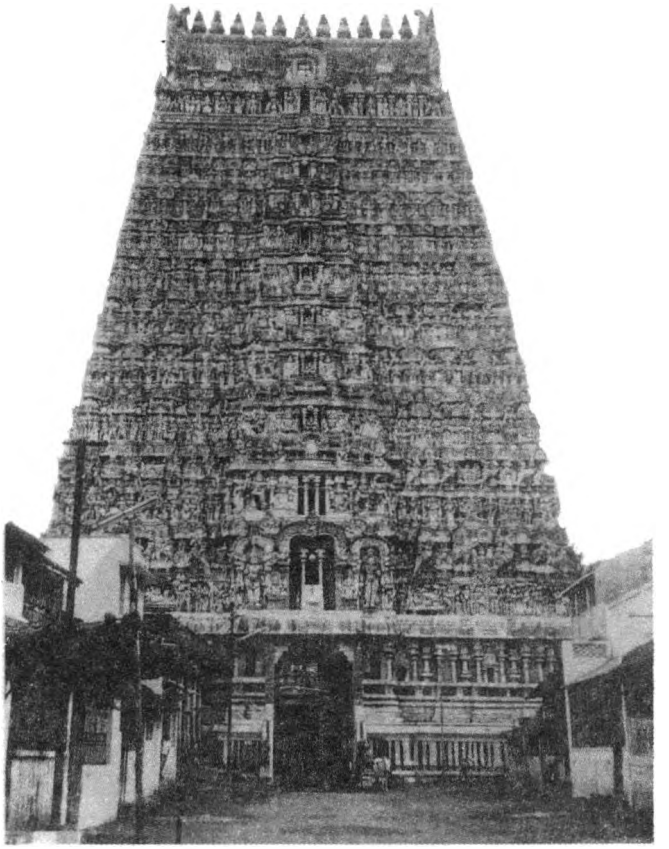
1. Srinivasa Ramanujan

زندگی وکارهای رامانوجان

ازآنجاکه اغلب خوانندگان با داستان غم‌انگیز زندگی بسیار کوتاه رامانوجان آشنا هستند در اینجا تنها به‌اجمال ازآن یاد خواهیم کرد. توصیفهای کاملتری‌رادرمجموعهٔ آثار رامانوجان[۱۹]، کتابهای گادفری هرلد هاردی [۱۳] و برنت[۸] ومقالهٔ راماناتان به‌مناسبت صدمین‌سال تولد رامانوجان[۱۷] می‌توان‌یافت.

رامانوجان در روز ۲۲ دسامبر ۱۸۸۷ درشهر ارود واقع در جنوب هندوستان به‌دنیا آمد. چنانکه درآن روزگار مرسوم بود وی درخانهٔ پدربزرگ ومادربزرگ مادریش چشم به‌جهان‌گشود. کمی‌پس‌ازآن، مادر رامانوجان به‌همراه‌نوزادش به‌شهر کومباکونام که‌شوهرش‌درآنجا نزد تاجرپارچه‌ای‌حسابداری می‌کردبازگشت. این‌شهر درآن زمان جمعیتی حدود ۵۲۰۰۰ نفر داشت. امروزه کومباکونام بیش‌از۱۵۰۰۰۰ نفرجمعیت دارد و به‌خاطرمعبدهایش معروف است. اگر درخیابان سارانگاپانی سانیدهی درمقابل‌خانهٔ فقیرانهٔ تك‌اتاقهٔ رامانوجان بایستیم می‌توانیم معبد سارانگاپانی را که باشکوهترین این معبدهاست چند خانه آن طرف‌تر ببینیم. کومباکونام درحدود۲۵۰ کیلومتری‌جنوب جنوبغربی مدرس واقع است و تقریباً ۳۰تا ۳۵کیلومتر با خلیج‌بنگال فاصله دارد. چیدام بارام، شهر دیگری در هندکه به‌سبب معبدهایش مشهور است در شمال‌شرقی کومباکونام و درحدود ۷۰کیلومتری آن قرار دارد.

اکثر ریاضیدانان بزرگ از مراکزعمدهٔ علمی و نیز ازسایر ریاضیدانان‌مشهورتأثیرپذیرفته‌اند. این‌موضوع دربارهٔ رامانوجان



معبد سارانگاپانی در کومباکونام، در نزدیکی خانهٔ رامانوجان

کـه تاحد زیادی خود آموختـه بود صدق نمی‌کند. پس باید به سراغ کتابهایی برویم که بر رامانوجان تأثیر گذاشتند، و در این زمینه‌هم اطلاعات ما بسیار اندك است. رامانوجان در ۱۲ سالگی بر محتویات کتاب مثلثات مسطحه اثرلانی[1] که درسال ۱۸۹۴ در کیمبریج منتشر شده‌بود واز آنچه‌که امروزه‌به‌آن «مثلثات»می گوییم تنها اندکی‌افزونتر داشت، تسلط یافت. سرفصلهای این کتاب (مانند لگاریتم کمیتهـای مختلط، سریهای گرگوری، محـاسبهٔ مقدار پی، مجموعیابی سریها وبسطهای سری)هم بیانگـر وسعت دامنهٔ مطالب کتاب است و هم خطسیری راکه رامانوجان چه دراوایل‌کار وچه بعدها درقلمرو ریاضیات پیمود، نشان می‌دهد.

رامانوجان در ۱۵ سالگی کتاب چکیدهٔ قضایای مقدماتی در ریاضیات محض اثر کار[2] را از کتابخـانهٔ کالج دولتی محل خود امانت گرفت. سبك ومحتویات کتاب چنان‌بودکه درطول دههٔ بعدی تأثیر عمیقـی بر رامانوجان گذاشت؛ هرچندکه او در این دوره موضوعهای خیلی‌بیشتری‌را بررسی و ابداع کرد. کتاب فشردهٔ کار شامل‌حدود۵۰۰۰صورت‌قضیه‌وطرح خلاصه‌ای از اثبات آنهاست. درحوالـی سال ۱۹۰۳ رامانوجان شروع به‌ثبت‌کشفیات ریاضی خود در دفترهای یادداشت‌کرد، بدون آنکه اشاره‌ای به‌اثبات آنها کند. گرچه رامانوجان بدون‌شك از الگوی کتاب‌کار تأثیرپذیرفته بود، احتمالاً کمبودکاغذ و اطمینان وی از اینکـه هرگاه بخواهد می‌تواند برهان قضایای خودرا عرضه‌کند علتهـای عمدهٔ انتخاب این‌روش فشرده بود.

رامانوجان‌درآخرین‌سال‌تحصیل‌دردبیرستان‌شهرکومباکونام، در امتحان ورودی دانشگاه مدرس شرکت‌کرد و با مرتبهٔ «عالی» قبول شد. درسال۱۹۰۳ وارد دانشگاه دولتی کومباکونـام شدکه به‌سبب بالابودن‌سطح‌علمیش وازآنجاکه همچون دانشگاه‌کیمبریج که‌درکنار رودکم قراردارد، درکرانه‌های رود کاوری‌واقع‌است، اغلب آن‌را«کمبریج‌جنوب‌هند»می‌خوانند. دراین‌زمان رامانوجان سراپا مجذوب ریاضیات شده‌بود و به‌هیچ‌یك از درسهـای دیگر نمی‌توانست بپردازد. درنتیجه درپایان سال اول در امتحانها رد شد و نتوانست به‌درس ادامه‌دهد. تلاشهای بعدی او برای‌تحصیل در دانشگاه نیز به همان دلیل به‌جایی نرسید. بنابراین در سالهای بین ۱۹۰۳ تا ۱۹۱۰ رامانوجان در تنهایی کار می‌کرد و خود را به‌تمامی‌وقف‌ریاضیات کرده،یافته‌های‌خودرا دردفترهای‌یادداشتش می‌نوشت.

در ۱۹۰۹ باخانم‌س. جاناکی[1] ازدواج‌کرد و ازاین‌رو برآن شدکه به‌دنبال شغلی بگردد. عاقبت درسال ۱۹۱۲ به‌عنوان کارمند دفتری در ادارهٔ امانات پستی بندر مدرس مشغول به‌کارشد. رئیس اداره، سر فرانسیس اسپرینگ و مدیرآن س. ن. ایار[2] که خودنیز ریاضیدان بود توجهشان شدیداً به رامانوجـان جلب شد و او را تشویق کردند که کشفیات خودرا با بعضی ریاضیدانان انگلیسی در میان بگذارد. اولین نـامه‌نگاریهـای او نتایج دلگرم‌کننده‌ای به‌بار نیاورد تا آنکه در۱۶ژانویهٔ۱۹۱۳ نامه‌ای به‌هاردی نوشت و بدین‌ترتیب یکی از پرمحتواترین همکاریهای تاریخ ریـاضیات سرگرفت. هاردی [۱۳ص۹] درموردداولین نامهٔ رامانوجان [۱۳ ص۹] راجع به‌چند فرمول‌کسرهای مسلسل،بعدها چنین گفت:

> من قبلا هرگز چیزی ندیده بودم‌که دست‌کم شباهتی به‌این فرمولها داشته‌باشد. بایك‌نگاه می‌توان‌دریافت‌که‌ریاضیدان طراز اولی‌آنها را نوشته‌است. این‌مطالب باید درست‌باشد چون اگر درست نبود هیچکس چنین قوهٔ تخیلی نداشت‌که آنها را ازخود اختراع‌کند.

رامانوجان‌پاسخ تشویقهای هاردی را در نامهٔ دوم‌خود[۱۹] چنین داد: «من شمارا دوستی یافته‌ام‌که با دلسوزی به‌کارهایم می‌نگرد».

1. S.L. Loney 2. G.S. Carr

1. S. Janaki 2. S. N. Aiyar

رامانوجان پس‌از غلبه بر موانع طبقاتی و خانوادگی دعوت هاردی را برای رفتن به‌کیمبریج پذیرفت و در روز ۱۷ مارس ۱۹۱۴ هندوستان را ترک گفت. ظرف سه‌سال بعد، کشفیات رامانوجان به شهرت ماندگاری دست‌یافت. ما فقط به‌سه‌تا از مهمترین مقالات او در این دوره‌اشاره می‌کنیم. اولی [۱۸]، دربارهٔ برخی تابعهای حسابی، در بخش اعظم قرن‌حاضر تأثیر ژرفی بر نظریهٔ اعداد و صورتهای پیمانه‌ای گذاشته‌است. در این رساله رامانوجان تابع تاو را مطرح کرد و حدس معروف‌خود را درمورد مقدار آن بیان‌داشت. مقالهٔ دوم [۱۴] که‌مشترکاً باهاردی‌نوشته‌شده، تعدادعادی‌عاملهای اول‌عددی چون n، امروزه به‌عنوان پایه‌ای برای نظریهٔ احتمالاتی اعداد شناخته‌می‌شود. سومی[۱۵] که آن‌هم با هاردی نوشته شده فرمولهای‌مجانبی درآنالیز ترکیبی نام‌دارد. در این‌مقاله‌نویسندگان فرمول مجانبی قابل‌توجهی برای‌تابع افراز به‌دست‌آوردند ویکی از ژرفترین‌ومفیدترین روشهارا درنظریهٔ تحلیلی اعداد به‌نام‌روش «دایره‌ای» هاردی-رامانوجان-لیتلوود مطرح کردند.

پس‌از گذشت سه‌سال درکیمبریج، رامانوجان به‌شدت مبتلا به مرض ناشناخته‌ای شدکه فکر می‌کردند سل باشد. تجزیه و تحلیل رانکین [۲۴] از گزارشهای طبی و نامه‌هایی‌که رامانوجان ارسال و دریافت کرده به‌این‌نتیجه منجر شده‌که مرض رامانوجان احتمالا سل نبوده‌است، اما بیماری او را هم مشخص نمی‌کند. رامانوجان پس‌ازگذراندن دوسال دربیمارستان و آسایشگاه به‌هند بازگشت. درسال ۱۹۸۴ بیوهٔ او به‌نگارنده گفت‌که اولین حرف رامانوجان در بازگشت به‌میهنش به‌وی این‌بوده که می‌بایست اورا با خود به انگلستان می‌برد. رامانوجان می‌گفت‌که اگر همسرش همراه او می‌بود و غذا می‌پخت و از او مراقبت می‌کرد، به‌سوء تغذیه و بدخوابی‌که به‌نظر وی منشأ اصلی ناخوشی او بوده دچار نمی‌شد. شاید چنین تصور شود که رامانوجان از سفر به‌انگلستان تأسف می‌خورد. اما بیوهٔ او به‌نگارنده گفت که وی اقامت خود را در انگلستان بهترین واقعه‌ای توصیف می‌کردکه در زندگیش رخ‌داده است. او هرگز از آنچه‌پیش‌آمد متأسف نبود و از هاردی، به‌خاطر همه محبتهایی‌که درحق اوکرده بود فوق‌العاده سپاسگزار بود. با آنکه‌بیماری او را رفته‌رفته‌ناتوانترمی‌کرد باخوش‌بینی‌می‌اندیشید که سلامتی خود را بازخواهد یافت. اندکی پس از بازگشت به هندوستان از او دعوت کردندکه‌سمت استادی‌را دردانشگاه‌هندویی بنارس بپذیرد. رامانوجان در پاسخ نوشت‌که متأسفانه به‌سبب بیماری ازپذیرفتن چنین‌سمتی درآن‌زمان معذوراست ولی‌هنگامی که وضع مزاجی بهتری‌یافت آن‌را باعلاقه‌خواهدپذیرفت. بیماری رامانوجان بهبودی درپی‌نداشت، و وی در روز ۲۶ آوریل ۱۹۲۰ در سن ۳۲ سالگی درگذشت.

پس‌ازمرگ رامانوجان ازاو ۳۷ مقالهٔ منتشر شده، مجموعه‌ای از مسائل جالب‌که در مجلهٔ انجمن ریاضی هندوستان مطرح شده بود، بیش‌ازیکصد صورت‌قضیه در نامه‌هایش به‌هاردی، سه‌دفترچهٔ یادداشت و چندین مقاله و دستنوشتهٔ منتشر نشده باقی‌ماند. مجموعهٔ مقالات[۱۹] او در ۱۹۲۷ انتشار یافت. قضیه‌هایی که‌اودر نامه‌هایش به‌هاردی‌مطرح کرددراواخردههٔ ۱۹۲۰ واوایل‌دههٔ ۱۹۳۰ الهام‌بخش انبوهی از مقالات شد. بالاخره در سال ۱۹۵۷ مؤسسهٔ پژوهشهای بنیادی تاتا یادداشتهای اورا[۲۰] به‌صورت نسخهٔ عکسی بدون ویرایش به‌چاپ رساند. رانکین شرحی راجع به‌آثار چاپ نشدهٔ رامانوجان[۲۳] نوشته است. باوجود این میراث، بعضی از آثار رامانوجان، درست همچون باخ، گم شده است. خانم رامانوجان اظهارداشته‌است‌که شوهرش‌دربازگشت‌ازانگلستان چمدان‌بزرگی پراز مقاله باخود به‌همراه‌داشت. همچنین ازهمهٔ گزارشهای‌موجود چنین برمی‌آیدکه رامانوجان درآخرین‌سال زندگی باوجود ابتلا به‌بیماری باکوششی خستگی‌ناپذیر در زمینهٔ ریاضیات کارمی‌کرد. خانم رامانوجان در سال ۱۹۸۴ به‌نگارنده اطلاع دادکه او در آخرین‌سال عمرش یکسره به‌ریاضیات می‌پرداخت و مقاله‌هایش را درچمدانی چرمی زیر بستر خود قرار می‌داد، با این حال کل آثار مربوط به‌سالهای ۱۹۱۸ تا ۱۹۲۰ که از وی دراختیارداریم «دفتر یادداشت گم‌شدهٔ» [۲۱] اوست که اندروز هنگام بررسی مقاله‌های واتسن درکتابخانه‌کالج ترینیتی‌کیمبریج پیداکرد. برسر سایرآثار رامانوجان چه‌آمده‌است؟ خانم جاناکی به‌نویسنده‌گفت هنگامی‌که مشغول مراسم تدفین شوهرش بود، پ. و. سشو ایار[1] معلم ریاضی رامانوجان در کالج دولتی کومباکونام به‌خانهٔ آنها آمد و همهٔ‌مقاله‌های‌رامانوجان‌را باخود برد. گویادانشگاه مدرس جایگاه نهایی مقاله‌های رامانوجان شده‌است. آیا خیلی از این مقاله‌ها در دانشگاه گم‌شد؟ ما همین‌قدر می‌دانیم‌که این‌کتابخانه گزارشهای فصلی رامانوجان راکه وی در سال قبل‌از عزیمت به انگلستان ضمن استفاده از یك بورس تحصیلی در دانشگاه مدرس می‌نوشت گم‌کرده‌است. دانشگاه‌مدرس بیشتر مقاله‌های‌رامانوجان را درسال ۱۹۲۳ به‌کیمبریج فرستاد ولی دفترهای‌یادداشت‌اصلی را نگاه داشت. بنابراین به‌نظر می‌رسد که بسیاری از مقاله‌های رامانوجان درفاصلهٔ‌کمی پس‌ازمرگش یا گم‌شد یا دورانداخته‌شد. فرزندان‌موسیقیدان باخ‌باید مسؤولیت سنگین گم‌شدن بسیاری از آثار پدرشان را به‌عهده بگیرند. بدیهی‌است‌که بعضی‌ازمعاصران رامانوجان نیز باید بار مسؤولیت مشابهی را بردوش بکشند.

افسانه‌ها

افسانه‌هایی دربارهٔ آثار رامانوجان ساخته شده‌که باید آنها را کنار گذاشت. اول اینکه رامانوجان مکرراً اشتباه می‌کرد. ریشهٔ این‌اظهارنظر به‌نامه‌هایی برمی‌گرددکه رامانوجان به‌هاردی نوشت ودرآنها چندفرمول‌مجانبی درنظریهٔ تحلیلی‌اعداد ذکرکرد([۱۳] و [۱۹]). این فرمولها یا غلط بودند و یا درآن‌زمان قابل اثبات نبودند. اشتباههای رامانوجان ناشی از بی‌اطلاعی او از تابعهای بامتغیرهای مختلط بود. به ویژه او اساساً همه صفرهای‌تابع زتای ریمان را عدد حقیقی می‌انگاشت. برای بررسی دقیق این‌موضوع به‌کتاب هاردی[۱۳] فصل ۲ مراجعه‌کنید. در مجموعهٔ مقاله‌های رامانوجان به‌ندرت‌می‌توان‌اشتباهی یافت. گرچه دفترهای‌یادداشت اوتنها به‌خاطر ثبت نتایج برای خودش تنظیم‌شده‌بود، تعداد خیلی کمی غلط در مطالب آنها می‌توان پیداکرد. البته بعضی‌حکمها در این دفترهای یادداشت بی‌معنی به‌نظر می‌رسند. وی‌احتمالا این مطالب را به‌عنوان یادآوری اصولی نوشته‌بودکه قصد داشت بعدها آنها را به‌کار برد یا بیان‌کند. از آنجا که رامانوجان آموزش

1. P. V. Seshu Aiyar

رسمی اندکی درریاضیات دیده‌بود، مکرراً از برهانهای غیردقیق استفاده می‌کرد. مثلا عملیات حدی‌را بدون هیچ توجیهی جا به‌جا می‌کرد. علی‌رغم این نقصان آموزشی، رامانوجان توانایی خارق‌العاده‌ای در تشخیص این‌موضوع‌داشت که عملیاتش چه‌موقع معتبر و چه‌موقع نامعتبرند. بنابراین، خارج‌ازمحدودهٔ نظریهٔ تحلیلی اعداد، فرمولهای‌رامانوجان تقریباً همگی درست‌هستند. رامانوجان درمقایسه‌بااکثرافرادی چون ما که‌شغلمان‌ریاضیات‌است، به‌مراتب غلطهای کمتری مرتکب شد.

درخارج از محدودهٔ نظریهٔ تحلیلی اعداد، فرمولهای رامانوجان تقریباً همگی درست هستند. رامانوجان در مقایسه با افرادی چون ما که شغلمان ریاضیات است، به‌مراتب غلطهای کمتری مرتکب شد.

خیلیها رامانوجان را یك «صورت‌گرای صرف» به‌شمار می‌آورند. منظورشان این است که رامانوجان ریاضیدانی «سطح پایین» بوده است؛ اوفقط فرمول ثابت می‌کرده ونمی‌توان‌اورا با ریاضیدانان‌انتزاعی‌تر،یعنی‌ریاضیدانان«سطح‌بالا»مقایسه‌کرد.ظاهراً کسانی که‌چنین عقیده‌ای‌دارند می‌پندارند که‌رامانوجان رابطه‌ای‌را می‌گرفت، خیلی‌ازانتگرال‌گیریهاومجموعیابیها را جابه‌جامی‌کرد و دستکاریهایی انجام می‌داد تا رابطه‌ای پیچیده‌تر به‌دست‌آورد. ولی‌کار رامانوجان بسیاربیش‌ازدستکاری‌وجابه‌جاکردن‌فرایندهای حدی‌بود. درحقیقت‌درموردبسیاری‌ازفرمولهایش خیلی‌ازما دوست داریم بدانیم رامانوجان چگونه استدلال‌می‌کرده است. اگر ما به‌باطن او دسترسی داشتیم اطلاعات زیادی به‌دست‌می‌آوردیم. ازآن‌گذشته هرچندتعدادی‌ازفرمولهای رامانوجان‌کهنه، بی‌مصرف و نازیبا هستند، اکثر فرمولهایش ژرف، مفید و درخشان هستند. اینها فرمولهایی نیستند که صرفاً به‌خاطر خودشان پدیدآمده‌باشند. برای ملاحظهٔ اثبات این‌مطلب که فرمولهای رامانوجان مفیدند و به‌نتایج‌مفید دیگری‌منجرمی‌شوند، نگاه‌کنید به گزارشهای‌کنفرانس بزرگداشت صدهٔ رامانوجان[۵]که در روزهای اول تا پنجم ژوئن ۱۹۸۷در دانشگاه ایلینوی برگزارشد. عرصه‌ای که‌اکثرفرمولهای رامانوجان‌را می‌توان‌ازآن‌استخراج‌کرد درواقع‌سریهای‌نامتناهی است. همان‌طورکه باخ درتصنیف‌کانتاتها هیچ همتایی نداشت، درتاریخ ریاضیات هم رامانوجان در «تصنیف» سریهای نامتناهی احتمالا بجز اویلر و ژاکوبی هیچ همتایی نداشت.

وقتی باخ در مدرسهٔ توماس لایپزیگ رهبر گروه خوانندگان شد، رتبهٔ چهارم را در گزینش‌کسب کرده‌بود. خیلیها برآن‌بودند که‌باخ بیش‌ازحد محافظه‌کار، و دارای افکاری‌کهنه و از مد افتاده است. هاردی دربارهٔ رامانوجان چنین‌اظهارعقیده‌کرده‌است([۱۳] ص ۱۴) «شاید ایام شکوهمندی فرمول به پایان آمده باشد و رامانوجان باید ۱۰۰ سال‌پیش به‌دنیا می‌آمد.» ولی ما می‌خواهیم بطلان این عقیدهٔ گسترده را که رامانوجان از زمانهٔ خود عقب بود نشان دهیم. مسلماً رامانوجان انواع گوناگونی از ابزارها و روشهای متعلق به قرنهای ۱۸ و ۱۹ را به‌کار می‌گرفت. در واقع بسیاری‌ازنتایجی که‌او به‌دست‌آورد حال و هوای آنالیز کلاسیك قرن ۱۹ را دارد. اما در بسیاری ازجنبه‌ها رامانوجان چندین دهه از زمان‌خود جلوتر بود. دلیل‌این‌مدعا عمدتاً دردفترهای‌یادداشت، «دفتر یادداشت گم‌شده» و سایر دستنوشته‌های منتشرنشدهٔ او نهفته است، هرچندکه مقالهٔ فوق‌العادهٔ او[۱۸] نیز این‌دیدگاه‌را تقویت می‌کند. برای تأیید ادعای‌خود چند مثال می‌آوریم.

تاثیرماندگاری رامانوجان

درتاریخ‌ریاضیات رامانوجان هیچ همتایی در یافتن نمایش‌توابع تحلیلی به‌صورت‌کسر مسلسل ندارد. مثلا حالتی خاص از مطلب شمارهٔ ۳۲ (۳) درفصل۱۲ از دفتریادداشت دوم او [۲۰]، فرمول زیر است

$$\zeta(3)=1+\frac{1}{2\times 2+}\frac{1^3}{1+}\frac{1^3}{6\times 2+}\frac{2^3}{1+}\frac{2^3}{10\times 2+}\cdots.$$

این‌کسر مسلسل برای $\zeta(3)$، در اثبات تاریخی آپری [۶] که $\zeta(3)$عددی‌گنگ است‌کمال‌اهمیت‌را داشت. پنج‌سال پس‌ازاثبات آپری تازه‌فهمیدندکه‌ابتدا رامانوجان بوده‌است‌که این‌کسرمسلسل فوق‌العاده سودمند را یافته‌است [۱۰]. رامانوجان کسرهای‌مسلسل زیادی برای حاصلضربها و خارج قسمتهای توابع گاما پیدا کرد. گرچه‌امروزه اکثراین‌فرمولها را اثبات‌کرده‌ایم، هنوز نمی‌توانیم بفهمیم منشأ آنها چه بوده، رامانوجان چگونه آنهارا کشف‌کرده و اینکه آیا این‌نتایج قابل تعمیم‌اند یا نه.

گرچه بسطهای مجانبی رامانوجان درنظریهٔ اعداد به خوبی شناخته شده است، بسطهای مجانبی عموماً عمیقتر وی در آنالیز چندان‌شناخته‌شده نیست. مثلا، (طبق[۲۰]،[۹]، مطلب شمارهٔ ۱۰، [۱۲]، قضیهٔ ۹) هنگامی‌که h به‌سمت $+0$ میل می‌کند،

$$\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{k}\frac{\phi(h(a+j\delta))}{\phi(h(\beta+j\gamma))}=\sqrt{\frac{\pi\phi(0)}{2h(\gamma-\delta)\phi'(0)}}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}+\frac{\gamma+\delta}{3(\gamma-\delta)}\left(1-\frac{\phi(0)\phi''(0)}{\phi'(0)^2}\right)+O(\sqrt{h}). \qquad (1)$$

شرایطی که تحت آن شرایط این‌بسط معتبر است، معین شده است ([۹] و[۱۲]). اما ردهٔ توابعی که (۱) برای آنها برقراراست بی‌شك‌قابل گسترش‌است. شکل این‌فرمول مجانبی‌یادآورفرمولهای مجانبی مطرح‌شده در روش فاز مانا و سایر براوردهای مجانبی انتگرالهاست. آیا رامانوجان اولین‌قضیهٔ بسط مجانبی را برای نظریهٔ متناظری درمورد سریها پیداکرده بود؟ برای به‌دست‌آوردن نظر روشنی دربارهٔ بسیاری از بسطهای مجانبی زیبا و نیرومند رامانوجان به‌مقالهٔ اوانز[۱۲]نگاه‌کنید.

درآخرین‌نامهٔ رامانوجان به‌هاردی[۱۹] ودر «دفتر یادداشت گم‌شده»[۲۱] رامانوجان، وی چندین‌حکم‌را دربارهٔ «توابع تتای ساختگی» بدون برهان ذکر می‌کند که شاید آخرین ابداع او در زندگی‌کوتاهش باشد. تابع

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2n-1})} \qquad (2)$$

مثالی از یك تابع تتای ساختگی مرتبهٔ پنجم است. به‌طور خلاصه می‌توان گفت توابع تتای ساختگی رفتار توابع تتای کلاسیك را در مرزهای طبیعی قلمروی که در آن تحلیلی هستند به نمایش می‌گذارند، اما در فرمولهای تبدیل صدق نمی‌کنند. بسیاری از فرمولهای راماتوجان هنوز نیازمند بررسی‌اند. خوانندگان می‌توانند برای آشنایی با این توابع اسرارآمیز که ما هنوز هم درك مبهمی از آنها داریم به آثار اندروز، به‌ویژه رسالهٔ [۱] و تکنگاشت [۳] وی مراجعه کنند.

تابع

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)/2}}{(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^n)} \qquad (3)$$

شباهتی ظاهری به تابع (۲) دارد. اما بین آنها تفاوتهای بسیار چشمگیری نیز هست. اندروز [۲] ضرایب بسط (۳) به‌سری توانی را به‌روش عددی بررسی کرد و حدس زد که تعدادی نامتناهی از آنها مساوی صفرند ولی بقیه به ∞ میل می‌کنند. این حدسها توجه بعضی از برجسته‌ترین ریاضیدانهای زمان ما را جلب کرد، زیرا رفتار حدسی این ضرایب با وضعیتهای معمولی که در آنها همهٔ ضرایب «کوچك» یا همهٔ آنها «بزرگ» هستند مغایرت داشت. حدسهای اندروز بعداً توسط خود او و هیکرسن [۴] اثبات شد، و کوهن نیز کارهای اساسی دیگری در این زمینه کرد [۱۱]. کوهن در یك سخنرانی در کبك ضمن تشریح نتایج به‌دست آمده اعلام کرد که این کشفها فقط به‌منزلهٔ «قسمت بالای کوه یخ» نظریه‌ای عام هستند که هنوز برای تکامل آتی خود جا دارد.

همان‌طور که قبلاً گفته شد، سال ۱۹۸۷ صدمین سال تولد اریش هکه نیز هست. یکی از درخشانترین و نافذترین نظریه‌های هکه نظریهٔ صورتهای پیمانه‌ای، حاصلضربهای اویلر و سریهای دیریکلهٔ اوست. اما در یکی از دستنوشته‌های منتشرنشدهٔ راماتوجان بعضی از عناصر «نظریهٔ هکه» را می‌توان یافت. برای ملاحظهٔ شرح این مطالب، مقاله‌های جالب راگهاون [۱۶] و رانگاچاری [۲۲] را که در کنفرانس صدهٔ راماتوجان در دانشگاه ایلینوی عرضه شد ببینید.

در این کنفرانس ر. ویلیام گاسپر میزان تأثیر راماتوجان را در دورهٔ خود چنین بیان کرد که «چگونه می‌توانید مردی را دوست بدارید که پیوسته از گور خود برمی‌خیزد تا فرمولهایتان را از شما برباید؟». به‌عنوان شاهدی دیگر، خاطرنشان می‌کنیم که بررسی کامپیوتری در منابع و کتب نشان می‌دهد که در دههٔ اخیر تقریباً در ۳۰۰ مقاله، ضمن عنوان یا چکیده به آثار راماتوجان ارجاع داده شده‌است.

آوازهٔ راماتوجان

پس از مرگ باخ در سال ۱۷۵۰، گرچه آوازهٔ او در بین موسیقیدانان و آهنگسازان حرفه‌ای همچنان در اوج باقی ماند، محبوبیت موسیقی وی نزد مردم به‌نحو چشمگیری کاهش یافت. تجدید حیات موسیقی باخ در ۱۱ مارس ۱۸۲۹ آغاز شد که مندلسون پاسیون متای باخ را اجرا کرد.

پس از انتشار مجموعهٔ مقالات [۱۹] راماتوجان در سال ۱۹۲۷، یعنی ۷ سال پس از مرگش، تعداد زیادی مقاله که پریس، واتسن و دیگران نوشته بودند منتشر شد. انگیزهٔ نگارش اکثر این مقالات ادعاهایی بود که راماتوجان در نامه‌هایش به هاردی مطرح کرده بود و در مجموعهٔ مقالات [۱۹] نقل شده بود. پس از آن، نفوذ راماتوجان قدری فروکش کرد، هرچند که بعداً به‌خاطر مزایای چشمگیر روش «دایره‌ای» و ابداع نظریهٔ احتمالاتی اعداد ادامه یافت. بدین ترتیب راماتوجان در بین بسیاری از عالمان نظریهٔ اعداد در اوج احترام باقی ماند. اما در دهه‌های گذشته آوازه و اعتبار راماتوجان افزایش یافته‌است. برخلاف اجرای مندلسون از آهنگ باخ، مشکل بتوان رویداد یا مقاله‌ای را به‌عنوان نقطهٔ آغاز این اوج گیری معرفی کرد، هرچند شاید کشف «دفتر یادداشت گم‌شده» توسط اندروز در سال ۱۹۷۶ چنین نقشی داشته است. نتایج فراوانی که از دفترهای یادداشت، «دفتر یادداشت گم‌شده» و دستنوشته‌های منتشر نشدهٔ راماتوجان کسب شده رویهمرفته عامل اصلی در بازشناسی ارزش نبوغ راماتوجان هستند. کاربردهای فیزیکی، از قبیل اثر باکستر [۷] دربارهٔ مدل شش‌ضلعی سخت هم در این میان نقش دارد. به‌علاوه، ریاضیدانانی چون امکی[1] و راماناتان نشان داده‌اند که قضایای زیبای راماتوجان چگونه با ریاضیات جدید تطبیق می‌یابند. احتمالاً بهترین راه درك نفوذ وسیع راماتوجان در دورهٔ معاصر خواندن مقالاتی است که در کنفرانس صدهٔ راماتوجان [۵] عرضه شد.

خیلی از ادعاهای راماتوجان را هنوز باید ثابت کرد و تعداد زیادی از آنها هنوز به‌طور کامل درك نشده‌اند. رمز فرایند خلاقیت راماتوجان را هنوز پرده‌ای پوشانده که جز به‌میزان اندکی کنار نرفته‌است.

رمز فرایند خلاقیت راماتوجان را هنوز پرده‌ای پوشانده که جز به‌میزان اندکی کنار نرفته‌است.

مراجع

1. G. E. Andrews, The fifth and seventh order mock theta functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 293 (1986), 113-134.
2. —, Questions and conjectures in Partition theory, *Amer. Math. Monthly* 93 (1986), 708-711.
3. —, *q-series: Their development and applications in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra*, CBMS regional conf., no. 66, Amer. Math. Soc., Providence, 1986.
4. G. E. Andrews and D. Hickerson, *Partitions and indefinite quadratic forms*, to appear.
5. G.E.Andrews,R.A.Askey,B.C.Berndt,K.G Ramanathan, and R.A. Rankin, eds., *Ramanujan Revisited*, Academic Press, Boston, 1988, to appear.

1. R. A. Askey

6. R. Apéry, Interpolation de fractions continues et irrationalité de certaines constantes, *Bull. Section des Sci.*, Tome III, Bibliotheque Nationale, Paris, 1981, 37-63.
7. R. J. Baxter, Ramanujan's identities in statistical mechanics, *Ramanujan Revisited*, Academic Press, Boston, 1988, to appear.
8. B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, Part I, Springer-Verlag, New York, 1985.
9. B. C. Berndt and R. J. Evans, Chapter 13 of Ramanujan's second notebook: Integrals and asymptotic expansions, *Expos. Math.* 2 (1984), 289-347.
10. B. C. Berndt, R. L. Lamphere, and B. M. Wilson, Chapter 12 of Ramanujan's second notebook: Continued fractions, *Rocky Mt. J. Math.* 15 (1985), 235-310.
11. H. Cohen, Sur une fausse forme modulaire liee a des identites de Ramanujan et Andrews, *Proceedings of the International Number Theory Conf.*, Université Laval, 1987, to appear.
12. R. J. Evans, Ramanujan's second notebook: asymptotic expansions for hypergeometric series and related functions, *Ramanujan Revisited*, Academic Press, Boston, 1988, to appear.
13. G. H. Hardy, *Ramanujan*, third ed., Chelsea, New York, 1978.
14. G. H. Hardy and S. Ramanujan, The normal number of prime factors of a number *n*, *Quart. J. Math.* 48 (1917), 76-92.
15. G. H. Hardy and S. Ramanujan, Asymptotic formulae in combinatory analysis, *Proc. London Math. Soc.* (2) 17 (1918), 75-115.
16. S. Raghavan, Euler products, modular identities and elliptic integrals in Ramanujan's manuscripts I, *Ramanujan Revisited*, Academic Press, Boston, 1988, to appear.
17. K. G. Ramanathan, Srinivasa Ramanujan 22 December 1887-26 April 1920, *J. Indian Math. Soc.*, to appear.
18. S. Ramanujan, On certain arithmetical functions, *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 22 (1916), 159-184.
19. S. Ramanujan, *Collected Papers*, Chelsea, New York, 1962.
20. S. Ramanujan, *Notebooks* (2 volumes), Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.
21. S. Ramanujan, *Lost Notebook*, unpublished manuscript, Trinity College Library, Cambridge.
22. S. S. Rangachari, Euler products, modular identities and elliptic integrals in Ramanujan's manuscripts II, *Ramanujan Revisited*, Academic Press, Boston, 1988, to appear.
23. R. A. Rankin, Ramanujan's manuscripts and notebooks, *Bull. London Math. Soc.* 14 (1982), 81-97.
24. R. A. Rankin, Ramanujan as a patient, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* 93 (1984), 79-100.

****

• Bruce C. Berndt, "Ramanujan-100 years old (fashioned) or 100 years new (fangled)?," *The Math. Intelligencer*, (3) **10** (1988) 24-29.

★ بروس برنت، دانشگاه ایلینوی در اربانا، آمریکا

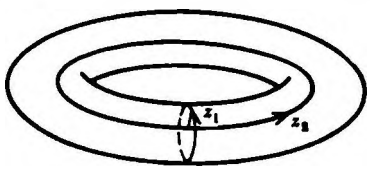
تاریخچهٔ موضوعیِ کوتاهی از

نظریهٔ هومولوژی و هوموتوپی در قرن بیستم*

پیتر هیلتن
ترجمهٔ سعید ذاکری

چند روز اخیر به‌یاد این افتاده‌ام که درحدود بیست‌وپنج سال پیش، وقتی که برای نخستین بار دراین سرزمین قصد اقامت کردم، ازمن دعوت شد که در جشن افتتاح سالن وان‌ولك[1] درساختمان ریاضیات دانشگاه ویسکانسین شرکت کنم. درآنجا بود که من یك واژهٔ جدید امریکایی، یعنی banquet، را یاد گرفتم که معنایش با آنچه در انگلستان ازاین واژه مستفاد می‌شود کاملا فرق داشت[2]. اما از این مهمتر، باید احترام عمیق خود را نسبت به‌بعضی سخنرانان بعد از شام به یاد بیاورم که می‌توانستند سرگذشت یك واقعه را بسیار مفصلتر از خود واقعه شرح دهند. به همین خاطر خیلی مراقبم که شرح سرگذشت توپولوژی جبری درقرن حاضررا بیشتر ازخوداین سرگذشت طول وتفصیل ندهم. درحقیقت مجبورم مطالب‌را گلچین کنم و سریع از آنها بگذرم. بنابراین از اینکه بخش زیادی از بررسی من لزوماً چندان عمیق نخواهد بود، پیشاپیش پوزش می‌خواهم. مایلم صحبت خود را از دورهٔ نخست، که تاسال ۱۹۲۶ را دربر می‌گیرد، آغاز کنم، و این دورانی است که پژوهشهای پوانکاره، نظریهٔ هومولوژی [مانستگی] را به‌او الهام کرد.

درخلال دوره‌ای پیش از دورانی که هم‌اکنون درنظر دارم، پوانکاره مفهوم گروه بنیادی را ابداع یا کشف کرده بود (اینکه این کارابداع نامیده شودیا کشف، به‌دیدگاه افراد بستگی دارد). او در دورهٔ موردنظرمقالاتی منتشر کرد که درآنها چیزی‌رابررسی کرده بود که می‌توانیم آن را چندگونای جبری[3] بنامیم، یعنی آرایشی از نقاط درفضاهای اقلیدسی با بعد بالا، که با معادلات‌ونامعادلات چندجمله‌ای مشخص می‌شوند؛ ونیز توجه خود را به‌چیزی‌معطوف کرد که می‌توانیم آن را میدان برداری وتعمیمهای آن روی چنین چندگوناهایی بنامیم. همین مطلب او را به‌بررسی موضوعی‌هدایت کرد که امروزه هومولوژی این‌چندگوناها خوانده می‌شود. به‌ویژه، او به‌اهمیت آنچه که بعدها عدد بتی نامیده شد، واساساً تبیین‌کنندهٔ تعداد سوراخهایی است که شکل موردنظر دارد، ونقش این اعداد درحل مسائل مربوط به‌میدانهای برداری توجه کرد. به‌عنوان مثالی ساده، چنبره را درنظر می‌گیریم (شکل ۱)، که البته یك‌چندگونای جبری است، و به‌وضوح دوسوراخ یك‌بعدی دارد. این‌دو سوراخ، دور[1]هایی هستند که هیچ‌جای چنبره را دربر نمی‌گیرند. از لحاظ صوری، چنبره خود یك سوراخ دوبعدی است، و هر نقطهٔ مفروض یك سوراخ صفربعدی‌را تشکیل می‌دهد. مسائل‌مربوط به‌جوابهای معادلات دیفرانسیل روی چنبره، بامسائل‌مربوط به مثلاکره‌متفاوت است، زیرا کره عدد بتی یك‌بعدی متفاوتی نسبت به‌چنبره دارد.



شکل ۱. چنبره، به‌همراه دو سوراخ یا دوریك‌بعدی اساسیش، z_1 و z_2.

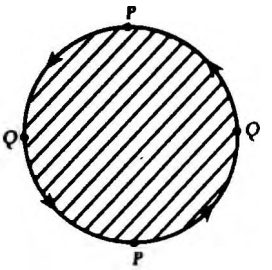
علاوه براینها، پوانکاره تشخیص دادکه درلابلای این مطالب نکتهٔ ظریف دیگری نیز وجود دارد، یعنی پدیده‌ای‌که امروزه آن را به‌عنوان ضرایب تاب[2] می‌شناسیم. منظور از ضرایب تاب را می‌توان اساساً با صفحهٔ تصویری حقیقی تشریح کرد. این صفحه‌را می‌توان بایك قرص مستدیر نمایش دادکه درآن، نقاط متقاطرروی لبهٔ قرص یکی درنظر گرفته می‌شوند (شکل ۲). این موجود را نمی‌توان‌درفضای‌سه‌بعدی تجسم کرد، بنابراین می‌گذاریم‌همین‌طور دوبعدی بماند، وبه‌همین خاطر از اینکه مجبورم آن را به این صورت روی‌تخته‌سیاه نشان بدهم نمی‌توانم پوزش بخواهم. اکنون اگر به مسیری که از P به P برمی‌گردد توجه‌کنیم، این مسیر یك دور خواهد بود. خود این دور هیچ چیزی را دربر نمی‌گیرد، اما اگر آن را تکرار کنیم، دوتا ازاین دورها قرص را دربرمی‌گیرند.

1. Van Vleck Hall

۲. banquet در انگلستان به ضیافت خیلی مجلل (با سخنرانی) گفته می‌شود درحالی که در آمریکا به ضیافت ساده‌تر (با سخنرانی) هم اطلاق می‌شود. ـ م.

3. algebraic variety

1. cycle 2. torsion coefficients



شکل ۲. صفحهٔ تصویری حقیقی، به همراه دور یك‌بعدی اساسیش، $z_1 = PQP$، به‌طوری که z_1 قرص را دربر نمی‌گیرد، اما $2z_1$ دربرمی‌گیرد.

این مطلب پدیدهٔ وجود دورهایی را نشان می‌دهدکه خودشان دربرگیرندهٔ چیزی نیستند، اما مضاربی از آنها چیزی را دربر می‌گیرند.

دراینجا می‌خواهم براین‌نکته تأکیدکنم‌که ما با عدد سروکار داریم. اعداد بتی‌واقعاً عددند ودرهر بعدی اعداد بتی وجوددارند. ضرایب تاب نیز عددند.

نامهای دیگری‌که در دوران پیشگامان بزرگ این نظریه به‌آنها برمی‌خوریم عبارت‌اند از آلکساندر(معمولا نام‌آلکساندر بانظریهٔ گرهها همراه است، اما اوکارهای زیاد دیگری نیز انجام داده که بعداً به‌آن اشاره خواهم‌کرد)، و وبلن[1] (او یکی از کتابهای مهم، یعنی تحلیل جا[2]، را نوشت؛ تحلیل جا نامی است که درابتدا به‌توپولوژی داده بودند؛ تفاوت اساسی میان‌واژه‌های تحلیل جا وتوپولوژی، درانتخاب بین دو فرهنگ لاتین ویونانی نهفته است؛ هردوی اینها یك معنا می‌دهند). وبلن عقیده داشت که حق استفاده ازواژهٔ توپولوژی منحصر به‌ریاضیات نیست، چراکه این‌واژه‌خارج ازریاضیات نیزوجود دارد. دراینجاباید ازبراوئر نیز نام ببرم، و این را به‌فال نیك می‌گیرم، چون می‌دانم کارل دوبووره[3] دراینجاراجع به‌براوئرسخنرانی کرده‌است. نام‌براوئر، به‌ویژه با ایدهٔ درجهٔ یك نگاشت پیوند خورده است، ومن بعداً به این‌موضوع بازخواهم‌گشت. علاوه براینها باید اذعان‌کنم که وان کمپن[4] ولفشتس نیزپژوهشهای راهگشایی دراین‌زمینه انجام‌دادند. این‌افراد، هرچندکه نامشان را دراین دوران آغازین آوردم، بار دیگر به‌ماجرای ما باز خواهندگشت. پرداختن تفصیلی به‌سهم هر یك‌ازآنها یقیناً تمام وقت سخنرانی را پرخواهدکرد. بنابراین قصد من واقعاً این است که به‌سال ۱۹۲۷ بپردازم، سالی‌که به‌زعم من یکی‌ازسالهای طلایی این نظریه است. اما درمورد لفشتس‌مایلم اظهارنظری کاملا شخصی بکنم، زیرا به‌عقیدهٔ من درمیان تمامی ریاضیدانان، افتخار معرفی اساو بمند مفهوم چندوجهی به‌معنای وسیعش متعلق به‌لفشتس است. وقتی که همکاری بسیار اندك‌بخش خودم را با ژان پدرسن[5] آغازکردم، خیلی زود فهمیدم که ازبخت بد، وجود زبان مشترك میان ما جدایی انداخته است، چرا که ما عبارتهای دقیقاً مشابهی به‌کار می‌بردیم که معانی متفاوتی داشتند.

1. O. Veblen
2. *Analysis Situs*
3. Karel de Bouvère
4. van Kampen
5. Jean Pedersen

به‌خصوص‌واژهٔ «چندوجهی» مانع‌ازشکل‌گیری رابطهٔ‌دوستانهٔ‌کاملا خوشایندی بین ما می‌شد. اما ببینیم «چند وجهی» یعنی چه، و رده‌بندی چندوجهیها به‌چه معناست؟ازدیدگاه توپولوژیدان امروز، چندوجهی واژه‌ای استاندارد است، وبه‌مفهوم فضای توپولوژیك زمینهٔ یك ساختار ترکیبیاتی است که‌نسبت به‌ساختارهایی ترکیبیاتی که هندسه‌دانها، یا متخصصان هندسهٔ ترکیبیاتی، مجازمی‌شمرند خیلی کلیتراست؛ و رده‌بندی‌چندوجهیها ازنظرتوپولوژیدان عموماً با کمك همانریختی، ومحتملا با هم‌ارزی ترکیبیاتی، صورت می‌گیرد، ولی بازهم‌مفهوم‌آن متفاوت باچیزی‌است که‌هندسه‌دانها به‌کار می‌برند (شکل ۳ را نگاه‌کنید). فکر می‌کنم بشود گفت‌که دردسر ما از لفشتس آغاز می‌شود. اندیشهٔ همانریختی میان چند وجهیها ایده‌ای بسیار راهگشاست، و همچون همهٔ دیگر مفاهیم خوب ریاضی، پرسشهایی‌که به‌بارآورده است بیش‌از پرسشهایی است‌که به‌آنها پاسخ داده است.

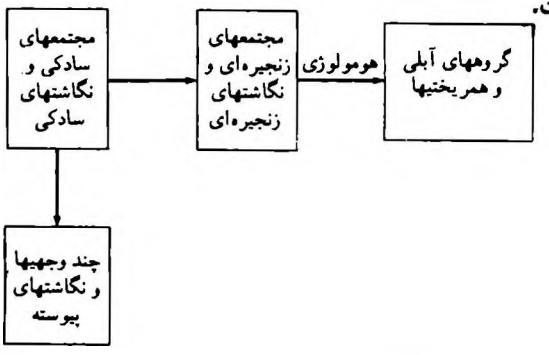
شکل ۳. مکعب وهشت‌وجهی، که ازنظرتوپولوژیدان هم‌ارزند، ولی از دیدگاه هندسه‌دان چنین نیستند.

اکنون با این‌مقدمهٔ بسیارکوتاه درمورد دوران آغازین نظریه، می‌خواهم به‌سالهای ۱۹۲۶–۱۹۲۷ بپردازم. دلیل این انتخاب آن است که در این‌سالها آلکساندروف و هوپف[1] در گوتینگن بودند. هردوشان درآنجا حکم مهمان را داشتند، و این مثال جالبی‌ازنعمت داشتن مهمان ریاضی است! آلکساندروف اهل اتحاد شوروی، و هوپف درآن‌زمان ساکن برلین بود. هر دو نفر شدیداً تحت تأثیرکارهای لفشتس قرارگرفته‌بودند، و به‌ویژه بین آنها بحث برسر قضیهٔ نقطهٔ ثابت لفشتس داغ بود. آنها فهمیده بودندکه این‌قضیه‌به‌نوعی‌تعمیم مفهوم مشخصهٔ اویلر-پوانکاره است، و تحقیق درمورد درستی این‌امر را هم آغازکرده بودند. درکنار اعداد بتی‌که پوانکاره‌آنهارا معرفی‌کرده‌بود، عددموسوم به‌مشخصهٔ اویلر یك ناوردای توپولوژیك بود. آلکساندروف و هوپف دریافتند که قضیهٔ نقطهٔ ثابت لفشتس، که البته با نمادگذاری نسبتاً ناشیانه‌ای بیان‌شده‌بود، ارتباط‌نزدیکی بااین‌مفاهیم دارد. درواقع چنین می‌نمود که هرگاه قضیهٔ نقطهٔ ثابت لفشتس را برای نگاشت همانی یك‌فضا به‌خودش به‌کاربندیم، مشخصهٔ اویلر-پوانکاره را به دست خواهد داد. اما نکتهٔ جالب آن‌است که‌درهمین‌زمان امی نوتر نیز درگوتینگن بود؛تنها پافشاری هیلبرت بود که اورا درآنجا نگه‌داشته‌بود. ازدید هیلبرت، گوتینگن‌مکانی برای‌فعالیت‌ریاضیدانها بود، و مرد یا زن‌بودن نمی‌توانست تأثیری براین‌امر داشته‌باشد. البته درآن روزها این‌دیدگاه طرفدار بسیارکمی داشت. امی‌نوتر

1. Hopf

دریافت که نباید به آنچه که آلکساندروف و هوپف بررسی می‌کنند و لفشتس قبلا بررسی کرده بود به‌دیدهٔ عدد نگریست، بلکه باید آن را به‌عنوان گروه آبلی تلقی کرد. بنابراین انصافاً باید افتخار درك جایگاه ریاضی این ناورداهای توپولوژیك، و نه کشف آنها، را به امی‌نوتر داد. بدین ترتیب بود که امی‌نوتر به مفهوم گروههای هومولوژی رسید، و دریافت که اعداد بتی و ضرایب تاب صرفاً ناورداهای عددی رده‌های یکریختی از گروههای آبلی متناهیاً تولیدشده‌هستند. اگر گروه آبلی متناهیاً تولیدشدهٔ A را درنظر بگیریم، می‌توانیم آن‌را به‌شکل جمع مستقیم گروه آبلی آزاد F و خانواده‌ای از گروههای دوری A/h_i بنویسیم، که در آن $h_1 | h_2 | \dots$. به‌علاوه رتبهٔ بخش آبلی آزاد F و اعداد h_i ناورداهای گروه A اند. اگر A گروه هومولوژی از بعد مثلا d باشد، آنگاه رتبه‌اش d امین عددبتی است، و h_iها ضرایب تاب‌اند. خوب، می‌بینید که این مطلب نسبت به‌اینکه صرفاً اعداد را درنظر بگیریم پیشرفت مهمی به‌شمار می‌رود، زیرا به‌سادگی این امکان را به‌ما می‌دهد که نسبت به کل مسألهٔ هومولوژی رهیافت بسیار پویاتری در پیش بگیریم. به‌همین خاطر، دیگر نه‌فقط اعداد بتی و ضرایب تاب، بلکه بیش از آن، گروههای هومولوژی هستند که به چندوجهی نسبت داده می‌شوند. اما نتایج کار امی‌نوتر فراتر از اینها بود.

در اینجا پرسشی طبیعی پیش می‌آید: چگونه می‌توان یك چندوجهی را به‌چندوجهی دیگری تبدیل کرد؟ چگونه می‌توان این چندوجهی را به‌آن چندوجهی نگاشت؟ دروهلهٔ اول اندیشهٔ نگاشت سادکی[1] چندوجهی به‌ذهن متبادر می‌شود، که یك همریختی بین گروههای هومولوژی القا می‌کند. اگر یادتان باشد گفتم که رتبهٔ F ناورداست، اما خود F چنین نیست. یك همریختی از گروهی آبلی به‌گروه آبلی دیگر، بخش آزاد این گروه را به‌بخش آزاد آن یکی نمی‌فرستد، وحتی بخشهای Z/h_i را نیز تحت خود حفظ نمی‌کند. درواقع وضعیت می‌تواند در اینجا کاملا پیچیده باشد؛ ممکن است بخش آزاد این گروه به‌بخش متناهی آن گروه فرستاده‌شود. بنابر این، با این دیدگاه نظریهٔ گروه گرایانه، می‌توان تنها گامی در راه شناخت تبدیلات هومولوژی برداشت. این موضوع در آن‌زمان برای فهم حقیقی مطلب، هم از نظر مفهومی و هم از جنبهٔ انگیزه‌بخشی، پیشرفت بزرگی بود، وهمچنین منجر به‌طرح پرسش بسیار واضحی شد: نگاشتهای سادکی همریختیهایی بین گروههای هومولوژی القا می‌کنند. درحالت کلی درمورد توابع صرفاً پیوسته روی چندوجهی موردنظر چه می‌توان گفت؟ البته اکنون قصد ندارم در مورد پیشینهٔ کامل *Hauptvermutung*[2] که خود وقت زیادی خواهد گرفت، صحبت کنم. پس این پرسشها را درمورد ساختارهای ترکیبیاتی گوناگون روی چندوجهیها کنار می‌گذارم، اما سؤالی که بداهتاً پیش می‌آید این‌است: آیا می‌توان هر نگاشت پیوسته روی فضاهای توپولوژیك زمینه‌را با تبدیل ترکیبیاتی مناسبی روی چندوجهیها تقریب‌زد؟ قضیهٔ تقریب سادکی، که سروکله‌اش تقریباً در همین دوران پیدا شد، پاسخی مثبت به‌این پرسش بود. و به‌این گونه سیمای واقعی هومولوژی کم‌کم پدیدارشد. فعلا توافق می‌کنیم که این ردهٔ خاص از فضاها را بررسی کنیم، یعنی چندوجهیها ونگاشتهای سادکی بین آنها به‌عنوان ساختاری ترکیبیاتی. ممکن است بگویید که می‌توان مطلب را خیلی بی‌پیرایه‌تر عنوان کرد، یعنی چندوجهی را می‌توان ــ با فراموش کردن ساختار ترکیبیاتیش ــ صرفاً یك فضای توپولوژیك درنظر گرفت که دراین‌صورت نگاشتهای سادکی، صرفاً نگاشتهایی پیوسته‌خواهند بود. پیش‌ازهرچیز باید بگویم که به‌کمك چندوجهیها و نگاشتهای سادکی، می‌توان مجتمعهای زنجیره‌ای[1] و نگاشتهای زنجیره‌ای را ساخت. یعنی به‌زنجیره‌های فضای مورد بحث نظر می‌افکنیم. زنجیره‌ها ترکیباتی خطی از سادکها هستند، وسادکها به‌نوبهٔ خود مثلثهایی تعمیم یافته‌اند که فضای ما را چنان بخشبندی می‌کنند که به‌یك چندوجهی مبدل‌شود. سرانجام، با درنظر گرفتن گروههای هومولوژی این مجتمع زنجیره‌ای، گروههای هومولوژی فضا به‌دست خواهد آمد. ابتدا مجتمعهای زنجیره‌ای و نگاشتهای زنجیره‌ای، و سپس گروههای هومولوژی و همریختیها را تعریف می‌کنیم. برای چندوجهی، یك ساختار چندوجهیگون دلخواه روی فضا اختیار می‌کنیم، و بعد نشان می‌دهیم که گروههای هومولوژی حاصل تنها به‌فضای زمینه بستگی دارند. این، جان کلام درمورد ناوردایی توپولوژیك گروههای هومولوژی است. از یك تابع پیوستهٔ دلخواه با یك تقریب به‌یك نگاشت سادکی می‌رسیم. البته انتخابهای گوناگونی برای این تقریب وجود دارد، اما هر تقریبی که اختیار کنیم، همریختی القاشده روی گروههای هومولوژی یکسان خواهد بود. نموداری که در اینجا کشیده‌ام (شکل ۴)، و بین مراحل آن دهها سال فاصلهٔ زمانی است، اساساً مباحثی را نشان می‌دهد که افراد فوق درحین تشریح ایده‌های هومولوژی مورد بررسی قرار داده‌اند. هستهٔ اصلی تمام این ایده‌ها عبارت است از این‌مطلب که گروههای هومولوژی حقیقتاً تحت هوموتوپی ناوردا هستند، یعنی نگاشتهای پیوستهٔ هوموتوپیك، همریختی هومولوژی یکسانی القا می‌کنند. مثال زیبایی را نگاشتهای f روی کرهٔ n بعدی S^n به‌دست می‌دهند. چون H_nS^n دوری نامتناهی است، همریختی هومولوژی القا شده در بعد n، تنها یك عدد صحیح است، که درجهٔ f نام دارد. قضیهٔ براوئر-هوپف می‌گوید که درجهٔ f، ناوردای یکتای ردهٔ هوموتوپی f است.



شکل ۴. طرح نظریهٔ هومولوژی چندوجهیها. توجه کنید که مفاهیم مهمی از هوموتوپی به‌نگاشتهای پیوسته، سادکی و زنجیره‌ای وابسته است.

1. simplicial map

۲. *فرضیهٔ اصلی* (در مورد خمینه‌های ترکیبیاتی) عبارت است از این فرضیه که خمینه‌های ترکیبیاتی n بعدی همسانریخت، باید همسانریختی قطعه به قطعه خطی داشته باشند. ــ م.

1. chain complexes

در اینجا باید از اولین شخصی که با این موضوع ارتباط پیدا می‌کند، و از قرار معلوم هنوز زنده است، نام ببرم: ویتوریس[1]، ریاضیدان اتریشی، ساکن اینسبروک. ویتوریس یکی از دو نفری است که باید افتخار کشف این مطلب را به او داد که بی‌آنکه فضای مورد نظر، فضای زمینهٔ چندوجهی باشد، می‌توان گروههای هومولوژی را تعریف کرد. او مفهوم گروه هومولوژی را روی یك فضای صرفاً توپولوژیك تعریف کرد (حتی به‌نظر می‌رسد که ویتوریس، مستقل از امی‌نوتر، اهمیت مفهوم گروه را در این زمینه تشخیص داده بود). به‌این ترتیب روی فضاهای دلخواه، گروههای هومولوژی معنی پیدا کردند. این کار را ویتوریس با پوشش فضا با مجموعه‌های باز انجام داد. شخص دومی که این افتخار باید نصیبش شود، چك[2] ریاضیدان اهل چکسلواکی است. تا جایی که می‌دانم، این دو تن مستقل از یکدیگر ولی با روشهای متفاوتی عمل کردند. هر دو نفر این کار را با پوشش فضا با مجموعه‌های باز انجام دادند؛ مجموعه‌های باز در تعریف چك مشابه رئوس یك مجتمع سادکی[3] رفتار می‌کردند. در این صورت مطابق تعبیر چك، تعدادی متناهی مجموعهٔ باز یك سادك تولید می‌کردند اگر و تنها اگر اشتراکشان تهی می‌بود. بدین ترتیب او به‌این مجموعه‌های باز همچون رئوس یك مجتمع می‌نگریست، و بنابراین از دیدگاه امروزی، کار چك عبارت بود از بررسی نصب[4] یك پوشش، که مجتمع سادکی مجردی است که در آن یك مجتمع زنجیره‌ای و گروههای هومولوژی به‌یکدیگر الصاق شده‌اند.

اما ویتوریس راه دیگری در پیش گرفت. او مجموعه‌های باز را اختیار کرد و گفت که گردایه‌ای از نقاط فضا (به‌یك مفهوم) تشکیل سادك می‌دهند هرگاه همهٔ آنها در یکی از مجموعه‌های پوششی قرار بگیرند. امروزه این دو دیدگاه را به معنای واقعی دوگان یکدیگر می‌شناسیم. اولین کسی که دوگانی تعاریف ویتوریس-چك را مدلل کرد، ریاضیدان بسیار خوب کانادایی، هیو داوکر[5] بود، که با کمال تأسف همین اواخر درگذشت. در همین باب باید از مایر[6] اسم ببرم که نامش ــ همچنانکه نام هاینه همواره با بورل می‌آید ــ همواره به‌عنوان بخشی از مایر-ویتوریس آورده می‌شود. در هومولوژی مفهومی به نام دنبالهٔ مایر-ویتوریس وجود دارد. هوپف نیز این موضوع را تصدیق کرده است که مایر در مقاله‌ای که در ۱۹۲۹ منتشر کرد، مستقل از امی‌نوتر تشخیص داده بود که تعریف هومولوژی با گروهها سروکار دارد. اگر کمی پا را از زمان مورد بحث فراتر بگذاریم، به‌سال ۱۹۳۲ که کتاب سرنوشت‌ساز آلکساندروف، و ۱۹۳۵ که کتاب مهم آلکساندروف و هوپف نوشته‌شد می‌رسیم. کتاب اخیر به‌عنوان جلد ۱ منتشر شد، اما جلد ۲ی آن هرگز نوشته نشد (دلیل این امر، ظهور نظریهٔ کوهومولوژی بود). این کتاب فوق‌العاده تأثیرگذار بود، و حکم نوعی کتاب مقدس را برای مطالعهٔ توپولوژی جبری داشت. شیوهٔ نگارش آن بسیار زیبا بود. البته نسخهٔ اصلی آن به‌زبان آلمانی نوشته شده‌بود، اما حتی اگر زبان آلمانی‌هم نمی‌دانستید، آن‌را آسانتر از اغلب کتابهای انگلیسی می‌فهمیدید. هدف از نوشتن آن، روشن

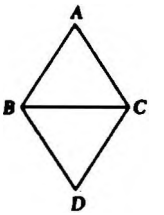
1. Vietoris 2. Čech 3. simplicial complex
4. nerve 5. Hugh Dowker 6. Mayer

ساختن جوهر نظریه بود. شکلهای زیبای آن‌هم که جای خود دارد.

درسال ۱۹۳۵، که به‌حق سالی طلایی بود، وقایع زیادی رخ داد. در تابستان این سال همایشی بین‌المللی در مسکو برگزار شد. هوپف شاگرد جوان‌خود، اشتیفل[1] را به‌مسکو فرستاد. اشتیفل به‌تازگی مطالعهٔ وجود جواب معادلات دیفرانسیل را از دیدگاه هومولوژی شروع کرده و به‌ایده‌ای رسیده بود که امروزه آن‌را رده‌های مشخصه[2] می‌نامیم. وقتی که اشتیفل مقالهٔ خود را در همایش مسکو می‌خواند، هسلر ویتنی[3] (یك ریاضیدان دیگر که هنوز زنده است*!) در بین حاضران جلسه بود. پس از جلسه ویتنی به‌سراغ اشتیفل آمد و به‌او گفت: «بسیار جالب است، این تقریباً همان‌چیزی است که دارم دربارهٔ آن تحقیق می‌کنم» ــ منظور ویتنی چیزی بود که امروزه می‌توان آن‌را فضاهای تاری[4] نامید. آلکساندروف نیز اظهار داشت که این فضاهای تاری‌را آنها (پیروان مکتب روسی) مورد بررسی قرار داده‌اند. البته آنها این فضاها را حاصلضربهای تابیده[5] می‌نامیدند. بدینسان در این همایش مسکو به‌طرز خارق‌العاده‌ای تبادل آرا صورت گرفت. اکنون درمورد رده‌های اشتیفل-ویتنی صحبت می‌کنیم. اینها درحکم رده‌های مشخصهٔ کوهومولوژی روی یك خمینهٔ مشتق‌پذیر حقیقی‌اند. این رده‌ها اکنون کاملا شناخته شده‌اند، اما در آن‌زمان هنوز درمرحلهٔ تکوین بودند. درهمین‌سال بود که مفهوم کوهومولوژی [همانستگی] نیز شکل گرفت و معلوم شد که کوهومولوژی با ساختار حلقه سروکار دارد. اما رشد نظریهٔ کوهومولوژی در آن‌زمان بسیار کند صورت می‌گرفت، و دلیل سادهٔ این امر آن بود که توپولوژیدانها اندیشهٔ امی‌نوتر را به‌آسانی درنمی‌یافتند. توپولوژیدانها، علی‌رغم برتریهای واضح دیدگاه جبری، همچنان منحصراً هندسی فکر می‌کردند، و من روی این واژهٔ «منحصراً» تأکید دارم. این طرز فکر اشتباه بود، و نکتهٔ جالب درمورد هوپف، بزرگترین توپولوژیدان آن‌زمان، این است که او هرگز میانهٔ خیلی‌خوبی با ایدهٔ کوهومولوژی نداشت. علت این امر به‌ایدهٔ زنجیره‌ها مربوط می‌شود که پیش از این به‌آن (به‌طور ناقص) اشاره کردم. یك زنجیره ترکیبی خطی از سادکهاست. مثلا اگر نوعی مثلث‌بندی برای فضا داشته‌باشیم، درحالت یك بعدی زنجیره را می‌توان ترکیبی از یالها با چندگانگی معینی در نظر گرفت. هوپف همواره زنجیره‌را نوعی مسیر می‌پنداشت که روی چندوجهی پیموده می‌شود، و نگرش جاری نسبت به‌هومولوژی و کوهومولوژی چنین بود: اگر مثلا به‌یك یال مشخص نگاه کنیم، این یال جهت یافته دو رأس خواهد داشت که ضریب یکی ۱+ و ضریب دیگری ۱ــ است، یعنی به‌این یال مرز آن را نسبت می‌دهیم. کار دیگری که می‌توانیم انجام دهیم این است که به‌این یال تمام مثلثهایی را که یکی از اضلاعشان همین یال است، یعنی دوگان مرز[6] این یال، را نسبت

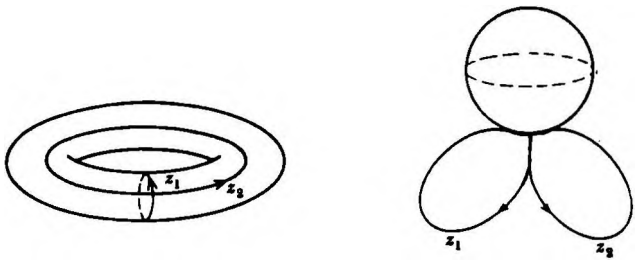
1. Stiefel 2. characteristic classes 3. Hassler Whitney
* ویتنی درسال ۱۹۸۹ در سن ۸۲ سالگی درگذشت.ــم.
4. fiber spaces 5. twisted products
6. coboundary
این اصطلاح فعلا معادل مناسبی در فارسی ندارد و واژهٔ «هم مرز» که گاهی برای آن به کار می‌رود گمراه کننده است. همان طور که در این مقاله دیده می‌شود، مفاهیم

دهیم (شکل ۵). پس در یک حالت بعد را کاهش می‌دهیم، و در حالت دیگر افزایش. کاهش بعد همان هومولوژی، و افزایش آن کوهومولوژی است. این دیدگاه، گرایش جاری در آن زمان بود، و درواقع تحت نفوذ آلکساندروف، روسها سالیان سال از هومولوژی پایینی و بالایی سخن می‌گفتند. اما این نظرگاه بی‌عیب نبود، زیرا به‌مفهوم رایج در جبر خطی، کوهومولوژی دوگان هومولوژی است، به‌عبارت دیگر اگر ۱- زنجیره‌ها را به‌عنوان ترکیبات خطی یالها درنظر بگیریم، باید ۱- دوگانْ زنجیره[1]ها را به‌عنوان توابعی بر این یالها تصور کنیم. پس باید میان یک یال و تابعی که بر آن یال مقدار ۱ را به‌خود می‌گیرد، تمایز قائل شویم. این تمایز دقیقاً فرق میان یک عنصر پایهٔ یک فضای برداری و عنصر پایهٔ وابسته به‌آن درفضای دوگان است. پس دوگان زنجیره‌ها را باید توابعی بر روی سادکها در نظر گرفت. اگرچه هوپف این ایده را دریافته بود، نمی‌توانست آن‌را به‌کار ببندد، زیرا به‌زعم او هومولوژی جنبهٔ صرفاً هندسی داشت. این ایده، که توابعی را بررسی کنیم که مقادیرشان در یک گروه آبلی آزاد دلخواه است و بر روی یالها یا مثلثهای یک چندوجهی تعریف شده‌اند، اندیشه‌ای بود که به‌کلی با افکار هوپف مغایرت داشت.



شکل ۵. مرز BC عبارت است از $C-B$. دوگانْ مرز BC عبارت است از $ABC+DBC$.

تکوین نظریهٔ کوهومولوژی زمان بسیار زیادی به‌درازا کشید، زیرا درابتدا تعبیر درستی از آن نشده بود. همچنین این احساس وجود داشت که می‌توان ساختاری ضربی در کوهومولوژی وارد کرد که در هومولوژی وجود نداشته باشد. کوشش زیادی صرف انجام این کار شد. آلکساندروف که پیش‌از این از او نام بردم یکی از پیشگامان این کار بود و تلاشهایش عاقبت در ۱۹۳۵ به‌ثمر رسید. این امر، علاوه‌برغنا بخشیدن به‌ساختار، موجب شد نسبت به‌نظریهٔ هومولوژی قدرت بیشتری برای تشخیص تمایز میان فضاها به‌دست آید، زیرا کاملا ممکن است دو فضای توپولوژیک ساختار گروه



شکل ۶. چنبره و «چنبرهٔ حلقه‌به‌گوش» متشکل از یک کره و دو حلقه که در یک نقطه به‌یکدیگر وصل شده‌اند. حاصلضرب z_1z_2 روی چنبره برابر خود چنبره است، درحالی که روی چنبرهٔ حلقه به‌گوش، $z_1z_2=0$.

آبلیشان در کوهومولوژی یکی باشد، اما در واقع ساختارهای ضربی متفاوتی داشته باشند. اگر از یک‌سو چنبره و ازسوی دیگر شکلی را درنظر بگیریم که اینجامی بینیم (شکل ۶)، آنگاه هومولوژی دومی همان ساختار جمعی چنبره را دارد، اما تمایز آن با چنبره در ساختار ضربی کوهومولوژی آن است. حاصلضرب دو دوگان دور[1] یک بعدی روی چنبره برابر خود چنبره است، درحالی که درشکل دوم این حاصلضرب برابر صفر خواهد بود. بدین ترتیب بود که گام بزرگی درجهت پیرایش نظریهٔ کوهومولوژی برداشته شد. جالب است بدانیم که هوپف، که احترام بسیار زیادی برای او قائلم، با این اندیشه‌ها چندان دمساز نبود. او پیشتر درمورد خمینه‌ها دریافته بود که هرگاه نگاشتی چون f ازخمینهٔ m بعدی M به‌خمینهٔ n بعدی N درنظر بگیریم، آنگاه حلقه‌های اشتراکی ازخمینه‌ها داریم. منظور ازیک حلقهٔ اشتراک[2] این است که دو دور روی خمینه درنظر بگیریم و به‌اشتراک آنها در موضعی دلخواه روی خمینه نگاه کنیم. هوپف با عزیمت از همین نقطه چیزی را تعریف کرد که آن را همریختی برگشتی[3] می‌نامید. همریختی برگشتی چیزی بود که f آن‌را القا می‌کرد و نگاشتی ازهومولوژی مرتبهٔ $(n-p)$ی خمینهٔ N به‌هومولوژی مرتبهٔ $(m-p)$ی خمینهٔ M، به‌ازای pی دلخواه، بود. او این مفهوم را تعریف کرد و نام همریختی برگشتی را به‌آن داد. خوب، این واقعاً چه بود؟ پاسخ آن است که تحت دوگانی موجود روی خمینه، هومولوژی مرتبهٔ $(n-p)$ی N اساساً همان کوهومولوژی مرتبهٔ pی N، و هومولوژی مرتبهٔ $(m-p)$ی M همان کوهومولوژی مرتبهٔ pی M است. پس این همریختی، چیزی نیست مگر نگاشت القایی در نظریهٔ کوهومولوژی. هوپف این همریختی برگشتی را تعریف کرد و طریقهٔ شگفت انگیزی را که این همریختی بعد هومولوژی را تغییر می‌دهد، روشن ساخت، اما گام در مسیری اشتباه گذارد. البته دلیل این اشتباه آن بود که کوهومولوژی، به‌خاطر متکی بودن بر فضاهای برداری دوگان، پادوردا[4]ست. یک نگاشت خطی از یک فضای برداری به‌فضای برداری دیگر در اختیار داریم که نگاشت دوگانی از فضای دوگان دومی به‌فضای دوگان اولی، درجهت عکس، القا می‌کند. هوپف با آن بینش بسیار بسیار عمیقش، ایدهٔ درست را

---

coboundary، cochain، و cocycle، دوگانهای مفاهیم boundary، chain، و cycle هستند. گروه ریاضی مرکز نشر دانشگاهی فعلا، تا زمانی که اصطلاحات بهتری پیشنهاد نشده، معادلهای «دوگانْ مرز»، «دوگانْ زنجیره»، و «دوگانْ دور» را برای اصطلاحات دستهٔ اول پیشنهاد کرده است. ضمناً گروه ریاضی مرکز برای homology معادل «مانستگی» و برای cohomology معادل «همانستگی» را پیشنهاده کرده و مترجم این مقاله اولین باری که این اصطلاحات ظاهر شده‌اند پیشنهاد مرکز را در داخل کروشه آورده است. ـ م.

1. cochains

1. cocycles
2. intersection ring
3. Umkehrshomomorphismus
4. contravariant

به‌دست آورده بود، اما بجز تشریح این ایده به این طریق، کار دیگری نکرد. از این تنها نکتهٔ قابل انتقاد در کارهای ریاضی هوپف که بگذریم، به یکی از کارهای بزرگ او در ۱۹۳۵ می‌رسیم. در دسامبر ۱۹۳۵ همایشی در جنوا برگزار شد، و در آن الی کارتان توجه همگان را به خاصیت جالب گروههای کلاسیك لی جلب کرد. او خاطرنشان کرد که همهٔ گروههای کلاسیك لی دارای این ویژگی‌اند که اعداد بتی آنها ــ او هنوز هم از اعداد بتی صحبت می‌کرد ــ دقیقاً مانند اعداد بتی حاصلضرب کره‌های با بعد فردند. بنابراین اگر هریك از گروههای کلاسیك لی، یعنی سری گروههای متعامد، گروههای یکانی، و گروههای همتافته[1]، را انتخاب کنیم، هریك از این گروهها به‌نوعی شبیه به حاصلضرب دکارتی کره‌های با بعد فرد رفتار می‌کنند. البته این موضوع را می‌توان به‌سادگی مبتنی بر مشاهدات تجربی دانست، به این معنی که کارتان همهٔ این گروهها را با اعداد بتی آنها می‌شناخت، و کاری که کرد این بود که تنها این پدیده را در مورد آنها مشاهده کرد. اما هیچ توضیحی در این باب در دست نبود. او همگان را به یافتن چنین توضیحی فراخواند. باید این را نیز اضافه کنم که سابقهٔ این مطالب به افرادی چون براوئر، پونتریاگین، و ارسمان[2]، برمی‌گردد. پس از آن کارتان پرسش طبیعی بعدی را مطرح کرد، و آن اینکه آیا حکم فوق برای پنج گروه لی استثنایی نیز برقرار است؟

چرا گروههای کلاسیك لی همواره مشابه حاصلضرب کره‌های با بعد فرد رفتار می‌کنند؟ هوپف در این باره فکر کرد و به پاسخ آن رسید. او دریافت که برای پاسخگویی به این پرسش، بخش ناچیزی از ساختار گروههای کلاسیك لی مورد نیاز است. درواقع همهٔ آن چیزی که اساساً لازم است، یك فضای توپولوژیك به‌همراه ضربی پیوسته روی آن است که یك همانی دوطرفه داشته باشد. به‌همین خاطر مفروضات ما عبارت خواهد بود از یك فضای فشرده تا هومولوژی مورد نظرمان متناهیاً تولیدشده باشد، و یك ضرب با همانی دوطرفه. این همهٔ آن چیزی است که لازم است! نبوغ باورنکردنی هوپف در تشخیص این موضوع همواره مرا تحت تأثیر قرار داده است، زیرا در زمانی که او در این باره کار می‌کرد، دقیقاً دو مثال از این پدیده شناخته شده بود که هیچ یك گروه لی نبود. یکی کرهٔ هفت بعدی بود، و یقیناً سخن بی‌مزه‌ای است اگر بگوییم کرهٔ هفت بعدی مشابه حاصلضربی از کره‌های با بعد فرد رفتار می‌کند! و مثال دیگر فضای تصویری حقیقی هفت بعدی بود. در این حالت نیز تشابه با حاصلضرب کره‌های با بعد فرد چندان هیجان‌انگیز نیست، چرا که فضای تصویری حقیقی هفت بعدی، خمینه‌ای جهت‌پذیر است که کرهٔ هفت بعدی یك پوشش دولایهٔ آن است. از دیدگاه اعداد بتی، واضح است که این فضا کاملا شبیه به کرهٔ هفت بعدی رفتار می‌کند. پس می‌بینیم که در آن زمان مثال جالبی در دست نبود، اما هوپف اینها را دستمایه‌ای برای توضیح مطلب قرار داد و این آغاز نظریهٔ جبرهای هوپف بود که امروزه قلمروی پربار است. اکنون تعداد بیشماری مثال برای خمینه‌های به اصطلاح هوپف در دست است که حتی گروه توپولوژیك نیستند. پس می‌بینیم که در سال ۱۹۳۵ چه وقایع مهمی روی داد.

اینك وقت آن است که در مورد گروههای هوموتوپی صحبت کنیم. موازنهٔ بسیار زیبایی میان گروههای هومولوژی و گروههای هوموتوپی وجود دارد. تعریف گروههای هومولوژی فوق‌العاده دشوار است، اما یك‌بار که این کار صورت گرفت، محاسبهٔ آنها بسیار ساده است. ازسوی دیگر تعریف گروههای هوموتوپی به‌غایت ساده است، اما محاسبهٔ آنها اساساً غیرممکن است. گروههای هوموتوپی تعمیمی از گروه بنیادی‌اند. در مورد گروه بنیادی، کافی است به رده‌های هوموتوپی نگاشتهای یك دایره به فضای مورد نظر بنگریم، اما در مورد گروههای هوموتوپی بالاتر، نگاشت کره‌ها لازم است.

درواقع افتخار ابداع گروههای هوموتوپی را نباید به هورویچ[1] داد. حقیقت امر آن است که این افتخار باید نصیب چك شود. در همایشی در وین به‌سال ۱۹۳۱، چك مقاله‌ای ارائه کرد که در آن گروههای خاصی را از دیدگاه هوموتوپی توصیف کرده بود. او هیچ کاربردی برای این گروهها سراغ نداشت. به‌علاوه، تنها قضیه‌ای که ثابت کرده بود این بود که این گروهها تعویض‌پذیرند. دیگران، خصوصاً آلکساندروف، چك را متقاعد کردند که این گروهها چندان جالب توجه نخواهند بود، زیرا چنین تصور می‌شد که هر نوع اطلاعاتی که بتوان از گروههای آبلی به دست آورد، ریشه در هومولوژی دارد. هورویچ گروههای هوموتوپی را مجدداً تعریف کرد و بلافاصله در یك مجموعهٔ چهارمقاله‌ای که به‌صورت مقدماتی انتشار یافت کاربردهای مهمی از آنها را به‌دست داد. در این مجموعهٔ چهارمقاله‌ای، او اهمیت موضوعی را نشان داد که امروزه آن را نظریهٔ انسداد[2] می‌نامیم. همانگونه که استین‌راد[3] بعدها خاطرنشان کرده است، مسألهٔ اساسی را که در توپولوژی با آن سروکار داریم، اغلب می‌توان چنین تنظیم کرد. یك شیء X، یك شیء Y، زیرفضایی از X به‌نام L، و نگاشتی پیوسته چون g از L به Y در اختیار داریم. سؤال این است: آیا تابع پیوستهٔ g را می‌توان به‌تمام X گسترش داد؟ جالب است بدانیم که بسیاری از سؤالات در توپولوژی و خارج آن را می‌توان به‌مسألهٔ فوق تحویل کرد. هورویچ نشان داد که این نوع مسائل را می‌توان بر حسب انسدادهایی خاص که رده‌های کوهومولوژی X به‌پیمانهٔ L اند و ضرایبشان در گروههای هوموتوپی Y اند حل کرد (درواقع معمولا نمی‌توان این گونه پرسشها را پاسخ داد، زیرا نمی‌توان انسدادها را محاسبه کرد!). این ایلنبرگ[4] بود که کل نظریهٔ انسداد را به‌صورتی کاملا اصولی و منظم درآورد. هورویچ اهمیت گروههای هوموتوپی را نشان داد، و قضیهٔ مهمی در مورد ارتباط بین هوموتوپی و هومولوژی به‌نام قضیهٔ یکریختی هورویچ ثابت کرد. او نشان داد که همواره می‌توان یك همریختی از گروه هوموتوپی nام به گروه هومولوژی nام تعریف کرد. اگر فضا چنان باشد که همهٔ $(n-1)$ گروه هوموتوپی نخستش $(n \geqslant 2)$ بدیهی باشند، آنگاه این همریختی درواقع یکریختی خواهد بود. بنابراین اولین نمود اهمیت همریختی هورویچ این است که ممکن است یکریختی باشد. این موضوع تعمیمی از قضیهٔ کلاسیکی بود که پیشتر پوانکاره به‌آن توجه کرده بود، قضیه‌ای که در حالت $n=1$ می‌گوید گروه هومولوژی مرتبهٔ اول همان نسخهٔ آبلی شدهٔ گروه

1. symplectic groups
2. Ehresmann

1. Hurewicz
2. obstruction theory
3. Steenrod
4. Eilenberg

بنیادی است. در ابعاد بالاتر، گروههای هوموتوپی خود آبلی‌اند و بنابراین نیازی به آبلی کردنشان نیست. و این بهترین چیزی است که می‌توان از دیدگاه آلکساندروف اظهار داشت؛ به‌عبارت‌دیگر، نخستین‌جایی که گروههای هوموتوپی وارد معرکه می‌شوند جایی است که آنها صرفاً گروه هومولوژی هستند. از این نقطه که بگذریم، واگرایی این دو مفهوم ازیکدیگر بسیار جالب است، به‌طوری که می‌توان گفت هومولوژی و هوموتوپی نسبت به‌یکدیگر حالت مفاهیمی مکمل را پیدا می‌کنند. اگر بخواهم تنها یك نکته درمورد سهم اندك خودم در تحول این موضوع بگویم، آن نکته یقیناً همکاریم با اکمان[1] است. ما نشان دادیم که گرچه گروههای هومولوژی و هوموتوپی اساساً متمایزند، روند ساختن گروههای کوهومولوژی و گروههای هوموتوپی را می‌توان نسخه‌های دوگانی ازدقیقاً یك فرایند تلقی کرد. به‌بیان‌دیگر، ساختار حقیقی نظریهٔ کوهومولوژی را می‌توان تصویر آینه‌ای ساختار نظریهٔ هوموتوپی دانست. البته نتایجی که ما به‌دست آوردیم، ارتباطی اساسی بین دو نظریه به‌دست می‌دهد.

یکی از نامهایی که از آن یاد نکردم، هنری وایتهد است. باید بگویم کاری که هنری وایتهد انجام داد، متضمن اندیشه‌ای بسیار زیبا بود. با برگشت به آغاز نظریهٔ هومولوژی، می‌بینیم فضای توپولوژیکی که هومولوژی می‌پذیرد، دراصل مجهز به‌ساختاری ترکیبیاتی بوده است. ویتوریس و چك با تعریف هومولوژی برای فضاهای توپولوژیك دلخواه، آن‌را از قید ساختار ترکیبیاتی آزاد کردند. ازسوی دیگر هوموتوپی دراصل روی فضاهای توپولوژیك دلخواه تعریف شده بود، وکاری که وایتهد کرد این بود که ساختاری ترکیبیاتی روی فضا اعمال کرد و نشان داد که چگونه این ساختار ترکیبیاتی می‌تواند بینشی درباب گروههای هوموتوپی فضا به‌دست دهد. این نتایج اول‌بار درمقالاتی آمدند که او پیش‌ازجنگ نوشت، وبعدها خودش آنها را بازنویسی کرد. وایتهد می‌گفت کارهای پیش‌از جنگش با آثار کارل مارکس ازاین‌جهت شباهت دارند که اغلب مورد استناد قرار می‌گیرند اما هرگز خوانده نمی‌شوند. پس از جنگ او کوشید قسمت زیادی ازکارهایش‌را به‌زبان جبری دوباره بیان کند. من اولین شاگرد او پس‌ازجنگ دوم جهانی بودم؛ و به همین‌دلیل بود که درآن‌زمان تحت تأثیر افکار او قرار گرفتم و این محتملا نقش زیادی در گرایش اولیهٔ من داشته‌است.

***

پرسش: هنگامی که من توپولوژی جبری می‌خواندم، هرگز نفهمیدم که اصلا امی‌نوتر کاری در این زمینه انجام داده باشد. آیا این نظری رایج است؟

پاسخ: خیر. هوپف درمورد سهم فوق‌العاده زیاد امی‌نوتر، وبینش شگفت‌انگیزی که او داشت، اظهار نظری صریح کرده‌است. او گفت تا زمانی که امی‌نوتر خاطرنشان نکرده بود، آنها هرگز تشخیص نداده بودند که دربررسی هومولوژی با گروههای آبلی سروکار دارند. هوپف اهمیت دیدگاه جبری درهومولوژی را دریافته بود، اما با کوهومولوژی میانهٔ خوبی نداشت. به‌گفتهٔ او زمانی که‌همهٔ آنها در گوتینگن جمع شده بودند و صحبت می‌کردند، فضای عجیبی برآنجا حاکم بود. امی‌نوتر به‌صحبتهای آنها گوش داد و سپس برگشت و گفت: «خوب، چیزی که شما واقعاً دارید درباره‌اش صحبت می‌کنید، گروههای آبلی است». آنها با اعداد بتی کار می‌کردند و به‌امی‌نوتر گفتند که اعداد بتی باخمینه‌ها سروکاردارند، اما او گفت که جان کلام درگروههای آبلی نهفته است، و بنابراین باید از همریختی صحبت کرد. اما دراثباتهای پیشین برای ناوردایی، هیچ ردپایی از این واقعیت نمی‌توان یافت. اندرو والاس کتاب خوبی در باب نظریهٔ هومولوژی دارد. او دریك لم کوچك این واقعیت را بیان می‌کند که هرنگاشت بین فضاها یك همریختی بین گروههای هومولوژی القا می‌کند، و نیز ترکیب دو نگاشت، القاکنندهٔ ترکیب دو همریختی است. خوب، این همهٔ آن چیزی است که ناوردایی توپولوژیك از آن سخن می‌گوید، ولم مزبور صریحاً می‌گوید که‌می‌توان‌ازیك‌نظریه به‌نظریهٔ‌دیگر، ازتوپولوژی به‌جبر، رفت. این، واقعیت‌هومولوژی راآشکارمی‌کند، واین‌دیدگاهی است که امی‌نوتر آن را روشن ساخت. بگذارید تنها یك حکایت کوتاه نقل کنم، آن‌هم به‌خاطر اینکه اینجا سرزمین پولیاست. به‌مناسبت‌هشتادسالگی‌پولیا، من که در زوریخ به‌سرمی‌بردم به‌مراسم جشن تولد او دعوت شدم. در آنجا هوپف و او دربارهٔ امی‌نوتر بحث می‌کردند. یکی از آنها اصرار داشت که امی‌نوتر خیلی زشت بود، و دیگری با حرارت آن را انکار می‌کرد.

پرسش: چرا بعضی توپولوژیدانها از به‌کار بستن روشهای جبری عاجزند؟ آیا آنها صرفاً احساس می‌کنند که این روشها نتایج ارزشمندی به‌دست نخواهند داد؟

پاسخ: سابق براین احساس می‌شد که همهٔ توپولوژی از هندسه، و تا حدودی هم آنالیز، نشأت می‌گیرد. پوانکاره به‌مفهوم وسیع کلمه، آنالیزدان بود. به‌نظر من اینکه جبر ابزار دست هندسه‌دان شود، اندیشه‌ای عجیب وغریب بود. این‌روزها چنین ایده‌ای‌طبیعی به‌نظر می‌رسد، اما آن‌وقتها بسیار عجیب بود. در ۱۹۳۵، ریاضیدان بزرگی چون الی‌کارتان هنوز ایده‌ای جز اعداد بتی نداشت. پس چنین اندیشه‌ای برای آنها خیلی بیگانه بود، و این چیزی بود که واقعاً جلوی آنها را می‌گرفت. مثلا دردسر ریاضیدانها رابامفهوم کوهومولوژی و سردرگمی بسیاری از آنهارا درمواجهه با «مرز بالایی» درنظر بگیرید، که درآن هرتلاشی به‌بیراهه می‌رفت! آنها می‌دیدند که گرچه از مثلا یك نگاشت‌سادکی‌نگاشتی از زنجیره‌ها به‌دست می‌آید، این نگاشت با مرز بالایی تعویض‌پذیر نیست. عقیدهٔ هوپف این بود که باید فرض کرد نگاشت به‌نحوی از مسیری‌دیگر برمی‌گردد. چرا طرز فکر این‌گونه بود؟ به‌خاطر آنکه آنها به‌بیان جبری، دوگان زنجیره‌ها را توابعی بر زنجیره‌ها نمی‌دانستند. به‌عنوان مثالی دیگر، هرچندکه آلکساندروف وهوپف در ارتباط باقضیهٔ نقطهٔ ثابت‌لفشتس، بررسی هومولوژی با ضرایب گویارا طبیعی می‌دانستند، ریاضیدانها چنین می‌پنداشتند که هومولوژی با ضرایب گویا صرفاً وسیله‌ای برای خلاص شدن از تاب‌است. آنها چنانکه ما امروزه تلقی می‌کنیم، هومولوژی با ضرایب گویا را به‌عنوان راهی برای به‌دست‌آوردن ساختار فضای برداری تلقی نمی‌کردند. با گویا گرفتن ضرایب، یك فضای برداری جالب‌روی اعدادگویا به‌دست‌می‌آوریم. پس می‌توانیم تنها از بعد این‌فضای برداری صحبت کنیم. اما درآن موقع چنین ایده‌هایی مطرح نبود. همین‌جا باید اضافه کنم که هنری وایتهد، در یکی از مقاله‌های

1. Eckmann

پیش‌از جنگ، اندیشهٔ اصلی دنبالهٔ دقیق[1] درهوموتوپی را معرفی کرد، اما شیوهٔ بیان او برای ما فوق‌العاده مبهم بود. به‌جای اینکه خیلی ساده بگوید هستهٔ یك همریختی تصویر همریختی پیشین در دنباله است، عبارات پیچیده‌ای به‌کار برده بود، چراکه از نظر او هوموتوپی نگاشتهای به‌توی X با هوموتوپی نگاشتهای به‌توی زیرفضای A از X تفاوت داشت. در هرحالت او منظور خود از دقیق‌بودن دنباله را نوشت،وبنابراین با دونگاشت جزئیت‌سروکار داشت،که یکی از یك مسیر، ودیگری از مسیر دیگر می‌رفت.

تکوین همهٔ این ایده‌های جبری مدت زمان زیادی به درازا کشید زیرا آنهاکه‌درنظریهٔ هومولوژی‌وهوموتوپی‌تحقیق‌می‌کردند جبردان نبودند، وجبردانها نیز به‌موضوع علاقه‌ای نداشتند. تنها متخصص جبرمجردکه به‌این موضوع‌علاقه نشان‌داد، امی‌نوتر بود.

پرسش: این روزها متداول است که روشهای یك شاخهٔ ریاضیات برای حل مسائل شاخهٔ دیگری به‌کار بسته شود. آیا توپولوژی جبری نخستین مبحثی بودکه چنین شیوه‌ای در آن به‌کار گرفته شد؟

پاسخ: به‌طور اصولی بله، مگر آنکه بگوییم این‌کار پیشتر درمورد نظریهٔ تحلیلی اعداد انجام شده بود. در آنجا روشهای آنالیز کلاسیك را برای به‌دست‌آوردن نتایجی درنظریهٔ اعداد به‌کار می‌گیریم. با این حال به‌تعبیری درآنجا آنالیز حرف اول وآخر را می‌زند. اما در توپولوژی، دو روش به‌طرزهمزمان به‌کارگرفته می‌شوند. نمی‌توان گفت یکی از روشها بردیگری چیرگی دارد، بلکه ارتباطاتی میان دو روش به‌وجود می‌آید، وامروزه این‌ارتباط به‌مفهومی بسیار قویتر شده است، زیرا به‌کمك توپولوژی، می‌توان ساختارهای جدید جبری بناکرد ونیز می‌توان نتایجی جبری با استفاده از توپولوژی به‌دست آورد. با استفاده از فضاهای‌پوششی می‌توان‌قضایایی‌درنظریهٔ ترکیبیاتی‌گروهها به‌دست آوردکه‌بدون روشهای توپولوژیك به‌دشواری به‌دست می‌آیند. پس می‌بینیم که کاربرد دوطرفه است. امروزه نظریهٔ‌کوهومولوژی در تمام پیکرهٔ ریاضیات، از معادلات دیفرانسیل گرفته تا عملگرهای دیفرانسیلی‌و جزآن رخنه‌کرده‌است.و البته، نظریهٔ هومولوژی به‌صورت‌ابزاری اساسی درهندسهٔ جبری درآمده است.

1. exact sequence

****

● این متن یك سخنرانی است که به پرسش وپاسخ ختم شده است. ترجمه از منبع زیر به عمل آمده است:

Peter Hilton, "A brief, subjective history of homology and homotopy theory in this century," *Mathematics Magazine*, (5) **61** (1988) 282-291.

ویروسهای کامپیوتری: قطری کردن و نقاط ثابت*

ویلیام داولینگ
ترجمهٔ غلامرضا بیات

مقدمه

ویروسهای کامپیوتری به دو دلیل در صدر اخبار کامپیوتری روز قرار گرفته‌اند. اول، به‌دلیل شیوع وسیع ویروسی که درسال ۱۹۸۸ بر تعداد زیادی از کامپیوترهای متوسط در یك شبکهٔ سراسری آمریکا اثر گذاشت. دوم، به‌خاطر تأثیر چند ویروس بر کامپیوترهای شخصی، به‌خصوص از نوع کامپیوترهای آی بی ام و مکینتاش، که به‌طور روزافزون درمراکز کامپیوتری دانشگاهها شایع شده‌اند. درنتیجه، بیشتر افرادی که ازکامپیوترهای شخصی استفاده می‌کنند با نزول فاحشی در عملکرد کامپیوترهای خود مواجه شده‌اند و زمانی را جهت ترمیم خرابی ناشی از ویروس تلف کرده و اعتماد خود را نسبت به‌ارتباطات شبکه‌ای وسیع ازدست داده‌اند. هدف این‌مقاله ارائهٔ یك‌تعریف ریاضی از «ویروس کامپیوتری» است(یعنی برنامه‌ای که «تکثیرکنندهٔ خود» است) ونشان دادن اینکه وجود ویروس (از دیدگاه ریاضی) نتیجهٔ اجتناب‌ناپذیر خواص بنیادی هر قامرو محاسباتی است. اگر ازتعریف عملیتری استفاده‌کنیم و بگوییم که ویروس برنامه‌ای است‌که سیستم عاملی را که تحت آن‌کار می‌کند تغییر می‌دهد، دراین‌صورت اگرسیستم عامل مستعد پذیرش ویروس باشد، نمی‌توان بی‌خطر بودن برنامه‌های تشخیص ویروس را تضمین کرد. توجه شود که دوتعریف فوق از «ویروس» مجزا و نامعادل‌اند.

تکنیکی که در اینجا برای ساختن ویروس از آن استفاده می‌شود مستقیمترین روش ممکن نیست، ولی من معتقدم که جالب است و پیشنیازی را طلب نمی‌کند. این تکنیك، نمایشی از کاربرد قضیهٔ بازگشتی کلین[1] است و از شکل مثبت برهان قطری استفاده می‌کند. اساس آن بر ایدهٔ کلین دربارهٔ «لم نقطهٔ ثابت قطری» استوار است [۲]. دربارهٔ ماشینهای مولد خود و رابطهٔ آنها با قضیهٔ بازگشتی درمرجع شمارهٔ [۳] شرح داده شده‌است.

1. Kleene

فرمولبندی

چگونه می‌توان ایدهٔ «ویروس»ـ یعنی برنامه‌ای که خودش را تولید می‌کند ـ را فرمولبندی کرد؟ دراینجا قلمرو برنامه‌سازی یعنی‌زبان برنامه‌سازی و پردازندهٔ آن(نرم‌افزار و سخت‌افزارهای مربوطه) را محدود و مشخص می‌کنیم. فرض‌کنید زبان موردنظر زبان پاسکال باشد ومترجم و سخت‌افزار هم به‌دلخواه شما انتخاب‌شده باشد (انتخاب مهم نیست). برای پرهیز از جزئیات غیرضروری فرض‌می‌کنیم که برنامه‌های پاسکال، ورودیهایشان را ازیك پروندهٔ حرفی می‌گیرند و نتایج خروجی را نیز در یك پروندهٔ حرفی می‌نویسند. اثرات متقابل بین برنامه‌های پاسکال و پردازندهٔ انتخاب شده ـ مانند تقسیم برصفر که باعث تولید یك رشتهٔ خاص در پروندهٔ خروجی می‌گردد وغیره ـ را نادیده می‌گیریم. ولی ممکن است برنامه در یك حلقهٔ بی‌انتها قرارگیرد؛ در این حال پردازنده دخالت نخواهد کرد وگفته می‌شود که برنامه نتیجه‌ای به‌دست نمی‌دهد (حتی اگر قبل از اینکه وارد این حلقهٔ بی‌انتها شود مقداری اطلاعات روی پروندهٔ خروجی نوشته باشد). معنی عبارت «P روی ورودی i توقف می‌کند» این است که برنامهٔ P درحین‌پردازش‌ورودی i وارد حلقهٔ بی‌انتها نخواهد شد. بنابراین، این برنامه‌ها محاسبه‌کنندهٔ توابع جزئی از پرونده‌های حرفی به‌پرونده‌های حرفی هستند. مضافاً، بعضی ازاین برنامه‌ها نمایشگر توابعی روی $\mathbf{N}$ (اعداد طبیعی) هستند، یعنی برنامه‌هایی هستندکه ورودی آنها رشته‌ای از ارقام و خروجی آنها نیز رشته‌ای از ارقام است.

فرض کنید $\mathcal{P}$ مجموعهٔ برنامه‌های پاسکال باشد و توجه کنید که $\mathcal{P}$ قابل شمارش است زیرا هر برنامهٔ پاسکال متشکل از رشتهٔ محدودی ازعلامتهایی است‌که ازالفبای محدودی انتخاب‌شده‌اند. اگر مجموعهٔ $\mathcal{P}$ به‌صورت $\{P_0, P_1, \ldots\}$ اندیسگذاری شده باشد، ϕ_i نمایشگر تابعی است (روی پرونده‌های حرفی) که‌توسط برنامهٔ P_i محاسبه می‌شود. $P_i(y)$ نتیجهٔ اجرای P_i روی ورودی،

y است و نمایشی است از $\phi_i(y)$ اگر ϕ_i موجود باشد و گرنه تعریف نمی‌شود. همان‌طور که قبلا گفته شد، بعضی از ϕها را می‌توان به‌صورت توابعی روی $\mathbf{N}$ تلقی نمود، بنابراین گاهی عباراتی نظیر $\phi_{\phi_i(j)}$ نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگر $\phi_i(j)$ مشخص‌کنندهٔ یك عدد طبیعی نباشد، $\phi_{\phi_i(j)}$ به‌یك تابع کاملا نامعین اطلاق می‌شود که نتیجهٔ محاسبهٔ برنامهٔ پاسکالی خواهد بود که با هر ورودی درحلقهٔ بی‌انتها قرار می‌گیرد.

دراینجا ماهیت دقیق اندیسگذاری چندان موردنظر ما نیست، بجز اینکه لازم است این اندیسگذاری به‌صورتی انجام گیرد که محاسبهٔ توابع زیر توسط یك برنامهٔ پاسکال امکان‌پذیر باشد:

۱. $Rep: i \mapsto P_i$

۲. $Comp: \mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathbf{N}$. با معلوم بودن اندیسهای دو برنامهٔ P و Q، تابع $Comp$ اندیس ترکیب دوبرنامهٔ P و Q را محاسبه می‌کند یعنی برنامه‌ای‌است که ورودیش را به Q می‌دهد واگر وهنگامی که Q توقف کند P را روی نتیجهٔ خروجی Q اجرا می‌کند.

۳. یك مقلد پاسکال، که دومتغیر P و i را به‌عنوان ورودی قبول می‌کند؛ P نمایشگر یك برنامهٔ پاسکال به‌صورت رشته‌ای از علامتهاست. مقلد پاسکال همان نتیجه (یا حلقه)ای را به‌دست می‌دهد که برنامهٔ P روی ورودی i می‌دهد.

فهرستی الفبایی از تمام برنامه‌های پاسکال دراین شرایط صدق می‌کند (اگرچه ممکن است تصور شود که اجرای توابع Rep و $Comp$ زمان بسیار زیادی را می‌طلبد).

با معلوم بودن سیستم اندیسگذاری و تابع Rep، می‌توان مشخص کرد که برنامه‌ای که خودش را تولید می‌کند چیست.

تعریف. ویروس برنامه‌ای است چون $P=P_m$ به‌طوری که برای هر ورودی y داشته باشیم $P(y)=Rep(m)$.

حال به‌نحوهٔ ساخت ویروس می‌پردازیم.

قطری‌کردن و یك قضیهٔ نقطهٔ ثابت

در نظر بیشتر ریاضیدانان، برهانهای مبتنی بر قطری‌کردن برای به‌دست‌آوردن نتایج منفی به‌کارمی‌روند. دوقضیه که به‌قضیهٔ کانتور معروف‌اند و به‌روش قطری‌کردن اثبات می‌شوند، می‌گویند «تمام اعداد حقیقی دربازهٔ $[0,1]$ نمی‌توانند به‌صورت مجموع نامتناهی $\sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i} (b_i \in \{0,1\})$ ظاهر شوند» و «عدد اصلی هیچ مجموعهٔ Sی برابر با عدد اصلی مجموعهٔ توانی S نیست.» قضیهٔ منفی دیگری که به‌روش قطری‌کردن ثابت می‌شود عبارت است ازاینکه «برنامهٔ پاسکالی وجود ندارد که بتواند مسألهٔ عضویت درمجموعهٔ {برنامهٔ P_i روی‌ورودی i توقف می‌کند/$i \in \mathbf{N}$} را معلوم کند.» عصارهٔ برهان مبتنی برقطری کردن به‌صورت زیر است: اگر M_{ij} ماتریسی مربعی (حتی نامتناهی) باشد، هیچ سطر M وجود ندارد که تمام درایه‌هایش متمایز ازقطر M باشد، زیرا درایهٔ i ام سطر i با درایهٔ iام قطر M مطابقت می‌کند. نتایج منفی‌فوق با نشان‌دادن اینکه خلاف آنها وجود یك ماتریس مربعی را نتیجه می‌دهد که یك سطر آن از قطر ماتریس کاملا متمایز است، قابل اثبات‌اند. به‌این‌ترتیب «پارادوکسهایی» به‌وجود می‌آید: اگرسامانی b وجود داشته باشد که وظیفه‌اش اصلاح تمام افرادی باشد که نمی‌توانند خود را اصلاح کنند، می‌توان ماتریس M را به‌صورت زیر تعریف کرد

$$M_{ij}=\begin{cases} 1 & i\text{، } j \text{ را اصلاح می‌کند} \\ 0 & \text{درغیراین صورت} \end{cases}$$

و سطر M_b قرینهٔ قطر ماتریس است به‌این معنی که به‌ازای هر j، $M_{bj}=1-M_{jj}$. پس چنین سامانی وجود ندارد.

روش قطری‌کردن را به‌صورت مثبت نیز می‌توان به‌کاربرد و یك‌قضیهٔ نقطهٔ ثابت به‌دست‌آورد [۲]. فرض‌کنید f یك‌تابع باشد. گویند ماتریس مربعی M ذهت f سطر به‌سطر بسته است اگر هر سطر آن به‌وسیلهٔ تابع f به‌سطر دیگری وابسته باشد، یعنی به‌ازای هر i یك k وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر j، $f(M_{ij})=M_{kj}$. به‌علاوه M به‌طور قطری‌کامل است اگرسطری از M با قطر M یکی باشد. جالب است که وجود Mی با ویژگیهای دوگانهٔ فوق تضمین‌کنندهٔ این مطلب است که f دارای نقطهٔ ثابت است. برای اثبات این مطلب، فرض‌کنید سطر M_i مساوی قطر M و سطر k تصویرسطر i تحت f باشد. دراین‌حال، $f(M_{ik})=M_{kk}=M_{ik}$ یعنی M_{ik} تحت f ثابت است، و این «لم نقطهٔ ثابت قطری» است.

حال فرض کنید $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ تابعی است که توسط یك برنامهٔ پاسکال محاسبه می‌شود و ضوابط مورد نظر ما را در اندیسگذاری برنامه‌های پاسکال دارد، یعنی

$$\phi_i=\phi_j \Rightarrow \phi_{f(i)}=\phi_{f(j)}.$$

در این حالت f را «توسیعی» خوانند. چون f توسیعی است، تعیین‌کنندهٔ یك عملگر روی توابع ϕ است (که آن هم با f نشان داده می‌شود) به‌طوری‌که $f(\phi_i)=\phi_{f(i)}$. با استفاده از لم نقطهٔ‌ثابت قطری‌نشان می‌دهیم یك $n\in\mathbf{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\phi_n=\phi_{f(n)}$. فرض‌کنید M یك‌ماتریس نامتناهی ازتوابع جزئی باشد: $M_{ij}=\phi_{\phi_i(j)}$. نیز توجه‌کنید که هرعنصر M_{ij} را می‌توان توسط یك برنامهٔ پاسکال P_i محاسبه‌کرد، ودرواقع چنین l ای را می‌توان از i و j به‌دست‌آورد. P_i برنامه‌ای است که: (۱) با استفاده‌از Rep، P_i را می‌سازد. (۲) با استفاده ازیك زیربرنامهٔ مقلد پاسکال،عمل P_i روی ورودی j را مشخص می‌کند. (۳) اگر و هنگامی که مرحلهٔ ۲ تمام شود با استفادهٔ مجدد از Rep، $P_{\phi_i(j)}$ را می‌سازد و (۴) با استفادهٔ مجدد از مقلد پاسکال عمل برنامهٔ ساخته‌شده درمرحلهٔ ۳ را روی ورودیش (P_i) محاسبه می‌کند.

لازم‌است‌ثابت‌کنیم M به‌طورقطری‌کامل وتحت f بسته است. فرض‌کنید P یك برنامهٔ پاسکال باشدکه روی هر ورودی $j\in\mathbf{N}$ همان‌چیزی را محاسبه‌کندکه برنامهٔ $P_j(j)$ می‌کند. (همان‌طورکه قبلا گفته شد این مستلزم فراخوانی Rep و فراخوانی‌مقلد پاسکال است). فرض‌کنید k اندیس برنامهٔ P باشد، پس به‌ازای هر $j\in\mathbf{N}$ داریم $\phi_k(j)=\phi_j(j)$ بنابراین $\phi_{\phi_k(j)}=\phi_{\phi_j(j)}$ و سطر k از M برابر قطر است. حال نشان می‌دهیم که M تحت

f بسته است. فرض کنید P یك برنامهٔ پاسکال (وابسته به i) باشد که ورودی j را قبول کرده و مراحل زیر را طی می‌کند:

۱. $Rep(i)$ را محاسبه می‌کند.

۲. از مقلد پاسکال استفاده کرده نتیجهٔ مرحلهٔ ۱ را در مورد ورودی j به‌کار می‌گیرد.

۳. اگر و هنگامی که مرحلهٔ ۲ تمام شود، تابع f را روی نتیجهٔ این مرحله محاسبه می‌کند.

فرض کنید $k=k(i)$ اندیس برنامهٔ P باشد. بنابراین بجز در حالتی که $\phi_i(j)$ در حلقهٔ بی‌انتها قرار گیرد، داریم $\phi_k(j)=f(\phi_i(j))$ که در این حالت هردو عبارت نامعین‌اند. بنابراین برای هر j داریم:

$$f(M_{ij})=\phi_{f(\phi_i(j))}=\phi_{\phi_k(j)}=M_{kj}$$

یعنی M تحت f سطربه‌سطر بسته‌است. ازاین‌واقعیت که f توسط برنامهٔ پاسکال قابل محاسبه است در محاسبهٔ k استفاده شده و توسیعی‌بودن f برای‌معنی‌دار بودن‌عبارت $f(M_{ij})$ لازم‌است. تحت این‌شرایط برای f و فرضهای قبلی دربارهٔ اندیسگذاری، می‌توان از لم نقطهٔ ثابت قطری استفاده‌کرد و شکل ضعیف شده‌ای ازقضیهٔ بازگشتی را به‌صورت زیر بنا نهاد. n ی متعلق به $\mathbf{N}$ وجود دارد به‌طوری که $\phi_n=\phi_{f(n)}$. توجه داشته‌باشید که n به‌شیوهٔ ساختنی[1] از (یك برنامه برای، یا اندیس) f و فقط با استفاده از توابع $Comp$، Rep و مقلد پاسکال به‌دست می‌آید.

قضیهٔ بازگشتی را می‌توان قویتر کرد تا شرط توسیعی‌بودن f قابل‌حذف باشد. فرض‌کنید f تابعی‌دلخواه روی $\mathbf{N}$ وقابل‌محاسبه با پاسکال‌باشد. گوییم ϕ_i و ϕ_j تحت $\bar{f}$ وابسته‌اند اگر kیی وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که $\phi_i=\phi_k$ و $\phi_j=\phi_{f(k)}$. سپس برهان‌فوق نشان می‌دهد که هرسطر i از M تحت $\bar{f}$ به‌سطری چون k از M وابسته است (شیوهٔ ساختن k همانند بالاست). چون قطر M یکی ازسطرهای M است، عنصری قطری چون (M_{ii}) تحت $\bar{f}$ وابسته به‌خودش است. بنابراین kیی وجود دارد که $\phi_k=M_{ii}=\phi_{f(k)}$.

حال نشان می‌دهیم یك‌ویروس، به‌شکلی که دربالا تعریف شد، چگونه ساخته می‌شود. فرض‌کنید r یك اندیس برای Rep باشد، و نیز فرض‌کنید $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ تابعی باشد که به‌ازای هر اندیس x، اندیس یك برنامهٔ پاسکال P را، که عملیات زیر را انجام می‌دهد، برمی‌گرداند: (۱) مقدار $Comp(r,x)$ را محاسبه می‌کند. (۲) مقدار محاسبه شده‌را مستقل از ورودی برنامهٔ P برمی‌گرداند (بنابراین f همواره اندیس یك برنامه را محاسبه می‌کند که‌کار آن برنامه، محاسبهٔ یك تابع ثابت است، اما تابع ثابت بستگی به‌مقدار x دارد.) روشن است که f توسط یك برنامهٔ پاسکال محاسبه می‌شود، با فرض اینکه $Comp$ مربوط به‌آن وجود داشته باشد. (ولی توجه‌کنید که f توسیعی نیست). بنا به‌قضیهٔ بازگشتی n ی وجود دارد به‌طوری‌که $\phi_n=\phi_{f(n)}$ که تابعی از y است و مقدار $Comp(r,n)$ را برمی‌گرداند. بنابراین:

به‌ازای هر y، $\quad Rep(\phi_n(y))=Rep(Comp(r,n))$

به‌ازای هر y، $\quad P_{Comp(r,n)}(y)=Rep(Comp(r,n))$

ویروس، برنامه‌ای است با اندیس $Comp(r,n)$: روی هرورودی y خروجی آن نمایشی است از خودش به صورت رشته‌ای از حروف.

تمامی مراحل توصیف شده در بالا قابل به‌کارگیری‌اند و علی‌الاصول می‌توان برنامه‌های ویروس کامپیوتری را به‌همین طریق نوشت. ولی البته روش نوشتن ویروسها عملا این طور نیست. با این حال، روش فوق نشان می‌دهد که می‌توان وجود برنامه‌هایی را که مولد خود هستند تصور کرد. دلیلش این‌است که فقط‌فرضیات خیلی ضعیفی در اثبات وجود ویروس زبان پاسکال شده بنود: هرزبان برنامه‌سازی که بتوان برای آن تعبیرکننده‌ای نوشت، و بتواند برنامه‌های $Comp$ و Rep را اجرا کند مستعدپذیرش ویروس است. مفهوم اصلی درساخت ویروس، یك تابع جانشانی (مانند f) است، که ازنقطهٔ ثابت آن برای تولید ویروس استفاده می‌شود. در برنامه‌های عملی ویروس [۴] از تابع جانشانی و یك نقطهٔ ثابت آن، همان‌طورکه تابع f و یك نقطهٔ ثابت آن دراینجا به‌کار رفت، استفاده می‌کنند ولی نحوهٔ ساخت آنها به‌مراتب ساده‌تر است.

تشخیص ویروس: قطری‌کردن منفی

حال می‌پردازیم به موضوعی ملموستر. برنامه‌هایی که به‌وسیلهٔ کامپیوترهای مدرن اجرا می‌شوند، برخلاف آنهایی که تا اینجا توصیف شده‌اند، «دریك محیط» اجرا می‌شوند یعنی وقتی برنامه‌ای اجرا می‌شود، به‌عنوان زیربرنامه‌ای از یك برنامهٔ دیگر، موسوم به‌سیستم عامل، که از برنامهٔ ما استقلال منطقی دارد اجرا می‌شود. وظیفه سیستم‌عامل، مدیریت حافظهٔ اصلی وفرعی، مدیریت‌پردازنده، نگهداری آمارهای مربوطه و نظایر آن است. از لحاظ عملی ویروسها، آن طور که در بالا توصیف شدند، «سیستم عامل را تخریب می‌کنند». یعنی کپی‌هایی ازخودشان را درسیستم عامل پدید می‌آورند.

برای نشان دادن این اثر تخریبی، در بقیهٔ مقاله از تعریف جدیدی از ویروس استفاده خواهیم کرد.

تعریف. ویروس، برنامه‌ای است که وقتی اجرا می‌شود، کد سیستم عامل را تغییر می‌دهد.

(وقتی نسخهٔ جدیدی به‌صورت مجاز ودرست از سیستم عامل تهیه می‌شود، به‌جای سیستم عامل قدیم قرار می‌گیرد، نه‌اینکه آن را تغییر دهد.) توجه داشته باشید که لازم نیست سیستم عامل تغییریافته رفتار خاصی داشته باشد، یعنی ازنظر نتایج مورد علاقهٔ ما تعیین شرایط باز تولید سیستم عامل لازم نیست.

خوب بود اگر می‌توانستیم به‌طور خودکار و از طریق یك برنامهٔ تشخیص‌دهندهٔ ویروس، تشخیص دهیم که‌کدام برنامه‌ها ویروسی‌اند وکدام برنامه‌ها نیستند. درآن صورت ازصرف هزینه و دردسری که از تغییر ناخواسته و احتمالا زیان‌آور سیستم عامل ناشی‌می‌شود جلوگیری‌می‌کردیم. حال‌نشان می‌دهیم هیچ برنامه‌ای،

1. constructive

قادر به‌تشخیص صحیح ویروس برای هر ورودی ممکن نیست و هیچ تضمینی برای جلوگیری از پخش ویروسها وجود ندارد.

کار را با انتخاب یك سیستم عامل مشخص OS و با تعریف زیر شروع می‌کنیم.

تعریف. گوییم برنامهٔ P ویروسی را روی ورودی x پخش می‌کند اگر با اجرای برنامهٔ P تحت سیستم عامل OS و روی ورودی x، OS تغییر کند. در غیر این صورت گوییم P روی ورودی x بی‌خطر است. برنامه‌ای را بی‌خطر گویند که برای هر ورودی بی‌خطر باشد. و نیز فرض می‌کنیم که برای OS ویروسهایی وجود دارد، (در غیر این صورت نیازی به آزمایش نیست).

حال از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید برنامهٔ بی‌خطری به‌نام $IS\text{-}SAFE$ وجود دارد که بی‌خطر بودن یا نبودن اجرای هر برنامهٔ اختیاری P برای هر ورودی اختیاری x را معلوم می‌کند. بنابراین

$$IS\text{-}SAFE(P,x)=\begin{cases}\text{yes} & \text{اگر } P \text{ روی ورودی } x \text{ بی‌خطر باشد}\\ \text{no} & \text{درغیراین‌صورت}\end{cases}$$

با توجه به برنامهٔ فوق و این فرض که ویروسی وجود دارد، نوشتن برنامهٔ $D()$ از یك متغیر که دارای رفتار زیر است، ساده است.

$$D(P)=$$

$$\begin{cases}\text{Write "Have a nice day"}, & \text{اگر } IS\text{-}SAFE(P,P)=\text{no}\\ \text{OS تغییر داده شود} & \text{درغیراین‌صورت}\end{cases}$$

برنامهٔ D از قطر ماتریس $M_{P,x}=IS\text{-}SAFE(P,x)$ کاملا متمایز است.

حال با بررسی رفتار برنامهٔ D روی ورودی D می‌توانیم نشان دهیم که $IS\text{-}SAFE$، نمی‌تواند هم بی‌خطر باشد و هم درست. اگر D روی ورودی D بی‌خطر باشد فقط به‌خاطر این است که قسمت «درغیراین‌صورت» را اجرا نکرده‌است، یعنی چون $IS\text{-}SAFE(D,D)=\text{"no"}$، پس معلوم می‌شود $IS\text{-}SAFE$ درست نیست. از طرف دیگر اگر D، OS را روی ورودی D تغییر دهد دو امکان وجود دارد. از یك طرف نتیجهٔ فراخوانی $IS\text{-}SAFE(D,D)$ ممکن است "yes" باشد که در این حالت قسمت «درغیراین‌صورت» برنامهٔ D اجرا شده‌است، که‌دراین‌حال $IS\text{-}SAFE$ درست نیست. از طرف دیگر اگر نتیجهٔ فراخوانی $IS\text{-}SAFE(D,D)$ مقدار "no" باشد (دراین‌صورت D فقط "Have a nice day" را چاپ می‌کند) فرض اینکه D روی ورودی D بی‌خطر باشد بدین‌معنی است که فراخوانی $IS\text{-}SAFE$ بایستی مقصر باشد، یعنی $IS\text{-}SAFE$ بی‌خطر نیست. ما به این نتیجه رسیدیم که فرض وجود یك برنامهٔ بی‌خطر و درست، که روی OS اجرا می‌شود، و بی‌خطر بودن ورودی خود را آزمون می‌کند، غلط است، و برنامه‌ای مانند $IS\text{-}SAFE$ نمی‌تواند وجود داشته باشد.

فرض وجود ویروس برای OS، که در اثبات عدم وجود $IS\text{-}SAFE$ لازم است، برای هر سیستم عامل صحیح نیست. یك سیستم عامل، و حتی بعضی از برنامه‌هایی که تحت کنترل آن اجرا می‌شوند، ممکن است درقسمتی ازحافظهٔ کامپیوتر ذخیره شود که نتوان چیزی روی آن نوشت. دراین صورت هیچ برنامه‌ای وجود ندارد که اجرای آن باعث تغییر سیستم عامل گردد، و بنابراین یك برنامهٔ بی‌خطر $IS\text{-}SAFE$ وجود دارد که همواره تابع ثابت "yes" را محاسبه می‌کند. مثلا بعضی کامپیوترهای شخصی سیستم عامل خود را در ROM (حافظهٔ فقط خواندنی) نگهداری می‌کنند. در سیستمهای محاط شده (مثلا کامپیوترهای کنترل کننده VCR ها و سیستمهای احتراق اتومبیل) هم سیستم عامل و هم برنامه‌هایی که تحت کنترل آن کار می‌کنند در ROM ذخیره می‌شوند. می‌توان چنین حالاتی را به‌وسیلهٔ یك برنامهٔ سیستم‌عامل نشان داد که تابعی باشد که قلمرو و برد آن عناصر سه‌تایی‌اند و به‌صورت $\langle P, x, OS\rangle \mapsto \langle P, P(x), OS\rangle$ تعریف می‌شود. سیستم عامل نه تنها $P(x)$ را محاسبه می‌کند، بلکه OS و P را هم (بدون تغییر) برمی‌گرداند. ملاحظاتی نظیر آنچه در بخش پیش گفته شد منتهی به‌این می‌شود که برنامه‌هایی وجود دارند که چنین تابعی را محاسبه می‌کنند. طبق‌تعریف، این برنامه‌ها تخریب نمی‌شوند. (به‌خاطر اینکه اصل سیستم عامل، و نه نسخهٔ تغییر یافتهٔ آن، را برمی‌گردانند).

ولی درکامپیوترهای هدف‌منظوره، هم سیستم عامل و هم برنامهٔ P در ناحیهٔ فیزیکی مشترکی از حافظه اصلی کامپیوتر (حافظه مجازی یا حقیقی) قرار دارند و این نوع حافظه‌ها نوشتنی‌هستند. اجرای برنامهٔ P، حتی تحت‌کنترل‌سیستم عامل، امکان دارد محلی از حافظه را که سیستم عامل در آن ناحیه قرار دارد تغییر دهد. به‌علاوه، به‌دلایل عملی، سیستمهای عامل در واقع خودشان را در هر اجرای برنامه نمی‌نویسند، بلکه فقط دومین مؤلفه از سه‌تایی فوق را محاسبه می‌کنند. این ترکیب عوامل، وجود ویروس را امکان‌پذیر می‌سازد و فرضی را که منتهی به‌عدم وجود $IS\text{-}SAFE$ می‌شود تأیید می‌کند.

مراجع

1. Dowling, William F., "There are no safe virus tests", *Am. Math. Monthly*, 96.9, pp. 835-6.
2. Owings, J.C., "Diagonalization and the recursion theorem", Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol. 14, Number 1,1973, pp. 95-99.
3. Rogers, H., *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill, 1967.
4. I. Witten, Computer (in) security: infiltrating open systems, *Abacus* 4 (Summer 1987) 7-25.

****

• William F. Dowling, "Computer viruses: diagonalization and fixed points," *Notices of the American Mathematical Society* (7) 37 (1990) 858-861.

گروهها و گرافها*

گروههای عمل کننده بر درختها، پایانها، و نمودارهای حذفی

پال شوپ*
ترجمهٔ کامبیز محمودیان

اگر گروه G و مجموعهٔ مشخص X از مولدهای G مفروض باشد، می‌توان «تصویری از G رسم کرد». این «تصویر» را، که گراف یا نمودار کیلی G نسبت به X نامیده می‌شود، کیلی[۱] درسال ۱۸۷۸ توصیف کرد. صرفنظر از مقالهٔ مهمی که دن[1] نوشت، مفهوم گراف یك گروه تا اواخر دههٔ ۱۹۶۰ کاربرد اندکی داشت. دراین زمان سه نظریهٔ بسیار قدرتمند، که همگی ارتباط نزدیکی با نمودارهای کیلی داشتند، عرضه‌شدند. این نظریه‌ها عبارت‌اند از نظریهٔ گروههای عمل‌کننده بر درختها که ژان-پیر سر (۱۹۶۸) آن را ارائه کرد و هیمن باس هم سهم مهمی در آن دارد؛ قضیهٔ ساختاری جان استالینگز (۱۹۶۸) درمورد گروههای متناهیاً تولیدشده‌ای که بیش از یك پایان دارند؛ و نظریهٔ نمودارهای حذفی که راجر لیندن (۱۹۶۶) آن را ابداع کرد.

این نظریه‌ها کاربردهای متعددی دارند. برای نمونه، نظریهٔ گروههای عمل‌کننده بر درختها توصیف زیبایی از گروههایی که ساختاری از یك نوع مشخص دارند برحسب عملهای این گروهها بر درختها ارائه می‌دهد. یکی از نتایج اولیه‌ای که در این نظریه به‌دست می‌آید این است که گروه G آزاد است اگر و تنها اگر G «بر یك درخت به‌طور آزاد عمل کند». (تعریف این اصطلاحها در زیر داده‌خواهدشد.) یك نتیجهٔ مستقیم این مطلب این است که هر زیرگروه یك گروه آزاد، آزاد است، زیرا اگر G به‌طور آزاد بردرختی عمل کند، آنگاه هرزیرگروه G نیز چنین می‌کند. همچنانکه نتیجه‌ای که اکنون بیان‌شد نشان می‌دهد، نظریهٔ گروههای عمل‌کننده بر درختها روشی است قوی برای اثبات نتایجی درمورد ساختار زیرگروههای انواع مشخصی از گروهها.

قضیهٔ ساختاری درمورد گروههای متناهیاً تولیدشده‌ای که بیش از یك پایان دارند دوکاربرد شگفت‌انگیز دارد. سرحدس‌زده بود که اگر یك گروه بی‌تاب[1] G زیرگروه آزادی باشاخص متناهی داشته باشد آنگاه G آزاد است. ایلنبرگ[2] و جانا[3] حدس زده بودند که یك گروه با بعد کوهمولوژیك یك، آزاد است. استالینگز به عنوان کاربردی مستقیم از قضیهٔ ساختاری، درستی این حدسها را برای گروههای متناهیاً تولیدشده ثابت کرد. درستی هردوحدس برای گروههای دلخواه بعداً به‌وسیلهٔ سوان[4] ثابت شد.

نظریهٔ نمودارهای حذفی کاربردهای فراوانی داشته است اما موفقترین کاربرد آن «نظریهٔ حذفهای کوچك» است، که در زیر آن‌را توضیح می‌دهیم. این نظریه کاربردهایی دارد درمسائل تصمیم، مثلا حل‌مسألهٔ تزویج برای گروههای گروههای متناوب؛ در قضایای نشاندن، مثلا این نتیجه که هرگروه شمارا قابل نشاندن در یك خارج قسمت سادهٔ $SL_2(Z)$ است؛ و در ساختن گروههای سادهٔ ناشمارایی که همهٔ زیرگروههای سرهٔ آنها عدد اصلی کوچکتر دارند.

ما گروهها را به‌وسیلهٔ نمایشها برحسب مولدها و روابط معرف توصیف می‌کنیم. مثلا، اگر بنویسیم $G=\langle x; x^6=1\rangle$، آنگاه G یك مولد x دارد که در رابطهٔ $x^6=1$ صدق می‌کند، و هیچ رابطهٔ دیگری فرض نشده است. پس G باید گروه دوری از مرتبهٔ شش باشد. اگر بنویسیم $C=\langle x\rangle$، آنگاه C یك مولد دارد و C هیچ محدودیتی جز اینکه گروه است ندارد. پس C گروه دوری نامتناهی است. اگر بنویسیم $A=\langle x,y; xy=yx\rangle$، آنگاه A دو مولد دارد وتنها این رابطه بر آنها تحمیل شده است که با یکدیگر تعویض می‌شوند. پس A گروه آبلی آزاد بر دو مولد است.

در حالت کلی، هر نمایش $G=\langle x_1,x_2,\ldots; r_1=1,\ldots\rangle$ یك گروه به‌شکل زیر تعریف می‌کند. فرض می‌کنیم $X=\{x_1,x_2,\ldots\}$ مجموعهٔ مفروض از مولدها و $X^{-1}=\{x_1^{-1},x_2^{-1},\ldots\}$ یك مجموعهٔ

1. Dehn

1. torsion-free
2. Eilenberg
3. Ganea
4. Swan

مجزا از X و در تناظر یك به‌یك با X باشد. قرار می‌دهیم $Y=X\cup X^{-1}$ و فرض می‌کنیم Y^* مجموعهٔ همهٔ واژه‌ها (دنباله‌های متناهی از علائم) با حروف Y باشد. واژهٔ تهی را با ۱ نشان می‌دهیم. آنگاه Y^* باعمل دنباله‌هم نوشتن واژه‌ها یك نیمگروه با عضو همانی ۱ است. ازآنجا که می‌خواهیم G گروه باشد، لازم است که همهٔ روابط $x_i^{\epsilon}x_i^{-\epsilon}=1, \epsilon=\pm 1$ در G صادق باشند. این روابط (روابط بدیهی) نامیده می‌شوند و در نمایش نوشته نمی‌شوند. بدون از دست‌دادن کلیت موضوع، می‌توانیم فرض کنیم که همهٔ روابط معرف به‌شکل $r=1$ نوشته شده‌اند. اگر $r=1$ یك رابطهٔ معرف باشد، آنگاه r یك رابط معرف نامیده می‌شود. فرض می‌کنیم R مجموعهٔ رابطهای معرف بوده و $\approx$ همنهشتیی بر Y^* باشد که با قراردادن $urv\approx uv$، هر گاه $r\in R$ یا r یك رابط بدیهی باشد، تعریف می‌شود. در این صورت خارج قسمت $Y^*/\approx$ گروه G است.

اگر بنویسیم $F=\langle x,y\rangle$، آنگاه F گروه آزاد بر دو مولد است. (هیچ رابطه‌ای جز روابط بدیهی موجود نیست.)

یك نکتهٔ اساسی دربارهٔ F این است که هرعنصر F نمایش یکتایی به‌صورت یك واژه تحویل یافتهٔ w، یعنی واژه‌ای که هیچ زوج وارون یکدیگر به‌شکل $x_i^{\epsilon}x_i^{-\epsilon}$ را شامل نباشد، دارد.

برای بحث درمورد گرافها، نمادها و اصطلاحات خود را مشخص می‌کنیم. از نظر صوری، یك گراف Γ تشکیل شده است از یك مجموعهٔ V از رئوس، یك مجموعهٔ E از یالها، و دو نگاشت

$$E\to V\times V,\quad e\mapsto(o(e),\tau(e))$$

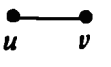
$$E\to E,\quad e\mapsto e^{-1}.$$

اگر e یك یال باشد، رئوس $o(e)$ و $\tau(e)$ به‌ترتیب رأس آغازی e و رأس پایانی e هستند. یال e^{-1} وارون یال e است. لازم است که نگاشتها به‌ازای هر یال e درشرایط زیر صدق کنند

$$(e^{-1})^{-1}=e,\ e\neq e^{-1},\ o(e^{-1})=\tau(e),\ \tau(e^{-1})=o(e).$$

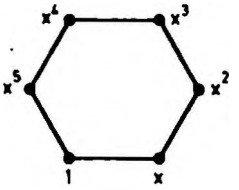
یك مسیر α در Γ دنباله‌ای از یالهای $e_1,\dots,e_n$ است به طوری که به‌ازای $1\leqslant i<n$، $o(e_{i+1})=\tau(e_i)$. مسیر α بسته است اگر $\tau(e_n)=o(e_1)$ و α ساده است اگر رئوس $o(e_1),\dots,o(e_n)$ همگی متمایز باشند. مسیر α تحویل یافته است اگر هیچ e_{i+1} برابر با e_i^{-1} نباشد. مدار، یك مسیر بستهٔ سادهٔ تحویل یافته است.

هنگامی که گرافی را در صفحه «رسم می‌کنیم»، هر رأس با یك نقطهٔ توپر مشخص می‌شود. همان‌طور که معمول است، برای هرزوج $\{e,e^{-1}\}$ از یالها تنها یك کمان رسم می‌کنیم. ما e و e^{-1} را به‌عنوان نمایشگرهای کمان با دوجهت مخالف تلقی می‌کنیم. بنابر این گرافی با ضوابط $V=\{u,v\}$، $E=\{e,e^{-1}\}$، و $u=o(e)$، $v=\tau(e)$ را چنین نمایش می‌دهیم



اگر G گروهی مفروض با نمایش $G=\langle X;R\rangle$ باشد، گراف یا نمودار کیلی G عبارت است از $\Gamma(G,X)$ که چنین تعریف می‌شود: رئوس $\Gamma\langle G,X\rangle$ عناصر G هستند. برای هر $g\in G$ و هر $y\in Y=X\cup X^{-1}$ یك یال $e=(g,gy;y)$ با رأس آغازی g و رأس پایانی gy وجود دارد. وارون e، $e^{-1}=(gy,g;y^{-1})$ است. (گراف حاصل تا حد زیادی به‌نمایش انتخاب شده برای گروه بستگی دارد.) کیلی یالهای مربوط به مولدهای مختلف را به‌رنگهای مختلف درنظرمی‌گرفت. حال گراف گروهها و نمایشهای مذکور دربالا را بررسی می‌کنیم. برای گروههای بامولدهای x و y، به‌جای رنگهای مختلف از خط پر و خط‌چین استفاده می‌کنیم.

برای $G=\langle x;x^6=1\rangle$، گراف خیلی ساده است

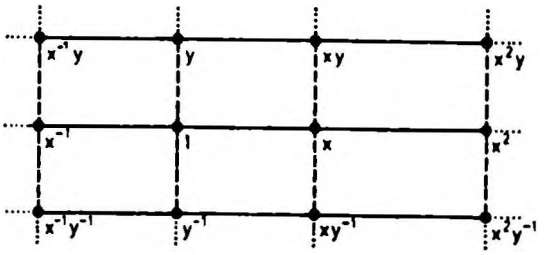


شکل۱

برای گروه دوری نامتناهی $C=\langle x\rangle$، $\Gamma(C,\{x\})$ عبارت است از مسیر از دوطرف نامتناهی زیر

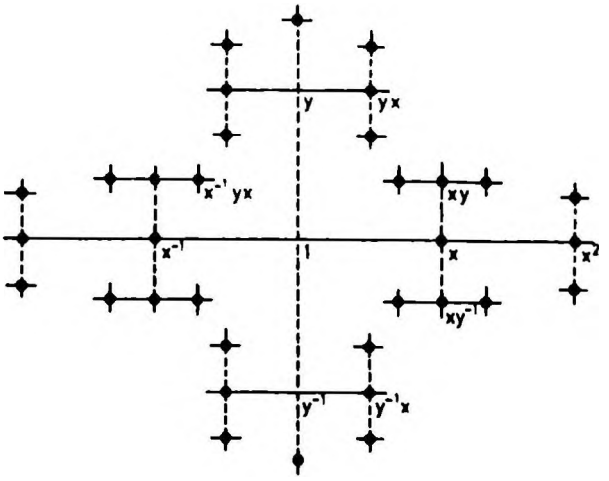
شکل۲

برای گروه آبلی آزاد بردو مولد $A=\langle x,y;xy=yx\rangle$، گراف $\Gamma(A,\{x,y\})$ عبارت است از «یك شبکهٔ نامتناهی که رأسهایش نقاط با مختصات صحیح هستند».



شکل۳

برای گروه آزاد $F=\langle x,y\rangle$، $\Gamma(F,\{x,y\})$ عبارت است از



شکل۴

درخت، یك گراف همبند ناتهی است که هیچ مداری ندارد. چون هر واژهٔ تحویل یافته عضو یکتایی از F را نشان می‌دهد درمی‌یابیم که $\Gamma(F,\{x,y\})$ درخت است. به‌طور کلی اگر $F=\langle X\rangle$ گروه آزاد بر مجموعهٔ X باشد، $\Gamma(F,X)$ درخت است.

اگر G یك گروه و Γ یك گراف باشد، یك عمل G روی Γ همریختیی از G به گروه خودریختهای Γ است. اگر $g\in G$ و v یك رأس Γ باشد، تصویر v تحت g را با gv نشان می‌دهیم. همین‌طور تصویر یال e تحت خودریختی مربوط به g را به‌صورت ge می‌نویسیم. اگر $G=\langle X;R\rangle$ و $\Gamma=\Gamma(G,X)$، آنگاه یك عمل طبیعی G بر Γ هست که چنین تعریف می‌شود: g، رأس h را (که عضوی از G است) به‌حاصلضرب gh می‌فرستد و $g(h,hx^{\epsilon};x^{\epsilon})=(gh,ghx^{\epsilon};x^{\epsilon})$.

اگر G گروهی مفروض، عمل‌کننده بر یك گراف Γ باشد، می‌گوییم G بدون وارون‌سازی عمل می‌کند اگر برای هر یال e از Γ داشته باشیم $ge\neq e^{-1}$. در بحث از عمل یك گروه بر یك گراف همواره فرض می‌کنیم که عمل بدون وارون‌سازی است. G به‌طور آزاد بر Γ عمل می‌کند اگر (بنابر قراردادمان G بدون وارون‌سازی عمل کند و) برای هر $g\neq 1$ و همهٔ رئوس v از Γ، $gv\neq v$. (هر عضو نابدیهی همهٔ رئوس را حرکت دهد.) گوییم G بدون نقطهٔ ثابت بر Γ عمل می‌کند اگر هیچ رأسی از Γ توسط همهٔ عناصر G ثابت نگهداشته نشود.

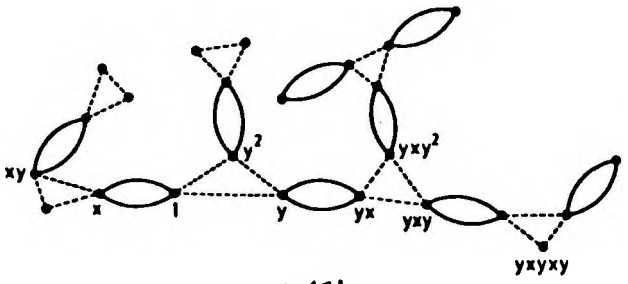
توجه کنید که $G=\langle X;R\rangle$ بر نمودار کیلی‌اش، $\Gamma\langle G,X\rangle$، به‌طور آزاد عمل می‌کند. پس اگر F گروهی آزاد باشد، بر یك درخت به‌طور آزاد عمل می‌کند. اولین نتیجهٔ اساسی نظریهٔ سر این است که عکس این مطلب نیز درست است. (مرجع تمام حکمهایی که دربارهٔ گروههای عمل‌کننده بر درختها بیان می‌کنیم رسالهٔ سر[۴] است.)

قضیهٔ ۱. گروه G آزاد است اگر و تنها اگر G بر یك درخت T به‌طور آزاد عمل کند.

اگر G بر یك گراف به‌طور آزاد عمل کند، هر زیرگروه G نیز چنین می‌کند. پس یك نتیجهٔ مستقیم قضیه این است که زیرگروه یك گروه آزاد، آزاد است.

برای اینکه تعداد بیشتری از نتایج را مورد بحث قرار دهیم احتیاج به تعریف چند ساختمانِ مبتنی بر نظریهٔ گروهها داریم. تصور کنید $H=\langle X_1;R\rangle$ و $K=\langle X_2;S\rangle$ گروههایی باشند که در آنها X_1 و X_2 مجزا هستند. حاصلضرب آزاد H و K، گروه $H*K=\langle X_1\cup X_2;R\cup S\rangle$ است. یك نکتهٔ اساسی این است که هر عنصر غیرهمانی w از حاصلضرب آزاد، نمایش منحصر به‌فردی به‌شکل حاصلضرب $w=g_1\dots g_n$ دارد که در آن هر g_i مخالف ۱ است، هر g_i عنصری از H یا K است، و عناصر متوالی g_i و g_{i+1} متعلق به گروههای مختلف‌اند. فرض کنید C_n گروه دوری از مرتبهٔ n را نشان دهد. بخشی از گراف گروه $G=\langle x,y;x^2=1,y^3=1\rangle$، که حاصلضرب آزاد C_2*C_3 است، در زیر نشان داده شده‌است.

در توصیف نمایشها قراردادهای زیر را می‌پذیریم. فرض کنید نمایشی برای گروه G انتخاب شده است. نماد $\langle G,y_1,\dots;s_1=1,\dots\rangle$ همهٔ مولدها و روابط تعریف‌کنندهٔ G را همراه با تمامی مولدها و روابط تعریف‌کنندهٔ اضافی که مشخص



شکل ۵

شده‌اند نشان می‌دهد. فرض می‌شود که هر مولد اضافی متمایز از مولدهای G باشد.

می‌توان مفهوم حاصلضرب آزاد را به‌طریق زیر تعمیم داد. فرض کنید H و K گروههایی باشند با زیرگروههای $A\subseteq H$ و $B\subseteq K$، و $\varphi:A\to B$ یك یکریختی باشد. حاصلضرب آزاد H و K که زیرگروههای A و B را طبق یکریختی φ ادغام می‌کند، عبارت است از گروه

$$G=\langle H*K;a=\varphi(a),a\in A\rangle.$$

حاصلضرب آزاد معمولی حالت خاصی از این حاصلضرب است که در آن، A و B زیرگروههای همانی هستند. گفته می‌شود گروه G به‌طور نابدیهی یك حاصلضرب آزاد با ادغام است هرگاه A و B به‌ترتیب زیرگروههای سرهٔ H و K باشند. نکتهٔ اساسی (و غیربدیهی) دربارهٔ حاصلضربهای آزاد با ادغام این است که H و K به‌وسیلهٔ نگاشتهای بدیهی $h\mapsto h$ و $k\mapsto k$ در G نشانده می‌شوند.

حال فرض می‌کنیم یك گروه H با زیرگروههای A و B و یکریختی $\varphi:A\to B$ در دست داریم. گروه

$$G=\langle H,t;t^{-1}at=\varphi(a),a\in A\rangle$$

را در نظر می‌گیریم. این گروه با افزودن یك مولد جدید t و روابطی که t، A را با B برطبق یکریختی φ مزدوج می‌کند، به‌دست آمده است. گروه G یك توسیع HNN از H خوانده می‌شود و کلمهٔ HNN اول اسامی سه نفری[1] است که این ساختمان را اولین بار مورد مطالعه قرار دادند. گروه H به‌وسیلهٔ نگاشت $h\mapsto h$ در G نشانده می‌شود. زیرگروههای A و B زیرگروههای مرتبط نامیده می‌شوند. حال معرفی ساختمان توسیع HNN و حاصلضرب آزاد با ادغام، که در بخشی از نظریهٔ گروههای نامتناهی بسیار مطرح‌اند، به‌انجام می‌رسد و به گروههای عمل‌کننده بر گرافها بازمی‌گردیم.

فرض می‌کنیم یك گروه G بر یك گراف Γ عمل می‌کند. (مانند همیشه فرض می‌کنیم که G بدون وارون‌سازی عمل می‌کند.) می‌توانیم گراف خارج‌قسمت Γ/G را به‌صورتی که شرح آن می‌آید تشکیل دهیم. رابطه‌ای هم‌ارزی روی رئوس Γ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: $v_1\sim v_2$ اگر به‌ازای یك $g\in G$، $v_2=gv_1$، یعنی v_1 و v_2 تحت عمل G در یك مدار قرار گیرند. همین‌طور برای یالها، تعریف می‌کنیم $e_1\sim e_2$ اگر به‌ازای یك $g\in G$، $e_2=ge_1$. توجه کنید که چون G بدون وارون‌سازی عمل می‌کند، هرگز $e\sim e^{-1}$

1. G. Higman, B. H. Neumann, Hanna Neumann

برقرار نیست. ساختار خارج قسمت Γ/G تحت این روابط هم‌ارزی به‌طور واضح یک گراف است.

پاره‌خط، عبارت است از گراف

متشکل از یک زوج $\{e,e^{-1}\}$ از یالها با نقاط انتهایی متمایز. حلقه، گرافی است دارای فقط یک رأس و یک زوج $\{e,e^{-1}\}$ از یالها

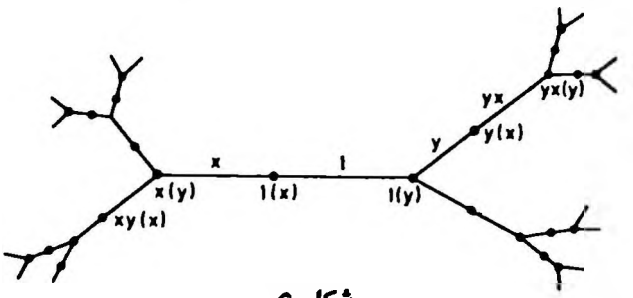
سر قضیهٔ مشخص‌سازی زیر را ثابت می‌کند.

قضیهٔ II. (۱) گروه G به‌طور نابدیهی یک حاصلضرب آزاد با ادغام است اگر و تنها اگر درختی چون T وجود داشته باشد که G بر آن بدون نقطهٔ ثابت عمل کند به‌طوری که گراف خارج‌قسمت T/G یک پاره‌خط باشد.

(۲) گروه G یک توسیع HNN است اگر و تنها اگر درختی چون T وجود داشته باشد که G بر آن عمل کند به‌طوری که گراف خارج‌قسمت T/G یک حلقه باشد.

رابطهٔ بین G و T از آنچه در قضیهٔ فوق بیان‌شده بسیار خاصتر است. اگر G بر درختی چون T عمل کند به‌طوری که T/G یک پاره‌خط باشد، یک یال e از T با نقاط انتهایی u و v را اختیار می‌کنیم. فرض می‌کنیم $H=\mathrm{Stab}(u)$، یعنی H پایدارساز u تحت عمل G و به عبارت دیگر زیرگروه G متشکل از عناصری که u را ثابت نگه می‌دارند، باشد. نیز فرض می‌کنیم $K=\mathrm{Stab}(v)$ و $A=\mathrm{Stab}(e)$. در این‌صورت تجزیهٔ G به حاصلضرب آزاد با ادغام عبارت است از $G=\langle H*K\,;\,A=A\rangle$. (اگر هر یک از H و K تمام G باشد، آنگاه u یا v به‌وسیلهٔ G ثابت می‌ماند و تجزیه بدیهی است.)

به‌عکس، فرض کنیم یک گروه G همراه با یک تجزیه به حاصلضرب آزاد با ادغام، $G=\langle H*K\,;\,A=\varphi(A)\rangle$، به ما داده باشند. درخت مطلوب T چنین به‌دست می‌آید. فرض می‌کنیم G/H مجموعهٔ هم مجموعه‌های H در G را نشان دهد، و نماد مشابهی برای هم‌مجموعه‌های K و A اختیار می‌کنیم. از نماد $\coprod$ برای نمایش اجتماع مجزای دو مجموعه [اجتماع دو مجموعهٔ مجزا] استفاده می‌کنیم. مجموعهٔ رئوس T اجتماع مجزای $G/H\coprod G/K$ است. مجموعهٔ یالهای T اجتماع مجزای $G/A\coprod G/A$ است که در آن $\overline{G/A}$ نسخهٔ دیگری از G/A است. وارون یال gA، $\overline{gA}$ است. رأس آغازی gA، gH است و رأس پایانی gA، gK. بخشی از T در حالت $G=\langle x\,;\,x^2=1\rangle*\langle y\,;\,y^3=1\rangle$ در شکل بعدی نمایش داده شده است.



شکل ۶

ثابت می‌شود که اگر G گروهی شمارا باشد که متناهیاً تولید شده نباشد، درختی چون T وجود دارد که G بر آن بدون نقطهٔ ثابت عمل می‌کند. اما در مورد گروههای متناهیاً تولیدشده قضیهٔ زیر برقرار است.

قضیهٔ III. گروه متناهیاً تولیدشدهٔ G بر درخت T بدون نقطهٔ ثابت عمل می‌کند اگر و تنها اگر G یا به‌طور نابدیهی یک حاصلضرب آزاد با ادغام باشد و یا یک توسیع HNN.

نظریهٔ گروههای عمل‌کننده بر درختها روشی بسیار قدرتمند برای نشان دادن این مطلب است، که گروههای $\mathrm{SL}_2(R)$ یا $\mathrm{GL}_2(R)$ حاصلضرب آزاد با ادغام هستند، که در آنها R زیرحلقهٔ مناسبی از یک هیأت K با ارزهٔ گسستهٔ v است. مثلا می‌توان قضیهٔ زیر را که متعلق به ناگائو[1] است به‌دست آورد. فرض می‌کنیم k هیأتی باشد و $G=\mathrm{GL}_2(k[t])$، که در آن t یک مجهول بر k است. قرار می‌دهیم

$$B=\{\begin{pmatrix} a & f\\ 0 & d\end{pmatrix} \mid a,d\in k^*, f\in k[t]\}$$

و فرض می‌کنیم C عبارت باشد از $\mathrm{GL}_2(k)$، و قرار می‌دهیم

$$A=\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix} \mid a,d\in k^*, b\in k\}.$$

در این‌صورت $\mathrm{GL}_2(k[t])=\langle B*C\,;\,A=A\rangle$.

از سوی دیگر، سر نشان می‌دهد که تحت هر عمل $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ بر یک درخت، لزوماً یک نقطهٔ ثابت وجود دارد. بنابراین $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ تجزیه‌ای به‌صورت حاصلضرب آزاد با ادغام یا به‌صورت توسیع HNN ندارد.

هرگاه G بر درختی چون T عمل کند، هر زیرگروه G نیز بر T عمل می‌کند. نظریهٔ گروههای عمل‌کننده بر درختها روش قدرتمندی است برای اثبات قضایایی در مورد ساختار زیرگروههای حاصلضربهای آزاد با ادغام یا توسیعهای HNN، اما در اینجا بحثی از جزئیات نمی‌توانیم بکنیم.

اینک به‌مفهوم تعداد پایانهای یک گراف بازمی‌گردیم. فرض کنیم Γ گراف همبندی با تنها تعدادی متناهی یال متلاقی در هر رأس باشد، و یک رأس v_0 به‌عنوان مبدأ انتخاب شده باشد. نیز فرض کنیم Γ_n نشان دهندهٔ تمامی یالها و رئوسی باشد که توسط مسیری با طول نابیشتر از n به v_0 متصل شده‌اند و c_n تعداد مؤلفه‌های نامتناهی $\Gamma\setminus\Gamma_n$ باشد. واضح است که $c_{i+1}\geqslant c_i$. تعداد پایانهای Γ عبارت است از $e(\Gamma)=\lim_{n\to\infty}c_n$.

اگر G یک گروه متناهیاً تولیدشده باشد، $G=\langle X\,;\,R\rangle$ که در آن X متناهی است، فرض می‌کنیم $\Gamma=\Gamma(G,X)$ گراف G نسبت به این نمایش باشد. تعداد پایانهای G را به‌عنوان تعداد پایانهای $\Gamma(G,X)$ تعریف می‌کنیم. تعداد پایانهای G مستقل از نمایش متناهیاً تولیدشدهٔ انتخابی است.

محاسبهٔ تعداد پایانهای گروههایی که گرافشان را به‌عنوان مثال به‌کار بردیم آسان است. تعداد پایانهای یک گروه متناهی به‌وضوح صفر است. در مورد گروه دوری نامتناهی C، برای هر $n\geqslant 1$، $\Gamma\setminus\Gamma_n$ دقیقاً دو مؤلفه دارد؛ پس $e(C)=2$. در مورد گروه آبلی

1. Nagao

آزاد A بر دو مولد، $\Gamma\backslash\Gamma_n$ همواره یك مؤلفه دارد، پس $e(A)=1$. برای گروه آزاد F بر دو مولد (شکل ۴)، تعداد مؤلفه‌های $\Gamma\backslash\Gamma_n$ با افزایش n افزایش می‌یابد. (تعداد مؤلفه‌های $\Gamma\backslash\Gamma_n$ برابر است با $4(3^{n-1})$.) پس $e(F)=\infty$. از روی گراف حاصلضرب آزاد $C_2 * C_2$ (شکل ۵) درمی‌یابیم که $C_2 * C_2$ نیز تعدادی نامتناهی پایان دارد.

مراجع در مورد تمامی نتایجی که در بارهٔ پایانهای گروهها ذکر می‌کنیم، رساله‌های استالینگز[۵] و کوهن [۲] هستند. ثابت می‌شود که اگر G گروهی متناهیاً تولیدشده و نامتناهی باشد، آنگاه تعداد پایانهای G، یك، دو، یا بینهایت است. نیز، اگر H زیر گروهی از G با ضابطهٔ $[G:H]<\infty$ باشد، آنگاه تعداد پایانهای H و G مساوی است.

تعریف دیگری از تعداد پایانهای G را به طور خلاصه بیان می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\mathcal{B}(G)$ مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های G باشد، و $\mathcal{B}(G)$ را به‌صورت یك حلقهٔ بولی تحت اعمال تفاضل متقارن (که با $+$ مشخص می‌شود) و اشتراك درنظر می‌گیریم. رابطهٔ هم‌ارزی تقریباً مساوی را بر $\mathcal{B}(G)$ به‌صورت $A \overset{a}{=} B$، اگر تفاضل متقارن $A+B$ متناهی باشد، تعریف می‌کنیم. حال G بر $\mathcal{B}(G)$ با ضرب از سمت راست عمل می‌کند؛ عنصر g مجموعهٔ A را به Ag می‌فرستد. زیر مجموعهٔ A از G تقریباً ناورداست اگر برای هر $g\in G$، $A \overset{a}{=} Ag$. مجموعهٔ $\mathcal{A}(G)$ متشکل از همهٔ زیر مجموعه‌های تقریباً ناوردای G زیر حلقه‌ای از $\mathcal{B}(G)$ است. نیز $\mathcal{A}(G)$ دربرگیرندهٔ مجموعهٔ $\mathcal{F}$ متشکل از همهٔ زیر مجموعه‌های متناهی G است و $\mathcal{F}$ ایده‌آلی از حلقهٔ $\mathcal{A}(G)$ است. می‌توانیم خارج قسمت $\mathcal{E}(G)=\mathcal{A}(G)/\mathcal{F}$ را تشکیل دهیم. حال $\mathcal{E}(G)$ یك فضای برداری بر هیأت دوعنصری $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ است، و تعداد پایانهای G، بعد $\mathcal{E}(G)$ است.

به یك معنا، «اغلب» گروههای نامتناهی متناهیاً تولیدشده تنها یك پایان دارند. استالینگز قضیهٔ ساختاری زیر را درمورد گروههای متناهیاً تولیدشده با بیش از یك پایان ثابت کرد.

قضیهٔ IV. گروه متناهیاً تولیدشدهٔ G بیش از یك پایان دارد اگر و تنها اگر G یا به‌طور نابدیهی حاصلضرب آزادی، یا ادغام باشد یا یك توسیع HNN باشد که در آن، زیرگروههای ادغام شده یا مرتبط، متناهی باشند.

فرض می‌کنیم $G=\langle X;R\rangle$. در اثبات قضیهٔ ساختاری فوق، گراف $\Gamma=\Gamma\langle G,X\rangle$ نقشی اساسی دارد. یك زیرمجموعهٔ $B\subseteq G$ را می‌توان به‌عنوان مجموعه‌ای از رئوس Γ درنظر گرفت. دوگان مرز B، که به‌شکل $\delta(B)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعهٔ یالهایی که دقیقاً یك رأس در B دارند. نکتهٔ مهم این است که B تقریباً ناورداست اگر و تنها اگر $\delta(B)$ متناهی باشد. کاربردهای این قضیهٔ ساختاری درمقدمه موردبحث قرار گرفتند.

استالینگز مفهوم ترکیبیاتی زیر را ارائه کرد. یك ساختار دوقطبی بر یك گروه G، افرازی چون G به پنج زیر مجموعهٔ مجزای $A, EE, EE^*, E^*E, E^*E^*$ است که در اصول موضوع زیر صدق می‌کنند. (حروف X، Y، Z به‌جای حروف E یا E^* به‌کار می‌روند با این قرارداد که $(X^*)^*=X$ و غیره.)

(۱) A زیر گروهی از G است.
(۲) اگر $a\in A$ و $g\in XY$، آنگاه $ga\in XY$.
(۳) اگر $g\in XY$، آنگاه $g^{-1}\in YX$.
(۴) اگر $g\in XY$ و $h\in Y^*Z$، آنگاه $gh\in XZ$.
(۵) G به‌وسیلهٔ عناصری چون g که تحویل‌ناپذیرند تولید می‌شود. منظور از تحویل‌ناپذیری g این است که آن را نمی‌توان به‌شکل حاصلضرب $g=hk$ با ضابطهٔ $h\in XY$، $k\in Y^*Z$ نوشت.
(۶) $EE^*\neq\varnothing$.

این اصول موضوع ممکن است مرموز به‌نظر برسند ولی با توجه به حالتی که G یك حاصلضرب آزاد، مثلا $G=H*K$، است انگیزهٔ انتخاب آنها معلوم می‌شود. همان‌طور که قبلا اشاره شد، هر عنصر $w\neq 1$ از G نمایش یکتایی به‌شکل حاصلضرب $w=g_1\cdots g_n$ دارد که در آن هر g_i در یکی از زیر گروههای H یا K است، هر g_i مخالف ۱ است و هردو g_i و g_{i+1} متوالی از گروههای مختلف می‌آیند. فرض می‌کنیم $A=\{1\}$ و، اگر w مثل بالا باشد، قرار می‌دهیم $w\in XY$ که در آن

$X=E$ اگر $g_1\in H$ درحالی‌که $X=E^*$ اگر $g_1\in K$،

$Y=E$ اگر $g_n\in H$ درحالی‌که $Y=E^*$ اگر $g_n\in K$.

خوانندهٔ آشنا با حاصلضرب آزاد به‌آسانی می‌تواند این اصول موضوع را تحقیق کند. در حالت کلی، قضیهٔ مشخص‌سازی زیر برقرار است.

قضیهٔ V. گروه G یك ساختار دوقطبی دارد اگر و تنها اگر G یا به‌طور نابدیهی یك حاصلضرب آزاد یا ادغام باشد ویا یك توسیع HNN.

هم نظریهٔ پایانها و هم نظریهٔ گروههای عمل‌کننده بر درختها نظریه‌هایی فراگیر [سراسری] هستند. ارتباطی بین گروه G و یك گراف «بزرگ» Γ برقرار می‌شود که از روی آن می‌توان نتایجی در بارهٔ G به‌دست آورد. به نظریهٔ نمودارهای حذفی باز می‌گردیم، که نظریه‌ای «موضعی» است.

به‌جای نوشتن نمایشها به‌شکل $G=\langle X;r_1=1,r_2=1,\ldots\rangle$ اینك می‌نویسیم $G=\langle X;r_1,r_2,\ldots\rangle$ و می‌گوییم که هر r_i یك رابط معرف است. از این نماد دریافت می‌شود که G با مساوی یك قرار دادن هر r_i تعریف می‌شود. هر r_i عنصری از گروه آزاد $F=\langle X\rangle$ است و اگر N بستار نرمال $R=\{r_1,r_2,\ldots\}$ در F باشد، آنگاه $G=F/N$. عنصری چون w از F عضو همانی G را نمایش می‌دهد اگر و تنها اگر $w\in N$، و این‌چنین است اگر و تنها اگر w حاصلضربی از مزدوجهای عناصر $R^{\pm 1}$ باشد.

در اینجا مسألهٔ فنی کوچکی پیش می‌آید. عنصر u از F به‌طور دوری تحویل یافته است اگر اولین و آخرین حروف u وارون یکدیگر نباشند. واضح است که هر واژهٔ F با یك عنصر به‌طور دوری تحویل یافته (یکتا) مزدوج است. اگر فرض کنیم همهٔ مجموعه‌های R از روابط معرفی که ما بررسی می‌کنیم متقارن شده هستند کارمان راحت‌تر خواهد بود. منظور از اینکه R متقارن شده است، این است که اگر $r\in R$ آنگاه r به طور دوری تحویل یافته

است و همهٔ جایگشتهای دوری r و r^{-1} متعلق به R هستند. پس یك واژهٔ w در بستار نرمال N از R است اگر و تنها اگر w حاصلضربی از مزدوجهای عناصر R باشد، یعنی به‌ازای $r_i \in R$ داشته باشیم

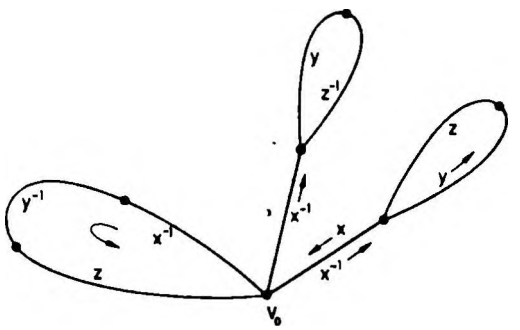
$$w = c_1 r_1 c_1^{-1} \cdots c_n r_n c_n^{-1}. \qquad (*)$$

می‌خواهیم نموداری چون M رسم کنیم که نشان‌دهد چگونه واژهٔ خاص w با حاصلضرب خاص (*) در گروه آزاد F برابر است. نمودار را برای مثال $F = \langle x, y, z \rangle$ و

$$w = (x^{-1}yzx)(x^{-1}z^{-1}yx)(x^{-1}y^{-1}z) \qquad (**)$$

رسم می‌کنیم.

نمودار M را در صفحه به‌این‌صورت رسم می‌کنیم: یك نقطهٔ پایهٔ v_0 در صفحه انتخاب می‌کنیم. برای هر جملهٔ $c_i r_i c_i^{-1}$ در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت یك «ساقه» که از v_0 به‌یك رأس v_i برود ویك حلقه در v_i اختیار می‌کنیم. ساقه‌را با عنصر c_i و حلقه را با r_i نامگذاری کرده یالها را طوری تقسیم می‌کنیم که هر یال با یك مولد یا وارونش نامگذاری شده باشد. قرارداد نامگذاری ما طوری است که‌اگر یال e نام u دارد، آنگاه نام e^{-1}، u^{-1} خواهد بود. در مورد مثال ما نمودار چنین است.

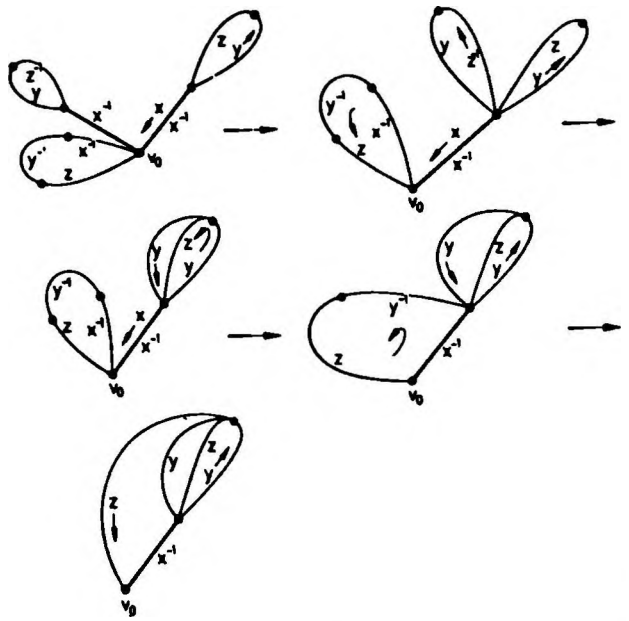


شکل ۷

(اگر عنصر تزویج‌کننده c_i عنصر همانی باشد، پایهٔ حلقه مربوط به r_i در v_0 خواهد بود.)

براساس نحوهٔ ترسیم نمودار، اگر ازنقطهٔ پایهٔ v_0 آغاز کنیم و مرز M یعنی ∂M را درخلاف جهت عقربه‌های ساعت بپیماییم و با اولین یال e_0 برای جمله $c_1 r_1 c_1^{-1}$ شروع کنیم، متوالیاً $c_1 r_1 c_1^{-1}$ وغیره را خواهیم خواند. حال حاصلضرب (*) بدون حذف لزوماً تحویل یافته نیست. در چنین حالتی یالهای متوالی e و f در ∂M با نامهای وارون وجود دارند. حذف از لحاظ هندسی عبارت است از یکی گرفتن یالهای متوالی با نامهای وارون. بنابراین برای اجرای عمل حذف ما نمودار را مانندشکل ۸ «می‌دوزیم». درنمودار نهایی، روی مرز M شکل تحویل یافتهٔ w را می‌بینیم.

خواننده توجه خواهدکردکه نامها روی مرزهای نواحی با تقریب جایگشت دوری حفظ می‌شوند. حتی مثال ساده‌ای که ارائه شد نشان می‌دهد که حذف عملی «دوبعدی» است. ناحیهٔ مربوط به رابط $z^{-1}y$ هیچ یالی در مرز نمودار نهایی ندارد. با وجود این، این ناحیه جزئی از نمودار است و می‌توان درباره‌اش بحث کرد.



شکل ۸

وضعیت دیگری نیز امکان دارد که در مثال ما پیش نیامد. می‌توانیم یالهای متوالی e و f در مرز M را یکی کنیم وباز هم نموداری در صفحه داشته باشیم به‌شرطی‌که ef یك مسیر بسته نباشد. اگر درساختمان نمودار نهایی، دویال متوالی e و f با نامهای‌وارون وجود داشته باشد به‌طوری‌که ef مسیری بسته چون λ باشد،کافی است λ وهرچیز درون λ را از نمودارحذف کنیم.

برای توصیف خلاصه‌تر این ساختمان چند اصطلاح‌را معرفی می‌کنیم. فرض کنید R یك زیرمجموعهٔ متقارن شدهٔ گروه آزاد F باشد. R-نمودار M، یك ۲-مجتمع همبند متناهی‌است که درصفحه نشانده شده است و در دو شرط زیر صدق می‌کند. اول اینکه هر یال e از M باعنصری‌چون $\varphi(e) \neq 1$ از گروه‌آزاد F نامگذاری شده باشد. دوم اینکه اگر D ناحیه‌ای از M باشد و $e_1, \ldots, e_n$ مسیری باشد که به‌ترتیب یالهای مرز D را بپیماید، آنگاه $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ بدون حذف تحویل یافته وعنصری از R باشد. اگر M همبند ساده باشد می‌گوییم w یك نام مرزی M است اگر مسیری چون $e_1, \ldots, e_n$ وجود داشته باشد که به ترتیب یالهای ∂M را بپیماید و $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ بدون‌حذف تحویل‌یافته و برابر w باشد.

مرجع ما درمورد نتایج مربوط به‌نمودارهای حذفی رسالهٔ [۳] است. این نتیجه‌را در این زمینه داریم:

قضیهٔ VI. فرض‌کنید $F = \langle X \rangle$ یك‌گروه آزاد باشد، ونیزفرض کنید $G = \langle X; R \rangle$ که در آن، R متقارن شده است. یك واژهٔ تحویل‌یافته w از F عنصرهمانی G را نمایش می‌دهداگروتنهااگریك R-نمودار همبند سادهٔ M با نام مرزی w در صفحه وجود داشته‌باشد.

می‌توان نمودار M را به‌عنوان «برش» بسیارکوچکی از نمودار کیلی‌کامل $\Gamma(G, X)$ درنظر گرفت. مقدار اطلاعاتی‌که M دربر دارد آنقدرکوچك هست‌که بتواند درصفحه قرار بگیرد.

ازآنجاکه شیوهٔ ترسیم ما کاملاً کلی‌است نمی‌توانیم‌امیدوار

باشیم که برای بررسی خواص گروه $G=\langle X;R\rangle$ نمودارهای حذفی را به‌کار گیریم مگر آنکه فرضهایی درمورد R موجود باشد که در خصوصیات هندسی R-نمودارها منعکس شود. گرچه نمودارها برای بررسی انواع گوناگونی از گروهها به‌کار رفته‌اند، موفقترین کاربرد آنها در قلمروی «نظریهٔ حذفهای کوچك» بوده است که اینك به‌توضیح آن می‌پردازیم. فرضهایی که اتخاذ می‌شود تا هنگامی که تعبیر هندسیشان ملاحظه نشده است ممکن است قدری عجیب به‌نظر آیند.

فرض می‌کنیم $F=\langle X\rangle$ گروه آزاد بر X باشد. اگر w واژهٔ تحویل یافته‌ای از F باشد، می‌نویسیم $w\equiv uv$ هرگاه w حاصلضرب بدون حذف زیر واژه‌هایش، u و v، باشد. نیز فرض می‌کنیم R زیر مجموعهٔ متقارن‌شده‌ای از F باشد. اگر عناصر $r_1\equiv b_1c^{-1}$ و $r_2\equiv cb_2$ از R با ضابطهٔ $r_2\neq r_1^{-1}$ موجود باشند، آنگاه c یك قطعه (نسبت به R) نامیده می‌شود. برای عدد صحیح مثبت p تعریف می‌کنیم

شرط $C(p)$: هیچ عنصری از R حاصلضرب تعدادی کمتر از p قطعه نیست.

بی‌درنگ به‌معنای هندسی فرض $C(p)$ بازمی‌گردیم. تصور کنید M یك R-نمودار باشد. در ساختن نمودارها مناسب بود که هر یال را با یك مولد یا وارونش نامگذاری کنیم. اینك می‌خواهیم همهٔ رئوس غیر لازم را حذف کنیم. فرض می‌کنیم M رأسی چون v از درجهٔ دو داشته باشد که یالهای e و f با نامهای، به‌ترتیب، b و c را ازهم جدا کند. در این‌صورت می‌توانیم رأس v را حذف کنیم و e و f را به‌یك یال با نام (bc) تبدیل کنیم. بنابراین از این به‌بعد فرض می‌کنیم که M هیچ رأسی از درجهٔ دو ندارد.

اینك نام c بر یك یال درونی e از M را بررسی می‌کنیم.

تصور کنید e برمرز دوناحیهٔ متمایز D_1 و D_2 قرار گرفته باشد. دراین‌صورت D_1 یك نام مرزی $r_1\equiv b_1c^{-1}$ و D_2 یك نام مرزی $r_2\equiv cb_2$ دارد. پس c بنابر تعریف یك قطعه است، مگر در حالتی که احیاناً $r_2=r_1^{-1}$. اگر این حالت پیش آید، حذف یال e ناحیه‌ای چون D را نتیجه می‌دهد که دارای نام مرزی برابر با ۱ در F است. آنگاه می‌توانیم مرز D را «بدوزیم» و نمودار M' را به‌دست آوریم که مرزش همان مرز M است ولی نواحی کمتری دارد. بنابراین می‌توانیم تنها نمودارهایی را در نظر بگیریم که تحویل یافته‌اند به‌این‌معنا که نام هر یال درونی یك قطعه است.

فرض می‌کنیم M یك R-نمودار باشد به‌طوری که R درشرط $C(p)$ صدق کند. دیده‌ایم که می‌توانیم فرض کنیم M رأسی از درجهٔ دو ندارد و نام هر یال درونی، یك قطعه است. حال معنای هندسی شرط $C(p)$ روشن است. اگر مرز یك ناحیهٔ درونی D از M به‌ترتیب با مسیر $e_1,\ldots,e_k$ پیموده شود، آنگاه $\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_k)$ یك تجزیهٔ نام مرزی به‌شکل حاصلضرب قطعه‌هاست و در نتیجه $k\geqslant p$. درجهٔ یك ناحیهٔ D از M تعداد یالهای مرز M است. هر ناحیهٔ درونی D از M دارای درجهٔ ناکمتر از p است. برای مشخص‌شدن موضوع فرض کنید R در $C(6)$ صدق می‌کند. اگرخواننده چند نقشهٔ مسطح رسم کند که در آنها همهٔ رئوس درونی از درجهٔ حداقل سه باشند و همهٔ نواحی درونی حداقل درجهٔ شش داشته باشند، خواهد دید که چنین نقشه‌هایی به‌سرعت «به‌سمت مرز گسترش می‌یابند». این پیشروی به‌سوی مرز است که امکان می‌دهد احکامی را درمورد گروههایی که نمایشهایی صادق در یك شرط مربوط به‌حذفهای کوچك دارند ثابت کنیم.

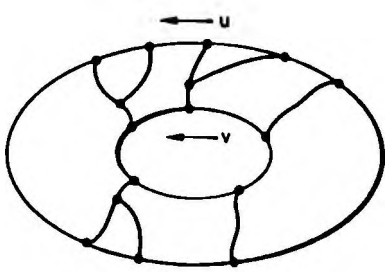
یك ویژگی اصلی کار با نقشه‌های واقع در صفحه، دوگانی صفحه‌ای است. مثلا ممکن است حدس بزنیم که فرضی «دوگان» $C(p)$ وجود دارد که تضمین می‌کند که درجهٔ هر رأس درونی حداقل q است. حقیقتاً نیز چنین است، و این فرض را می‌توان به طور جبری چنین فرمولبندی کرد

شرط $T(q)$: اگر $r_1,\ldots,r_h$ عناصری از R باشند به طوری که $3\leqslant h<q$ و هر $r_{i+1}\neq r_i^{-1}$ (اندیسها به‌پیمانهٔ h گرفته شده‌اند) آنگاه حداقل یکی از حاصلضربهای r_ir_{i+1} بدون حذف تحویل یافته است.

شرط $T(3)$ پوچ است چرا که می‌توانیم فرض کنیم که درجهٔ هر رأس درونی حداقل سه‌است.

سه فرض مینیمال که تحت آنها می‌توان نظریهٔ حذفهای کوچك را «به‌کار بست» عبارت‌اند از $C(p)$ و $T(q)$ که (p,q) جوابی از $1/p+1/q=1/2$ باشد، یعنی یکی از زوجهای $(3,6),(4,4),(6,3)$. پس این فرضهای مینیمال در تناظر یك به‌یك‌اند با سه خانه‌بندی منتظم صفحه و ویژگیهای پیشروی R-نمودارهای متناظر، تعمیمهای ترکیبیاتی ویژگیهای زیر نقشه‌های متناهی از خانه‌بندیهای منتظم هستند.

نمودارهای حذفی برای تحقیق درمسائل دیگری نیز مفیدند. نمودار M در صفحه را طوقی نامیم هرگاه همبند باشد و مکمل M دقیقاً دو مؤلفه داشته باشد. فرض می‌کنیم u و v دو واژه در گروه $G=\langle X;R\rangle$ باشند وهیچکدام مساوی ۱ نباشد. دراین‌صورت، u و v عناصر مزدوجی از G را نمایش می‌دهند اگر و تنها اگر R-نمودار طوقی M موجود باشد طوری که مرز بیرونی M نام u و مرز درونی M نام v داشته باشد. (شکل ۹ را ببینید.) نمودار M یك نمودار تزویجی برای u و v نامیده می‌شود.



شکل ۹

انواع دیگری از مسائل، به‌نمودارها بر رویه‌های فشرده

می‌انجامند. مثلا این‌سؤال که چه عناصری در G با یکدیگر تعویض می‌شوند، مربوط می‌شود به‌وجود خانه‌بندیهای چنبره توسط R-نمودارها. مسألهٔ یکتایی ریشه‌های دوم در G مربوط می‌شود به‌خانه‌بندیهای بعاری کلاین با R- نمودارها.

بحث ما دربارهٔ نظریهٔ حذفهای کوچك بر یك گروه آزاد F بود. همچنین می‌توان نظریهٔ حذفهای کوچك را بر حاصلضربهای آزاد، حاصلضربهای آزاد باادغام، یا بر توسیعهای HNN انجام داد. برای برخی‌ازکاربردهایی که درمقدمه ذکر شد، نیاز به‌مطالعه دراین‌زمینهٔ عمومیتر داریم.

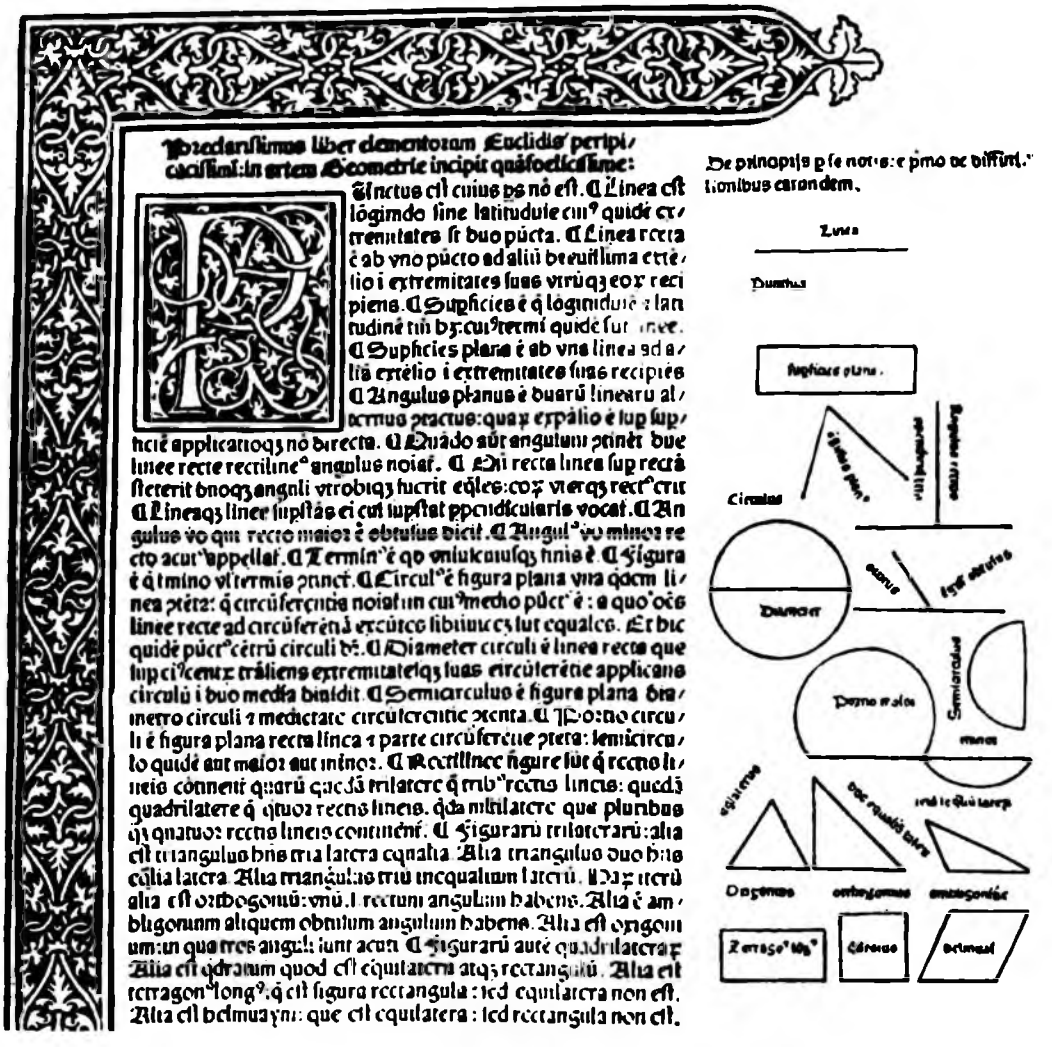
****

مراجع

1. Cayley, A.: The theory of groups: Graphical representations. *Amer. J. Math.* 1, 174-176 (1878).
2. Cohen, D. E.: *Groups of cohomological dimension one*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 245, Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1972.
3. Lyndon, R. C.: Schupp, P. E.: *Combinatorial group theory*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1977.
4. Serre, J.-P.: *Arbres, amalgames, et* SL_2. Astérique 46, Paris: Société Mathématique de France 1977.
5. Stallings, J.: *Group theory and three-dimensional manifolds*. Yale Monographs 4 New Haven: Yale University Press 1971.

• Paul E. Schupp, "Groups and graphs," *Math. Intelligencer*, (4) 1 (1979) 205-214.

★ پال شوپ، دانشگاه ایلینوی در اربانا، آمریکا



اولین چاپ کتاب *اصول* اقلیدس (۱۴۸۲)

مسأله برای حل

محمد رضا درفشه

دراین بخش، هرشماره تعدادی مسأله درسطح سال آخر دبیرستان و سالهای اول و دوم دانشگاه مطرح می‌کنیم که حل آنها در یکی از شماره‌های بعدی مجله چاپ خواهد شد. از کسانی که مایل به‌ارسال مسأله هستند و همچنین از افرادی که مایل به‌ارسال حل مسأله‌ای هستند دعوت می‌کنیم نامه‌های خود را به نشانی مجله بفرستند. ازکلیهٔ فرستندگان مسأله خواهش می‌کنیم که ذکر کنند مسأله‌را خودشان‌طرح کرده‌اند ویا ازمنبع دیگری به‌دست‌آورده‌اند، وهمچنین درصورت امکان راه‌حلی برای مسألهٔ ارسالی‌ضمیمه‌کنند. همراه با هر مسأله نام فرستندهٔ آن را ذکر خواهیم کرد. از بین حلهای رسیده، حلی که کامل و ابتکاری باشد با ذکر نام حل‌کننده چاپ خواهد شد. ضمناً گاه راه‌حلهای متفاوت هم، در صورت جالب بودن آنها، چاپ می‌شوند. مهلت ارسال حل مسائل مندرج در هرشمارهٔ مجله حداکثر چهارماه پس‌از انتشار آن شماره‌است.

***

مسألهٔ ۵. اگر x و y اعداد حقیقی فرض شوند، نامساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sum_{0<i<j<4} x^i y^{j-i} > \frac{1}{2}.$$

(حسن‌علی شاه‌علی، تهران)

مسألهٔ ۶. حلقه‌ای با ضرب غیربدیهی مثال بزنیدکه شامل ایده‌آل ماکسیمال نباشد.

(منصور معتمدی، دانشگاه شهید چمران اهواز)

مسألهٔ ۷. فرض‌کنید S یك رویهٔ هموار بسته (فشرده و بی‌لبه) در فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^3$ است. به ازای نقطهٔ x در $\mathbf{R}^3$، R_x چنین تعریف می‌شود

$$R_x = \operatorname{Max}\{d(x, y) \mid y \in S\}$$

که در اینجا $d(x, y)$ فاصلهٔ اقلیدسی نقاط x و y است. شعاع رویهٔ S نیز چنین تعریف می‌شود: $R = \operatorname{Inf} R_x$، که در اینجا x در $\mathbf{R}^3$ تغییر می‌کند. اگر حجم جسم محصور به‌رویهٔ S را با V و مساحت S را با A نشان دهیم، ثابت‌کنید که $V \leqslant (R/3)A$.

(سیاوش شهشهانی، دانشگاه صنعتی شریف)

مسألهٔ ۸. مطلوب‌است تمام اعداد صحیح $n > 1$ با این‌خاصیت که اگر داشته باشیم $xy \equiv 1 \pmod{n}$ آنگاه

$$x \equiv y \pmod{n}.$$

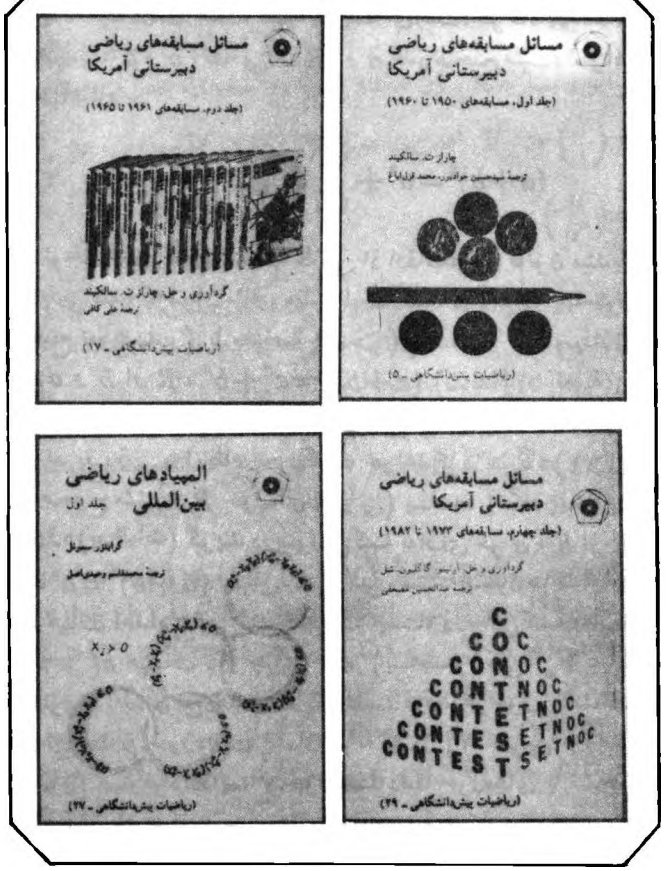
(محمدرضا درفشه، دانشگاه تهران)

برندگان مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور

برندگان مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور که همزمان با بیست و یکمین کنفرانس ریاضی کشور در دانشگاه اصفهان برگزار شد، به قرار زیر اعلام شدند:

اول	شاهین امیری‌شریفی	دانشگاه صنعتی‌شریف
دوم	حسام حمیدی‌تهرانی	دانشگاه صنعتی‌شریف
سوم	سعید ذاکری	دانشگاه تهران
چهارم	حمید موسوی	دانشگاه تربیت‌معلم
پنجم	شهاب شهابی	دانشگاه تهران

مرکز نشر دانشگاهی منتشر کرده است



«صورت سادهٔ» قضیهٔ دو جمله‌ای در چه هیأتهایی برقرار است؟*

دیوید دابز*
ترجمهٔ علیرضا جمالی

۱. مقدمه

نقطهٔ شروع بحث ما خطای مشهوری است که غالباً دانشجویان جبر مقدماتی مرتکب آن می‌شوند. این خطا که به «قانون به‌توان‌رساندن درنظر مبتدیان» معروف است، عبارت است از اینکه $(a+b)^n$ را به‌صورت a^n+b^n خلاصه می‌کنند. البته، این کار نادرست است: مثلاً کافی است اعداد حقیقی $a=b=1$ و $n=2$ را درنظر بگیرید. آنچه درست است، قضیهٔ دوجمله‌ای است: هرگاه R حلقه‌ای تعویض‌پذیر، a و b اعضایی از R، و n عدد صحیح مثبت دلخواهی باشد، آنگاه

$$(a+b)^n=a^n+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i+b^n.$$

باید توجه داشت که این حکم، گاهی از اوقات، با قانون مبتدیان تطبیق می‌کند! به‌عنوان مثال، معلوم است که هرگاه R یك حوزهٔ (صحیح تعویض‌پذیر) با مشخصهٔ $p(>0)$ باشد، آنگاه به‌ازای هر a و b از R، $(a+b)^p=a^p+b^p$ (ر.ك. [۱، قضیهٔ ۱، ص. ۱۷۷]).

تعریف زیر به انتظام بحث کمك خواهد کرد. هرگاه $n(\geqslant 2)$ عدد صحیح مثبتی و R حوزه‌ای (هیأتی) باشد، آنگاه R را یك **n-حوزه (n-هیأت)** گویند درصورتی که به‌ازای هر a و b از R، $(a+b)^n=a^n+b^n$. سؤال اصلی این است: n-حوزه‌ها کدام‌اند؟ مسلماً هیأت اعداد حقیقی یك n-هیأت نیست، درحالی که به‌ازای هر $n(\geqslant 2)$ هیأت $\mathbf{F}_2$ چنین است. (به‌طور کلی، $\mathbf{F}_m$ هیأت mعضوی را نشان می‌دهد.) مطابق مطلب فوق، هرحوزه با مشخصهٔ مثبت p، یك p-حوزه‌است. همان گونه که در [۲، تمرین ۶ (ب)، ص. ۱۰] تذکر داده‌ایم، ۲-حوزه‌ها دقیقاً حوزه‌های با مشخصهٔ ۲ اند، ولی فهرست ۳-حوزه‌ها مشتمل بر $\mathbf{F}_2$ و نیز حوزه‌های با مشخصهٔ ۳ است. با بررسیهای مفصل موردی (مورد به‌مورد)، تکمیل جدول زیر متشکل از همهٔ n-حوزه‌ها به‌ازای $2\leqslant n\leqslant 10$ میسر است (n-حوزه‌های یکریخت را یکی می‌گیریم). $\mathrm{ch}(R)$ نشان‌دهندهٔ مشخصهٔ R است.

n	n-حوزهٔ R
۲	$\mathrm{ch}(R)=2$
۳	$\mathbf{F}_2$; $\mathrm{ch}(R)=3$
۴	$\mathrm{ch}(R)=2$
۵	$\mathbf{F}_2$; $\mathbf{F}_3$; $\mathbf{F}_4$; $\mathrm{ch}(R)=5$
۶	$\mathbf{F}_2$
۷	$\mathbf{F}_2$; $\mathbf{F}_3$; $\mathbf{F}_4$; $\mathrm{ch}(R)=7$
۸	$\mathrm{ch}(R)=2$
۹	$\mathbf{F}_2$; $\mathbf{F}_5$; $\mathbf{F}_8$; $\mathrm{ch}(R)=3$
۱۰	$\mathbf{F}_2$; $\mathbf{F}_4$

یکی از اهداف این مقاله ارائهٔ نظریه‌ای است که با توسل به‌آن بتوان درستی جدول فوق را با کمترین محاسبات موردی محقق کرد.

در فرع ۴.۲ نشان داده می‌شود که، قطع نظر از انواع n-حوزه‌های پیشنهادی فوق، هرعدد صحیح مثبت $n(\geqslant 2)$ تنها تعدادی متناهی از n-حوزه‌های «استثنایی» را (با فرض یکی بودن n-حوزه‌های یکریخت) می‌پذیرد، و هر یك از اینها هیأتی متناهی با عدد اصلی کوچکتر از n است. موضوع «ندرت» در فرع ۶.۲ تعقیب می‌شود: با یکی گرفتن n-حوزه‌های یکریخت، $\mathbf{F}_2$ یگانه حوزه‌ای است که به‌ازای سه مقدار متوالی n یك n-حوزه است. ولی «ندرت» نسبی است، زیرا در بخش ۳ دو ردهٔ نامتناهی از

n-حوزه‌های «استثنایی» ارائه می‌شود. با وجود این در بخشهای ۳ و ۴ مسألهٔ توجیه جدول فوق، به‌ویژه با به‌کاربردن برخی هنهشتیهای حاصل از نظریهٔ مقدماتی گروهها در قضیهٔ ۲.۴، تکمیل می‌شود. از خوانندگان شایق به اقامهٔ دلیل مورد دی (اجتناب‌پذیر)ـ که به‌توسط آن می‌توان جدول فوق را در سایهٔ کوشش خود ساخت ـ در تبصرهٔ ۳.۴ انجام این کار خواسته شده است.

گرچه این مقاله اهدافی جدی دارد، عمداً پیشنیاز کمی برای آن در نظر گرفته شده است. برای درک آسانتر مطالب خواننده می‌تواند به‌مراجع مقاله که مدخلهایی بر جبر مجرد هستند و آن را به طرز ماموسی شرح می‌دهند، مراجعه کند. علاوه بر این مبادی، خواننده باید قضیهٔ لاگرانژ را در نظریهٔ گروهها و ساختار هیأتهای متناهی را بداند زیرا در متن مقاله به هر دو مفهوم در موارد لازم ارجاع داده شده است.

۲. استثنائات نادرند

برای بیان شمه‌ای از خصوصیات موضوع، بحث را با اثبات اینکه هر n-حوزهٔ R دارای مشخصهٔ مثبت است آغاز می‌کنیم. برای اثبات (عکس نقیض) آن، فرض می‌کنیم $\mathrm{ch}(R)=0$. در این صورت R حاوی نسخه‌ای یکریخت از $\mathbf{Z}$ است، که در آن $2^n \neq 2$؛ بنابراین در R، $(1+1)^n \neq 1^n+1^n$.

اینک برخی نتایج مفید دیگر و نیز مثالهایی مقتضی را می‌آوریم.

قضیهٔ ۱.۲. (الف) حوزه‌ای مانند R یک n-حوزه است اگر و تنها اگر هیأت خارج‌قسمتی R یک n-هیأت باشد.

(ب) فرض کنیم $n(\geqslant 2)$ عدد صحیح مثبتی باشد. در این صورت هیأتی مانند F یک n-هیأت است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $a \in F$، $(a+1)^n=a^n+1$.

(پ) به‌ازای هر عدد صحیح مثبت $n(\geqslant 2)$، $\mathbf{F}_2$ یک n-هیأت است.

(ت) هرگاه R حوزه‌ای باشد که $p=\mathrm{ch}(R)>0$ و به‌ازای عدد صحیح مثبتی مانند k، $n=p^k$ آنگاه R یک n-حوزه است.

برهان. (الف) فقط حکم «تنها اگر» باید مورد توجه قرار گیرد، زیرا هر زیرحلقهٔ یک n-هیأت، یک n-حوزه است. فرض کنیم F هیأت خارج‌قسمتی n-حوزه‌ای چون R باشد. اعضای α و β از F را در نظر می‌گیریم؛ $a, b, c \neq 0$ را از R چنان انتخاب می‌کنیم که $\alpha=ac^{-1}$ و $\beta=bc^{-1}$. در این صورت

$$(\alpha+\beta)^n=((a+b)c^{-1})^n=(a+b)^n c^{-n}$$
$$=(a^n+b^n)c^{-n}=(ac^{-1})^n+(bc^{-1})^n=\alpha^n+\beta^n$$

فهو المطلوب.

(ب) باز، فقط جزء «تنها اگر» برهانی را می‌طلبد. برای ملاحظهٔ اینکه به‌ازای هر $d, e \in F$، $(d+e)^n=d^n+e^n$، ابتدا بی‌آنکه خللی به کلیت مطلب وارد آید توجه می‌کنیم که $e \neq 0$. سپس محاسبات مذکور در برهان (الف) را، با به‌کاربردن $(a+1)^n=a^n+1$، با $R=F$، $\alpha=d$، $\beta=e$، $a=de^{-1}$، $b=1$ و $c=e^{-1}$ تکرار می‌کنیم.

(پ) این حکم به‌ازای همهٔ انتخابهای پارامترها به سادگی قابل تحقیق است. یا به‌طریق دیگر، این محک را می‌توان با استفاده از (ب) تحقیق کرد. هرگاه $a=0$، حکم واضح است. در حالات باقیمانده، $a=1$، کافی است ملاحظه کنیم که در $\mathbf{F}_2$، $1+1=0$.

(ت) به‌موجب (الف)، تنها لازم است نشان دهیم که به‌ازای هر a و b در هیأت خارج‌قسمتی R، $(a+b)^{p^k}=a^{p^k}+b^{p^k}$. با استقرا نسبت به R، تنها اثبات حالت $k=1$ لازم است. ولی این حالت نتیجهٔ معروفی است از این حکم که نماد ترکیبیاتی $\binom{p}{i}$ به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant p-1$ مضربی است از p (ر.ک. [۱، قضیهٔ ۱، ص. ۱۷۷]).

پیش از ارائهٔ اولین نتیجهٔ مربوط به «ندرت» (فرع ۴.۲) به‌حکم معروف دیگری دربارهٔ نمادهای ترکیبیاتی نیازداریم. برهان آن، که متعاقباً به‌منظور تکمیل بحث می‌آید، به‌عنوان ابزاری در اثبات قضیه‌های سیلو به‌توسط ویلبریانسن در ۱۹۶۴ به‌نگارنده عرضه شد.

لم ۲.۲. اگر p اول و m و k اعداد صحیح مثبتی باشند، آنگاه

$$\binom{p^m k}{p^m} \equiv k \pmod p.$$

برهان. قرار می‌دهیم $n=p^m k$. با بسط $\alpha=(X+1)^n$ به‌وسیلهٔ قضیهٔ دوجمله‌ای در حلقهٔ چندجمله‌ای $\mathbf{F}_p[X]$، معلوم می‌شود که ضریب عددی جملهٔ X^{p^m} عدد $\binom{n}{p^m}$، به‌عنوان عضوی از $\mathbf{F}_p$، است. ولی قضیهٔ ۱.۲ (ت) به $\alpha=(X^{p^m}+1)^k$ منجر می‌شود. بنابراین، با به‌کاربردن مجدد قضیهٔ دوجمله‌ای، تصویر متعارف $\binom{k}{1}=k$ در $\mathbf{F}_p$، ضریب جملهٔ X^{p^m} است. بنابراین، در $\mathbf{F}_p$، $\binom{n}{p^m}=k$.

قضیهٔ ۳.۲. فرض کنیم R یک حوزه، X متغیری روی R، و $n(\geqslant 2)$ عدد صحیح مثبتی باشد. در این صورت شرایط زیر معادل‌اند:

(۱) $R[X]$ یک n-حوزه است؛

(۲) در $R[X]$، $(X+1)^n=X^n+1$؛

(۳) $p=\mathrm{ch}(R)>0$ و به‌ازای عدد صحیح مثبتی مانند k، $n=p^k$.

برهان. برطبق قضیهٔ ۱.۲ (ت)، (۱) ⇐ (۳)، و استلزام (۲) ⇐ (۱) بدیهی است. اینک نشان می‌دهیم که (۳) ⇐ (۲). (۲) را مفروض می‌گیریم. با مقایسهٔ ضرایب X^{n-1} در $(X+1)^n$ و X^n+1، در R، $n=0$.[1] بنابراین، $p=\mathrm{ch}(R)>0$ و $p|n$. اگر (۳) برقرار نباشد، از قضیهٔ اصلی حساب، اعداد صحیح و مثبتی مانند m و $k(\geqslant 2)$ به‌دست می‌آیند به‌طوری که $n=p^m k$

۱. منظور، $n1_R=0$ است که در آن 1_R واحد حلقهٔ R است.ـ م.

و $p \nmid k$. مطابق قضیهٔ دوجمله‌ای، ضریب X^{p^m} در $(X+1)^n$ عبارت است از $\binom{n}{p^m}$. بنابراین، به‌موجب (۲) و لم ۲.۲، در R، $k=0$؛ ولذا $p|k$، که تناقض مطلوب است.

درحالتی که n اول باشد و $k=1$، معادل بودن (۲) و (۳) درقضیهٔ ۳.۲، در [۲، تمرین ۸، ص. ۳۰] تذکر داده شده است.

دراینجا مناسب است اصطلاحی را معرفی کنیم. حوزه‌ای‌مانند R را یك n-استثناء گوییم هرگاه R یك n-حوزه باشد، R با $\mathbf{F}_2$ یکریخت‌نباشد، و n توان صحیحی از $\mathrm{ch}(R)$ نباشد. اینك عنوان این بخش با حکم زیر توجیه می‌شود.

فرع ۴.۲. فرض‌کنیم $n(\geqslant 2)$ عدد صحیح مثبتی باشد. دراین صورت هر n-استثناء هیأتی متناهی باعدد اصلی کوچکتر از n است. بنابراین، با یکی گرفتن یکریختها، (به‌ازای هر n مفروض) تنها تعدادی متناهی n-استثناء وجود دارد.

برهان. فرض‌کنیم R یك n-استثناء باشد که درمورد آن‌حکم نخست برقرار نباشد. چون هرحوزهٔ متناهی یك هیأت است، $|R| \geqslant n$. چون R یك n-حوزه است، هرعضو R ریشه‌ای است از چندجمله‌ای $g=(X+1)^n-(X^n+1)$. از آنجا که $\deg(g)<n$، نتیجه می‌شود که $g=0 \in R[X]$ (ر.ك. [۱، فرع ۱، ص. ۱۳۱]، [۲، ص. ۴۰]). مطابق قضیهٔ ۳.۲ [(۳)⇐(۲)]، داریم $p=\mathrm{ch}(R)>0$ و $n=p^k$ که درآن k عدد صحیح مثبتی است. این با n-استثناء بودن R متناقض است. بنابراین حکم نخست برقرار است. حکم نهایی‌هم برقرار است، زیرا هردوهیأت متناهی که اعداد اصلی آنها مساوی باشند، یکریخت‌اند (ر.ك. [۱، قضیه، ص. ۲۸۰]، [۲، صص. ۹۳-۹۲]).

از جدول آمده دربخش ۱ (که درایه‌های آن در بخشهای ۳ و ۴ تأیید خواهندشد) آشکاراست که فرع ۴.۲ بهترین امکان‌است. به‌عنوان نمونه، $\mathbf{F}_4$ یك ۵-استثناء (و $\mathbf{F}_8$ یك ۹-استثناء)است.

از برهان فرع ۴.۲ معلوم می‌شود که به‌ازای هرعدد صحیح مثبت $n(\geqslant 2)$، حوزه‌ای‌مانند R یك n-حوزه‌است اگر (وتنها اگر) به‌ازای‌هر $a \in R$، $(a+1)^n=a^n+1$. این، قضیهٔ ۱.۲ (ب) را تعمیم می‌دهد.

نتیجهٔ مستقیم و جالب دیگری از فرع ۴.۲، برهان جدیدی از این حکم است که هر n-حوزه دارای مشخصهٔ مثبت است.

جدول فوق حکم زیر را نیز درمورد «ندرت» به‌ما الهام می‌کند. درواقع، از این جدول ملاحظه می‌شود که به‌ازای مقادیر متوالی n (یعنی ۴ و ۵) $\mathbf{F}_4$ یك n-هیأت است؛ همین‌طور $\mathbf{F}_8$ (با $n=8, 9$)؛ و $\mathrm{ch}(\mathbf{F}_4)=2=\mathrm{ch}(\mathbf{F}_8)$.

قضیهٔ ۵.۲. فرض‌کنیم $n(\geqslant 2)$ عدد صحیح مثبتی و R یك n-حوزه باشد. دراین صورت شرایط زیر معادل‌اند:

(۱) R یك $(n+1)$-حوزه است؛

(۲) R هیأتی متناهی است، $\mathrm{ch}(R)=2$، و به‌ازای هر $a \in R$، $a^n=a$.

به‌علاوه، درصورتی که این شرایط برقرار باشند، عدد اصلی R حداکثر n است.

برهان. به‌ازای $a \in R$،

$$(a+1)^{n+1}=(a+1)^n(a+1)=(a^n+1)(a+1)$$
$$=a^{n+1}+a^n+a+1.$$

(۲) ⇐ (۱): (۱) را مفروض می‌گیریم. بنابراین، به‌ازای $a \in R$، $a^{n+1}+1=a^{n+1}+a^n+a+1$. لذا به‌ازای هر $a \in R$، $a^n+a=0$. با انتخاب $a=1$، آشکار است که $\mathrm{ch}(R)=2$. بنابراین، به‌ازای هر $a \in R$، $a^n=a$. بالاخره، R متناهی (و لذا هیأتی) با عدد اصلی‌حداکثر n است، زیرا حداکثر دارای n ریشه درهیأت خارج‌قسمتی R است.

(۱) ⇐ (۲): (۲) را مفروض می‌گیریم. به‌موجب قضیهٔ ۱.۲ (ب)، کافی است نشان دهیم که به ازای هر $a \in R$، $(a+-1)^{n+1}=a^{n+1}+-1$. با استفاده از معادله‌ای‌که فوقاً ارائه شد، این معادل است با اثبات $a^n+a=0$. ولی همین مستقیماً از (۲) نتیجه می‌شود.

فرع ۶.۲. با یکی‌گرفتن n-حوزه‌های یکریخت، $\mathbf{F}_2$ تنها حوزه‌ای است که به‌ازای سه مقدار متوالی n یك n-حوزه است.

برهان. همان‌گونه‌که درقضیهٔ ۱.۲ (پ) گفته‌شد، $\mathbf{F}_2$ به‌ازای هر $n(\geqslant 2)$ یك n-حوزه است. برعکس، هرگاه R به‌ازای هر i، $i \in \{n, n+1, n+2\}$، یك i-حوزه باشد، آنگاه ازقضیهٔ ۵.۲ معلوم می‌شود که به‌ازای هر $a \in R$، $a^n=a=a^{n+1}$. بنابراین، هرگاه $0 \neq a \in R$، با حذف a^n نتیجه می‌شود $a=1$. پس $R=\{0, 1\} \cong \mathbf{F}_2$.

۳. استثنائات وافرند

به‌موجب‌قضیهٔ ۱.۲ (ت)، هرهیأت متناهی $\mathbf{F}_m$، که درآن $m \geqslant 3$، به‌ازای تعدادی نامتناهی ازمقادیر $n(\geqslant 2)$، یك n-هیأت است. حال نشان خواهیم دادکه $\mathbf{F}_m$ به‌ازای تعدادی نامتناهی از این nها واقعاً یك n-استثناء است. نظر به‌فرع ۶.۲، این رفتار «بالاترین» چیزی است، که می‌توان به‌آن امید داشت.

قضیهٔ ۱.۳. فرض‌کنیم F هیأتی متناهی، یکریخت با $\mathbf{F}_m$، با فرض $m \geqslant 3$، باشد. دراین صورت F به‌ازای تعدادی نامتناهی از مقادیر n یك n-استثناء است، بالاخص به‌ازای nهایی که توان صحیح دلخواهی از $2m-1$ اند.

برهان. با استقراء نسبت به k، به‌سهولت ثابت می‌شود که هرگاه R یك n-استثناء باشد آنگاه به‌ازای هرعدد صحیح مثبت k، R یك n^k-استثناء‌است. بنابراین، تنها باقی‌می‌ماند اثبات اینکه F یك $(2m-1)$-استثناء است. اینك $p=\mathrm{ch}(F)>0$ و به ازای عدد صحیح مثبتی مانند s، $m=p^s$ (ر.ك. [۲، ص. ۹۲]). بنابراین، $2m-1$ به‌صورت p^t نیست؛ زیرا در این صورت $1=2p^s-p^t$ بر p قابل‌قسمت است و این یك‌تناقض‌است. پس فقط باقی‌می‌ماند اثبات‌اینکه F یك $(2m-1)$-هیأت است. برای

اتمام برهان، به‌وضوح کافی است که نشان دهیم به‌ازای هر $\alpha \in F$، $\alpha^{2m-1}=\alpha$. اما بر اساس ساختار هیأتهای متناهی، $\alpha^m=\alpha$ (ر.ك. [۲، ص. ۹۲]) ؛ بنابراین $\alpha^{2m-1}=\alpha^m\alpha^m\alpha^{-1}=\alpha\alpha\alpha^{-1}=\alpha$.

از قضیهٔ ۱.۳ نتیجه می‌شود که هرگاه p یك عدد اول فرد و t و k اعداد صحیح مثبتی باشند و $n=(2p^t-1)^k$، آنگاه یك n-استثناء، یعنی $\mathbf{F}_p$، وجود دارد. معلوم نیست که آیا، به‌ازای هر $n(\geqslant 3)$ فرد، یك n-استثناء موجود است.

نتیجهٔ آتی به‌ما کمك می‌کند که درستی برخی از درایه‌های ارائه شده درجدول بخش ۱ را تحقیق کنیم.

قضیهٔ ۲.۳. اگر R هم یك k-حوزه و هم یك t-حوزه باشد، آنگاه R یك kt-حوزه است.

برهان. به‌ازای هر $a \in R$،

$$(a+1)^{kt}=((a+1)^k)^t=(a^k+1)^t$$
$$=(a^k)^t+1=a^{kt}+1.$$

به‌زودی به‌تحقیق در درایه‌های جدول ارائه‌شده در بخش ۱ خواهیم پرداخت. با تنظیم مطالب فوق (مخصوصاً قضیهٔ ۱.۲ (پ)، (ت)؛ قضیهٔ ۵.۲؛ و قضیهٔ ۱.۳)، می‌توان تحقیق کرد که $\mathbf{F}_m$های عرضه شده احتمالاً جز به‌ازای زوج $(n,m)=(7,3)$، n-هیأت هستند. (توجه کنید که قضیهٔ ۲.۳ حضور زوج $(n,m)=(10,4)$ را با مفروض گرفتن زوجهای «پیشین» $(2,4)$ و $(5,4)$ توضیح می‌دهد. این قضیه همچنین تعیین زوجهایی مانند $(6125,4)$ را که خارج ازمحدودهٔ جدول‌اند ممکن می‌سازد.) و اما برای زوج $(7,3)$ کافی است نشان دهیم که به ازای هر $\alpha \in \mathbf{F}_3$، $\alpha^7=\alpha$. چون $\alpha^3=\alpha$، می‌توان محاسبه‌ای نظیر آنچه که در برهان قضیهٔ ۱.۳ آمد، انجام داد: $\alpha^7=\alpha^3\alpha^3\alpha=\alpha\alpha\alpha=\alpha^3=\alpha$. این تحلیل نه‌تنها درج هریك از درایه‌های مذکور را درجدول بخش ۱ توجیه می‌کند، بلکه آن را به‌سادگی تعمیم می‌دهد.

قضیهٔ ۱.۳ (مکرر). اگر $F \cong \mathbf{F}_m$ که در آن $m \geqslant 3$ و $n=m^2-m+1$، آنگاه F به‌ازای هرعدد صحیح مثبت k یك n^k-استثناء است.

۴. ساختن جدول

هم‌اینك دیدیم که چگونه نتایج حاصل در بخشهای ۲ و ۳ به تأیید درایه‌های جدول بخش ۱ کمك می‌کنند. ولی‌چرا درایه‌های دیگری موجود نیستند؟ توضیحی اصولی دراین‌مورد، مبتنی بر احکامی است که n-استثناءها را محدود می‌کنند. اینك دوقضیه از این‌قبیل را در مورد ساختن جدول ارائه می‌دهیم، وسپس نشان می‌دهیم که جدول (به‌ازای $2 \leqslant n \leqslant 10$) کامل است.

قضیهٔ ۱.۴. فرض‌کنیم R یك n-حوزه با مشخصهٔ p باشد. نیز فرض کنیم به‌ازای اعداد صحیح و مثبتی مانند m و k، $n=p^m k$ به‌طوری که $k \geqslant 2$ و $p+k$. دراین صورت، R هیأتی متناهی با عدد اصلی کوچکتر از k است.

برهان. به‌ازای هر $a \in R$،

$$(a^{p^m}+1)^k=((a+1)^{p^m})^k=(a+1)^n=a^n+1$$
$$=(a^{p^m})^k+1.$$

بنابراین، هر عضو $S=\{a^{p^m}: a \in R\}$ ریشه‌ای از چندجملهٔ $g=(X+1)^k-(X^k+1)$ است. توجه می‌کنیم که به‌موجب قضیهٔ ۳.۲، $g \neq 0$. لذا $1 \leqslant \deg(g) < k$. نتیجه می‌شود که عدد اصلی S حداکثر $k-1$ است. اما عدد اصلی S با عدد اصلی R مساوی است، زیرا از قضیهٔ ۱.۲ (ت) به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت که تابع $R \to S$، $a \mapsto a^{p^m}$ یك به‌یك است. فقط باقی می‌ماند تذکر اینکه R، به‌عنوان یك‌حوزهٔ متناهی، هیأت است.

قضیهٔ ۲.۴. فرض‌کنیم F یك n-استثناء با مشخصهٔ $p(\geqslant 3)$ باشد. نیز فرض کنیم k مرتبهٔ ۲ در گروه ضربی $F^*=F\setminus\{0\}$ باشد. دراین صورت $p \equiv n \equiv 1 \pmod k$.

برهان. به‌موجب فرع ۴.۲، F متناهی است. بنابراین k متناهی است و عدد اصلی F^* را عاد می‌کند (ر.ك. [۱، قضیهٔ ۱، ص. ۹۶]).

به‌موجب فرض، به ازای هر $a \in F$، $(a+1)^n=a^n+1$. انتخاب $a=1$ به $2^n=2$ منجرمی‌شود؛ یعنی، در F^*، $2^{n-1}=1$. بنا به‌نظریهٔ مقدماتی گروهها، $k|(n-1)$ (ر.ك. [۱، قضیهٔ ۲، ص. ۹۶])؛ یعنی $n \equiv 1 \pmod k$.

کافی‌است ثابت کنیم $k|(p-n)$؛ یعنی، کافی‌است با استفاده از نظریهٔ مقدماتی گروهها ثابت کنیم در F^*، $2^p=2^n$. برای‌رسیدن به‌این نتیجه، n را به‌صورت $qp+r$، بر طبق الگوریتم تقسیم، بیان می‌کنیم که در آن q و r اعداد صحیح نامنفی مناسبی هستند. دراین‌صورت به‌ازای هر $a \in F$،

$$(a^q+1)^p a^r=(a^{qp}+1)a^r=a^{qp+r}+a^r=a^n+a^r.$$

انتخاب $a=1$ به

$$2^p=1^n+1^r=1^n+1=(1+1)^n=2^n$$

منجرمی‌شود.

خوانندهٔ دقیق متوجه خواهد شد که می‌توان قضیهٔ ۲.۴ را به‌هرهیأت متناهی «غیراستثنایی» F با مشخصهٔ $p(\geqslant 3)$ تعمیم‌داد، ولی این نکتهٔ اضافی درساختن جدول هیچ نقشی ندارد.

برای «ساختن» جدول عرضه شده در بخش ۱، خوانندهٔ شایق می‌تواند مودی ومستقیم اقدام کند (همان گونه که نگارنده در ابتداچنین کرد). ولی، تذکرات بخش۳، به‌موجب نظریه‌ای که بعداً فراهم آمد، نشان داد که به‌ازای هر n، $2 \leqslant n \leqslant 10$، هر حوزهٔ موجوددر فهرست، یك n-حوزه است. اینك حذف سایردرایه‌های محتمل جدول (به‌ازای $2 \leqslant n \leqslant 10$) باقی می‌ماند. ما این کار را با استعانت ازنظریهٔ فوق و با حداقل محاسبات انجام خواهیم داد. تحقیق دربسیاری از این موارد با استفاده از ترکیب فرع ۴.۲ و قضیهٔ ۲.۴ حاصل‌می‌شود. به‌عنوان نمونه، حالت $n=7$ را درنظر بگیرید: به‌موجب ۴.۲ تنها باید $\mathbf{F}_5$ را حذف کنیم. برای‌این‌منظور قضیهٔ ۲.۴ را به‌کار می‌گیریم. نکته این است که ثابت کنیم k، مرتبهٔ ۲ در $(\mathbf{F}_5)^*$، در $5 \equiv 7 \equiv 1 \pmod k$ صدق نمی‌کند.

چون عدد اصلی $(\mathbf{F}_5)^*$ چهار است، برطبق نظریهٔ مقدماتی گروهها، $k|4$. ولی $k \neq 1, 2$، زیرا در $\mathbf{F}_5$، $1 \neq 2, 4$. بنابراین $k=4$ و همنهشتیهای مورد بحث برقرار نیستند. به‌طریق مشابه، فرع ۴.۲ و قضیهٔ ۲.۴ را برای بررسی حالتهای $n=3, 4, 5, 8$ می‌توان ترکیب کرد.

برای $n=2$، بهترین کار اتخاذ روش مستقیم است. هرگاه به‌ازای هر $a \in R$، $(a+1)^2 = a^2+1$ آنگاه قضیهٔ دوجمله‌ای به $2a=0$ منجر می‌شود، بنابراین $\mathrm{ch}(R)=2$.

به‌قضیهٔ ۵.۲ برای اثبات اینکه $\mathbf{F}_4$ یك ۹-حوزه نیست نیاز داریم: باید توجه‌داشت که به‌ازای‌هر $a \in \mathbf{F}_4 \setminus \{0,1\}$، $a^8 \neq a$. قضیهٔ ۱.۴ تضمین می‌کند که هیچ‌یك از $\mathbf{F}_3$ و $\mathbf{F}_4$، ۶-حوزه‌نیست. خوانندهٔ شایق به‌سهولت تحقیق در سایر موارد را به انجام خواهد رساند. شاید جالبترین حالت باقیمانده، $n=10$ باشد: به‌موجب فرع ۴.۲، حذف $\mathbf{F}_3$، $\mathbf{F}_5$، $\mathbf{F}_7$، $\mathbf{F}_8$، و $\mathbf{F}_9$ باقی‌می‌ماند. برای همهٔ این هیأتها بجز $\mathbf{F}_7$ و $\mathbf{F}_8$، هریك از دوقضیهٔ ۵.۲ و قضیهٔ ۲.۴ کافی است. (به‌علاوه، قضیهٔ ۱.۴ هیأتهای $\mathbf{F}_5$ و $\mathbf{F}_8$ را، و فرع ۶.۲ هیأت $\mathbf{F}_8$ را حذف‌می‌کند.) $\mathbf{F}_7$ چگونه حذف می‌شود؟ چون‌به‌ازای‌هر $\alpha \in \mathbf{F}_7$، $\alpha^7=\alpha$، داریم $\alpha^{10}=\alpha^4$، و لذا کافی‌است $a \in \mathbf{F}_7$ را چنان بیابیم که $(a+1)^4 \neq a^4+1$. در واقع هر $a \in \mathbf{F}_7 \setminus \{0,1\}$ صدق‌می‌کند. به‌عنوان مثال، می‌توان $a=2$ را انتخاب کرد زیرا $81 \not\equiv 17 \pmod 7$.

جدول ساخته شده است!

تبصرهٔ ۳.۴. خوانندهٔ شایق برای‌فهرست‌کردن n-حوزه‌ها به‌ازای $n=11, 12, \ldots$ قاعدتاً مشکل‌چندانی در به‌کارگیری نظریهٔ این مقاله نخواهدداشت. درخاتمه پیشنهاد می‌کنیم خواننده بدون‌توسل به‌فرع ۴.۲ و قضیهٔ ۲.۴ به‌روش فوق، سعی‌کند دریابدکه چگونه تفحصی مورد‌دی برای ۷-استثناءها به $\mathbf{F}_3$ و $\mathbf{F}_4$ منجر می‌شود.

مراجع

1. L. Childs, *A Concrete Introduction to Higher Algebra*, Springer- Verlag, New York/ Heidelberg/ Berlin, 1979.
2. D. E. Dobbs and R. Hanks, *A Modern Course on the Theory of Equations*, Polygonal Publ. House, Passaic, NJ, 1980.

****

• David E. Dobbs, "Fields with the simple binomial theorem," *Mathematics Magazine*, (1) **62** (1989) 52-57.

★ دیوید دابز، دانشگاه تنسی آمریکا

برخی از قاعده‌های نگارش متنهای ریاضی

نشرریاضی فارسی آمیخته‌ای است از کلمه‌ها و جمله‌های فارسی با نمادهای خاص ریاضی و حروف لاتینی و عباراتی متشکل از این حروف و نمادها. این در آمیختگی، که گریزی هم از آن نیست، منشأ دشواریهای فراوانی است که نویسندگان و مترجمان متنهای ریاضی دائماً با آنها درگیرند. منظور از متن ریاضی، هر متنی است که این گونه نمادها و عبارتها در آن به کار روند، و شامل خیلی از متنهای مربوط به فیزیک و مهندسی و شیمی هم می‌شود. ریشهٔ این دشواریها در این است که عبارتها و نمادهای مزبور به طور کاملا طبیعی در دل خط فارسی قرار نمی‌گیرند. ناچار باید قراردادهایی وضع کرد و به کاربرد تا خواننده دچار بدفهمی نشود. به علاوه، در مواردی نظیر ترتیب جدول، طرز نوشتن اسم واحدهای فیزیکی در داخل متن، نحوهٔ نوشتن اعداد چند جزئی که برای شماره‌گذاری بخشها و زیربخشها به کار می‌روند، و... نیز باید قراردادهای مشخصی داشت و آنها را در سراسر متن به کاربرد.

آنچه در زیر می‌بینید، قراردادهایی است که گروههای ریاضی، فیزیک، و شیمی مرکز نشردانشگاهی برگزیده‌اند، و این گزینش مبتنی بر تجربیات دهسالهٔ این سه گروه درکار ویرایش و نیز تجربیات گذشتهٔ نویسندگان و مترجمان متنهای علمی بوده است. این مجموعهٔ قراردادها در شیوه‌نامه‌ای که مرکز نشردانشگاهی برای امور نشر در دست چاپ دارد، خواهد آمد. نشرریاضی از دریافت هرگونه نقد و نظر دربارهٔ این قراردادها استقبال می‌کند.

۱. هرگاه یك رابطهٔ ریاضی به صورت عبارت فرمولی بیان شده باشد، فعل عبارت در فرمول مستتر است و به مقتضای مفهوم عبارت صرف می‌شود. ازاین‌رو در نوشتن فرمول نیازی به‌آوردن فعل نیست. مثلا

(یك) می‌نویسیم: «اگر $x=۲$، آنگاه $y<۴$» ومی‌خوانیم: «اگر x مساوی با ۲ باشد، آنگاه y کوچکتر از ۴ است.»

(دو) می‌نویسیم: «به‌ازای هر ϵ که $\epsilon>۰$، ...» ومی‌خوانیم: «به‌ازای هر ϵ، که ϵ بزرگتر از صفر باشد، ...»

تبصره: در مواردی نظیر مثال (دو) گاهی برای رعایت اختصار چنین نوشته می‌شود: «به ازای هر $\epsilon>۰$، ...» و به‌همان صورت خوانده می‌شود.

۲. هرگاه چند حرف یا عبارت فرمولی در یك سطر مستقل (سطری که داخل متن فارسی نیست) به‌دنبال هم بیایند، دو حالت درنظر می‌گیریم.

الف ـ درصورتی که هیچ کلمهٔ فارسی (حتی و، یا، الف و ب ونظایراینها) میان آنها نباشد، هم ترتیب لاتینی و هم ترتیب فارسی مجاز است و در صورت لزوم، علایم سجاوندی لاتینی یا فارسی (برحسب مورد) به‌کار می‌روند. مثلا

(یك)... داریم

$$E(s)=\frac{۲n-۹}{۳},\ var(s)=\frac{۱۶n-۲۹}{۹}.$$

(دو)... داریم

$$E(s)=\frac{۲n-۹}{۳},\ var(s)=\frac{۱۶n-۹}{۹}.$$

(سه)... دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$A_۱, A_۲, A_۳, \dots, A_n.$$

(چهار)... دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$A_۱، A_۲، A_۳، \dots، A_n.$$

تبصره: درصورتی که علایم سجاوندی به‌کار نرفته باشند، فرض بر این است که ترتیب عبارات، ازچپ به‌راست است.

ب ـ درصورتی که کلمهٔ فارسی (حتی و، یا، الف و ب و نظایر اینها) میان عبارات آمده‌باشد حتماً ترتیب فارسی رعایت می‌شود و درصورت لزوم، علایم سجاوندی فارسی به‌کار می‌روند. مثلا

(یك) «مقادیر زیر را بیابید

(الف) $g(-۴)$؛ (ب) $g(۱/۲)$؛ (پ) $g(x^۲)$.»

(دو) «... داریم

$۴x=۲$ و یا $x=۱$.»

که در مثال بالا، عبارت اول عبارت سمت راست است.

۳. وقتی رشته‌ای از حروف یاعبارات فرمولی درداخل متن

فارسی می‌آید، ترتیب فارسی رعایت می‌شود و برای تفکیک آنها از ویرگول فارسی استفاده می‌کنیم. مثلا

(یك) «... و توجه کنید که این فرمول به‌ازای A_1، A_2، A_3، A_4، و A_5 برقرار است.»

تبصرهٔ ۱: درمواردی نظیر مثال (یك)، رشتهٔ حروف به‌شکل زیر نیز ممکن‌است نوشته شود

«...و توجه کنید که‌این‌فرمول به‌ازای A_i، $i=1, 2, 3, 4, 5$ برقرار است.»

(دو) «...که در این‌رابطه، $n=2$، $h=2/3$، و $l=27$.»

تبصرهٔ ۲: هرگاه رشتهٔ حروف مجموعاً یك عنصر ریاضی را تشکیل دهند، ترتیب اصلی آنها در داخل متن فارسی محفوظ می‌ماند. مثلا

«... $\{a, b, c\}$ زیر مجموعه‌ای از $\{a, b, c, d\}$ است.»

۴. هرگاه فرمولی در سطر مستقل آمده باشد وسطر قبل از آن به یکی از عبارات «داریم»، «به صورت زیر است»، «به دست می‌آوریم»، «بنابراین»، «ودرنتیجه»، «عبارت است»، «ازاین‌رو»، و«لذا» و نظایر اینها ختم شده‌باشد، در پایان این‌عبارت هیچ‌نوع علامت سجاوندی نمی‌گذاریم مگر در موارد بسیار استثنایی که استفاده از ویرگول یا دونقطه (:) برای رفع ابهام کاملا ضروری باشد.

۵. هرگاه چندحکم شرطی ریاضی درمتن‌لاتینی به‌صورت‌یك دستگاه تلخیص‌شده‌باشند، درترجمه کلمات شرط‌را حذف می‌کنیم و علایم سجاوندی نیز به‌کار نمی‌بریم. مثلا اگر در متن انگلیسی داشته‌باشیم

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{if } x\leqslant c,\\ ax+b & \text{if } x>c.\end{cases}$$

آن‌را به‌صورت زیر ترجمه می‌کنیم

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & x\leqslant c\\ ax+b & x>c\end{cases}$$

و می‌خوانیم: «$f(x)$ برابر است با $\sin x$ اگر x نابیشتر از c باشد و برابر است با $ax+b$ اگر x بیشتر از c باشد.»

۶. هرگاه یك حکم شرطی در یك سطر مستقل آمده باشد، چنانچه ابهامی پیش نیاید، برای رعایت اختصار عبارت مربوط به‌شرط‌را بدون کلمهٔ شرط و بدون علایم سجاوندی درسمت‌راست عبارت اول می‌نویسیم. مثلا

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1} \qquad n\geqslant 2$$

۷. وقتی‌یك‌عنصر ریاضی به‌صورت یك‌حرف لاتینی یا یونانی نشان داده شده‌باشد ومقتضای جمله طوری باشدکه استفاده از یای نکره‌را درموردآن ایجاب‌کند، تلفظ آن‌حرف‌را درنظرمی‌گیریم و به‌دنبال حرف لاتینی، «ی» یا «یی»را برحسب مورد می‌آوریم. مثلا

می‌نویسیم «δ یی وجود دارد» و می‌خوانیم «دلتایی وجود دارد»

می‌نویسیم «zی وجود دارد» ومی‌خوانیم «زدی وجوددارد»

۸. هرگاه پس‌از یك عنصر ریاضی‌که با حرف یونانی یا لاتینی نشان داده شده‌است، کلمه‌ای فارسی بیایدکه ارتباطی به صورت مضاف و مضاف‌الیه یا صفت و موصوف‌با آن داشته‌باشد، به‌مقتضای تلفظ آن حرف یا آن‌عدد چنین عمل می‌کنیم:

الف- اگرتلفظ حرف‌یونانی یالاتینی یاعدد فارسی، درافزوده‌شدن به‌کلمهٔ بعد به «ی» ختم شود، به‌دنبال آن حرف «ی»را اضافه می‌کنیم. مثلا

(یك) می‌نویسیم: «δی مثبت» و می‌خوانیم: «دلتای مثبت».

(دو) می‌نویسیم: «با توجه به‌رابطهٔ (۳)ی این بخش و رابطهٔ (۲)ی بخش پیشین» و می‌خوانیم: «با توجه به‌رابطهٔ سهٔ این‌بخش و رابطهٔ دوی بخش پیشین».

ب - اگر تلفظ حرف یونانی یالاتینی‌یاعددفارسی، در افزوده‌شدن به‌کلمهٔ بعد، به‌کسره ختم‌شود، به‌دنبال آن علامت‌کسره اضافه نمی‌کنیم. مثلا

(سه) می‌نویسیم: «zمثبت وzمنفی»ومی‌خوانیم: «زدِمثبت‌و زدِ منفی».

۹. درمورد اعدادترتیبی، هرگاه اعداد اصلی باحروف‌لاتینی یا به‌صورت عددی نشان داده شوند، «ام» و «امین» را به‌صورت منفصل بعدازحرف یا عدد می‌آوریم. مثلا

می‌نویسیم: «nام»، «tامین»، «۲۵ام» و می‌خوانیم: «انوم»، «تیومین» و «بیست‌وپنجم».

۱۰. نماد کمیت را در داخل دو ویرگول در کنار نام آن می‌نویسیم. مثلا

(یك) «... انرژی، E، سرعت، V،...»

تبصره: می‌توان نمادکمیت‌را در داخل پرانتز نوشت، به‌شرط‌آنکه با توجه به‌موارد استفاده از پرانتز درمتن مورد نظر، اشکالی پیش نیاید. درصورتی‌که نمادکمیت جانشین یك‌مقدارعددی شده‌باشد، به‌دنبال نام آن (بدون علایم ویرگول یا پرانتز) می‌آید. مثلا

(دو) «... میله‌ای به‌طول l...»

۱۱. اگر درمتن لاتینی فرمول واجزاءآن به‌شکلی‌مانند شکل زیر معرفی شده‌باشند

$$q=k\Delta Q$$

where $q=$ heat flow rate

$\Delta Q=$ temperature difference

$k=$ coefficient

در ترجمه آنها را پشت سرهم و با استفاده از ویرگول به‌صورت زیر می‌نویسیم «...که درآن، q آهنگ جریان گرما، ΔQ اختلاف دما، و k ضریب است.»

تبصره: اگر بخواهیم توضیحات فوق دراولین‌نظر و به‌طور جداگانه مشخص باشند، آنها را به‌صورت زیر می‌نویسیم

«...که درآن

q، آهنگ جریان گرما

ΔQ، اختلاف دما و

k، ضریب

است.»

۱۲. هرگاه رابطهٔ تساوی با علامت «=» بیان‌شده‌باشد، خواه در داخل متن فارسی و خواه در سطر مستقل، حتی اگر عناصر دو طرف «=» فارسی باشند با آنها به‌صورت فرمول رفتار می‌کنیم و آنهارا ازچپ به‌راست می‌نویسیم و می‌خوانیم. مثلا

می‌نویسیم: «عرض × طول = مساحت»

و می‌خوانیم: «مساحت برابر است باطول ضرب درعرض»

تبصرهٔ۱: اگر در داخل متن فارسی این‌سیاق نوشتن احیاناً اشکالی ایجادکند، از «برابر است با» یا «مساوی است با» به‌جای علامت «=» استفاده می‌کنیم و از راست به‌چپ می‌نویسیم؛ ولی به‌هر حال، هرگاه «=» به‌کاررود، عنصری‌راکه می‌خواهیم اول‌خوانده شود درسمت چپ علامت می‌گذاریم.

تبصرهٔ۲: بدیهی‌است‌که درمورد روابط جهتدار ریاضی (مانند $<$، $>$ و $\subset$ ...) نیز این قاعده برقرار است.

۱۳. درموردذکرنام واحدهای فیزیکی دوحالت‌پیش‌می‌آید.

الف- درسطر مستقل

دراین‌حالت، همواره نام‌واحدبه‌صورت‌اختصاری و باحروف لاتینی درسمت راست فرمول نوشته می‌شود. مثلا $l = ۳۴\text{cm}$

ب - در داخل متن

دراین‌حالت، هم‌نام‌اختصاری به‌لاتینی‌و هم نام‌کامل به‌فارسی مجاز است.

(یك) اگر نام‌کامل باحروف فارسی نوشته شود، این نام در سمت چپ عدد یا عبارت می‌آید. مثلا

«... و طول مستطیل برابر با۲سانتیمتراست...»

«...که درآن، $x = ۳۰٫۴۸$ سانتیمتر...»

(دو) اگر نام اختصاری باحروف لاتینی نوشته شود، این‌نام درسمت راست عدد یا عبارت می‌آید. مثلا

«... و طول مستطیل برابر با۲cm است...»

«...که درآن، $x = ۳۰٫۴۸\text{cm}$...»

تبصره: اگر نام واحد به‌صورتهای کسری ازقبیل m/sec^2 و... باشد و بخواهیم در داخل متن نام کامل آن‌را با حروف فارسی بنویسیم، به‌صورت متر بر مجذور ثانیه و... می‌نویسیم.

۱۴. هرگاه‌برای شماره گذاری بخشها، شکلها، جدولها،و... به‌شماره‌های چندجزئی نیاز باشد، این‌شماره‌ها به‌ترتیب اجزاء از راست به‌چپ نوشته می‌شوند. مثلا در۲-۴-۳، اولین جزء شماره ۲، دومین‌جزء شماره ۴، و سومین‌جزء شماره ۳ است.

۱۵. شمارهٔ فرمولها در سمت راست گذاشته می‌شود.

۱۶. علامت ممیزاعشاری به‌صورت «ر» نوشته می‌شود. مثلا ۲٫۵ و ۰٫۳۰۳.

۱۷. علامت درصد به‌صورت ٪ در سمت چپ عدد می‌آید. مثلا ۵٪ و ۳٫۲٪.

۱۸. تاریخ تولد و وفات اشخاص از سمت راست به چپ نوشته می‌شود. مثلا کارل فریدریش گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵م).

۱۹. وقتی‌که‌قراراست اجزاء مطلب، تمرین، یامثال بااستفاده ازحروف متمایز وتقسیم‌بندی‌شوند، ترتیب‌حروف ابجد برترتیب حروف الفبای فارسی مرجح است.

۲۰. وقتی‌دو یا چندشکل دریك‌ردیف‌می‌آیند، ترتیب‌فارسی رعایت می‌شود. مثلا شکل (الف) شکل (ب) شکل (پ)

۲۱. درمورد جدولها، چنانچه درعناصر جدول یا سرستونها و سرسطرهای آن‌کلمه یا حرف فارسی وجود نداشته‌باشد، ترتیب لاتینی رعایت‌می‌شود (اولین‌ستون در منتهی‌الیه سمت‌چپ‌وآخرین ستون در منتهی‌الیه سمت راست). وچنانچه حرف یا کلمهٔ فارسی وجود داشته‌باشد، هر دوترتیب مجاز است ولی دریك‌کتاب خاص باید هماهنگی رعایت شود.

۲۲. کروشه و پرانتز جایی باز می‌شوند که مطلب شروع شده‌باشد و جایی بسته‌می‌شوندکه مطلب خاتمه‌یافته‌باشد. بنابراین، اگر مطلب با یك فرمول درسطرمستقل پایان‌یابد،کروشه یا پرانتز بسته حتماً باید درسمت راست بیاید. حال اگر در سطری کروشه یا پرانتز برای‌جملهٔ‌فارسی، درسمت راست، بازشده و دنبالهٔ مطلب درسطر بعد با یك فرمول ادامه یافته‌باشد، مطلب را مختصری تغییر می‌دهیم تا کروشه یا پرانتز بتواند در سمت چپ بسته‌شود. مثلا اگر بخواهیم مطلب زیر را داخل دوکروشه بگذاریم

«راهنمایی: فرض‌کنید: $x_i = \cos\theta_i$ واز اتحاد زیر استفاده‌کنید.

$$\cos n\theta = \cos((n+1)\theta - \theta) = \cos(n+1)\theta\cos\theta + \sin\theta\,(n+1)\theta\sin\theta».$$

آن‌را چنین تغییر می‌دهیم

[راهنمایی: فرض‌کنید $x_i = \cos\theta_i$ و از اتحاد

$$\cos n\theta = \cos((n+1)\theta - \theta) = \cos(n+1)\theta\cos\theta + \sin(n+1)\theta\sin\theta$$

استفاده‌کنید.]

۲۳. از دونقطه «:» عمدتاً وقتی استفاده می‌کنیم که عبارتی را حذف کرده‌باشیم. مثلا به‌جای‌اینکه بنویسیم «این‌معادله سه‌ریشه داردکه‌عبارت‌اند از ۱ —، ۰، و ۱.» می‌توانیم بنویسیم «این‌معادله سه ریشه دارد: ۱ —، ۰، و ۱.»

اصلاحِ حساب دیفرانسیل و انتگرال*

موری پراتر*
ترجمهٔ سیامک کاظمی

همه جا صحبت از اصلاحِ حساب دیفرانسیل و انتگرال است. دولت آمریکا میلیونها دلار به این کار اختصاص داده است. کنفرانسهایی در این باره برگزار شده که گزارشهایی انتشار داده‌اند و برخی از دانشگاهها هم شروع به اجرای برنامه‌های آزمایشی در این زمینه کرده‌اند. بیشتر ریاضیدانانی که با تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال سر و کار دارند، از مدتها قبل دریافته‌اند که تغییرات اساسی در شیوهٔ تدریس این درس چه مشکلات بزرگی خواهد داشت. در طی سالها، کنفرانسهایی دربارهٔ تدریس دروس ریاضی دبیرستان و سال اول دانشگاه تشکیل شده ولی تأثیر ناچیزی بر آنچه که عملا تدریس می‌شود داشته‌اند. اخیراً کنفرانسی در دانشگاه برکلی با حمایت بنیاد ملی علوم تشکیل شد که با دو توصیهٔ توخالی به پایان رسید: «توصیهٔ ۱: با توجه به نقش تکنولوژی در اصلاحِ حساب دیفرانسیل و انتگرال، حمایت از هر دو موردِ زیر و ترویج آنها ضرورت دارد (۱) تحقیق مستمر و جدی، (۲) تنوع و چند جنبگی». توصیهٔ دوم هم مشابه اولی بود. این حرفهای کلی و تکراری کمکی به رفع مشکل نمی‌کند. یکی از مهمترین مسائل در تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال، نیاز به تهیهٔ مجموعه‌ای از کتابهای درسی جدید است که در مقیاس وسیعی در سراسر کشور مورد استفاده قرار گیرند. در این کتابهای جدید باید شیوه‌ای که دانشجو برای گذراندن این درس به کار می‌برد، در نظر گرفته شود.

دانشجو حساب دیفرانسیل و انتگرال را چگونه می‌گذراند؟

اکثریت قاطع دانشجویانی که درس حساب دیفرانسیل و انتگرال را می‌گیرند، رشتهٔ اصلیشان ریاضی نیست. من پس از سالها تدریس حسابان[1] به این نتیجه رسیده‌ام که دانشجوی متوسط این درس، آن را طبق این قاعده یاد می‌گیرد: سر کلاس به درس گوش می‌دهد، به آنچه مدرس می‌گوید توجه می‌کند و شاید یادداشت هم بردارد. در پایان ساعت درس، این تکلیف به او داده می‌شود که چند صفحه‌ای از کتاب را بخواند و تعدادی از مسائل آخر بخش را حل کند. دانشجو شب می‌نشیند به انجام دادن تکلیف ریاضی. ولی چکار می‌کند؟ بلافاصله به سراغ مسأله‌ها در انتهای بخش می‌رود و سعی می‌کند اولی را حل کند. براساس آنچه در درس شنیده و نیز یادداشتهایش، به حل کردن مسأله می‌پردازد. سپس به سراغ دومی می‌رود و شاید آن را هم بتواند حل کند. ولی از حل سومی عاجز می‌ماند. در اینجا، صفحاتی را که قرار بوده مطالعه کند ورق می‌زند تا به مثالی برسد که با مسأله یکی باشد و فقط عددهایش فرق داشته باشد، و به این ترتیب، از پس مسأله برمی‌آید. این کار ادامه پیدا می‌کند ولی بالاخره به مسأله‌ای می‌رسد که واقعاً او را به ستوه می‌آورد. در اینجا چند راه در پیش پای او قرار دارد: (الف) می‌تواند از هم اطاق خود یا دانشجوی دیگری راه‌حل مسأله را بپرسد؛ (ب) چون بیشتر کتابهای مهم حساب دیفرانسیل و انتگرال، حل‌المسائل دارند می‌تواند نگاهی به آن بیاندازد؛ (پ) می‌تواند تا جلسهٔ بعدی کلاس منتظر بماند و از مدرس یا معلم تمرین خود راه حل را بپرسد؛ (ت) به *عنوان آخرین راه چاره*، می‌تواند مطالب کتاب را مطالعه کند و بکوشد که براساس اصول شرح داده شده، مسأله را حل کند.

آیا نمی‌توان کاری کرد که شیوهٔ مطالعهٔ دانشجو در این درس تغییر کند به طوری که اول در محتوای موضوع تأمل کند و بعداً مسأله حل کند؟ بعضی وقتها اگر به دانشجو گفته شود که باید تعریفها و قضایا را بداند، وادار می‌شود آنها را بخواند (به خصوص آنهایی را که به صورت رنگی چاپ شده‌اند.) ولی با این سیستمِ معمول، که کلاسِ درسی هست که مدرس در آن تدریس می‌کند و کلاسِ تمرینی که معلم

---

۱. در ترجمهٔ مقاله گاه به جای «حساب دیفرانسیل و انتگرال»، واژهٔ کوتاهتر «حسابان» آمده است.ـ م.

تمرین آن را اداره می کند، من هیچ تغییری را محتمل نمی‌دانم. واقعیت این است که بسیاری از دانشجویان می بینند که می توانند به کلی از خیر کلاسِ درس بگذرند و فقط به کلاسهای تمرین بروند. مسلماً خیلی از مدرسان حساب دیفرانسیل و انتگرال دیده‌اند که در طول ترم، توجه به کلاسهای درس به طور نمایی کاهش می یابد.

یك راه برای شکستن این دور باطل این است که در بخشهایی از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال فقط به بحث در نظریه پرداخته شود و مسائلی در انتهای آنها نیاید. در این صورت می توان از دانشجو خواست که موضوع را فراگیرد و بعداً امتحان بدهد. من هیچ وقت جرأت نکرده‌ام این کار را در کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال خودم بکنم، چون هر کتابِ درسی اگر تفاوتی اساسی با بیشتر کتابهای رقیب داشته باشد، محکوم به شکست است. مثلا کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوجلدی کورانت هیچ وقت مورد اقبال عمومی قرار نگرفت زیرا، گذشته از سایر دلایل، انتگرالگیری در این کتاب قبل از مشتقگیری آمده بود. بعضیها عقیده دارند که از لحاظ آموزشی آسانتر و صحیحتر است که انتگرالگیری اول بیاید. ولی چنین عقایدی اهمیت ندارد زیرا اگر مؤلف بخواهد کتابش از استقبال عمومی برخوردار باشد باید شبیه بقیهٔ کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال باشد، و بقیه، مشتقگیری را اول می آورند.

بزرگ شدن قطع و حجم کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال

پنجاه سال پیش، یك دانشجوی معمولی که از آمادگی کافی برخوردار بود برنامهٔ ریاضی خود را با یك درس یك ترمی در هندسهٔ تحلیلی شروع می کرد و سپس یك ترم حساب دیفرانسیل می گرفت و به دنبال آن، یك ترم معادلات دیفرانسیل. جالب است که به قطع و حجم کتابهای درسی در آن زمان توجه کنیم. یك کتاب هندسهٔ تحلیلی معمولی تقریباً ۱۵۰ صفحه داشت و قطع آن ۶ در ۹ اینچ بود. تعداد صفحات کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال بین ۲۵۰ و ۳۰۰ صفحه متغیر بود. در دههٔ ۱۹۳۰، گریفین[1] از کالج رید[2] اولین کسی، یا یکی از اولین کسانی، بود که کتابی مرکب از هندسهٔ تحلیلی و حساب دیفرانسیل و انتگرال نوشت. این کتاب کلا ۲۶۰ صفحه داشت و با انتشار آن، درس هندسهٔ تحلیلی و حساب دیفرانسیل و انتگرالِ سه ترمی تولد یافت؛ از آن زمان به بعد، این کتابهای سه ترمی‌زاد وولدِ بسیار کرده‌اند. قطع و حجم آنها هم خیلی بزرگتر شده است. مثلا کتاب جورج توماس که در ۱۹۵۱ انتشار یافت، ۵۹۰ صفحه دارد و قطع آن ۶ در ۹ اینچ است، ولی بیشتر کتابهای پر طرفدار امروز، ۱۲۰۰ یا حتی ۱۳۰۰ صفحه در قطع ۸ در ۱۰ اینچ دارند. به علاوه، این کتابها ضمیمه‌هایی مثل کتاب راهنما برای مدرس، حل‌المسائل، مسائل آزمون کامپیوتری برای استفادهٔ مدرس و نظایر اینها، به همراه دارند.

چه چیزی باعثِ این افزایش حجم شده است؟ یکی از توضیحاتی که در این باره داده می شود، به این احساس عمومی مربوط است که امروز دانشجویانی که وارد دانشگاه می شوند نسبت به دانشجویان سابق آمادگی کمتری دارند. به این دلیل، مؤلفان مثالهای خیلی بیشتری فراهم می کنند و همراه آنها نمودارهای بیشتر و توضیحات مفصلتری هم می آورند. این توضیح با شرحی که من دربارهٔ نحوهٔ استفادهٔ دانشجوی معمولی از کتاب حسابان دادم منطبق است. وجود تعدادِ خیلی بیشتری مثال باعث می شود که برای دانشجو، انجام دادن تکالیف بدون خواندن متن آسانتر باشد. این گونه کتابها محبوبیت پیدا می کنند.

ویژگی دیگر کتابهای درسی جدید، زیاد بودن تمرینهاست. بیشتر کتابهای جدید بیش از شش هزار مسأله (به اضافهٔ مجموعه‌هایی از تمرینهای مروری در انتهای هر فصل) دارند. چون مشکل است که در طول سه ترم بیش از ۹۰۰ یا ۱۰۰۰ مسأله را به عنوان تکالیف به دانشجو بدهیم، این تعداد مسأله فوق‌العاده زیاد است. بعضی از استادان دوست دارند تکلیفها را از سالی به سال دیگر تغییر بدهند ولی در چنین حالتی هم دو سه هزار مسأله مازاد بر احتیاج است. این موضوع تازگی ندارد. سالها پیش، بعضی از کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال در دو چاپ جداگانه منتشر می شدند که اختلاف آنها فقط در این بود که مسائلشان کاملا با هم فرق داشت. به هر حال، اگر تعداد تمرینها به نصف تقلیل یابد، کتابها را می توان بسیار کوچکتر کرد. در حال حاضر، رقابت بین نویسندگان کتابهای درسی به صورتی است که هر مؤلفی سعی می کند از مؤلفان قبلی جلو بزند و تمرینهای بیشتری بیاورد. در تبلیغات مربوط به این کتابها می بینیم که به زیادبودن مسائل افتخار می کنند.

دلیل دیگر افزایش حجمِ کتابها، ترس از رقابت در میان مؤلفان است. من مواردی را مشاهده کرده‌ام که کمیته‌های کتابهای درسی هنگامی که کتابی را بررسی می کنند، نگاه می کنند که ببینند چه مبحثی که به نظر کمیته مهم است از قلم افتاده (مثلا شعاع انحنا یا گشتاور لختی) و به این ترتیب کتابی که مباحث بیشتری را در بر دارد برنده می شود. مؤلف بالقوه این موضوع را (معمولا از ناشر) می آموزد که هرچه تعداد مباحث بیشتر، بهتر. مثلا من در جدیدترین ویرایش کتاب حسابانِ خودم حدود صد صفحه دربارهٔ معادلات دیفرانسیل اضافه کرده‌ام. گرچه عقیده ندارم که این مطلب باید در یك کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال بیاید، به من گفته شد که اگر آن را نیاورم، کتاب در بیشتر مؤسسات شانسی برای پذیرفته شدن نخواهد داشت. معادلات دیفرانسیل خود مستحق درس مستقلی است. در مورد قضایای گرین و استوکس و مباحث مربوط به آنها هم همین عقیده را دارم. شخصی که رشته‌اش ریاضی نیست، اگر معلوماتش از این مباحث قدری عمیقتر از آن باشد که در درس حسابانِ معمولی عرضه می شود می تواند این قضیه‌ها را به کار ببرد. این موضوعها را باید در حساب دیفرانسیل و انتگرالِ پیشرفته آموخت. ولی من مجبور شدم قضایای گرین و استوکس را هم بیاورم چون کتابم در معرض رقابت سایر کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال بود.

امروز ما کتابهایی در زمینهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم که تعداد مباحث آنها خیلی بیشتر از آن است که در سه ترم قابل عرضه کردن باشد. به علاوه، با توجه به برنامه‌های آموزشیِ آزمایشی که در

1. D. Griffin 2. Reed

آنها از کامپیوتر برای تدریس حسابان کمك گرفته می‌شود، احتمال دارد که کتابهای درسی از این هم بزرگتر شوند. به نظر من، ما باید حساب دیفرانسیل و انتگرال را به یك برنامهٔ سال اول و یك برنامهٔ جداگانهٔ سال دوم تفکیك کنیم. یکی از نتایجی که من امیدوارم این جنبش اصلاح‌طلبانه به بار آورد، انتخابِ دقیق مباحثی است که می‌توانیم انتظار داشته باشیم دانشجو در سال اول بیاموزد. چون بیشتر دانشجویان به بیشتر از یکسال مطالعه در حساب دیفرانسیل و انتگرال احتیاج ندارند موضوع درس را می‌توان طوری سازماندهی کرد که بیشتر مباحث اساسی در دو ترم اول بیاید. برنامهٔ سال دوم که شقوق مختلفی می‌تواند داشته باشد باید به دانشجویانی توصیه شود که مایل‌اند مطالعهٔ حسابان را ادامه دهند.

ناشر

بیشتر ریاضیدانان نمی‌دانند که نقش ناشر، هم در پذیرفته شدن و هم در *محتوای* کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال، چقدر مهم است. وقتی من اولین کتابم را در این زمینه در اوایل دههٔ ۱۹۶۰ با همکاری چارلز موری[1] نوشتم، انتشارات اَدیسن ـ وزلی[2]، اولین ناشرم، هیچ توجهی به محتوای کتاب نکرد. ولی این ناشر قدرت و امکانات زیادی برای فروش کتاب داشت و با توجه به تجربه‌ای که در مورد کتاب توماس کسب کرده بود می‌دانست چکار کند تا کتاب ما هم پذیرشِ دانشگاهی گسترده‌ای پیدا کند. به نظر من، عامل مهم در پذیرفته شدن کتاب به عنوان کتاب درسی در دانشگاهها، برقراری تماس با ناشری است که در رشتهٔ مورد نظر تشکیلات و فعالیت داشته باشد. به ندرت اتفاق می‌افتد که یك عضو هیأت علمی دانشکده چندین کتاب را به دقت مطالعه کرده و نتیجه گرفته باشد که یك کتاب خاص از همه مناسبتر است. بیشتر پذیرشها، نتیجهٔ ارتباطِ نزدیكِ شخصی بین نمایندهٔ ناشر و کسی است که قرار است مثلا در پاییز آینده حسابان را در دانشکده تدریس کند. مواردی پیش آمده که ناشرانی که افرادی در این رشته ندارند هزاران نسخه از کتاب را به صورت اهدایی برای استادان دانشگاهها فرستاده‌اند ولی کتاب فقط در معدودی از دانشگاهها پذیرفته شده و بیشتر نسخه‌های اهدایی هم سر از بازار کتابهای دست دوم درآورده‌اند. تجربهٔ شخصی من این است که اگر ناشر قدرت و امکانات زیادی برای فروش داشته باشد کتاب می‌تواند از موفقیت بسیار برخوردار شود و اگر ناشر چنین قدرتی نداشته باشد و تبلیغات خود را به یکی دو آگهی محدود کند، کتاب توفیقی به دست نخواهد آورد. چنین کتابهایی محکوم به فراموش شدن هستند.

بعضی وقتها، ویراستاران مراکز نشر هم ایده‌های خوبی در مورد کتابها می‌دهند. چند سال پیش، یکی از ویراستاران اَدیسن ـ وزلی این فکر را مطرح کرد که چند تا از کتابهای مرا به صورت دوزبانه چاپ کنند. این کتابها به اسپانیایی ترجمه شدند. در یك صفحه از کتاب متن اسپانیایی و در صفحهٔ مقابل آن، متن انگلیسی چاپ شد. این کتابها با جلد مقوایی و قیمت ارزان در سراسر آمریکای مرکزی و جنوبی به معرض فروش گذاشته شدند و هزاران نسخه از آنها فروخته شد. چند سال بعد، عده‌ای از دانشجویان فوق لیسانس اهل آفریقای جنوبی که برای مطالعه به برکلی آمده بودند، به من می‌گفتند که چقدر از فرصتی که من در اختیارشان گذاشته بودم تا ریاضی و انگلیسی را در یك زمان بیاموزند، سپاسگزارند! البته من مطلقاً نقشی در این کار نداشتم. این نقشه را یکی از ویراستاران اَدیسن ـ وزلی کشیده و به طور کامل اجرا کرده بود.

نظر ناشر در محتوای کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال هم اثر می‌گذارد. چند سال پیش دربارهٔ تجدیدنظر در کتاب حسابانِ مقدماتیم با یکی از ویراستاران اَدیسن ـ وزلی بحث می‌کردم. او پیشنهاد کرد بررسیی در همهٔ کتابهای پر طرفدار بکنیم تا ببینیم چه تغییراتی باید انجام داد. در آن وقت بود که من فهمیدم اگر بخواهم کتابم قابل رقابت باشد باید معادلات دیفرانسیل و چند مبحث دیگر را اضافه کنم. ولی از اینها گذشته، او اصرار کرد که ترتیب مطالب تغییر کند. مثلا می‌گفت که از بررسی پرطرفدارترین کتابها نتیجه گرفته است که مبحث توابع مثلثاتی باید جلوتر از جایی که من آورده بودم، بیاید. من مدتی در این باره فکر کردم و به این نتیجه رسیدم که هیچ دلیلِ درخورِ اعتنایی برای این تغییر وجود ندارد. ولی حس کردم که حتی اگر انجام دادن همهٔ تغییراتی که ناشر می‌خواهد کار زیادی ببرد، به هر حال زیانی نخواهد داشت. پس تسلیم شدم. ویراستار اَدیسن ـ وزلی دوازده توصیه از این نوع داشت. ولی من اشتباهی در یك بخش مقدماتی راجع به ارتباط احتمال با انتگرالگیری مرتکب شدم که هیچ یك از ویراستاران این ناشر متوجه آن نشد. هیچ یك از کتابهای رقیب چنین بخشی نداشت.

از دیدگاه ناشر، رنگ، چیزِ بسیار مهمی است. هیچ مؤلف بالقوه‌ای نمی‌تواند انتظار داشته باشد که کتابش در ردیف کتابهای عمدهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال قرار گیرد مگر اینکه به صورت چند رنگ چاپ شود (چند سال پیش، اَدیسن ـ وزلی کتابی در زمینهٔ حسابان انتشار داد که به صورت سیاه و سفید چاپ شده بود. این کتاب از نظرها محو شد و اثری از آن بر جای نماند.) جالب اینجاست که تاکنون هیچ کتابی که پیشرفته‌تر از حسابان باشد به صورت رنگی چاپ نشده است. برای دانشجوی مبتدی به وضوح مهم است که قضیه‌ها را به رنگ قرمز یا آبی ببیند ولی وقتی به سراغ درس بعدی رفت، چنین نیست.

البته رنگ قیمت را بالا می‌برد و تا آنجا که من می‌دانم، به ازای آن سود بیشتری هم حاصل نمی‌شود. به نظر من مؤلفانی که کتابهایشان به صورت رنگی چاپ می‌شود باید از ناشر بخواهند که کتاب را به صورت سیاه و سفید هم (البته با قیمت بسیار کمتری) به بازار عرضه کند. جالب خواهد بود که ببینیم دانشجویان کتاب رنگی را ترجیح می‌دهند یا کتاب سیاه و سفید با قیمت بسیار کمتر را.

کاربردها

بیشتر کاربردهایی که در کتابهای حسابان می‌آید، ساختگی است. صحبت از نردبانی است که به دیواری تکیه دارد و به طرف پایین می‌لغزد، یا شخصی که در عرض رودخانه‌ای با جریان یکنواخت پارو می‌زند، یا دراز شدن سایهٔ شخصی که قدم زنان از تیر چراغ برق خیابان

1. Morrey 2. Addison – Wesley

دور می‌شود، و نظایر اینها. به نظر من این موضوع مهم است که مسائلی که ارائه می‌کنیم از لحاظ دانشجویان قابل باور کردن یا دست کم مفید باشد. پیدا کردن چنین مسأله‌هایی دشوار است و تازه پس از آنکه به کتابهای درسی راه یافتند باز هم دشواریها پایان نمی‌یابد. مثلا آیا مؤلف در متن کتاب زمینه‌چینی لازم را کرده است که دانشجو بتواند ارتباط مسأله را با اصل مناسبی در حساب دیفرانسیل و انتگرال دریابد؟ به علاوه، معلمان تمرین هم مشکلاتی در مورد کاربردها دارند. تقریباً دوازده سال پیش در دانشگاه برکلی کلاسی برای معلمان تمرین دایر کردیم تا طرز ادارهٔ کلاسهای تمرین را به آنها بیاموزیم. این کلاس خیلی مفید از آب درآمد، مخصوصاً برای دانشجویان فوق لیسانس خارجی که تجربه‌ای در مورد نظام آموزشی دورهٔ لیسانس آمریکا نداشتند یا تجربهٔ اندکی داشتند. هر وقت که در این کلاس درس می‌دادم، از پیشینه آموزشی دانشجویان می‌پرسیدم. معلوم شد که بیش از ۵۰٪ از معلمان تمرین ما درسی دانشگاهی در زمینهٔ فیزیك نگذرانده‌اند! بنابراین، کل مسؤولیت تدریس کاربردها به دوش کادر دانشکده (که بسیاری از آنها هم زمانی معلمان تمرینی بوده‌اند که زمینهٔ کاربردی نداشته‌اند) و کتاب درسی می‌افتد. تا وقتی که شیوهٔ کار دانشجوی معمولی در این درس به همان صورتی باشد که قبلا گفتم، کتابها مثالهای توضیحی می‌آورند و دانشجویان آن مسائلی را حل می‌کنند که با این مثالها تطبیق کند. از تدریس کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال هیچ فایده‌ای حاصل نمی‌شود.

حساب دیفرانسیل و انتگرال، و کامپیوتر

در حال حاضر، استفاده از کامپیوتر به صورت ابزار کمکی در کلاسهای بزرگِ حسابان خیلی گران تمام می‌شود. ما در دانشگاه برکلی برنامه‌ای آموزشی داریم که در آن برخی از دانشجویان به کامپیوتر دسترسی دارند. گسترش دادن این برنامه به طوری که هزاران دانشجوی برنامهٔ معمولی ما را در بر بگیرد با امکانات موجود، ممکن نیست. به علاوه، هنوز باید دید که آیا استفاده از کامپیوتر باعث روشن شدن مفاهیم اساسی حسابان می‌شود یا فهم موضوعات را برای دانشجو عملا دشوارتر می‌کند. ما نیاز به آزمایشهای زیادی با کتابهای درسی جدید و امکانات نرم‌افزاریِ بیشتر داریم. من نکته‌ای را به یاد می‌آورم که پیترلکس دربارهٔ کتابِ حسابانِ خودش گفته و مضمونش این است: «می‌دانستم که دارم کتابی می‌نویسم که پر طرفدار نخواهد بود، اما نمی‌دانستم که این قدر در این کار موفق خواهم شد.»

نتیجه‌ها

سلسله مطالبی که در کتابهای حسابان می‌آید، غول‌آسا زیاد می‌شود و شواهدی قوی وجود دارد که ما به سوی کتابهای ۱۵۰۰ صفحه‌ای پیش می‌رویم. اگر تعدادی کافی از ریاضیدانان علاقه‌مند باشند انرژی خود را به نوشتن کتابهایی دو ترمی اختصاص دهند که مباحث استانداردی را که یك کمیتهٔ ملی تعیین می‌کند دربر داشته باشند و اگر ناشران عمده‌ای پیدا شوند که توجه خاصی به کتابهای حسابان داشته باشند و بخواهند کیفیت این کتابها را ارتقا دهند، شاید بتوانیم روند گرایش به سوی کتابهای عظیم‌الجثه را معکوس کنیم.

خنثی کردن تأثیر ناشران بسیار دشوار است و اصلا نمی‌دانم که چگونه می‌شود این کار را کرد. بازار حسابان گرم و گسترده است و شرکتهای تجاریی که در این زمینه فعال‌اند به کارشان ادامه می‌دهند تا از هر طریق ممکن سودی به دست آورند.

یك کار مفید این است که گذراندن دست کم یك درس در فیزیك جزو شرایط لازم برای معلمان تمرین منظور شود تا صلاحیت بیشتری در مباحثِ شاملِ کاربرد داشته باشند. مثلا یکی از زیباترین کاربردهای انتگرالگیری، محاسبهٔ مساحت و حجم اشیائی است که شکل نامنظم دارند. با این حال، این مبحث یك «کاربرد» به حساب نمی‌آید زیرا دانشجویان نمی‌توانند خود را قانع کنند که محاسبهٔ چنین مساحت یا حجمی هیچ وقت لازم باشد. پیدا کردن کاربردهایی واقعی از حسابان که دانشجویان بتوانند اهمیت آنها را تشخیص دهند، کار دشواری است.

و بالاخره، چگونه شیوهٔ مطالعهٔ دانشجوی متوسط را در درس حسابان تغییر دهیم؟ آیا باید در این جهت تلاش کنیم؟ سازماندهی بیشتر کتابهای درسی در جهت خلاف چنین تغییراتی است. اگر نظام جدیدی پدید نیاوریم در قالبِ نظام فعلی محبوس خواهیم ماند.

****

• Murray H. Protter, "Calculus reform," *The Mathematical Intelligencer*, (4) 12 (1990)6-9.

★ موری پراتر، دانشگاه برکلی آمریکا

اخبار و گزارشها

پنجمین سمینار آنالیز

پنجمین سمینار آنالیز ریاضی کشور در روزهای هفدهم و هجدهم آبانماه سال جاری در دانشگاه شیراز برگزار شد. در این سمینار حدوداً ۱۴۰ نفر از متخصصان این رشته شرکت داشتند و ۲۱ سخنرانی ترتیب داده شده بود که اکثراً برگزار گردید.

تعدادِ اعضای هیأت علمی که در سمینار آنالیز شرکت کردند، بیشتر از سمینار جبر بود که در روزهای بیستم و بیست و یکم شهریورماه سال جاری در دانشگاه شهیدبهشتی تهران برگزار شد. شاید بتوان گفت که یکی از علل این موضوع، تاریخ برگزاری سمینار جبر بوده است. معمولا در اواخر تابستان، ثبت نام دانشجویان در جریان است و در بیشتر دانشگاهها، استادان به امر ثبت نام دانشجویان کمك می کنند. عده‌ای از اعضای هیأت علمی هم در این موقع از سال در کنفرانسهای خارج از کشور شرکت می کنند و در ایران نیستند. بنابراین، نمی توانند در سمینارهای آخر تابستانِ داخل کشور شرکت کنند. در سمینار جبر و آنالیزی که در دانشگاه تبریز برگزار شد و زمان برگزاری آن هم آخر تابستان بود، تعداد شرکت‌کنندگان اندك بود. بنابراین، اگر زمان تشکیل سمینارهای جبر از آخر تابستان به زمان دیگری، مثلا پانزدهم مهرماه، تغییر یابد، می‌توان انتظار داشت که این سمینارها از دستاوردهای تحقیقاتی عدهٔ بیشتری از متخصصان این رشته بهره‌مند شوند.

بیست و یکمین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان

بیست و یکمین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان از ۳۰ مردادتا ۷ شهریور سال جاری در شهر کیوتوی ژاپن برگزار شد. محل برگزاری کنگره، ساختمان کنگره‌های بین‌المللی در شمال شهر کیوتو بود که ساختمان نوسازی است و برای برگزاری کنفرانسهای بزرگ ساخته و تجهیز شده است. در این کنگره نزدیك به ۴۰۰۰ ریاضیدان از ۸۳ کشور جهان شرکت داشتند.

در مراسم گشایش کنگره، تمبری که دولت ژاپن به مناسبت برگزاری کنگره چاپ کرده به وسیلهٔ یکی از وزرای ژاپن به پروفسور کوماتسو رئیس کنگره اهدا شد. در این مراسم، برنامه‌های موسیقی و رقص سنتی ژاپنی هم اجرا شد؛ ولی نقطهٔ اوج مراسم، اعطای جوایز فیلدز و نوانلینا بود که شرح آن در ادامهٔ اخبار می‌آید. در بعد از ظهر روز اول، سخنرانیهایی در تشریحِ کارهای برندگان جوایز برگزار شد.

در روزهای بعد، ۱۵ سخنرانی عمومی و ۱۴۵ سخنرانی تخصصی انجام شد. سخنرانیهای عمومی صبحها و سخنرانیهای تخصصی بعدازظهرها برگزار می‌شد. در روز هفتم شهریور، پس از مراسم اختتامیه، فادِیف رئیس اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی (IMU) گزارشی از نشستِ اتحادیه که در روزهای ۲۷ و ۲۸ مرداد برگزار شده بود ارائه داد. مهمترین نکتهٔ گزارش، این بود که اتحادیه دعوت سویس را برای برگزاری کنگرهٔ بعدی پذیرفته و کنگرهٔ ۱۹۹۴ در شهر زوریخ تشکیل خواهد شد.

در یکی دو روز قبل و یکی دو روز بعد از تشکیل کنگره، ۲۴ کنفرانس جداگانهٔ تخصصی با حضور عده‌ای از ریاضیدانان شرکت‌کننده در کنگره در شهرهای مختلف ژاپن تشکیل شد

برندگان مدال فیلدز

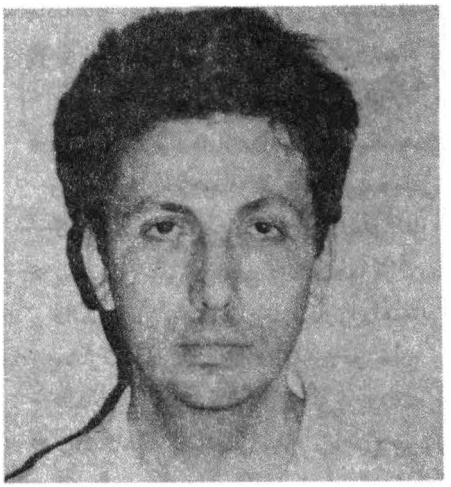
اعطایِ مدال فیلدز که در حال حاضر شاید معتبرترین و معروفترین جایزهٔ ریاضی باشد در کنگرهٔ ۱۹۲۴ تورنتو تصویب شد. این مدال نام خود را از جان چارلز فیلدز گرفته است که دبیر آن کنگره بود و پیشنهاد کرد از محلِ مبالغی که در پایان هر کنگره از بودجهٔ کنگره باقی می‌ماند، به دو تن از پژوهشگران برجستهٔ ریاضی جایزه داده شود. توافق شد که این نشان به ریاضیدانان جوان (زیر چهل سال) اعطا گردد. در کنگرهٔ ۱۹۶۶ قرار شد که تعداد برندگان مدال فیلدز به حداکثر چهار نفر افزایش یابد.

در کنگرهٔ امسال، لودویگ فادِیف رئیس اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی که ریاست کمیتهٔ مدال فیلدز را نیز به عهده داشت، برندگان را به این شرح معرفی کرد.

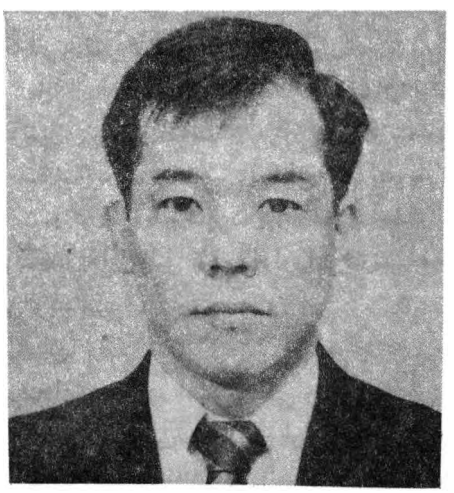
* ولادیمیر درینفلد[1] از مؤسسهٔ فیزیکی-تکنیکی دمای پایین در خارکف، به خاطر پژوهشهایش در گروههای کوانتومی و نظریهٔ اعداد.
* وون جونز[2] از دانشگاه کالیفرنیا در برکلی به خاطر وارد کردن ناورداهای چندجمله‌ای جدیدی در نظریهٔ گرهها که از کار او در زمینهٔ جبرهای عملگری منشأ می‌گیرد.
* شیگه فومی موری از مؤسسهٔ پژوهشهای علوم ریاضی در کیوتو، به‌خاطر پژوهشهایش در رده‌بندی چندگوناهای جبری.
* ادوارد ویتن[3] از مؤسسهٔ مطالعات پیشرفتهٔ پرینستون، به خاطر پژوهشهایی که فیزیك نظری و ریاضیات جدید را به هم پیوند می‌دهد.

1. Vladimir Drinfeld 2. Vaughan Jones 3. Edward Witten

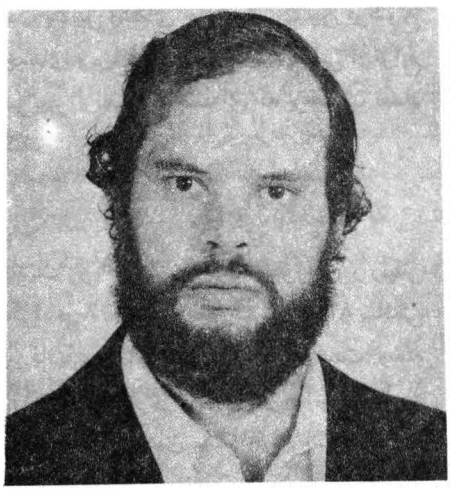
ولادیمیر درینفلد یك ریاضیدان ۳۶ ساله است و کارهایش مظهر تجدید ارتباط بین فیزیك و ریاضی است. علائق علمی درینفلد به معنی واقعی کلمه، گسترده است و کارهای او نه تنها پژوهش در هندسهٔ جبری و نظریهٔ اعداد را شامل می‌شود بلکه وی اخیراً پژوهشهای مهمی در مسائلی ریاضی که از فیزیك نشأت می‌گیرند، ازجمله نظریهٔ نسبتاً جدید گروههای کوانتومی، انجام داده است.



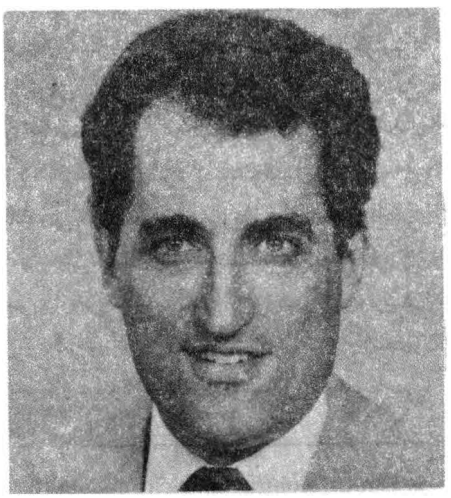
شیگه فومی موری ۳۹ ساله است و تاکنون جوایز متعددی به خاطر پژوهشهایش دریافت کرده است (ازجمله، جایزهٔ کول که خبر آن را در شمارهٔ گذشته دادیم). زمینهٔ اصلی تحقیقات موری، مطالعهٔ چندگوناهای جبری با بعد بالاست. تا قبل از کارهای موری، اغلب فکر می‌کردند که مطالعهٔ چندگوناهای جبری سه بعدی در حد ناامیدکننده‌ای پیچیده است و امکان فهم آنها وجود ندارد. موری در ۱۹۷۸ روش کاملا جدیدی برای تولید نگاشتهای نابدیهی از محور تصویری مختلط به چندگوناهای جبری ابداع کرد و دریافت که این روش در تعمیم نظریهٔ رده‌بندی خمها و رویه‌ها به چندگوناهای با بعد دلخواه، کارساز است. موری پس از ده سال کار مداوم مسألهٔ مربوط به چند گوناهای سه‌بعدی را در ۱۹۸۹ به‌طور کامل حل کرد.



وون جونز ۳۷ ساله است و در سال ۱۹۸۳ کشف مهمی در مبحث جبرهای نویمان کرده است. این کشف نه تنها افقهای جدیدی را در این مبحث گشوده بلکه تأثیر عمیقی بر نظریه‌گرهها داشته و ارتباطات محکمی نیز با مطالعهٔ جبرهای هِکِه، مکانیك آماری کوانتومی، نظریهٔ کوانتومی میدان، و پیش‌بینی آرایشهای DNA در بعضی از اندرکنشهای زیست‌شناختی دارد.



ادوارد ویتن ۳۹ ساله است و در طی دههٔ گذشته به موازات آنکه ابزارهای پیشرفتهٔ ریاضی را در فیزیك نظری به کار می‌گرفته، نشان داده است که قریحهٔ خاصی نیز در به کارگیری ایده‌های فیزیکی برای کشف مفاهیم جدید و زیبای ریاضی دارد. اولین کارِ ریاضیِ مهم ویتن، اثبات جدیدی از قضیهٔ انرژی مثبت شوئن ویائو در مورد معادلات اینشتین است. در این اثبات، مفهوم اَبَر تقارن به طرز ظریفی به کار رفته است. این موضوع، تمِ اصلی کارهای بعدی ویتن، از قبیل مقالهٔ «ابرتقارن و نظریهٔ مورس» قرار گرفته است. در سالهای اخیر، ویتن توجه خود را به نظریه‌های کوانتومیِ میدانهای توپولوژیك معطوف کرده است. ایده‌های ویتن گرچه اکثراً به شکل اثباتِ کامل نیست، ولی به خاطر بصیرتی که در آنها نهفته است، زمینه‌ساز پیشرفتهای ریاضی مهمی شده‌اند و معمولا اکتشافات مهم او به زودی به صورت قضیه درمی‌آیند.



برندهٔ جایزهٔ نوانلینا

جایزهٔ نوانلینا که هزینهٔ آن را دانشگاه هلسینکی تأمین می کند در کنگرهٔ بین المللی ریاضیدانان به ریاضیدان جوانی که در علم اطلاعات، تحقیق مهمی کرده باشد، اعطا می شود. این جایزه اولین بار در سال ۱۹۸۲ اعطا شد.

در کنگرهٔ امسال این جایزه به آلکساندر زازبوروف از مؤسسهٔ استکلف مسکو تعلق گرفت و دلیل اعطای جایزه، اثبات این موضوع بوده است که تعداد دریچه‌های و ـ یا که برای محاسبهٔ بعضی از توابع بولی یکنوا لازم است سریعتر از هرچند جمله‌ای که برحسب تعداد متغیرها باشد، رشد می کند.

درگذشت دمیتری فادیف

دمیتری کنستانتینویچ فادیف[1] ریاضیدان برجستهٔ شوروی و رئیس انجمن علوم ریاضی لنینگراد در ۲۸ مهرماه سال گذشته در ۸۳ سالگی درگذشت. میراث ریاضی فادیف بسیار گسترده و متنوع است. رشتهٔ اولیه‌اش جبر بود ولی در رشته‌های دیگری از قبیل نظریهٔ اعداد، نظریهٔ توابع، هندسه، و نظریهٔ احتمال هم کارهای مهمی کرده است. فادیف تأثیر عمیقی بر شکل گیری و تکامل روشهای عددی در ریاضیات داشته و کتاب *روشهای عددی در جبر خطی* که به اتفاق و. ن. فادیف آن را نوشته، مرجعی برای چندین نسل از متخصصان بوده است. فهرست تألیفات فادیف، ۱۶۰ عنوان را دربرمی گیرد. فادیف که ادامه‌دهندهٔ سنتِ مکتبِ ریاضی پترزبورگ بود، جایزهٔ دولت اتحاد شوروی را دریافت کرد و عضو مکاتبه‌ای آکادمی علوم شوروی بود.

بازسازی ریاضیات در آمریکا
طرحی برای دههٔ ۱۹۹۰

در سال ۱۹۸۴، کمیته‌ای که از سوی «شورای ملی پژوهش» آمریکا مأمور بررسی وضعیت ریاضیات در این کشور شده بود گزارشی با عنوان «بازسازی ریاضیات» منتشر کرد که به «گزارش دیوید» معروف شد. در این گزارش و پیوستهای آن، ضمنِ تحلیلِ وضعِ فعلیِ دانش ریاضی و ارتباطات آن با علوم دیگر و تکنولوژی، رهنمودهایی برای پیشبرد ریاضیات در ایالات متحدهٔ آمریکا داده شده بود. متن یکی از پیوستهای این گزارش را با عنوان «صورتبندی نظم عالم: نقش ریاضیات» در سه شمارهٔ اول *نشرریاضی* خواندید. امسال گزارش دیگری با عنوان «طرحی برای دههٔ ۱۹۹۰» انتشار یافته که گزارش دیوید را تکمیل و روزآمد می کند.

در «طرحی برای دههٔ ۱۹۹۰» گفته می شود که پیشرفتهایی در اجرای گزارش ۱۹۸۴ حاصل شده ولی هنوز هم حمایت مالی از علوم ریاضی در مقایسه با علوم دیگر و مهندسی، بسیار کم است. تعداد پژوهشگرانی که از پشتیبانی مالی برخوردار می شوند ـ اعم از پژوهشگران ارشد، دانشجویانِ فوق لیسانس و دکتری که به کار پژوهش کمك می کنند، و افرادی که به پژوهشِ پس از دکتری مشغول‌اند ـ در علوم ریاضی نسبت به رشته‌های دیگر ناچیز است. در این طرح پیشنهاد می شود که بودجهٔ تخصیص یافته از سوی دولت مرکزی برای علوم ریاضی از ۱۳۳ میلیون دلار (درسال ۱۹۸۹) به‌سالانه ۲۵۰ میلیون دلار افزایش یابد.

در این طرح همچنین گفته می شود که تعداد افراد جوانی که هر سال جذبِ علوم ریاضی می شوند هنوز هم درحدی نیست که برای بازسازی ریاضیات در آمریکا تکافو کند. در این مورد پیشنهاد می شود که جاذبه‌های شغلی بیشتری برای ریاضیات ایجاد شود و به این منظور

* با استفاده از بودجهٔ فوق الذکر، تعداد افرادی که در سطوح مختلف پژوهشی از حمایت مالی برخوردار می شوند افزایش یابد.
* ده درصد از بودجهٔ مزبور، صرفِ برنامه‌هایی شود که افراد جوان را مستقیماً به ورود در حرفهٔ ریاضی و باقی ماندن در آن، تشویق کند. استخدام زنان و اعضای اقلیتها یك اولویتِ اصلی است.
* بخشهای علوم ریاضی دانشگاهها از آن عده از کادر علمی که دانشجویان و همکاران تازه کار را راهنمایی می کنند، در آموزش مشارکت دارند، و با همکاران در سایر رشته‌ها ارتباط دارند، حمایت و تقدیر کنند.
* دانشگاهها، بخشهای علوم ریاضی خود را تقویت کنند.

در این طرح پیشنهاد می شود تعداد پژوهشگران ارشد علوم ریاضی که از حمایت مالی برخوردار می شوند به سالی ۲۶۰۰ نفر افزایش یابد.

مایکل اتیا و مؤسسهٔ ریاضی نیوتن

مایکل اتیا ریاضیدان نامدار انگلیسی به عنوان اولین مدیر مؤسسهٔ ریاضی نیوتن، که خبر تأسیس آن را در یکی از شماره‌های گذشته دادیم، انتخاب شد. این مؤسسهٔ پژوهشی که در سال ۱۹۹۲ در دانشگاه کیمبریج انگلستان شروع به کار خواهد کرد، به ریاضیات محض و کاربردی و علومی که ریاضیات در آنها به کار می رود از قبیل کامپیوتر، آمار، مهندسی، و فیزیك نظری خواهد پرداخت. کار این مؤسسه عمدتاً شامل برنامه‌هایی شش ماهه با شرکت ریاضیدانان میهمان از سراسر جهان خواهد بود.

علاوه بر این، مایکل اتیا به ریاست کالجِ ترینیتی دانشگاه کیمبریج، که یکی از عالیترین مقامات دانشگاهی در بریتانیا محسوب می شود، تعیین شده است. او قبلا در دانشگاه آکسفورد کار می کرد. ضمناً وی از نوامبر ۱۹۹۰ ریاست ادواری انجمن سلطنتی بریتانیا را (که در حکم آکادمی علوم این کشور است) به عهده گرفته است.

مایکل اتیا که در سال ۱۹۶۶ نشان فیلدز گرفت، یکی از سرشناس ترین ریاضیدانانِ امروز جهان به شمار می رود. وی به خاطر تحقیقاتش در هندسهٔ جبری، نظریهٔ K، نظریهٔ اندیسها، نظریهٔ نقطهٔ ثابت، و کوبوردیسم شهرت دارد. اجداد اتیا گویا از خاورمیانهٔ عربی بوده‌اند و به این دلیل گاهی نام او را در فارسی به صورت «میشل عطیه» می نویسند.

دبرانژ اولین جایزهٔ آستروسکی را برد

خوانندگان *نشرریاضی* با نام لویی دبرانژ از طریق مقالهٔ «حدس بیبرباخ» آشنا شده‌اند. می‌دانیم که دبرانژ در سال ۱۹۸۴ با اثبات

---

1. Dmitriĭ Konstantinovich Faddeev

حدس معروف بیبر باخ، دنیای ریاضی را که به پیشرویهای کوچك عادت کرده است، شگفت زده کرد. علاوه بر این اثبات، او نتایج کلیتری دربارهٔ نگاشتهای همدیس به دست آورد. نظریهٔ دبرانژ در باب فضای هیلبرت، به فهم این موضوعات و مسائلی دیگر کمك اساسی کرده است. جایزهٔ آستروسکی به خاطر روشهای نیرومندی که دبرانژ بر مبنای فضای هیلبرت عرضه کرده، به او تعلق گرفته است. همین روشها بود که او را به اثبات حدس بیبر باخ هدایت کرد.

جایزهٔ آستروسکی نام خود را از آلکساندر آستروسکی (۱۸۹۳ـ۱۹۸۶)، استاد سابقِ ریاضیِ دانشگاه بال سویس، گرفته است. آستروسکی بنیادی برای اعطای یك جایزهٔ بین المللی در زمینهٔ ریاضیات عالی تأسیس کرد. این بنیاد هر دو سال یکبار به یك دانشمند یا گروهی از دانشمندان که کارِ ریاضیِ برجسته‌ای کرده باشند، صرفنظر از عقاید سیاسی، نژاد، مذهب، ملیت، و سن و سال آنها اعطا می‌شود.

دبرانژ در سال ۱۹۲۳ در پاریس متولد شده ولی در آمریکا بزرگ شده و در ۱۹۵۷ درجهٔ دکتری خود را از دانشگاه کورنل گرفته است. وی استاد دانشگاه پرودو است.

اعطای جایزهٔ دالامبر به یك تهیه‌کنندهٔ برنامه‌های رادیویی

انجمن ریاضی فرانسه جایزهٔ دالامبر سال ۱۹۹۰ را به یکی از تهیه‌کنندگان برنامه‌های رادیو فرانسه به نام میشل شوشان که برنامه‌هایی دربارهٔ ریاضیات و ریاضیدانان تهیه کرده اعطا کرد. برنامه‌های شوشان موضوعهای ریاضی متنوعی را در بر می‌گیرد و عنوان بعضی از آنها از این قرار بوده است: «بورباکی»، «ریاضیدانها چه کسانی هستند؟» و «آموزش ریاضیات». به نظر هیأت داوران جایزه، این برنامه‌ها در اشاعهٔ ریاضیات در میان مردم موفق بوده‌اند.

جایزهٔ دالامبر در سال ۱۹۸۵ به وسیلهٔ انجمن ریاضی فرانسه برقرار شد و به مقاله، کتاب، برنامهٔ رادیویی یا تلویزیونی، فیلم، یا هر پروژهٔ دیگری که به عامه فهم کردن ریاضیات و پیشرفتهای جدیدش کمك کند، تعلق می‌گیرد. این جایزه هر دو سال یکبار اعطا می‌شود.

تجزیهٔ عدد نهم فرما

اعداد فرما اعدادی هستند به‌صورت $2^{2^n}+1$، $n=1,2,3,\ldots$، که فرما فکر می‌کرد همهٔ آنها اول هستند. حال آنکه می‌دانیم چنین نیست ومثلا به ازای $n=5$ عدد ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ را داریم که به صورت ۶۴۱×۶۷۰۰۴۱۷ تجزیه می‌شود. در خرداد ماه امسال گروهی از پژوهشگران در آمریکا عدد نهم فرما، $2^{2^{512}}+1$، را به عوامل اول تجزیه کردند. این عدد سه عامل دارد: کوچکترین آنها (که یك عدد ۷ رقمی است) قبلا شناخته شده بود. دو عامل دیگر که به تازگی شناخته شده‌اند، ۴۹ و ۹۹ رقم دارند.

در میان اعداد صحیحی که تجزیهٔ آنها دشوار است، عدد نهم فرما با داشتن ۱۴۸ رقم، بزرگترین عدد صحیحی است که تجزیه شده و از رکورد قبلی ۴۸ رقم بیشتر دارد. مهمتر اینکه، بزرگی این عدد آن را جزو اعدادی قرار می‌دهد که بانکها و حکومتها برای کدگذاری اطلاعات به کار می‌برند.

به گفتهٔ آرین لنسترا[1] مدیراین پروژه، این اولین بار است که ریاضیدانان عددی را تجزیه می‌کنند که از لحاظ بزرگی در حدِ مورد استفاده در چنین سیستمهای کدگذاری است. با این حال، تجزیهٔ این عدد خطر امنیتی فوری ایجاد نمی‌کند زیرا اعدادی که در رمزنگاری به کار می‌روند از نوع متفاوتی هستند و معمولا از دو عدد اول که تعداد رقمهایشان تقریباً مساوی است تشکیل می‌شوند.

الگوریتم این تجزیه نوع خاصی از غربال هیأت اعداد است و مبتنی است بر روش بدیعی که حدود دو سال قبل جان پالرد[2] انگلیسی ابداع کرد. هندریك لنسترا روش مزبور را تعمیم داد و الگوریتمی برای تجزیهٔ اعداد صحیحِ به صورت $n=a^k+b$ به دست آورد که در آن، a و b خیلی کوچك‌اند و k بزرگ است. برای این اعداد صحیح، براورد می‌شود که زمان اجرای الگوریتم عبارت باشد از

$$M(2(\tfrac{2}{3}^{\frac{2}{3}}))=M(1.526)$$

که در آن

$$M(c)=\exp((c+o(1))(\log n)^{\frac{1}{3}}(\log\log n)^{\frac{2}{3}}).$$

تا این اواخر، براورد می‌شد که زمان اجرایِ بهترین روشها برای تجزیهٔ اعداد صحیح در حالت کلی، وقتی عددی که قرار است تجزیه شود به بینهایت میل کند، برابر است با

$$\exp((1+o(1))(\log n)^{\frac{1}{2}}(\log\log n)^{\frac{1}{2}}).$$

در مورد الگوریتم تجزیهٔ عددی ۱۰۰ رقمی که در سال ۱۹۸۸ تجزیه شد همین براورد برقرار بود.

لنسترا و همکارش ماناسه[3]، داده‌های زیادی را از صدها *ایستگاه کار*[4] در سراسر جهان جمع‌آوری کردند ودستگاه بزرگی شامل بیش از ۲۰۰۰۰۰ معادلهٔ خطی تشکیل دادند. بعد به کمك روش حذفی گاوسی، دستگاه را به ۷۲۰۰۰ معادله تقلیل دادند. اِعمال روش حذفی گاوسی بر دستگاه جدید در دانشگاه فلوریدا انجام شد و جواب این مسألهٔ جبر خطی برای لنسترا و ماناسه فرستاده شد و آنها از این جواب برای تشکیل معادلاتی که تجزیهٔ نهایی را به دست داد استفاده کردند.

این دستاورد گرچه از لحاظ زمانِ مجانبیِ اجرای الگوریتم نسبت به روشهای قبلی پیشرفت نمایانی به شمار می‌آید، ولی بیشتر متکی بر ایده‌های جدید است تا قدرت محاسبه، و مبنای ریاضی آن ـ تجزیهٔ اعداد صحیح در هیأتهای اعداد جبری ـ عمیقتر از موارد قبلی است. شاید مهمترین نکته این باشد که به قول ادلیزکو پژوهشگر آزمایشگاههای بل، این دستاورد نشان می‌دهد که چگونه یك ایدهٔ خوب می‌تواند شکل یك رشته را تغییر بدهد.

ادلیزکو، در نگاهی به آینده، می‌گوید که گرچه غربال اصلی هیأت اعداد فقط در مورد اعداد صحیحِ به شکل $n=a^k+b$ به کار می‌رود، می‌توان روش را تعمیم داد به طوری که برای تجزیهٔ اعداد صحیح دلخواه قابل کاربرد باشد. ولی بهای آن، کاهش کارایی است. زمان براورد شدهٔ اجرای الگوریتم در این صورت عبارت خواهد بود از

$$M(3^{\frac{2}{3}})=M(2.08).$$

1. Arjen Lenstra 2. John Pollard 3. Mark Manasse

۴. ایستگاه‌کار (workstation) ریزکامپیوتری است با پردازندهٔ قوی و حافظهٔ زیاد.

فهرست الفبایی مطالب سال دوم و سوم

در فهرست زیر اعدادی که در هر مطلع آمده‌اند، به ترتیب، سال، شماره، و صفحهٔ شروع مطلب را مشخص می‌کنند.

دیدگاه

مقاله‌ها

آموزش و مسأله

کتاب

کتابهای گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر

مرکز نشر دانشگاهی

چاپ شده

آشنایی با تاریخ ریاضیات (جلد اول)
(ویرایش اول)
هاورد. و. ایوز
ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل
آشنایی با تاریخ ریاضیات (جلد دوم)
هاورد. و.ایوز
ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل
آشنایی با تحقیق در عملیات (جلد اول)
حمدی طه
ترجمهٔ محمدباقر بازرگان
آشنایی با توپولوژی و آنالیز نوین
جی. اف. سیمونز
ترجمهٔ اسدالله نیکنام
آشنایی با فرایندهای تصادفی
هوئل، پورت، استون
ترجمهٔ محمدحسین افقهی
آشنایی با منطق ریاضی
اندرتون
ترجمهٔ خسروشاهی، طرخورانی
آشنایی با نظریهٔ اعداد
ویلیام و. آدامز، لری جوئل گولدشتین
ترجمهٔ آدینه محمد نارنجانی
آشنایی با نظریهٔ گروهها
والتر لدرمن
ترجمهٔ محمدحسن بیژن‌زاده
آمار مقدماتی (جلد اول)
توماس وواکت، رانلد وواکت
ترجمهٔ محمدرضا مشکانی
آموزش تدریس ریاضیات دبیرستانی
بسلر، کولب
ترجمهٔ جواد همدانی‌زاده
آنالیز مختلط و کاربردهای آن
ریچارد. ا. سیلورمن
ترجمهٔ علی عمیدی، خلیل پاریاب
استنباط آماری ناپارامتری
جین دیکنسن گیبنز
ترجمهٔ عبدالرحیم شهلایی، علی عمیدی
اصول آماری در طرح آزمایشها (جلد اول)
واینر
ترجمهٔ زهرهٔ سرمد، مهتاش اسفندیاری
اصول آنالیز حقیقی
ربرت. جی. بارتل
ترجمهٔ جعفر زعفرانی
اعداد: گویا و گنگ
ایوان نیون
ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا
اعداد مختلط
والتر لدرمن
ترجمهٔ علی‌اکبر مهرورز
الهیادهای ریاضی بین‌المللی (جلد دوم)
مری کلمکین
ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل
تبدیلهای هندسی
ای. م. یاگلم
ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها
تحلیل واریانس و طرح آزمایشها
د.دوگه، م.ژیرو
ترجمهٔ علی مشکانی
توابع متغیر مختلط
د. ا. تال
ترجمهٔ مجید محمدزاده
توپولوژی، نخستین درس
جیمز.ر. مانکرز
ترجمهٔ ابراهیم صالحی و دیگران
جبر (جلد اول)
روژه گودمان
ترجمهٔ محمدرضا سلطانپور، وهاب داوربناه
با همکاری دانشگاه صنعتی شریف
جبر خطی
مایکل اونان
ترجمهٔ علی‌اکبر محمدی حسن‌آبادی
جبر خطی
کنت هافمن، ری کنزی
ترجمهٔ جمشید فرشیدی
حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد اول)
تام م. آپوستل
ترجمهٔ علیرضا ذکایی و دیگران
حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد اول)
لوئیس لیتهلد
ترجمهٔ بهزاد، رزاقی، کاظمی، ناظمی
حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد دوم، قسمت اول)
لوئیس لیتهلد
ترجمهٔ بهزاد، رزاقی، کاظمی، ناظمی
حساب دیفرانسیل و انتگرال (برای رشته‌های بازرگانی، زیست‌شناسی و علوم اجتماعی)
د.ج. گرودیس، س.م. شلی، ب.و. ویلر
ترجمهٔ ابوالقاسم لاله
حساب دیفرانسیل و انتگرال چیست؟
و. و. سویر
ترجمهٔ محمد حسن مهدوی اردبیلی
حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی
جورج ب. توماس
ترجمهٔ علی‌اکبر جعفریان، ابوالقاسم میامنی
دانستنیهای اعداد بزرگ
فیلیپ ج. دیویس
ترجمهٔ علی عمیدی
ریاضیات انتخاب یا چگونه بدون شمارش بشماریم؟
ایوان نیون
ترجمهٔ علی عمیدی، بتول جذبی
ریاضیات مهندسی پیشرفته (جلد اول)
اروین کرویت سیگ
ترجمهٔ عبدالله شیدفر، حسین فرمان
ریاضیات مهندسی پیشرفته (جلد دوم)

اروین کرویت سیگ
ترجمهٔ عبدالله شیدفر، حسین فرمان
زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی
ابوالقاسم قربانی
سری فوریه
ی.ن. اسندون
ترجمهٔ بتول جذبی
طراحی منطقی دستگاههای رقمی
فریدمن
ترجمهٔ شهلا طباطبایی، فرهاد صاحبان
کاشانی‌نامه
ابوالقاسم قربانی
گزیده‌هایی از نظریهٔ اعداد
اویستن اور
ترجمهٔ منوچهر وصال
مبانی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
ی. ن. اسندون
ترجمهٔ شفیعی موسوی، کدخدایی
مبانی ریاضیات
ایان استوارت، دیوید تال
ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی
مبانی نظریهٔ تصمیم
برنارد و. لیندگرن
ترجمهٔ عبدالرحمن ستارزاده و علی عمیدی
متغیرهای مختلط و کاربرد آنها
روئل و. چرچیل، جیمز و. براون، راجر ف. ورهی
ترجمهٔ امیر خسروی
مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا (جلد اول)
چارلز ت. سالکیند
ترجمهٔ سیدحسین جوادپور، محمد قزل ایاغ
مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا (جلد دوم)
چارلز ت. سالکیند
ترجمهٔ علی کافی
مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا (جلد سوم)
چارلز ت. سالکیند، جیمز. ارل
ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا
مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا (جلد چهارم)
آرتینو، گاگلیون، شل
ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی
مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان (جلد اول)
یوژف کورشاک
ترجمهٔ سعید فاریابی
مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان (جلد دوم)
یوژف کورشاک
ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی
معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها
جی. اف. سیمونز
ترجمهٔ ابوالقاسم میامنی، علی‌اکبر بابایی
مفاهیم و روشهای آماری (جلد اول)
ر. آ. جانسون، گوری. ك. باتاچاریا
ترجمهٔ ابن شهرآشوب، میکائیلی
مفاهیم و روشهای آماری (جلد دوم)
ر. آ. جانسون، گوری. ك. باتاچاریا
ترجمهٔ ابن شهرآشوب، میکائیلی
مقدمات معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی (جلد اول)
ویلیام. ا. بویس، ریچارد ك. دیپریما
ترجمهٔ محمدرضا سلطانپور و بیژن شمس
نخستین درس در جبر مجرد
ف. ج. هیگینز
ترجمهٔ محمدرضا رجب‌زادهٔ مقدم
نخستین درس در جبر مجرد (جلد اول)
جان. ب. فرالی
ترجمهٔ مسعود فرزان
نخستین گامها در آنالیز عددی
هوسکینگ، جویس، ترنر
ترجمهٔ اسماعیل بابلیان، میرکمال میرنیا
نظریهٔ آمار (جلد اول)
برنارد و. لیندگرن
ترجمهٔ ابوالقاسم بزرگ‌نیا
نظریهٔ آمار (جلد دوم)
برنارد و. لیندگرن
ترجمهٔ ابوالقاسم بزرگ‌نیا
نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها
پ. ر. هالموس
ترجمهٔ عبدالحمید دادالله
نظریهٔ گالوا
مورتی، راماناتان، شوکلا
ترجمهٔ محمدتقی دیبائی
نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربردهای آن
شووینگ، تی‌لین، یو ـ فنگ. لین
ترجمهٔ عمید رسولیان
نظریهٔ مقدماتی احتمال و فرایندهای تصادفی
کای‌لای چانگ
ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل، ابوالقاسم میامنی
نظریهٔ نمونه‌گیری
پرویز شیرانی
نظریه و کاربردهای آنالیز عددی
فیلیپس، تیلور
ترجمهٔ غلامحسین بهفروز، کمال میرنیا
هندسهٔ دیفرانسیل مقدماتی
بارت اونیل
ترجمهٔ بیژن شمس، محمدرضا سلطانپور
هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی (ویرایش اول)
ماروین جی گرینبرگ
ترجمهٔ م. هـ. شفیعیها

زیرچاپ

آشنایی با تاریخ ریاضیات (جلد اول)
(ویرایش دوم)
هاورد. و. ایوز
ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل
آمار ریاضی
جان فروند. رانالدوالپول
ترجمهٔ علی عمیدی، محمدقاسم وحیدی اصل
آنالیز عددی مقدماتی به شیوهٔ الگوریتمی
سموئل د. کونت، کارل دوبور
ترجمهٔ سراج‌الدین کاتبی
اصول آماری در طرح آزمایشها (جلد دوم)
واینر
ترجمهٔ زهرهٔ سرمد، مهتاش اسفندیاری
تابع گاما
امیل آرتین
ترجمهٔ سعید ذاکری
تحلیل چند متغیری
ماردیا، کنت
ترجمهٔ محمدمهدی طباطبایی
جبر ماتریسها برای علوم زیستی و برخی کاربردهای آماری آن
سیرل
ترجمهٔ جلال داودزاده
حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی
جورج توماس، رامس فینی
ترجمهٔ مهدی بهزاد، سیامك کاظمی، علی کافی
علم و هنر شبیه‌سازی سیستمها
رابرت شانون
ترجمهٔ علی‌اکبر عرب مازار
نظریهٔ اعداد
ت. جکسن
ترجمهٔ اکبر حسنی
هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی (ویرایش دوم)
ماروین جی گرینبرگ
ترجمهٔ م. هـ. شفیعیها

NASHR-I RYAZY

A Mathematics Journal

of

Iran University Press

Volume 3, Number 3, December 1990

Nashr-i Ryazy is published by Iran University Press, three times a year: April, August, and December. The main objectives of the Journal are to present:

- new advances in mathematics;
- cultural, philosophical, and historical aspects of mathematics, as well as its applications;
- educational problems of mathematics, specifically those concerning higher education in Iran.

Some of the articles in each issue are written by Iranian mathematicians, and some are translations of expository articles selected from foreign sources.

The annual subscription rates including air mail postage are: Middle East £ 12, Europe & Asia £ 13, North America & Far East £ 15.

To subscribe, please send your name, address, and a check to Iran University Press, 85 Park Avenue, Tehran 15134, Iran.

ISSN 1015-2857

مرکز نشر دانشگاهی منتشر می‌کند

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

جلد اول ۱

جورج تامس، راس فینی

ترجمهٔ مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، علی کافی