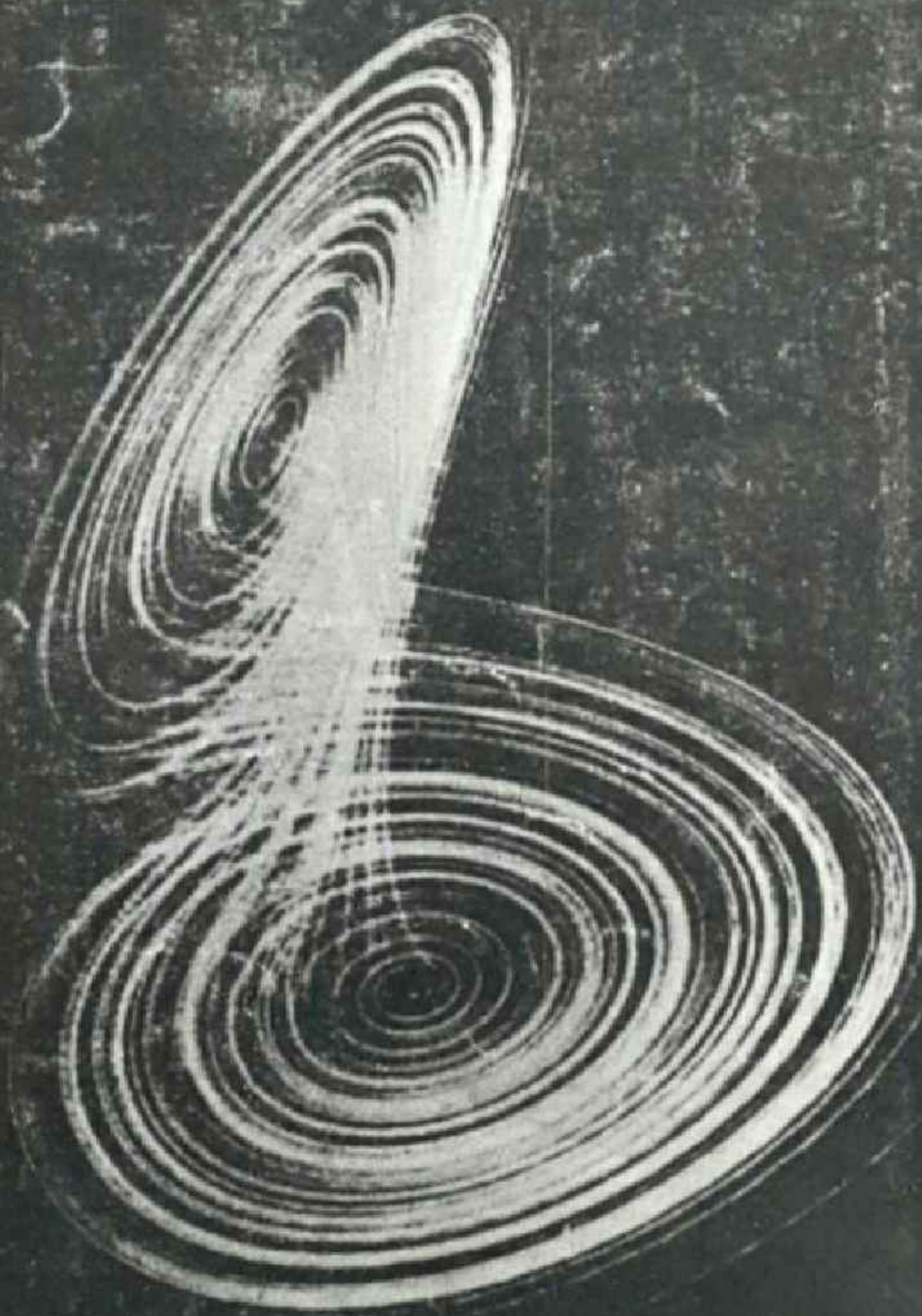
تشریحی

سال ۱، شمارهٔ ۱، فروردین ۱۳۶۷



نشر ریاضی

مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

شمارهٔ ۸۵ خیابان پارک، خیابان دکتر بهشتی، تهران ۱۵۱۳۴

بهای هر شماره ۲۵۰ ریال
حق اشتراک سالانه برای داخل کشور ۷۵۰ ریال

وجه اشتراک به حساب شمارهٔ ۹۰۰۰۹ بانک ملی شعبهٔ خیابان پارک تهران به‌نام مرکز نشر دانشگاهی واریز شود.

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر چهار ماه یک بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجّه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی‌پژوهان فارسی‌زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به‌ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چهارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبک مقاله‌های چاپ شده در **نشر ریاضی** باشد. به‌همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حک و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ شدهٔ در **نشر ریاضی** باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۱، شمارهٔ ۱، فروردین ۱۳۶۷

مدیر مسؤول: مهدی بهزاد

با همکاری لابیترون مرکز نشر دانشگاهی
لیتوگرافی، چاپ، صحافی: چاپخانهٔ دانشگاه علامه‌طباطبائی

فهرست

دیدگاه ویراستاران

مقاله‌ها

هنر حل مسألهٔ

کتاب

اخبار و گزارشها

تصویر روی جلد:
ربایندهٔ غریب لورنتس: مقالهٔ ریاضیات آشوب را ببینید.

با سپاس از:
آقای فرخ وطن به خاطر مشارکت در شکل‌گیری مجله؛ و آقای محمدحسین حلیمی به خاطر طراحی عنوان مجله.

ریاضیات آشوب

عباس عدالت

درطی سالهای اخیرموضوع «آشوب» دردستگاههای دینامیکی به‌یکی از مهمترین مسائل ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، و همچنین شاخه‌های‌مختلف علوم‌طبیعی تبدیل‌شده است. به‌طوری که این‌موضوع به‌صورت یکی از وسیعترین زمینه‌های تحقیقاتی زمان حاضر درآمده است. به طور کلی مقصود از یك دستگاه دینامیکی مجموعهٔ حالات ممکن یك پدیده است همراه با یك قانون تحول که گذر از یك حالت به‌حالت دیگر را توصیف می کند. اگر حالت دستگاه در زمان معینی داده شده باشد، این قانون حالتهای دستگاه در زمانهای بعدی را مشخص می کند.

چنانچه بتوان حالتهای گذشتهٔ دستگاه‌را نیز بدون‌ابهام ازقانون تحول استخراج کرد، دستگاه دینامیکی برگشت‌پذیر خوانده می‌شود. در این نوشته بحث ما به‌دستگاههای برگشت‌پذیر محدود خواهدبود. به‌زبان‌ساده می‌توان یك دستگاه دینامیکی‌آشوبناك را دستگاهی‌تعریف کرد که قانون‌بندی دینامیکی آن کاملاً تعینی و بدون هرگونه عامل احتمالی بوده ولی رفتاردرازمدت سیستم در عمل غیرقابل پیش‌بینی است.

به بیان دقیقتر در این دستگاهها، عدم دقت هرچند کوچك در دانستن‌حالت اولیه (که به‌هرحال از نظرعملی غیرقابل اجتناب است) موجب بروز خطای فاحش در پیش‌بینی حالت دستگاه در درازمدت می‌گردد. در نتیجه، «آشوب» پدیده‌ای است که علی‌الظاهر با بینش نیوتنی ازقوانین طبیعی مغایراست، زیرا بنا به‌فیزیك کلاسیك چنانچه معادلهٔ‌حرکت و وضعیت اولیهٔ دستگاهی را بدانیم می‌توانیم وضعیت آن‌را درهرزمان بعدی به‌دقت‌تعیین کنیم. به‌عنوان مثال هرگاه‌نیروهای وارد بر جسمی مشخص باشد، می‌توانیم از طریق فرمول $F=ma$ شتاب جسم و درنتیجه مکان و سرعت‌آن را در هر لحظه برحسب‌مکان و سرعت اولیهٔ آن به‌دست‌آوریم.

همان‌طور که می‌دانیم این بینش کلاسیك ازفیزیك در نیمهٔ‌اول قرن بیستم باپیدایش نظریهٔ کوانتوم مردود اعلام شد، زیرابنا به‌اصل عدم قطعیت هایزنبرگ اصولاً امکان اندازه‌گیری دقیق مکان و سرعت یك جسم ذره‌ای درآن واحد ممکن نیست و در نتیجه حتی وضعیت اولیهٔ آن را نمی‌توان بطور قطعی مشخص کرد.

شناخت و بررسی دستگاههای دینامیکی آشوبناك در سالهای اخیرموجب شده است که محدودیتهای بینش‌نیوتنی بعد جدیدی‌به‌خود بگیرد، چراکه دراین‌گونه دستگاهها هرگونه عدم قطعیت، دروضعیت اولیه، هر قدر ناچیز (که می‌تواند نتیجهٔ اصل هایزنبرگ، خطاهای آزمایشی، یا نارساییهای مدل ریاضی ما باشد) در دراز مدت ابعاد چنان گسترده‌ای به‌خودمی گیرد که وضعیت دستگاه راغیرقابل‌پیش‌بینی می‌کند.

بنابراین از بررسی پدیدهٔ «آشوب» این نتیجهٔ مهم به دست می‌آید که ملاك صحت نظریه‌ای در دستگاههای دینامیکی نمی‌تواند پیش‌بینی دقیق رفتارآن باشد بلکه بایدخواص احتمالی وهندسی‌ناشی ازآن نظریه مورد بررسی و ارزیابی قرارگیرد.

دراین‌مقاله خصوصیات اصلی نمونه‌ای ازیك دستگاه دینامیکی آشوبناك رابه‌طوراجمالی تشریح خواهیم کرد ولی قبل‌ازآن‌به‌بررسی چند نمونهٔ ساده از دستگاههای غیر آشوبناك می‌پردازیم و برخی مقولات لازم را از این طریق تعریف می کنیم.

چند نمونه از دستگاههای غیرآشوبناك

مثالهایی که دراینجا مطرح می کنیم، همه دستگاههای دینامیکی تعریف شده‌توسط‌یك‌معادله یایك‌دستگاه معادلات‌دیفرانسیل‌هستند.دستگاههایی که تحول آنها به طور پیوسته در زمان صورت می گیرد، معمولاً از یك دستگاه‌معادلات دیفرانسیل‌عادی تبعیت‌می کنند. این بدین معنی‌است که هرگاه حالت دستگاه در زمان معینی مشخص باشد، تحول‌آینده (و گذشتهٔ)دستگاه بادنبال کردن‌آن جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل که از حالت اولیه می گذرد، مشخص می‌شود.

مثال ۱. معادلهٔ‌دیفرانسیل‌خطی درجهٔ‌اول همگن زیررادرنظرمی گیریم

$$dx/dt=f(x)=-\lambda x,\quad x\in\mathbf{R},\quad \lambda>0$$

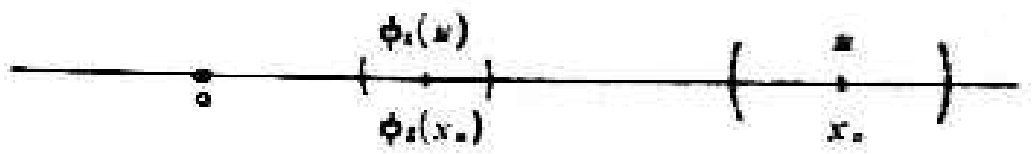
در اینجا، $\mathbf{R}$، مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی قلمرو x، را فضای‌حالات دستگاه دینامیکی می‌نامیم. هرگاه‌درلحظهٔ $t=0$ داشته باشیم $x=x_0$ آنگاه داریم $x(t)=x_0e^{-\lambda t}$. رابطهٔ اخیررا همچنین به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\phi_{t,0}(x_0)=x(t)=x_0e^{-\lambda t}.$$

به عبارت دیگر، $\phi_t(x_0)$ مقدار x را در زمان t مشخص می کند اگر مقدار آن درلحظهٔ $t=0$ برابر x_0 باشد. برای‌آنکه معادلهٔ دیفرانسیل فوق را به‌شکل کیفی و هندسی تعبیر کنیم، $f(x)=-\lambda x$ را یك میدان برداری در $\mathbf{R}$ در نظر می‌گیریم. شکل ۱ را که از رسم این میدان برداری به‌دست‌می‌آید نمودارحالات دستگاه دینامیکی می‌نامیم. چند نکته را در اینجا متذکر می‌شویم.

شکل ۱

۱. هر جواب معادلهٔ $\phi_t(x_0)=x_0e^{-\lambda t}$، صرفنظر از شرایط اولیه (یعنی مقدار x_0)، به‌صفر میل می‌کند. صفر را ربایندهٔ دستگاه دینامیکی فوق و $\mathbf{R}$ را پهنهٔ ربایش آن می‌نامیم. به‌طور کلی نقطه‌ای از فضای حالات را ربایندهٔ دستگاه می‌نامیم اگر این نقطه کلیهٔ نقاط یک همسایگی خود را جذب کند و به‌مجموعهٔ کلیهٔ نقاطی که در همسایگی ربایندهٔ به‌آن جذب می‌شوند، پهنهٔ ربایش آن می‌گوییم.
البته مقصود از جذب کردن نقطهٔ p این است که جواب معادلهٔ دیفرانسیل گذرا از p در زمان مثبت به‌ربایندهٔ میل می‌کند.
۲. به‌سادگی از شکل ۲ می‌بینیم که اگر عدم قطعیتی در وضعیت اولیهٔ وجود داشته باشد، به عبارت دیگر اگر $x(0)$ نه برابر x_0 بلکه در یک همسایگی uی نقطهٔ x_0 قرار داشته باشد، آنگاه با گذشت زمان این عدم قطعیت کاهش می‌یابد؛ یا به‌عبارت دیگر طول $\phi_t(u)$ برای $t>0$ کمتر از طول u است و در واقع طول $\phi_t(u)$ وقتی $t\to\infty$، به‌صفر میل می‌کند.



شکل ۲

۳. هرگاه میدان برداری فوق را اندکی به طور هموار تغییر دهیم یعنی دستگاه

$$dx/dt=f(x)=-\lambda x+O(x),\quad \lambda>0$$

را در نظر بگیریم که در آن مقصود از $O(x)$ یک تابع احتمال است که سریعتر از x به صفر میل می‌کند وقتی $x\to 0$، می‌توان نشان داد که کیفیت جوابهای معادله در یک همسایگی نقطهٔ صفر تغییری نخواهد کرد و در یک همسایگی صفر کلیهٔ نقاط همچنان به‌صفر میل خواهند کرد. می‌گوییم دستگاه اولیه در نقطهٔ صفر دارای ثبات ساختاری است یا ربایندهٔ دستگاه دارای ثبات ساختاری است.
۴. اگر $\lambda=0$، کلیهٔ نقاط ثابت خواهند بود یعنی به ازای هر x_0 و t در $\mathbf{R}$ داریم $\phi_t(x_0)=x_0$ و اگر $\lambda<0$ آنگاه نمودار حالت مطابق شکل ۳ است و نقاط از صفر دور می‌شوند. در این حالت نقطهٔ صفر را یک نقطهٔ دافع می‌نامیم.

شکل ۳

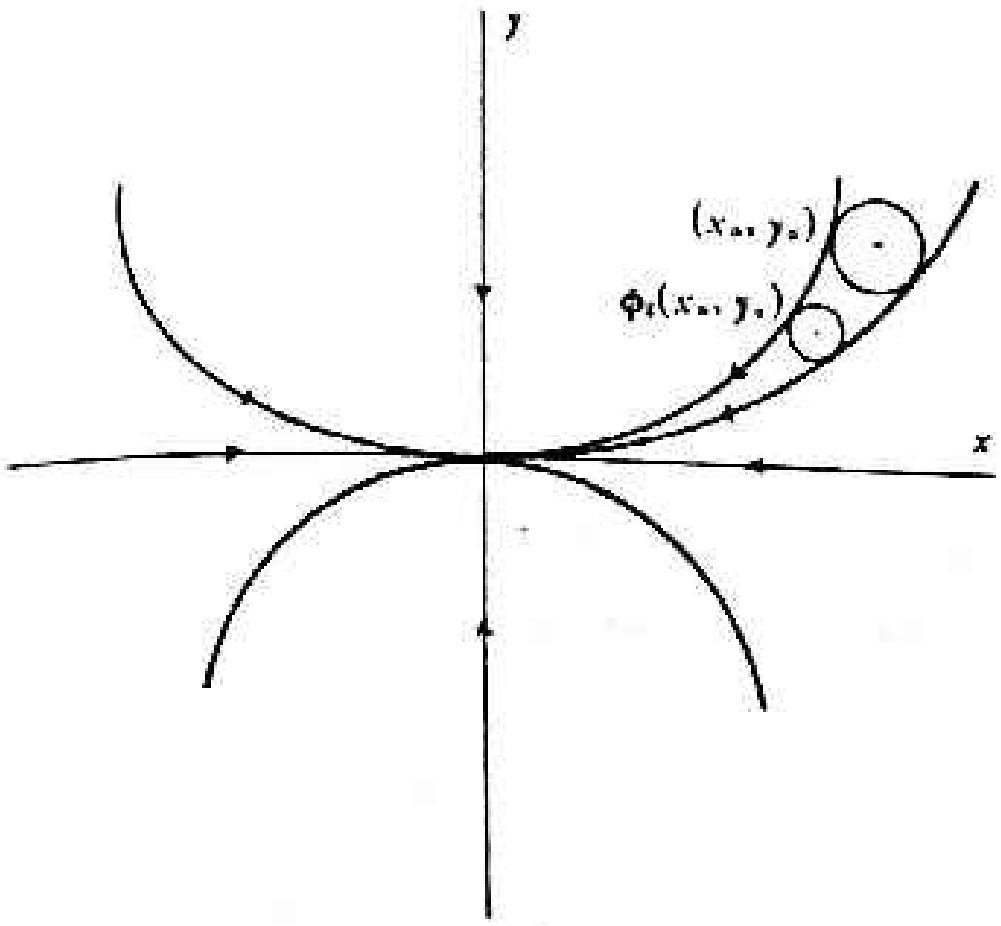
مثال ۲.

$$dx/dt=-\lambda x\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2$$
$$dy/dt=-\mu y\quad \mu>\lambda>0$$

در اینجا فضای حالات $\mathbf{R}^2$ است و داریم

$$\phi_t(x_0,y_0)=(x_0e^{-\lambda t},\ y_0e^{-\lambda t})$$

نمودار حالات مطابق شکل ۴ است.



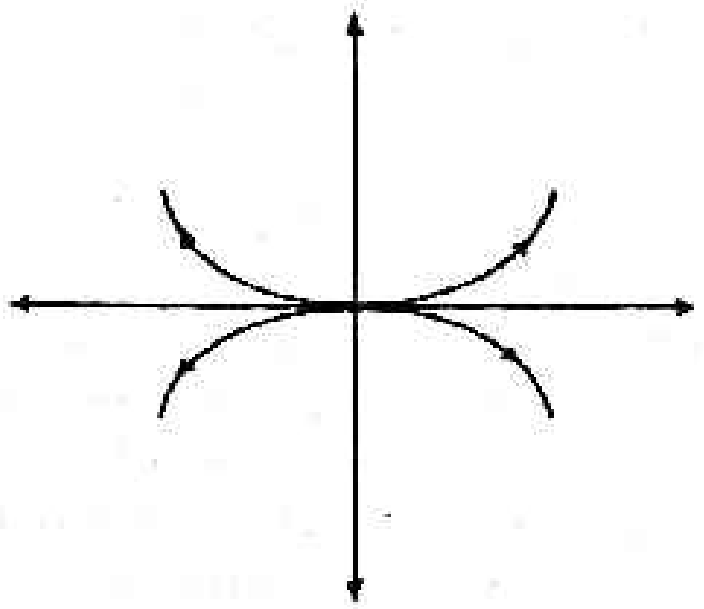
شکل ۴

به‌نکات ذیل توجه کنید:

۱. مبدأ مختصات صفر، ربایندهٔ دستگاه است با پهنهٔ ربایش $\mathbf{R}^2$.
۲. هر گونه عدم قطعیت در وضعیت اولیه با گذشت زمان کاهش می‌یابد؛ به‌عبارت دیگر اگر u یک همسایگی (x_0,y_0) در $\mathbf{R}^2$ باشد، برای $t>0$،

اندازهٔ $\phi_t(u)<$ اندازهٔ (u)

۳. سیستم در نقطهٔ صفر دارای ثبات ساختاری است.
۴. اگر $\lambda>0$، منحنیهای جواب از صفر دور می‌شوند و صفر یک نقطهٔ دافع است (شکل ۵).

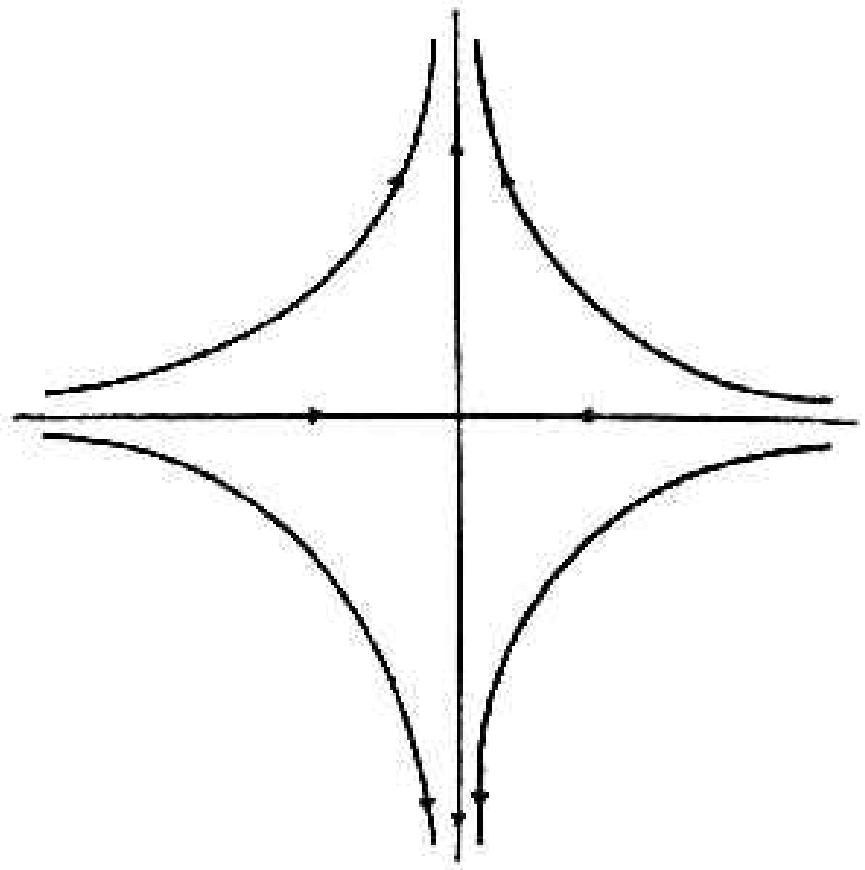


شکل ۵

مثال ۳.

$$dx/dt=-\lambda x\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2$$
$$dy/dt=\mu y\quad \lambda,\mu>0$$

نمودار حالات مطابق شکل ۶ است.
محورهای x و y پایا هستند. نقاط روی محور x به‌صفر نزدیک و نقاط روی محور y از صفر دور می‌شوند. نقطهٔ صفر را در اینجا یک نقطهٔ زینی می‌نامند. مانند دو مثال قبلی، تغییرات جزئی هموار در میدان برداری، کیفیت جوابها را در همسایگی صفر تغییر نخواهد داد. محور x را، یعنی مجموعهٔ نقاطی را که وقتی $t\to\infty$ به‌صفر میل می‌کنند،



شکل ۶

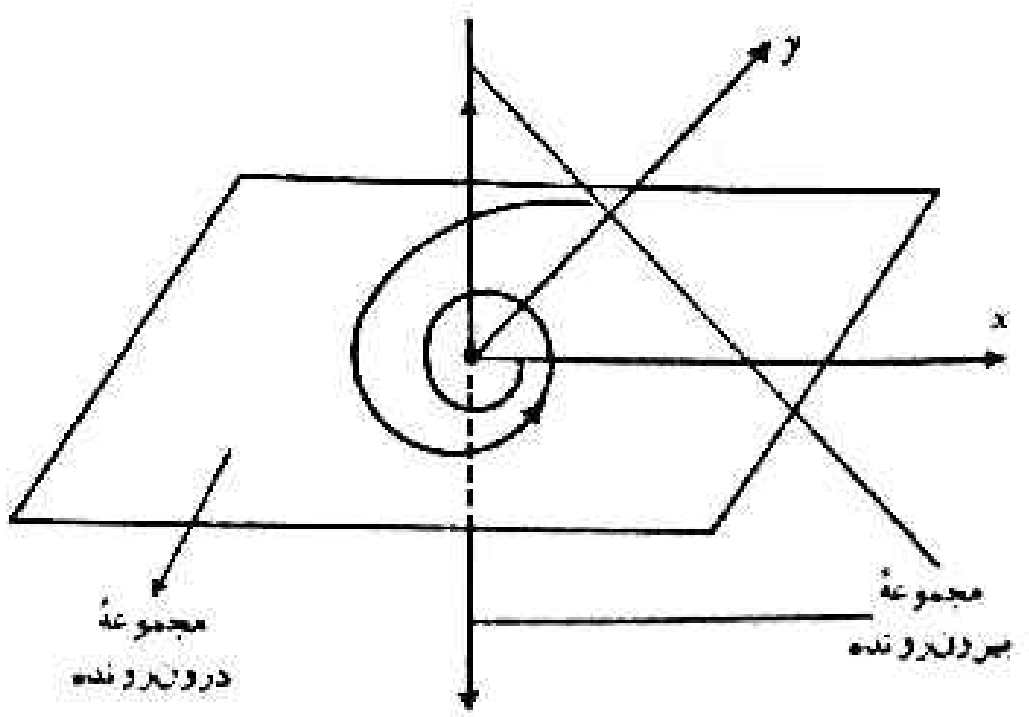
مجموعهٔ درون رونده و محور y را، یعنی مجموعهٔ نقاطی را که وقتی $t \to -\infty$ به‌صفر میل می‌کنند، مجموعهٔ بیرون‌روندهٔ نقطهٔ صفر می‌نامیم. توجه کنید که در اینجا مجموعهٔ درون رونده و بیرون رونده هر کدام یک‌بعدی است درحالی که در مثالهای ۱ و ۲ مجموعه‌های درون‌رونده به‌ترتیب ۱ بعدی و ۲ بعدی و مجموعه‌های بیرون‌رونده تهی بودند.

توضیح: در سه مثال فوق کیفیت جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل را در نزدیکی یک نقطهٔ ثابت بررسی کردیم. به‌طور کلی اگر یک میدان برداری در $\mathbf{R}^n$ داشته باشیم که صفر نقطهٔ ثابت آن باشد یعنی اگر

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = T\mathbf{x} + \text{جملات مراتب بالاتر}$$

که در اینجا $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ و $\mathbf{f}$ یک میدان برداری در $\mathbf{R}^n$ و T بخش خطی $\mathbf{f}$ است و اگر مقادیر ویژهٔ T همگی دارای بخش حقیقی غیر صفر باشند، آنگاه نقطهٔ صفر دارای یک‌مجموعهٔ درون‌روندهٔ lبعدی و یک مجموعهٔ بیرون رونده $n-l$ بعدی است که در اینجا l تعداد مقادیر ویژهٔ T با بخش حقیقی منفی است. به عنوان مثال، اگر داشته باشیم

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



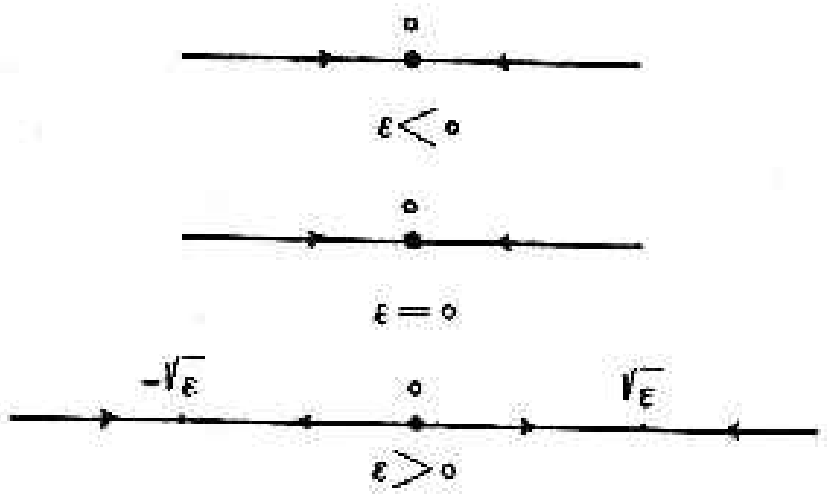
شکل ۷

آنگاه مقادیر ویژهٔ T عبارت‌اند از ۱ و ۱ $\pm$ و ۱ $-$. در اینجا صفر دارای مجموعهٔ درون‌روندهٔ دوبعدی و مجموعهٔ بیرون‌روندهٔ یک‌بعدی خواهد بود. نمودار حالات دستگاه در نزدیکی نقطهٔ صفر از لحاظ توپولوژیکی مطابق شکل ۷ است.

مثال ۴.

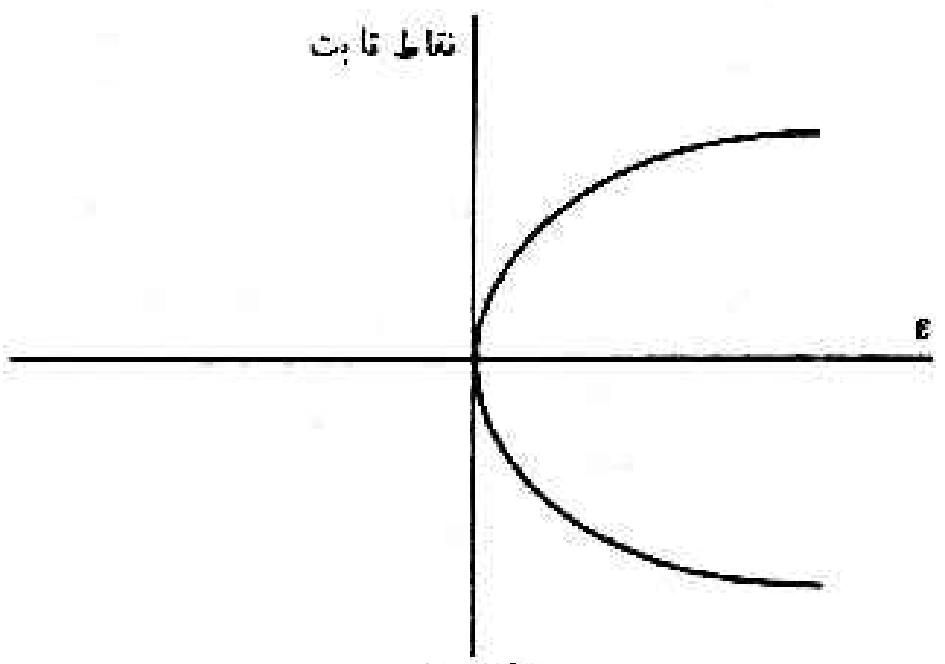
$$\frac{dx}{dt} = -x(x^2 - \varepsilon), \quad x \in \mathbf{R}$$

که ε یک پارامتر حقیقی است. در اینجا نمونه‌ای از یک انشعاب در یک دستگاه پارامتری دینامیکی داریم. نمودار حالات دستگاه برای مقادیر منفی، صفر و مثبت ε مطابق شکل ۸ است.



شکل ۸

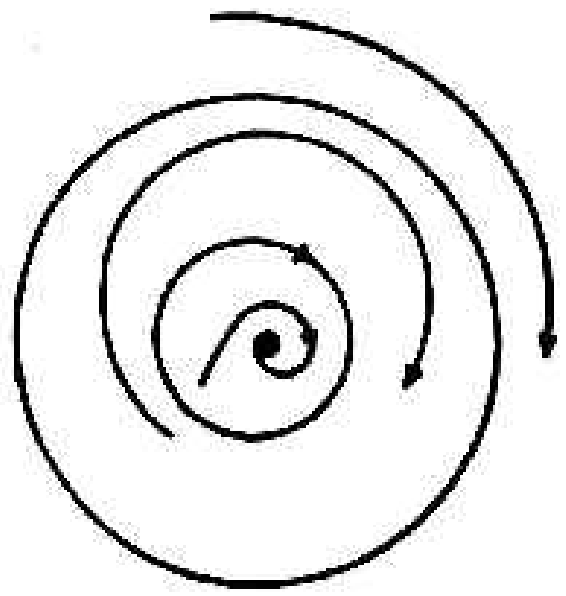
مشاهده می‌کنیم که وقتی ε از صفر می‌گذرد نمودار حالات دستگاه به‌طور کیفی تغییر می‌کند. برای $\varepsilon \leqslant 0$ سیستم دارای یک‌رباینده با پهنهٔ ربایش $\mathbf{R}$ است درحالی که برای $\varepsilon > 0$ سه نقطهٔ ثابت وجود دارند: صفر که یک دافع است، $\sqrt{\varepsilon}$ که رباینده با پهنهٔ ربایش $\mathbf{R}^+$ است و $-\sqrt{\varepsilon}$ که رباینده با پهنهٔ ربایش $\mathbf{R}^-$ (اعداد حقیقی منفی) است. نقطهٔ صفر پهنهٔ ربایش دو رباینده‌ٔ موجود را از یکدیگر جدا می‌کند و از این نظر به صفر می‌گوییم یک جداساز. اگر نقاط ثابت دستگاه پارامتری را در برابر محور ε رسم نماییم شکل ۹ به دست می‌آید که شبیه یک چنگال است. از این نظر به این انشعاب (و انشعاباتی که کیفیتاً به‌طور موضعی مانند این مثال‌اند) می‌گوییم انشعاب چنگالی.



شکل ۹

مثال۵. دستگاه دینامیکی زیر را که درمختصات قطبی بیان شده است درنظر بگیرید

$$\frac{dr}{dt} = -r(r-1)(r-2) \qquad \frac{d\theta}{dt} = 1$$



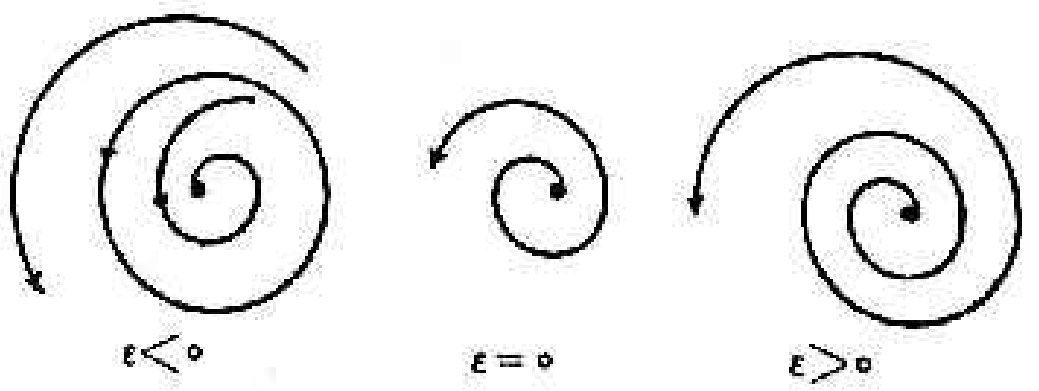
شکل ۱۰

در اینجا $r=0$، یعنی مبدأ مختصات یك ربایندهٔ است و دوایر $r=1$ و $r=2$ هر دو جوابهای دستگاه‌اند. به‌سادگی می‌توانیم ملاحظه کنیم که $r=2$ یك مدار بسته است که کلیهٔ مدارهای ناحیهٔ $r>1$ را جذب خود می‌کند. در اینجا $r=2$ نمونه‌ای از یك ربایندهٔ غیر نقطه‌ای است که آن را یك **دور حدی** می‌نامیم. پهنهٔ ربایش آن نیز $r>1$ است. از طرف دیگر $r=1$ یك مدار بستهٔ دافع است و کلیهٔ مدارها در $r>1$ و $r<1$ از آن دور می‌شوند (شکل ۱۰).

مثال ۶. در مختصات قطبی

$$\frac{dr}{dt}=r(\varepsilon+r^2) \qquad \frac{d\theta}{dt}=1$$

و ε یك پارامتر حقیقی است. در اینجا نیز انشعابی داریم که به‌انشعاب هوپف[1] معروف است. برای $\varepsilon<0$، $r=\sqrt{-\varepsilon}$ یك مدار بستهٔ دافع است و $r=0$ یك ربایندهٔ نقطه‌ای. وقتی ε به‌صفر می‌رسد مدار دافع در ربایندهٔ نقطه‌ای ادغام می‌شود. به طوری که برای $\varepsilon\geqslant 0$ صفر یك نقطهٔ دافع می‌شود (شکل ۱۱).



شکل ۱۱

اگر در دستگاه فوق زمان را معکوس کنیم یعنی میدان برداری

$$\frac{dr}{dt}=-r(\varepsilon+r^2)$$

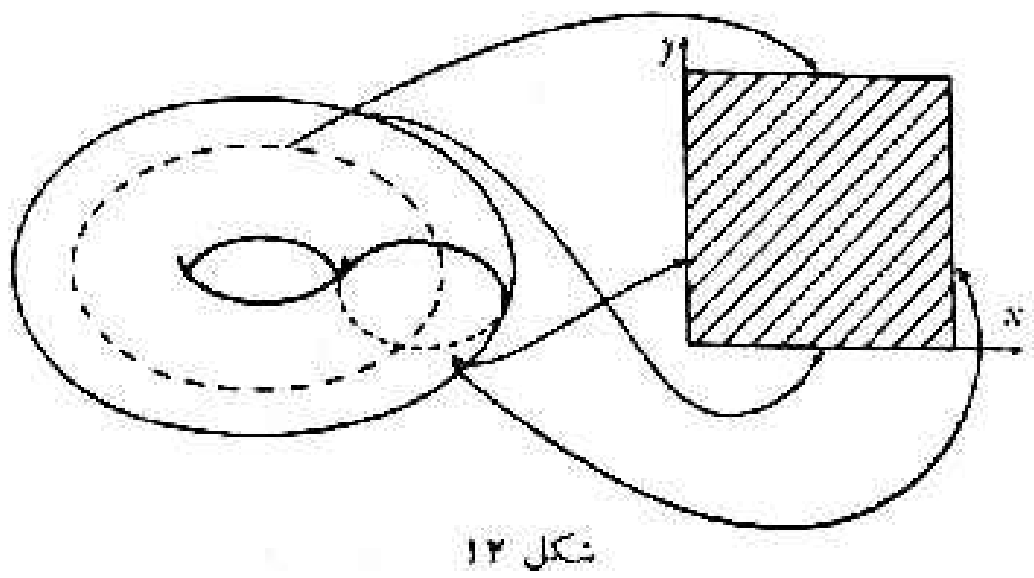
$$\frac{d\theta}{dt}=-1$$

را در نظر بگیریم آنگاه برای $\varepsilon<0$ به‌جای یك مدار بستهٔ دافع یك دور حدی ربایندهٔ داریم.

از آنچه گذشت نتیجه می‌گیریم که مهمترین مسأله در بررسی کیفی معادلات دیفرانسیل تعیین ربایندهٔ های معادله است زیرا

1. Hopf

مدارهایی که در قلمرو ربایندهها قرار دارند با گذشت زمان به‌سرعت بدربایندهٔ نزدیك می‌شوند و عملاً از ربایندهٔ مورد نظر قابل تشخیص نخواهند بود. در واقع از لحاظ فیزیکی تنها ربایندهای یك دستگاه می‌باشند که قابل مشاهده هستند. سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا به جز ربایندههای نقطه و دور حدی که در مثالهای گذشته دیدیم ربایندههایی از نوع دیگر وجود دارند یا نه؟ در اینجا منظور ما ربایندهای است که قابل تجزیه به‌ربایندههای نقطه‌ای و دور حدی نباشد. درواقع نوع دیگری از ربایندهٔ از دیرباز شناخته شده است که ربایندهٔ شبه تناوبی نامیده می‌شود و نمونه‌ای از آن در «شارغیر گویا» روی چنبره مشاهده می‌شود. طبق شکل ۱۲، چنبرهٔ دوبعدی را موبعی تصور کنید که اضلاع روبرویش دو به‌دو یکی انگاشته شده باشند.



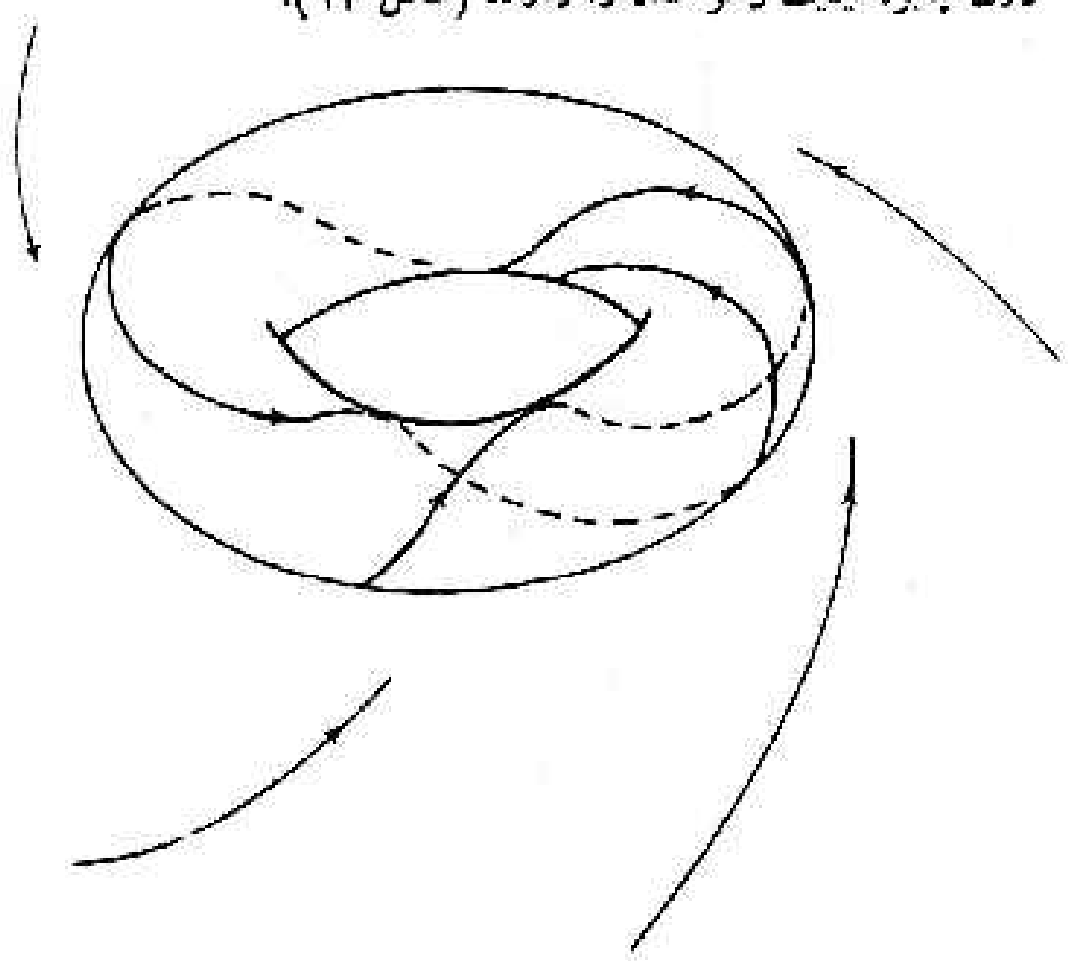
شکل ۱۲

حال میدان برداری

$$\frac{dx}{dt}=w_1$$

$$\frac{dy}{dt}=w_2$$

را روی مربع درنظر بگیرید به‌طوری که w_1/w_2 یك عدد گنگ باشد. با اندکی تأمل روشن می‌شود که مدار هر نقطه روی چنبره چگال خواهد بود. حال به‌راحتی می‌توان یك میدان برداری در R^3 تصور کرد که مدارهای آن همگی به‌سوی یك چنبره جذب می‌شوند و مدارهای روی چنبره کیفیت ذکر شده را دارند (شکل ۱۳).



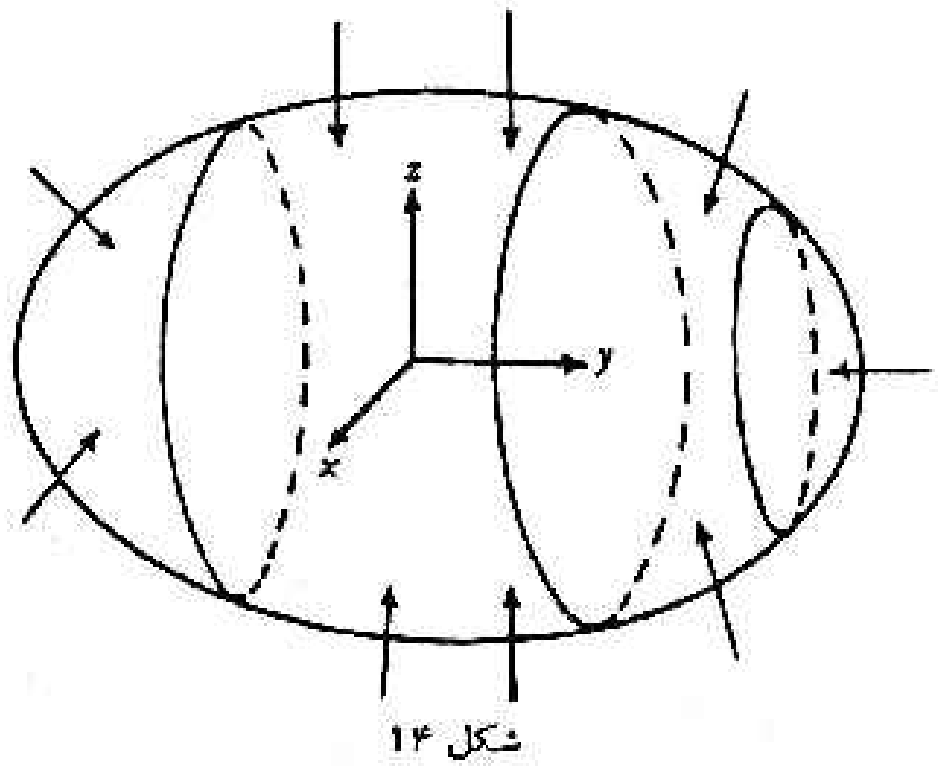
شکل ۱۳

ربایندهٔ غریب لورنتس

تا اوایل دههٔ ۱۹۶۰ تصور می‌شد که هر رباینده‌ای قابل تجزیه به یکی از سه رباینده‌ای است که تا کنون دیده‌ایم. در این زمان ریاضیدان آمریکایی اسمیل[1] اولین نمونه از یك «رباینده غریب» را ارائه کرد که در آن، رباینده دستگاه شکل پیچیده‌ای داشت و رفتار جوابهای دستگاه نیز در داخل و اطراف رباینده وضعیتی درهم و از نظر عملی غیر قابل پیش‌بینی داشت. با این حال این مثال هنوز در قلمرو نظریهٔ ریاضی بود و تصور نمی‌شد که در دستگاههای تابع قوانین فیزیك کلاسیك بتوان چنین پدیده‌ای را مشاهده کرد. ولی در ۱۹۶۳، یك ریاضیدان و جوشناس آمریکایی به نام لورنتس[2] مقاله‌ای منتشر کرد که در آن برای اولین بار رباینده‌ای از نوع جدید در مسائل طبیعی مطرح می‌شد. او که درجستجوی یك‌مدل ریاضی برای توضیح تلاطم جوی در هواشناسی بود، معادلهٔ دیفرانسیل زیر را در نظر گرفت

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sigma(x-y) \\ \frac{dy}{dt} &= Rx-y-xz \quad \text{یا} \quad \frac{dr}{dt}=V(r) \\ \frac{dz}{dt} &= xy-bz \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

که دراینجا $(x, y, z)\in\mathbf{R}^3$ و R، b، و σ پارامترهای حقیقی هستند. لورنتس مقادیر $\sigma=10$ و $b=8/3$ را بررسی کرد و نشان داد که به‌ازای جمیع مقادیر مثبت R، یك ناحیهٔ همبند ساده، M، که در بر گیرندهٔ مبدأ مختصات است در $\mathbf{R}^3$ وجود دارد به‌طوری که میدان برداری (*) در کلیهٔ نقاط مرزی آن به‌طرف داخل است (شکل ۱۴).



شکل ۱۴

ازاینجانتیجه می‌شود که M باید حاوی رباینده (یا رباینده‌های مختلف) باشد. درواقع $A=\bigcap_{t\geq 0}\phi_t(M)$ رباینده (یا رباینده‌های) موردنظر است. ازطرف دیگر دیورژانس میدان برداری (*) منفی است. به‌راحتی می‌توان نشان داد که حجم هر قطعه از فضای حالات با گذشت زمان کاهش می‌یابد. و درواقع حجم قاعده به‌صفر میل می‌کند (در اصطلاح ریاضی، وضعیت حدی این قطعه یك مجموعهٔ اندازهٔ صفر است).

حال برای تعیین رباینده (یا رباینده‌های) موجود در M مقدار پارامتر R را از $R=0$ تا $R=28$ افزایش می‌دهیم و کیفیت و تغییرات نمودار حالات دستگاه را دراین طیف ازمقادیر R (که مورد بررسی لورنتس قرار گرفت) به‌طور اجمالی تشریح می‌کنیم.

ابتدا نقاط ثابت میدان را پیدا می‌کنیم. روشن است که $x=y=z=0$ یعنی مبدأ مختصات همواره یك نقطهٔ ثابت است. از معادلات (*) به‌راحتی می‌توانیم بخش خطی میدان برداری را در نقطهٔ O به‌دست آوریم

$$T=\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ R & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

در نتیجه مقادیر ویژهٔ T عبارت‌اند از $-b$ و ریشه‌های معادلهٔ

$$\lambda^2+(\sigma+1)\lambda+(1-R)\sigma=0.$$

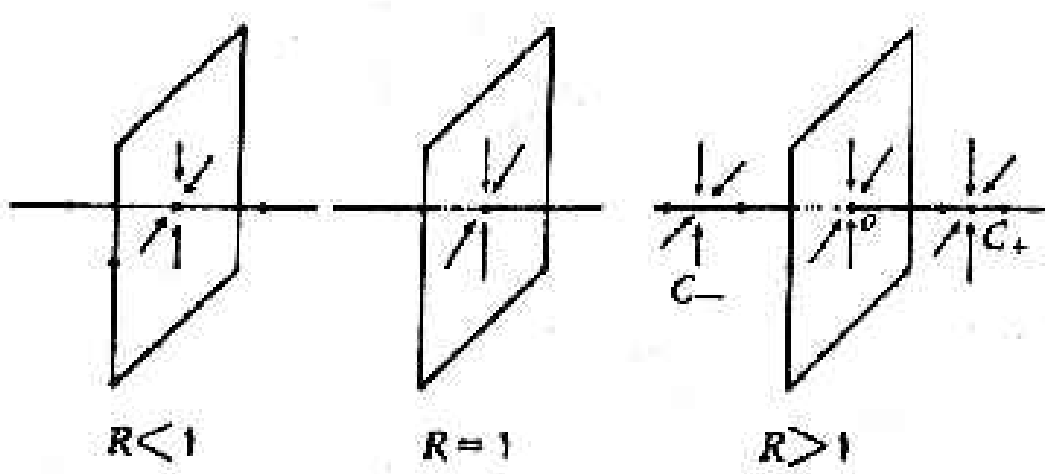
وقتی $R<1$، دو مقدار ویژهٔ دیگر هر دو منفی‌اند و در نتیجه O یك رباینده است درحالی‌که وقتی $R>1$، یکی از آنها مثبت و دیگری منفی است؛ یعنی O یك نقطهٔ زینی با مجموعهٔ درون روندهٔ دوبعدی و مجموعهٔ بیرون‌روندهٔ یك‌بعدی است (توجه کنید که مقادیر $\sigma=10$ و $b=8/3$ هر دو ثابت و مثبت می‌باشند).

از طرف دیگر میدان برداری (*) به‌ازای $R>1$ در دو نقطهٔ دیگر نیز صفر می‌شود که مختصاتشان عبارت‌اند از

$$\begin{cases} z=R-1 \\ x=y=\pm\sqrt{b(R-1)} \end{cases}$$

این دونقطه را $C_\pm$ می‌نامیم. با بررسی بخش خطی میدان برداری در این دو نقطه می‌توان نشان داد که برای مقادیر Rی که کمی بزرگتر از ۱ باشند، بخش خطی میدان در هر دو نقطه دارای سه مقدار ویژهٔ منفی می‌باشند و لذا هر دو رباینده هستند.

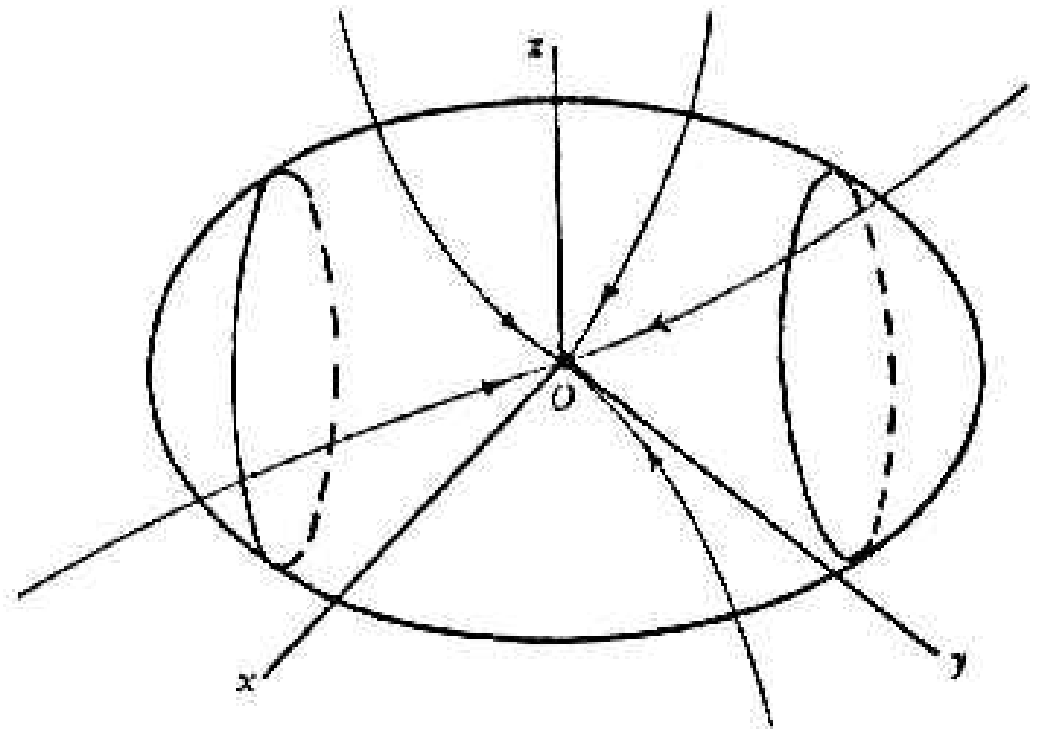
توجه کنید که وقتی $R\to 1^+$، $C_\pm\to 0$ یعنی در $R=1$ دو نقطه رباینده $C_\pm$ از O زاییده می‌شوند. در واقع در $R=1$ انشعابی در نقطهٔ O صورت می‌گیرد که روی یك منحنی، که از O می‌گذرد و امتداد مماسش در آن نقطه درجهتی است که دو نقطهٔ ثابت جدید $C_\pm$ از O زاییده می‌شوند، از نوع انشعاب چنگالی در مثال ۴ است. این منحنی را خمینهٔ مرکزی می‌نامند. درصفحهٔ قاطع براین منحنی انقباض صورت می‌گیرد (شکل ۱۵).



شکل ۱۵

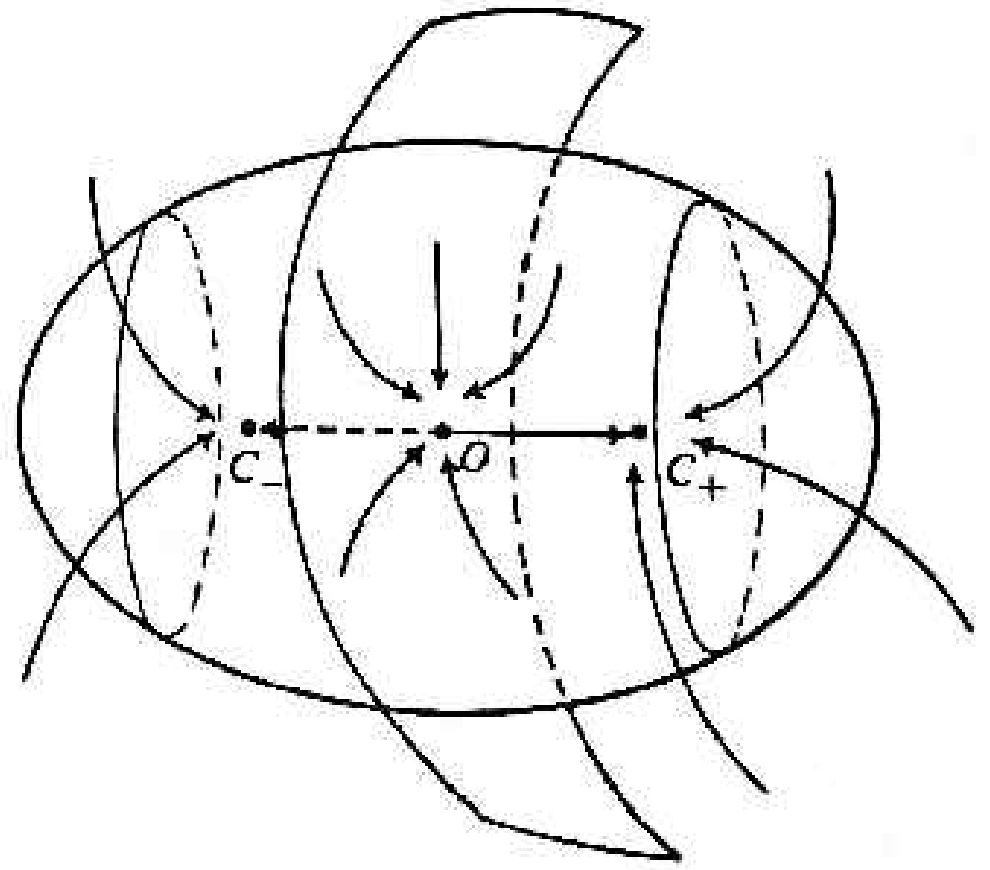
حال که انشعاب موضعی در $R=1$ را بررسی کردیم، نمودار حالات دستگاه را برای $R<1$ و R کمی بزرگتر از ۱ تشریح می‌کنیم. برای $R<1$، میدان برداری تنها یك نقطهٔ ثابت رباینده در O دارد که کلیهٔ مدارهایی را که وارد M می‌شوند جذب می‌کند (شکل ۱۶).

1. S.Smale 2. E. N. Lorenz



شکل ۱۶

برای مقادیر R کمی بزرگتر از ۱، دو نقطهٔ رباینده $C_{\pm}$ داریم و یك نقطهٔ ثابت زینی در O که دارای مجموعهٔ درون روندهٔ دوبعدی و مجموعهٔ بیرون روندهٔ یك بعدی است. دراینجا مجموعهٔ دوبعدی درون روندهٔ O، M را به دوناحیهٔ پایای M_+ که حاوی C_+ است و M_- که حاوی C_- است تقسیم می‌کند. کلیهٔ مدارهایی که در M_+ هستند جذب C_+ و کلیهٔ مدارهای M_- جذب C_- می‌شوند. درواقع مجموعهٔ درون روندهٔ O که برای مقادیر R کمی بزرگتر از یك تقریباً یك صفحهٔ دوبعدی نسبتاً صاف است، جدا کنندهٔ قلمرو ربایندگی C_+ و C_- می‌باشد (شکل ۱۷).



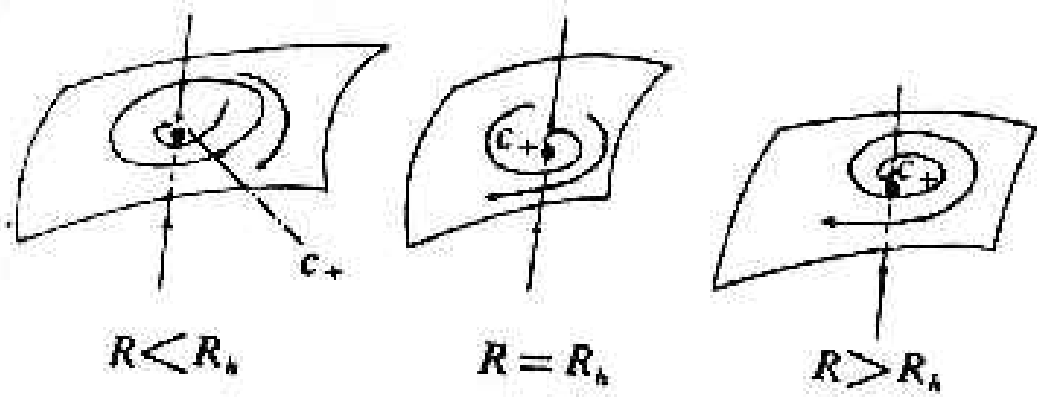
شکل ۱۷

وقتی مقدار R را از $R=1$ به‌بالا افزایش دهیم نقاط $C_{\pm}$ بیشتر و بیشتر از O فاصله می‌گیرند ومجموعهٔ درون‌روندهٔ O به طور فزاینده خمیدگی پیدا می‌کند تااینکه در $R\approx 13.92$ مجموعهٔ درون روندهٔ O به مجموعهٔ بیرون روندهٔ O اصابت می‌کند (در واقع مجموعهٔ بیرون رونده در مجموعهٔ درون رونده قرار می‌گیرد).

دراینجا انشعاب پیچیده‌ای صورت می‌گیرد، که برخلاف انشعاباتی که تا به‌حال دیده‌ایم یك انشعاب موضعی نیست که درهمسایگی یك نقطه انجام گیرد بلکه انشعابی سرتاسری است.

بررسی این دوانشعاب خارج ازحیطهٔ این مقاله است. تنها به‌ذکر این نکته اکتفا می‌کنیم که نمودار حالات دستگاه بلافاصله پس از این دوانشعاب هنوز دارای دو ربایندهٔ C_+ و C_- است و مجموعهٔ درون روندهٔ O کماکان جداکنندهٔ قلمرو ربایندگی C_+ و C_- است ولی به‌دلیل دو انشعاب اخیر، این مجموعهٔ درون رونده به‌طرز غامضی در مجاورت C_+ و C_- به هم می‌پیچد به‌طوری که مثلاً مداری که در M_+ قراردارد می‌تواند چندین‌بار در نزدیکی C_- به‌دور آن بپیچد تا سرانجام به C_+ میل کند.

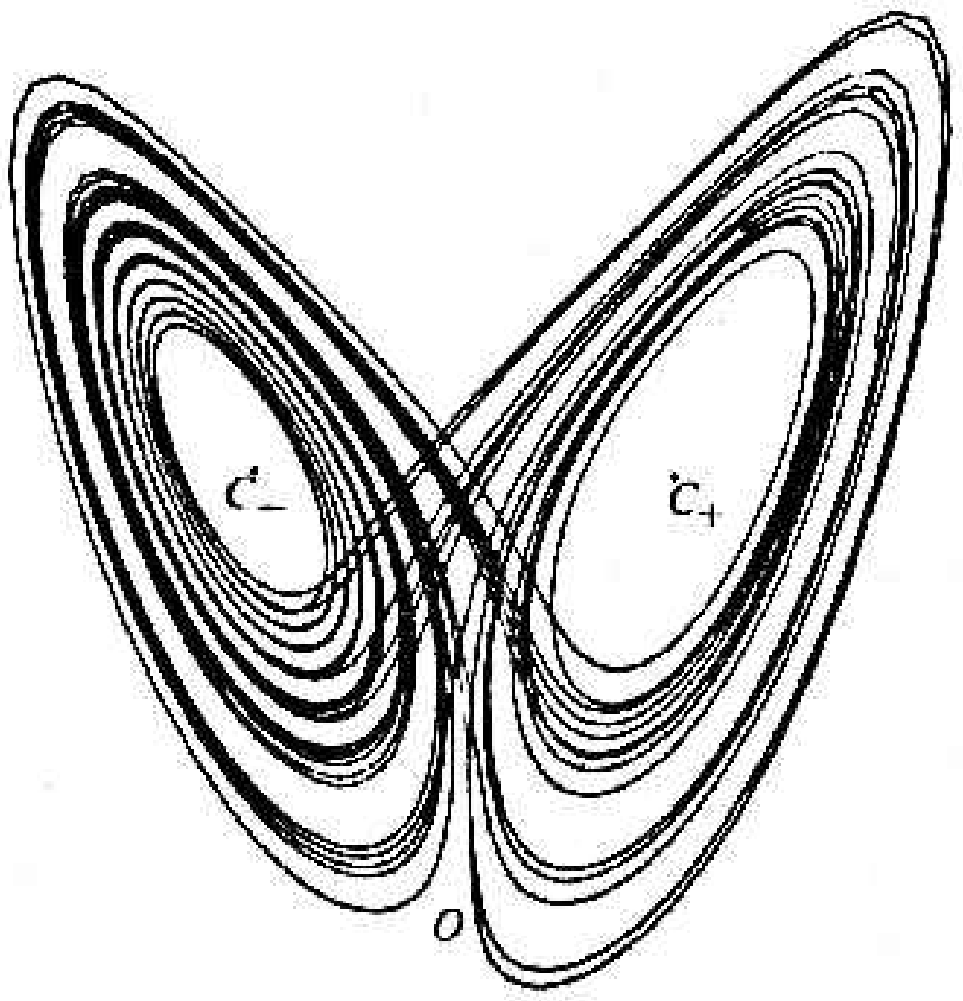
وقتی R بازهم افزایش یابد، در $R=R_h\approx 22.74$ درهریك از نقاط ثابت C_+ و C_- یك انشعاب هوپف ازنوع موجود درمثال ۶ صورت می‌گیرد. به‌عبارت دیگردرهریك‌ازنقاط‌ثابت C_+ و C_-روی یك خمینهٔ دوبعدی (خمینهٔ مرکزی) انشعابی از نوع هوپف صورت می‌گیرد ودرامتداد قاطع براین‌خمینهٔ دوبعدی درنقطهٔ ثابت موردنظر انقباض انجام می‌پذیرد (شکل ۱۸).



شکل ۱۸

درنتیجه برای R کمی بزرگتراز R_h، C_+ و C_- نقاط ثابت زینی هستند که هریك‌دارای مجموعهٔ درون‌روندهٔ یك بعدی ومجموعهٔ بیرون روندهٔ دوبعدی می‌باشند.

اما قبلاً گفتیم که M باید حاوی ربایندهٔ‌ای باشد. سؤالی که هم‌اکنون مطرح است این است که در شرایطی که هیچیك از نقاط O و C_+ و C_- برای R کمی بزرگتراز R_h رباینده نیستند چگونه ربایندهٔ‌ای‌در M وجود دارد؟ لورنتس با استفاده از روشهای تقریب عددی و شبیه‌سازی به‌کمك کامپیوترنشان داد که کلیهٔ مدارها در M جذب مجموعهٔ پیچیده‌ای می‌شوند که غیرقابل تجزیه است ونمودار تقریبی آن را می‌توان درشکل ۱۹ مشاهده کرد.



شکل ۱۹

ربایندهٔ لورنتس مطابق شکل فوق به‌صورت یك رویهٔ دولایه است که هریك ازلایه‌هایش حفره‌ای در وسط دارد. این دوحفره یکی نقطهٔ ثابت C_+ ودیگری C_- را دربر گرفته‌است. درنتیجه، ربایندهٔ لورنتس ربایندهٔ «غریبی» است که مانند هیچیك ازسه‌نوع ربایندهای که قبلاً دیدیم نمی‌باشد.

اگربه‌کمك کامپیوتر مسیر یك مدار دلخواه در M را بررسی کنیم خواهیم دید که مدارمزبوربه‌سرعت به‌ربایندهٔ لورنتس نزدیك‌می‌شود ومسیری‌کاملاً غیرقابل پیش‌بینی دارد به‌طوری که فی‌المثل چندین‌بار روی شاخهٔ C_+ به دوراین نقطهٔ ثابت می‌چرخد سپس تغییرمسیر داده به‌روی شاخهٔ C_- می‌رود وبه تعدادی ظاهراً نامشخص دور C_- می‌زندبعددوباره‌به شاخهٔ C_+ می‌برد واین‌کار الی‌الابد ادامه‌می‌یابد.

چگونه می‌توانیم این رفتاررا تبیین کنیم؟! ابتدا متذکرمی‌شویم که مجموعهٔ یك بعدی بیرون روندهٔ O مرز ربایندهٔ را تشکیل می‌دهد (شکل ۱۹). ازطرف‌دیگرهریك‌ازلایه‌های ظاهری ربایندهٔ حول C_+ و C_- نزدیك به مجموعهٔ بیرون روندهٔ این نقاط است. در نتیجه هرگاه یك مداردلخواه در M درنزدیکی شاخهٔ C_+ قرار بگیرد تحت تأثیرمجموعهٔ بیرون روندهٔ C_+ چندبار دور C_+ می‌چرخد به‌طوری که هربارفاصله‌اش از C_+ بیشترمی‌شود تا جایی که بالاخره‌در آخرین دورخود به‌قدری از C_+ دورمی‌شود که ازحوزهٔ نفوذ مجموعهٔ بیرون روندهٔ آن‌خارج می‌شودوتحت‌تأثیرمداری که از O دور C_- می‌چرخد (که نیمی‌ازمجموعهٔ بیرون روندهٔ O را تشکیل می‌دهد) قرارمی‌گیرد ونتیجتاً به‌سمت C_- سوق‌داده می‌شود. سپس تحت‌تأثیرمجموعهٔ درون روندهٔ C_- به‌شاخهٔ C_- نزدیك می‌شود و اینك چندین‌بار دور C_- می‌چرخد وهمان روندی را درچرخش به‌دورآن طی می‌کند که قبلاً در C_+ انجام داده بود. بنابراین مدار مزبور مرتباً پس از تعدادی چرخش دریکی ازشاخه‌ها به شاخهٔ دیگر می‌برد (شکل ۱۹).

حال‌اگردونقطهٔ بسیارنزدیك‌در M رادرنظربگیریم ومسیرمدارهای این دونقطه را مقایسه‌کنیم خواهیم دید که برای مدتی این دومدارددر نزدیکی یکدیگرقراردارند وباهم به‌دوریك شاخه چرخیده وباهم از یك شاخه به‌شاخهٔ دیگر می‌برند ولی چون هنگام چرخش به‌دور یك شاخه فاصلهٔ این دومدارتحت تأثیر مجموعهٔ بیرون روندهٔ C_+ یا C_- به‌تدریج افزایش‌می‌یابد بالاخره زمانی می‌رسد که مسیردومدار ازهم جدا شده یکی از آنها همچنان به دور شاخهٔ قبلی خود می‌چرخد در حالی که دیگری ازآن شاخه به‌شاخهٔ دیگر تغییر مسیر می‌دهد.

نکته‌مهم اینجاست که هرچندفاصلهٔ‌اولیهٔ دومدارجزئی باشد،بالاخره باگذشت زمان مسیرها ازهم جدا می‌شوند. درنتیجه اگر کوچکترین ابهامی دروضعیت اولیه‌موجود باشد، رفتاردرازمدت دستگاه غیرقابل پیش‌بینی می‌شود. در واقع هرگاه یك قطعه‌ای هرچند کوچك از فضای حالات را درنظربگیریم این قطعه پس ازمدتی چرخش به دور شاخه‌ها ناگهان به‌طورغیرمنتظره به دو تکه که هر یك به‌دور یکی از شاخه‌ها می‌چرخد تجزیه می‌شودوسپس هرکدام ازتکه‌ها پس ازمدتی دوباره دچارتجزیه‌می‌گرددواین روند دائماً ادامه می‌یابد به‌طوری که پس ازمدتی تکهٔ اولیه به تعداد بسیارزیاد تجزیه شده به‌طور کما بیش یکنواخت درکل ربایندهٔ پخش خواهدشد. ازلحاظ فیزیکی این بدان معنی است که خطای موجود دروضعیت اولیه هرچند هم که ناچیزباشد باگذشت زمان وضعیت دستگاه با احتمال برابرمی‌تواند درهریك از نقاط ربایندهٔ غریب باشد!

مطلب دیگری که‌شایان‌توجه است این‌است که‌هرگاه مقدار R راکمی تغییر دهیم، انشعابات پیچیده‌ای در دستگاه صورت می‌گیرد و اگرچه ساختارکلی ربایندهٔ غریب تغییری نمی‌نماید ولی توپولوژی مدارهای ربایندهٔ عوض می‌شود. به‌عبارت دیگر ربایندهٔ لورنتس دارای ثبات ساختاری به معنی مرسوم کلمه نیست هرچند که برای یك طیف از مقادیر R رفتارهای کلی مشابهی دردستگاه به‌چشم می‌خورد. این‌مطلب بیش‌ازهرچیزنارسایی مقولهٔ ثبات ساختاری را دربررسی‌ربایندهای غریب‌نشان‌می‌دهد. درواقع علی‌رغم‌تحقیقات پردامنه برای ربایندهای غریب در معادلات دیفرانسیل و همچنین در دستگاههای گسسته هنوز چارچوب نظری مناسبی برای شناخت و بررسی ربایندهای غریب وجود ندارد وتلاش دراین‌جهت بی‌شك یکی‌ازثمربخش‌ترین زمینه‌های فعالیت ریاضیات در سالهای آینده خواهد بود.

منابع

1. Abraham R., & Shaw C., *Dynamics: The Geometry of Behavior*, Aerial Press, Santa Cruz, CA, 1982.
2. Devaney R., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1986.
3. Guckenheimer J.,& Holmes P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vectorfields*, Springer-Verlag, New York, 1983.
4. Hao Bao-Lin, *Chaos*, World Scientific, Singapore, 1984.
5. Ruelle D., "Strange attractors", *Math. Intelligencer*, 2 (1980) 126-137.
6. Ruelle D., "Differentiable dynamical systems and the problem of turbulence", *Bull. Am. Math. Soc*,5 (1981) 29-42.
7. Smale S., *The Mathematics of Time*, Springer-Verlag, New York, 1980.
8. Sparrow C., *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Springer-Verlag, New York, 1982.

نگاهی به فرضیهٔ ریمان*

هربرت ویلف

بیشتر ریاضیدانهای حرفه‌ای از وجود فرضیهٔ ریمان و از اینکه این فرضیه مسأله‌ای حل نشده و به‌غایت مهم در ریاضیات محض و به‌ویژه در نظریهٔ اعداد است آگاه‌اند. در اینجا می‌خواهم راه بسیار ساده‌ای را برای بیان این مسأله با شما در میان نهم: راهی که می‌توان آن را برای یك کلاس قوی ماقبل آخر دبیرستان تشریح کرد. پس از آن مختصری در بارهٔ نتایج فرضیهٔ ریمان صحبت خواهم کرد، و سرانجام خبری در مورد پیشرفتهای هیجان‌انگیز اخیر در این زمینه خواهم داد.

اولاً، چگونه ممکن است این مسأله را برای دانش‌آموزان دبیرستانی شرح داد؟ یك راه این است که کار را با مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت شروع، و آن اعدادی را که بر مربع یك عدد صحیح بزرگتر از یك بخش‌پذیرند حذف کنیم. بدین ترتیب اعداد ۴، ۸، ۹، ۱۶، ۱۸، ۲۰، ۲۴ و... را کنار می‌گذاریم. برای ما فهرستی از اعداد صحیح مثبت خالی از مربع به صورت زیر به‌جا می‌ماند

۱,۲,۳,۵,۶,۷,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵,۱۷,۱۹,۲۱,۲۲,۲۳, ...

اگر هر یك از این اعداد صحیح خالی از مربع را به عوامل اول تجزیه کنیم، هیچ عامل اولی در این تجزیه تکرار نخواهد شد؛ یعنی هر یك از این اعداد صحیح، حاصلضربی از اعداد اول متمایز است. بعضی از اعداد خالی از مربع، حاصلضرب تعداد زوجی از اعداد اول متمایز و برخی دیگر، حاصلضرب تعداد فردی از اعداد اول متمایزند.

قرار می‌گذاریم که یك عدد صحیح، قرمز است اگر حاصلضرب تعداد زوجی از اعداد اول متمایز باشد، و آبی است اگر حاصلضرب تعداد فردی از اعداد اول متمایز باشد. بدین ترتیب ۱۴ عددی قرمز، و ۳۵ عددی آبی است (۱۸ بدون رنگ است، زیرا خالی از مربع نیست).

مثلاً اعداد صحیح خالی از مربع تا بزرگتر از ۳۵ عبارت‌اند از

۱، ۲، ۳، ۵، ۶، ۷، ۱۰، ۱۱، ۱۳، ۱۴، ۱۵،

۱۷، ۱۹، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۶، ۲۹، ۳۵.

در میان اینها، ۸ عدد قرمز

۱، ۶، ۱۰، ۱۴، ۱۵، ۲۱، ۲۲، ۲۶

و ۱۱ عدد آبی

۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۵

وجود دارند.

بنابراین درمیان اولین سی عدد صحیح مثبت، ۳ عدد آبی بیشتر از اعداد قرمز موجود است. فرضیهٔ ریمان، با بیانی نه چندان دقیق، می‌گوید که در هر فاصلهٔ $[1, n]$، تعداد اعداد قرمز با تعداد اعداد آبی تفاوت بسیار زیادی ندارد. در زیر، صورت دقیق این فرضیه را، نه آن گونه که ریمان بیان کرده، بلکه به‌صورتی که کاملاً معادل شکل اولیهٔ آن است و امیدواریم که قابل توصیف برای کلاس دبیرستانی باشد، آورده‌ایم

فرضیهٔ ریمان. $\varepsilon > 0$ را عددی ثابت می‌گیریم. در این صورت عددی مانند N وجود دارد که به‌ازای هر $n > N$ تفاوت تعداد اعداد آبی و قرمز در فاصلهٔ $[1, n]$ از $n^{(1/2)+\varepsilon}$ بیشتر نیست.

بنابراین، انتظار داریم که تعداد اعداد صحیح آبی و قرمز بین ۱ و n، با خطایی حداکثر «حدود» $\sqrt{n}$، باهم تقریباً مساوی باشند.

گزارهٔ بالا، بیانی نسبتاً روشن از فرضیهٔ ریمان است و آنچه کم دارد، آشکار نکردن اهمیت مسأله است. اگر حقیقتاً فرضیهٔ ریمان فقط مربوط به این واقعیت بود که این دو رنگ از اعداد به‌صورتی نسبتاً خوب درهم مخلوط شده‌اند، آنگاه مطلبی جالب توجه ولی نه مسأله‌ای مهم و برجسته به‌حساب می‌آمد. اهمیت این گزاره از انبوه پیامدهای آن نتیجه می‌شود، و ما به راستی نمی‌توانیم در اینجا به تفصیل در مورد آنها بحث کنیم [۲].

تعدادی از پیامدهای فرضیهٔ ریمان به‌صورت زیر ظاهر می‌شوند. دستورهای تقریبی مهم و زیادی در نظریهٔ اعداد وجود دارند. اهمیت این فرمولها در ارائهٔ تقریبهای نسبتاً دقیقی برای برخی توابع جالب است که رفتارشان به‌قدری پیچیده است که دستور دقیق برای آنها کمتر از دستورهای تقریبی مفید خواهد بود. یکی از آنها قضیهٔ مشهور به قضیهٔ اعداد اول است. این قضیه بیان می‌کند که تعداد اعداد اول بین ۱ و x، «نزدیك به» $x/\log x$ است.

این «نزدیك به»، تا چه حد نزدیکی را بیان می‌کند؟ ما چیز زیادی راجع به آن نمی‌دانیم. می‌توانیم بگوییم که خطای این تقریب از خود $x/\log x$ کندتر رشد می‌کند، و حتی کمی بیش از این هم می‌توان گفت. اما مثلاً، نمی‌توانیم بگوییم که این خطا سریعتر از $x^{0.75}$ رشد نمی‌کند. در واقع انتظار داریم که تقریب $x/\log x$ به غایت خوب باشد: فکر می‌کنیم (البته کسانی که به فرضیهٔ

ریمان معتقدند) که این خطا تنها مانند $n^{0.51}$ رشد می‌کند. معلوم‌شده است که این گزاره از فرضیهٔ ریمان نتیجه می‌شود. همچنین تعدادبسیار زیادی بـراورد خطای مهم و جـالب توجه «وابسته» به‌فرضیهٔ ریمان وجود دارد که اگر می‌توانستیم فرضیهٔ ریمان را ثابت کنیم، آنگاه تمام آن برآوردها به‌طورهمزمان ثابت می‌شدند. بیشتراهمیت فرضیهٔ ریمان در همین است.

به‌دورنگ عددی که در بالا از آنها صحبت کردیم برمی گردیم؛ درسال ۱۸۹۷، مرتنس[1] [۴] به‌این نظررسیدکه داده‌های تجربی‌ممکن است حتی فرضیه‌ای قویتر را تأییـد کنند. او مشاهده کرد که به نظر می‌رسد به‌ازای همهٔ مقادیر nی که وی قادر بود محاسبات مربوط را انجام دهد تفاوت بین تعداد اعداد قرمز وآبی نابزرگتر از $\sqrt{n}$ هیچگاه از $\sqrt{n}$ بزرگتر نیست. او آنچه را که بعدها «فرضیهٔ مرتنس» نامیده شد چنین فرمولبندی کرد:

فرضیهٔ مرتنس. به‌ازای هر $n \geqslant 1$، تفاوت بین تعداد اعدادصحیح‌قرمز وآبی در فاصلهٔ $[1, n]$ هیچگاه از $\sqrt{n}$ تجاوز نمی کند.

اگر فرضیهٔ مرتنس را با فرضیهٔ ریمان مقایسه کنیم، می‌بینیم که مرتنس مدعی بود که می‌توان ε را مساوی صفر و N را مساوی یك اختیار کرد، که اگر درست می‌بود، مسأله خیلی ساده می‌شد (آخرهمه دوست دارند که به‌جای ε، صفر را قرار دهند).

حال مایلم که راجع به‌نتایج محاسبهٔ زیبایی که چند سال پیش به وسیلهٔ نویماوئر [۵]، روی فرضیهٔ مرتنس انجام شد با شما صحبت کنم. در آن محاسبه همهٔ مقادیر n تا 10^8 و همراه آنها مقادیر بسیار دیگری برای n بزرگتر از 10^8، تا 10^{10} در نظر گرفته شدند. به‌ازای هر یك از این nها، تفاوت بین تعداد قرمزها وآبیها محاسبه شد.

آنچه که نویماوئر انجام داد ثبت اعدادی است که آنها را با $M_1(n)/\sqrt{n}$ نمایش می‌داد. در ایـن نمایش، $M_1(n)$ تعداد اعداد صحیح قرمز در فاصلهٔ $[1, n]$ منهای تعداد اعداد صحیح آبی در این فاصله است.

بنابراین اگرحدس مرتنس‌درست می‌بود، آنگاه‌مقادیرجدولبندی شدهٔ این نسبت باید همواره بین ۱− و ۱ قرار می‌گرفتند. در واقع نویماوئر حدسی حتی قویتر از حدس مرتنس را، به‌این مضمون که‌این نسبت به‌ازای n بزرگتر از ۲۰۰ هیچگاه از حیث قدرمطلق از ۰٫۵ تجاوز نمی‌کند، آزمود.

به‌هر صورت، تمام خوانندگان علاقه‌مند به مقالهٔ حـاضر باید نمودارهایـی را که در آن مقالـه نشان داده شده‌اند ملاحظه کنند. درآنجا، تابعی دیده می‌شود که به‌گونه‌ای نامنظم نوسان می‌کند وبین ۰٫۲۸± و یا درهمین حدود جلو و عقب می‌رود و بیش از هرچیز، شبیه میانگینهای شاخص بازار سهام دردوران بی‌ثباتی اقتصادی‌است.

نویماوئر ناگهان بـه ازای $n = 7,700,000,000$ و یا نزدیکیهای آن[2]، آنچه را که درجستجویش بود یافت. نمودار ناگهان به بالای ۰٫۵ جهید و مثال نـاقض برای حدس تقویت شدهٔ مرتنس (یعنی فرضیهٔ ریمان دوبار تقویت شده) پیدا شد.

---

۱. فرانتس‌مرتنس (۱۸۴۰ـ۱۹۲۷) در بوزنان، واقع در غرب لهستان مرکزی، متولد شد و در برلین تحصیل کـرد (مرجع تاریخی [۸] را ببینید).

۲. کارهای بعد [۱]، نقطهٔ جهش را به ازای $n = 7,725,038,629$ نشان داد.

چنین رفتـاری از نظـر متخصصین کار کشتهٔ نظریـهٔ اعـداد شگفت‌آور نبود. آنها قبلاً چندین بار حدسهای ساده شدهٔ گوناگونی را در مورد رفتار تـوابع پیچیده‌ای از نظریهٔ اعداد دیده بودند، حدسهایی که به‌ازای همهٔ مقادیرقابل‌محاسبهٔ n درست به‌نظرمی‌رسیدند ولی برای بسیاری ازمقادیر غیرقابل‌محاسبهٔ n نادرست ازآب‌درآمده بودند. در بعضی از حالتها، می‌دانیم که حدسی نادرست است، اما حتی‌مقداری از n راکه به‌ازای آن حدس مزبوردرمی‌شود نمی‌شناسیم. (آنچه را در زیر می‌آید ببینید).

خلاصه اینکـه، هرچند بعد از کار نویماوئر هنوز مثال ناقضی برای حدس اولیهٔ مرتنس نداشتیم، اما موجه بودن آن یقیناً مختصری لطمه دیده بود. باوجود این، مشکل بودن فوق‌العادهٔ حل‌مسائل مربوط به‌فرضیهٔ ریمان به‌این منجر شد که اکثراً تصور کنند که ممکن است تا تعیین تکلیف فرضیهٔ مرتنس راه درازی در پیش باشد.

در۱۹۸۵، ادلیزکو و تی‌ریل [۶] ثابت کردندکه فرضیهٔ‌مرتنس نادرست است.

در واقع آنها ثابت کردندکه به‌ازای تعدادی نامتناهی ازمقادیر n،فزونی‌اعدادقرمز بر آبی‌در فاصلهٔ$[1, n]$ از $1.06\sqrt{n}$ بیشتر است.

آنها همچنین نشان دادندکه به‌ازای تعدادی نامتناهی از مقادیر n، فزونی اعدادآبی بر قرمز در فاصلهٔ $[1, n]$ از $1.0009\sqrt{n}$ بیشتر است.

بااینکه این دو نفر نشان دادندکه تعدادی نامتناهی از دو نوع n وجود دارد، اثبات‌آنها حتی یك مقدار برای n مشخص نمی‌کندکه در موردآن یکی از نتایج بالا برقرار باشد.

بعداً یانوش‌پینتر [۷]، نشان دادکه حدس مرتنس یقیناً به ازای xی کوچکتر از 3.21×10^{64} نادرست است.

دراثبات ادلیزکو و تی‌ریل از روشهای بسیار جدیدی استفاده می‌شود.مثلاً،الگوریتم تقلیل‌پایهٔ شبکه‌ای‌لنسترا [۳] به‌کار گرفته‌می‌شود این اساساً الگوریتمی است که بردار کوتاهی را در شبکه‌ای صحیح که با پایه‌ای مفروض توصیف شده است سریعاً می‌یابد. احتمالاً بد نیست گفته شود که این الگوریتم در ابتدا برای یافتن روشهای چند-جمله‌ای ـ زمان به منظور حل مسائلی محاسباتی که قبلاً قابل دستیابی نبودند، مانند مسئلهٔ تجزیهٔ کامل یك چندجمله‌ای روی اعدادگـویا، اختراع شد.

اما در مقالهٔ ادلیزکو و تی‌ریل در می‌یابیم که این الگوریتم برای‌هدفی نظری ونه‌محاسباتی به‌کار رفته است‌که همان یافتن‌جوابی خوب برای دستگاه نامعادلات دیوفانتی همزمان است. نکتهٔ اساسی این‌است: گیریم u_j و γ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ اعداد حقیقی مفروضی باشند، در این صورت مسألهٔ یافتن عددی مانند y که به ازای آن همهٔ کمیتهای $|\gamma_j y - u_j|$، $j = 1, \ldots, n$، به‌طور همزمان کوچك‌اند، می‌تواند به‌مسألهٔ‌یافتن بردار کوتاهی دریك شبکهٔ صحیح تبدیل شود. معلوم شده است‌که موضوع مورد توجه در اثبات ادلیزکو و تی‌ریل، بلندترین بردار در پایهٔ انتقال یافته است‌که الگوریتم پیدا می‌کند.

البته‌هیچ‌داستانی‌نباید بدون‌یکی دو تانتیجهٔ‌اخلاقی‌به‌آخر برسد:

۱. εهارا دست کم‌نگیرید،صفر گرفتن آنها همانا تن به‌زحمت‌دادن‌است.

۲. هیچ چیز را تنها به‌خاطر برخی دلایل پیش پاافتاده، مانند دانستن اینـکه به‌ازای همهٔ مقادیر n تا ۷,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ درست‌است، باور نکنید.

۳. هرچند حدسی ممکن است نادرست باشد، کامپیوتر شما شاید قادر نباشد که نادرستی‌آن را در طی یك جستجوی طولانی (اما به هر

حال محدود) بیابد.

۴. الگوریتمهایی که به خاطر علوم نظری کامپیوتر بسط داده شده‌اند ممکن است به‌اثبات قضایای مهمی در ریاضیات محض کمک کنند.

۵. هرچند کامپیوتر شماهنوز مثال ناقضی نیافته وهیچ علامتی دال بر رسیدن به‌چنین تناقضی را نشان نمی‌دهد، اما روی مطالعهٔ یك میلیارد حالت بعدی اصرار کنید زیرا کسی چه می‌داند که چه چیزی ممکن است در آن حالتها یافت شود.

ترجمهٔ مجتبی منیری

• Wilf Herbert S., "A greeting; and a view of Riemann's hypothesis", *Amer. Math. Monthly*, **94** (1987) 3-6.

مراجع

1. Cohen H., "Arithmétique et informatique", *Astérisque*, **61** (1979) 57-61.
2. Edwards Harold M., *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, New York, 1974.
3. Lenstra A. K., Lenstra H. W. Jr., and Lovász L., "Factoring polynomials with rational coefficients", *Math. Ann.*, **261** (1982) 515-534.
4. Mertens F., "Über eine zahlentheoretische funktion", Sitzungsberichte Akad. Wiss, *Wien*, **IIa 106** (1897) 761-830.
5. Neubauer Gerhard, "Eine empirische untersuchung zur Mertenss-chen funktion", *Numerische Mathemarik*, **5** (1963) 1-13.
6. Odlyzko A. M., and te Riele H. J. J., "Disproof of the Mertens conjecture", *J. für die Reine und Angew. Math*, **357** (1985) 138-160.
7. Pintz Janos, "An effective disproof of the Mertens conjecture", *Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, preprint no **55** (1985).
8. te Riele H. J. J., "Some historical and other notes about the Mertens conjecture and its recent disproof", *Nieuw Archief voor Wiskunde*, July 1985, 237-243.

اشتباه است اگر فکر کنیم که دقت در اثبات، دشمن سادگی است. برعکس، مثالهای متعددی نشان می‌دهند که روش دقیق، ساده‌تر و آسان فهم‌تر است و تلاش در راه دقت، ما را وامی‌دارد روشهای اثبات ساده‌تری بیابیم؛ و نیز این تلاش غالباً به‌یافتن روشهایی می‌انجامد که بیش از روشهای کم‌دقت‌تر قدیمی قابل بسط و توسعه‌اند.

دیوید هیلبرت

بینهایت کوچکها به مدرسه باز می‌گردند*

ویکتور هارنیک

۱. آنالیز لایب‌نیتس

حسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال) را لایب‌نیتس و نیوتن، به‌طور مستقل، در حدود سالهای ۱۶۷۰ میلادی کشف کردند. کار آنها که بر پایهٔ کارهای پیشینیان بلافصلشان و همچنین کار ریاضیدانان پیشتر از آنها (که تاریخچهٔ آن دست‌کم تا زمان ارشمیدس به‌عقب بر می‌گردد)، قرار داشت، اثر عظیمی به جا گذاشت. واژگان و نمادهای لایب‌نیتس باقی ماندند، و هنوز هم به‌طور گسترده‌ای به‌کار برده می‌شوند. رهیافت او به اجمال چنین بود:

لایب‌نیتس می‌خواست جنبه‌های «موضعی» یا «لحظه‌ای» رفتار توابع را، یعنی پدیده‌هایی را که در تنها یك نقطه از مکان یا زمان اتفاق می‌افتند، تحلیل کند. به این منظور او گونهٔ جدیدی از اعداد، یعنی اعداد «بینهایت کوچك» را اختراع کرد ــ اعدادی که از لحاظ قدرمطلق از هرعدد حقیقی مثبتی کوچکتر بودند و با این حال باز مخالف صفر فرض می‌شدند. او این اعداد را بینهایت کوچکها (ی ناصفر) نامید. لایب‌نیتس به‌یاری این اعداد مشتق تابعی چون $f(x)$ را چنین تعریف کرد

$$f'(x)=\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$$

که در آن dx بینهایت کوچك ناصفری است که تغییری بسیار اندك، یعنی تغییری بینهایت کوچك را در x نشان می‌دهد. (البته dx با Δx که معمولاً برای نمایش یك نمو متناهی در x به کار می‌رود، به‌کلی فرق می‌کند. خود لایب‌نیتس نماد «$f'(x)$» را به‌کار نبرد. این نماد را بعدها لاگرانژ ابداع کرد.)

لایب‌نیتس توصیف پرآب‌وتابی از بینهایت کوچکها به‌عنوان کمیتهایی که در مقایسه با اعداد حقیقی مثبت معمولی (یا آن گونه که امروزه آنها را می‌نامند، اعداد حقیقی مثبت استاندارد)، قابل اغماض هستند، به‌دست داد ــ تقریباً به‌همان معنایی که مثلاً قطر یك توپ در مقایسه با قطر زمین، یا قطر زمین در قیاس با قطر کیهان، قابل اغماض است.

برای آنکه بتوان با این اعداد جدید کار کرد، لایب‌نیتس اصلی بسیار کلی، اما نه چندان روشن، به‌نام «اصل پیوستگی» وضع کرد. آنچه این اصل حکم می‌کرد، به زبان ساده تقریباً چنین بود که بینهایت‌کوچکها در واقع به‌طور خارق‌العاده‌ای کوچك هستند، اما برکنار از این ویژگیشان کاملاً همانند اعداد حقیقی معمولی رفتار می‌کنند. تمثیلی که ذکر کردیم، این نظر را تأیید می‌کند. درحقیقت اعدادی که برای توصیف اشیای کوچك چون توپها به‌کار می‌روند، دقیقاً از همان قوانینی پیروی می‌کنند که بر اعداد بزرگ منتسب به قطر سیارات یا حتی اعداد بزرگتر که ابعاد کیهان را بیان می‌کنند، حکمفرما هستند. باید تصدیق کرد که گرچه این اصل مبهم است، اما لایب‌نیتس آن را با مهارتی تمام به‌کار می‌برد.

۲. سرنوشت بینهایت کوچکها

از همان آغاز، احساسات ناخوشایندی دربارهٔ بینهایت کوچکها پدید آمد و نضج گرفت. خود لایب‌نیتس آنها را مولود «افسانه‌ای به‌درد بخور» می‌نامید. نیوتن خیلی زود آنها را رها کرد و ترجیح داد مشتق را برحسب «سرعت لحظه‌ای» (که به هیچ‌وجه مفهوم روشنتری نیست) تعریف کند. برعکس، هوپیتال که نخستین درسنامهٔ حسابان را نوشت، از آن دو با حرارت‌تر بود و واقعاً بینهایت کوچکها را باور داشت. اما همروزگارانش در این شوروشوق وشیفتگی با او هم رأی نشدند. در واقع اعداد لایب‌نیتس در معرض انتقادات بسیار خشنی قرار گرفتند. نامدارترین و بی‌پرواترین مخالف بینهایت کوچکها اسقف برکلی بود که آنها را در اثر خود به سال ۱۷۲۳، آماج انتقادات بیرحمانه‌ای قرارداد. ایرادات او عمدتاً در این راستاها بود:

(الف) هیچ بینهایت کوچك ناصفری نمی‌تواند وجود داشته باشد، زیرا هرعددی که قدرمطلقش از هرعدد حقیقی مثبتی کوچکتر باشد، باید برابر صفر شود.

(ب) اگر $f(x)=x^2$، آنگاه $f'(x)=2x$. حال آنکه $[f(x+dx)-f(x)]/dx=2x+dx$. چون این دو عبارت باید باهم برابر باشند، پس $2x+dx=2x$، یعنی $dx=0$، که با فرض ناصفر بودن dx متناقض است.

بینهایت کوچکها علی‌رغم ابهام منطقیشان، با موفقیت روزافزونی به‌کار برده شدند. پاره‌ای از ریاضیدانان برجسته نه تنها آنها را به‌کار می‌بردند، بلکه بیش از این، سخت می‌کوشیدند تا پایه‌ای منطقی برایشان فراهم کنند. در این راستا ما به نامهای لاگرانژ، دالامبر، بولتسانو و بیش از همه کوشی برمی‌خوریم. سهم کوشی در این تلاشها، داستان بس جالب و پیچیده‌ای دارد. او با بینهایت کوچکها به‌عنوان کمیتهای متغیری که به صفر می‌گرایند، برخورد

کرد. این برخورد حد را به صورت مفهومی بنیادی در آورد. (باید خاطر نشان کرد که توصیف کوشی ازحد، دقیقاً با تعریف آشنا و نوین اپسیلون-دلتایی یکی نیست.) بعدها آشکار شد که تلاش کوشی برای جلب اعتماد بیشتر به بینهایت کوچکها چندان قرین موفقیت نبوده است؛ در واقع کوششهای او تأثیری کاملاً وارونه برجای نهاد. این تأثیر ناخوشایند را می‌توان به‌خوبی از خلال ماجرایی که ذکر می‌کنیم، احساس کرد. کوشی در سال ۱۸۲۱ بینهایت کوچکها را در اثبات قضیه‌ای (با این مضمون که مجموع یک‌سری نقطه به‌نقطه همگرا از توابع پیوسته، یقیناً تابعی است پیوسته) به‌کار برده بود. بسیاری کسان مدعی شدند که قضیه نادرست است، اما کوشی سرسختانه از آن دفاع می‌کرد. مباحثه در این مورد تا پایان زندگانی او ادامه یافت. در ۱۸۵۳ چهار سال پیش از مرگش، در واکنش نسبت به مثال نقضی که آبل به سال ۱۸۲۶ ارائه کرده بود، مقاله‌ای منتشر کرد که در آن ضمن پافشاری بر درستی قضیه، برخی توضیحات روشنگرانه آمده بود. ظاهراً ریاضیدانان نمی‌توانستند تصویر ذهنی خاصی را که از بینهایت کوچکها داشتند، به همدیگر انتقال دهند. (خواننده علاقه‌مند می‌تواند در این باره به [۳] یا [۴] رجوع کند؛ با مطالعهٔ این مراجع، او در خواهد یافت که شك بین اینکه آیا کوشی واقعاً اشتباه می‌کرده است یا آنکه نظرش را بد می‌فهمیده‌اند، هنوز برطرف نشده است.)

نتیجهٔ تمام این وقایع به‌غایت شگفت‌آور است. در سال ۱۸۷۲ وایرشتراس مفهوم حد را بی آنکه حتی نامی از بینهایت - کوچکها به‌میان آورد، تعریف کرد. گرچه کمی تناقض‌آمیز به‌نظر می‌آید، اما در واقع این توصیف کوشی از حد بود که زمینه‌را برای تعریف وایرشتراس، تعریفی که امروزه‌قبول عام یافته‌است، آماده کرد. پس از آن وایرشتراس مفهوم حد را برای تعریف دیگر مفاهیم اساسی- پیوستگی و مشتق - به‌کار برد- پیامد ناگزیر این تحولات این بود که بینهایت کوچکها به‌عنوان ساخته‌های منطقاً پذیرفتنی، به‌طور کامل به‌کنار نهاده شوند.

مرحلهٔ مهم دیگر در سرگذشت بینهایت کوچکها، در ۱۹۶۰ یعنی تقریباً ۳۰۰ سال پس از ابداع آنها توسط لایب‌نیتس، به‌وقوع پیوست. در این سال آبراهام رابینسون[1]، «آنالیز نااستاندهٔ» خود را که در کنار سایر ثمرات، همچنین توجیه منطقی بایسته‌ای هم برای بینهایت کوچکها فراهم می‌آورد، منتشر کرد. کاری که سرانجام از پس سالیان مدید، وجود این اعداد را «موجه» جلوه داد.

۳. کاربرد بینهایت کوچکها در آموزش و پژوهش

استفاده از بینهایت کوچکها هرگز کاملاً وانهاده نشد. حتی تا امروز هم فیزیکدانان و ریاضیدانان کاربردی (کسانی که البته هرگز رهیافت نوین رابینسون را نیاموخته‌اند)، به‌طور گسترده‌ای آنها را به‌کار می‌برند. حدود سی سال پیش در بسیاری از دانشکده‌ها هنوز هم از بینهایت کوچکها برای آموزش حسابان به‌دانشجویان مهندسی استفاده می‌شد. حتی امروزه هم استادان فیزیك از «جزء سطح dA» یا «جزء طول dl» (از مثلاً یك رسانای الکتریکی) و مانند اینها سخن می‌گویند. شاهد خوبی برای پذیرش ناخودآگاه بینهایت کوچکها در ضمیر ریاضیدانان، این است که حتی در کتابی چون حساب دیفرانسیل و انتگرال لانداو- نمونهٔ اعلایی از دقت ریاضیات قرن بیستم- از نماد $\lim_{x\to 0} f(x)$ استفاده می‌شود. ظاهراً این نماد، این دیدگاه را باز می‌تاباند که حد «آخرین مقداری» است که f «در لحظه‌ای که x به 0 می‌رسد» اختیار می‌کند.

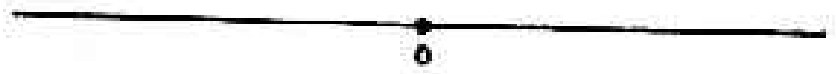
تنها در سالهای اخیر شاهد پرورش نسل کاملی از معلمان ریاضیات بوده‌ایم که حتی نامی هم از بینهایت کوچکها نشنیده‌اند. گرایش غالب در دانشگاهها وحتی دردبیرستانها این است که از طرح مفاهیم «نادقیق» چون بینهایت کوچکها پرهیز شود. طبیعی است انتظار داشته باشیم که با کشف رابینسون، بینهایت کوچکها به‌مدارس باز گردند. اما بیشتر ریاضیدانها می‌پندارند که کار رابینسون چنان پیچیده وفنی است که نمی‌توان به‌هیچ‌عنوانی آن‌را در آموزش نوآموزان ریاضیات عالی به‌کاربرد

کایزلر[1]، ریاضیدان برجستهٔ معاصر، از کسانی است که نظری خلاف این دارند. در ۱۹۷۶ کایزلر درسنامه‌ای در حساب بینهایت کوچکها [۱]، به‌پیوست یك راهنمای مدرسین [۲] برای آن منتشر کرد. او در این کتاب نشان داد که چگونه می‌توان بخش اساسی کشف رابینسون را به‌زبانی ساده بیان کرد واز آن در آموزش حسابان بهره جست. این کتاب در چند دانشگاه به‌طور آزمایشی تدریس شده است. (برای آگاهی از نتایج این کار، به گزارش [۵] مراجعه کنید.) وجود نوشتار حاضر، مرهون درسنامهٔ کایزلر است.

۴. چگونه از بینهایت کوچکها در دبیرستان استفاده کنیم

رهیافت مبتنی بر بینهایت کوچکها به‌حسابان‌را باید در جایی به‌کار برد که موضوع برای نخستین بار تدریس می‌شود، یعنی در دبیرستان. این آموزش مقدماتی را می‌توان با بهره‌گیری از روش کایزلر در سطحی بسیار شهودی انجام‌داد. البته برای عملی کردن این اندیشه، هنوز کارهای بسیار دیگری باید انجام شود، کارهایی از قبیل نوشتن کتابهای مقدماتیتر مناسب و آموزش دبیران. من می‌خواهم در اینجا به‌طور محدود روش آغاز آموزش بینهایت کوچکها در کلاس درس را مطرح کنم.

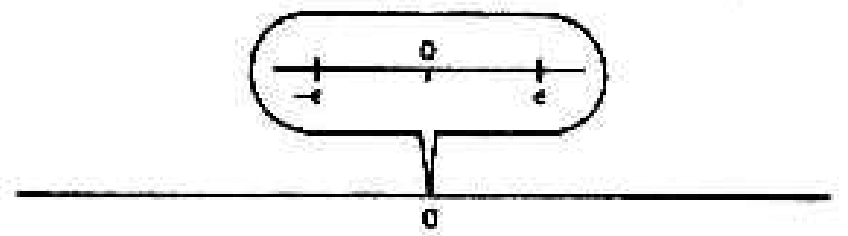
دبیر باید ابتدا این نکته را یادآوری کند که مفهوم عدد بارها و بارها در مدرسه، با معرفی کسرها، اعداد منفی واعداد گنگ (که این آخری برای سنجش نسبت درازای پاره‌خطها لازم است)، گسترش داده شده است. پس از آن او می‌تواند نوع جدیدتری از اعداد - یعنی بینهایت کوچکها(ی ناصفر) که مخالف صفرند ولی از لحاظ قدرمطلق از هرعدد حقیقی مثبتی کوچکترند - را معرفی کند. آنها را می‌توان با استفاده ازیك ترفند کایزلر، به‌شیوه‌ای بس ساده و ملموس تصویر کرد. فرض کنیم میکروسکوپی را برمبدأ، یعنی نقطهٔ 0 روی محور اعداد، قرارداده باشیم. در حالی که چشم غیرمسلح تصویری ماکروسکوپی مانند آنکه در شکل ۱ آمده می‌بیند، آنچه از نقطهٔ 0 تنها زیر میکروسکوپ دیده می‌شود چیزی است به‌کلی متفاوت.



شکل ۱

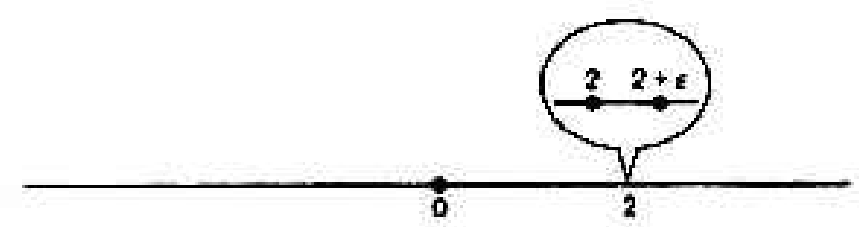
در مرکز یك «هستهٔ درخشان» خواهیم دید که آن‌را با صفر «واقعی» یکی می‌گیریم. در هردوطرف این هسته بسیاری اعداد دیگر به‌چشم خواهند خورد که، باز هم تکرار می‌کنیم، برای چشم غیرمسلح همهٔ آنها برنقطهٔ صفر منطبق‌اند، اما زیر میکروسکوپ از آن متمایزند (شکل ۲). همهٔ آن اعدادی که زیر میکروسکوپ بر گرد نقطهٔ 0 دیده می‌شوند، بینهایت کوچك هستند؛ خوده (یعنی «هستهٔ درخشان»)

1. Abraham Robinson



شکل ۲

نیز یك بینهایت کوچك است و بقیهٔ اعداد بینهایت کوچکهای ناصفر هستند. همان گونه که از تصویر میکروسکوپی پیداست، آنها دقیقاً همان رفتار اعداد ماکروسکوپی‌را دارند. برخی از آنها مثبت و برخی منفی هستند. آنها را می‌توان باهم جمع و درهم ضرب کرد، و هریك وارونی (جمعی) دارد. پس اگر ε یك بینهایت کوچك باشد، $2\varepsilon = \varepsilon + \varepsilon$، ε^2، و $-\varepsilon$ نیز همگی چنین خواهند بود.[1] حتی می‌توان هر بینهایت کوچك ناصفری را به یك عدد معمولی چون ۲ افزود و عددی چون $2+\varepsilon$ به‌دست آورد. اینها هم گونهٔ جدیدی از اعداد هستند، هرچند دیگر بینهایت کوچك نیستند. اینها کجایند؟ چگونه می‌توان آنها را دید؟ حدس‌زدن پاسخ این پرسش چندان دشوار نیست. باچشم غیرمسلح، $2+\varepsilon$ را منطبق بر ۲ می‌بینیم، اما با میکروسکوپی که بر ۲ متمرکز شده باشد می‌توان آن‌را متمایز از ۲ مشاهده کرد (شکل ۳).



شکل ۳

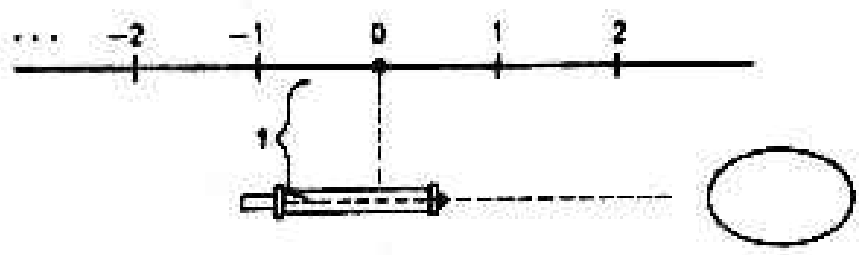
بیایید اعداد معمولی «ماکروسکوپی» را اعداد استانده بنامیم (اینها همان اعداد حقیقی متعارف هستند). اغلب به‌جای «اعداد استانده»، آنها را «اعداد حقیقی استانده» خواهیم خواند.

پس به‌این نتیجه می‌رسیم که هرعدد استانده چون a با بینهایت عدد از نوع جدید احاطه شده است. همهٔ این اعداد از دید ماکروسکوپی بر a منطبق‌اند، اما زیرمیکروسکوپ از آن متمایزند.

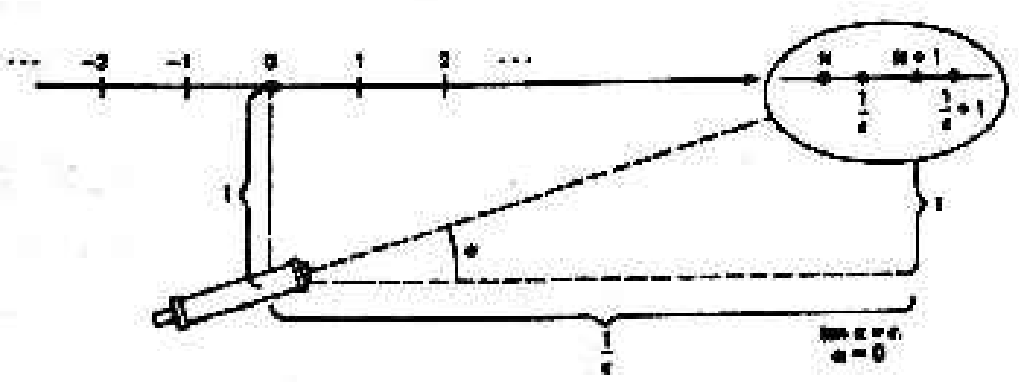
باز عدد استاندهٔ ۲ و عدد جدید نااستاندهٔ $2+\varepsilon$ را، که در آن ε بینهایت کوچك ناصفری است، در نظر می‌گیریم. به وضوح $2 \neq 2+\varepsilon$، اما این تساوی تنها از دیدگاه میکروسکوپی برقرار است، حال آنکه از دیدگاه ماکروسکوپی ۲ و $2+\varepsilon$ مساوی هستند. پس دو نوع تساوی (یا به‌عبارت دیگر، دو رابطهٔ تساوی متمایز) داریم: تساوی میکروسکوپی، یعنی همانی مطلق که آن را با نماد «$=$» نمایش می‌دهیم؛ و تساوی ماکروسکوپی که بین اعدادی برقرار است که با چشم غیرمسلح برهم منطبق دیده می‌شوند. ما این تساوی نوع اخیر را با «$\approx$» (نمادگذاری رابینسون) نشان خواهیم داد. پس $2+\varepsilon \approx 2$ (بخوانید: $2+\varepsilon$ نزدیك به ۲ است)، اما $2+\varepsilon \neq 2$.

ε بینهایت کوچك است اگر و تنها اگر $\varepsilon \approx 0$. این تساوی ماکروسکوپی به هیچ وجه نامساوی میکروسکوپی $\varepsilon \neq 0$ را نقض نمی‌کند. خود ۰ تنها بینهایت کوچك استانده است. به‌طور کلی، $a \approx b$ (a نزدیك به b است)، اگر و تنها اگر $a-b$ بینهایت کوچك باشد. پس به‌ازای اعداد استاندهٔ a و b، رابطهٔ $a \approx b$ هم‌ارز $a=b$ است. اما به‌ازای هر a و bی دلخواه، ممکن است $a \approx b$ و درعین‌حال $a \neq b$. استفاده‌ازاین‌دومفهوم تساوی انتقادات اسقف برکلی را برطرف می‌کند. دراین‌باره باید خاطرنشان کرد که لایب‌نیتس و هوپیتال هم آشکارا از تمایز این دوگونه تساوی نیك آگاه بودند، اما هرگز این تمایز را به‌گونه‌ای نمادی مشخص نکردند.

اگر ε بینهایت کوچك مثبتی باشد، می‌توان از وارون (ضربی) آن $1/\varepsilon$ سخن گفت. این وارون «عدد» مثبتی خواهد بود بزرگتر از هرعدد حقیقی استانده. چگونه می‌توان آن را دید؟ خوب، معلوم است دیگر، بایك تلسکوپ! تلسکوپی را تصور کنید که موازی محور اعداد وبه فاصلهٔ یك واحد از آن قرار گرفته باشد. دراین صورت چیزی درمیدان دیدآن قرار نخواهد داشت (شکل ۴). حال تلسکوپ رابه‌اندازهٔ یك‌زاویهٔ بینهایت کوچك ناصفر α به‌طرف‌محور بچرخانیم. گرچه تلسکوپ و محور اعداد هنوز «از دید ماکروسکوپی» موازی به‌نظر می‌رسند، «از دید میکروسکوپی» چنین نیستند و اگر زاویهٔ α به‌گونهٔ مناسب انتخاب شده باشد، تلسکوپ پاره‌خطی به‌مرکز $1/\varepsilon$ را نشان خواهد داد (شکل ۵). واضح است که انتخاب مناسب α، یعنی انتخاب αیی که به‌ازای آن رابطهٔ $\tan\alpha = \varepsilon$ برقرار باشد.



شکل ۴



شکل ۵

اعدادی را که با تلسکوپ می‌توان دید همهٔ اعداد مثبت و بینهایت بزرگ نااستانده هستند، اما از دیگر جنبه‌ها قطعه خطی که دیده می‌شود هیچ تفاوتی با بقیه ندارد. پس $1/\varepsilon$ باید جایی بین دو عدد صحیح بینهایت بزرگ و نااستاندهٔ N و $N+1$ باشد (البته ممکن است $1/\varepsilon = N$).

اعداد استانده و نااستانده باهم مجموعهٔ اعداد ۱بر حقیقی را تشکیل می‌دهند. آنها را می‌توان به‌دو دستهٔ کلی تقسیم کرد:

---

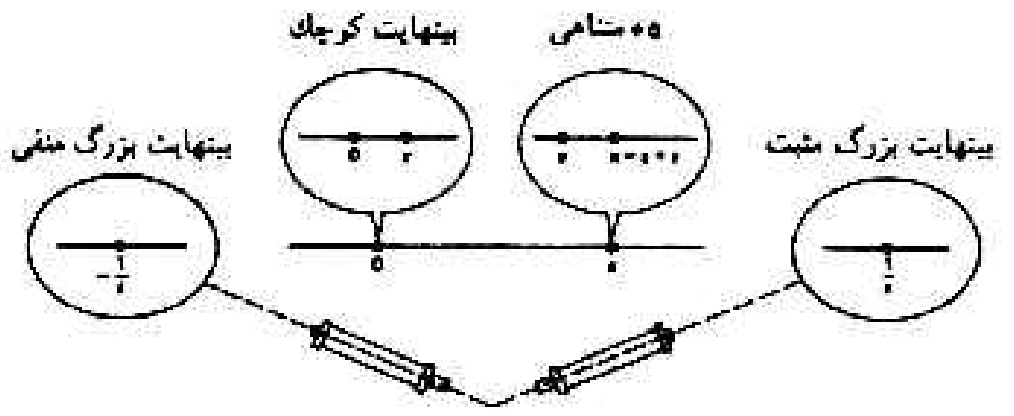
۱. این‌گونه توصیف بینهایت کوچکها بسیار جذاب است، زیرا بر پایهٔ مفاهیمی بنا شده است که از جهان فیزیکی آشنا برای دانش‌آموز قرن بیستم وام‌گرفته شده‌اند. اندیشهٔ اینکه آنچه در نگاه اول نقطهٔ واحدی‌می‌نماید، وقتی که ازنزدیك وبا ابزار دقیقتری به‌آن‌نگریسته شود، ممکن است ساختار پیچیده‌ای داشته‌باشد، دیگر امروزه نباید هیچکس را به‌شگفتی وادارد. این‌را هم بیفزاییم که استفاده از مفاهیم فیزیکی درآموزش مفاهیم ریاضی دامنهٔ گسترده‌ای دارد. مثلا توصیف یك‌خط راست به‌عنوان شکل یك‌ریسمان کشیده، مقایسهٔ نقطه‌ها با دانه‌های شن، یا یکی انگاشتن اعداد با نقطه‌های روی‌خط حقیقی، ویا یاری جستن از مفهوم ارتفاع یا دما برای توضیح مفهوم اعداد منفی و چیزهایی از این قبیل را می‌توان ذکر کرد.

(الف) ابرحقیقیهای متناهی: x یك ابرحقیقی متناهی است اگر و تنها اگر به‌ازای عدد حقیقی استاندهٔ مثبتی چون M، داشته باشیم $|x|<M$. پس x جایی درفاصلهٔ M و $-M$ روی خط اعداد حقیقی است. این واقعیت اساسی که کایزلر آن‌را «اصل موضوع بخش استاندهٔ» نامید، به‌بیان دقیق چنین است:

هر عدد ابرحقیقی متناهی x، نزدیك یك عدد حقیقی استاندهٔ a است.

واضح است که x نمی‌تواند نزدیك دوعدد حقیقی استاندهٔ متمایز باشد، عدد استاندهٔ یگانه‌ای چون a که $x\approx a$، بخش استاندهٔ x، $\mathrm{st}(x)$، نامیده می‌شود. پس به‌ازای ابرحقیقیهای متناهی x و y، $x\approx y$ اگر و تنها اگر $\mathrm{st}(x)=\mathrm{st}(y)$ و x بینهایت کوچك است اگر و تنها اگر $\mathrm{st}(x)=0$.

(ب) ابرحقیقیهای نامتناهی که می‌توانند مثبت یا منفی باشند. شکل ۶ گونه‌های مختلف اعداد ابرحقیقی را نمایش می‌دهد.



شکل ۶

هدف بعدی، آشنا کردن دانش‌آموز با اعداد ابرحقیقی از طریق واداشتن او به انجام عملهای مشخص برروی آنهاست. کتاب کایزلر به‌ویژه از این لحاظ بس سودمند است، چون تمرینهای متنوع بسیاری دارد.

نخست باید چند قاعدهٔ محاسبه‌ای ذکر شود:

(الف) بینهایت کوچك = { بینهایت کوچك + بینهایت کوچك ؛ ابرحقیقی متناهی × بینهایت کوچك }

(ب) بینهایت بزرگ = { بینهایت بزرگ + بینهایت بزرگ (هر دو مثبت یا هر دو منفی) ؛ (۰ ≉ متناهی) × بینهایت بزرگ }

(پ) متناهی = متناهی + متناهی

(۰ ≉ متناهی) = (۰ ≉ متناهی) × (۰ ≉ متناهی)

(ت) بینهایت بزرگ = ۱ / (بینهایت کوچك ناصفر)

بینهایت کوچك ناصفر = ۱ / (بینهایت بزرگ)

۰ ≉ متناهی = ۱ / (۰ ≉ متناهی)

توجه کنید: هیچ قاعده‌ای برای

(بینهایت کوچك / بینهایت کوچك)،

بینهایت بزرگ × بینهایت کوچك ناصفر

یا

بینهایت بزرگ − بینهایت بزرگ

(که هر دو مثبت یا هر دو منفی) وجود ندارد. زیرا مثلاً اگر $\varepsilon\approx 0$، $\varepsilon\neq 0$ آنگاه $\varepsilon/\varepsilon^2$، $\varepsilon^2/\varepsilon$ و ε/ε، همگی به‌صورت (بینهایت کوچك / بینهایت کوچك) هستند، اما به‌ترتیب بینهایت کوچك، ۰ ≉ متناهی، و بینهایت بزرگ هستند. از سوی دیگر (۰ × بینهایت بزرگ = ۰) و ۱/۰ تعریف نمی‌شود.

حال دوتمرین حل کنیم.

تمرین اول: با فرض $\varepsilon,\delta\approx 0$، بخش استاندهٔ $(3+\varepsilon)/(2+\delta)$ را پیدا کنید.

حل: حدس می‌زنیم که $(3+\varepsilon)/(2+\delta)\approx 3/2$، و به‌سادگی دیده می‌شود که تفاضل

$$\frac{3+\varepsilon}{2+\delta}-\frac{3}{2}=\frac{2\varepsilon-3\delta}{2(2+\delta)}=(2\varepsilon-3\delta)\cdot\frac{1}{2(2+\delta)}$$

بنا به قواعدی که ذکر کردیم، بینهایت کوچك است.

نکته: این تمرین حالت خاصی است از یك اصل کلی حاکی از اینکه اگر $a'\approx a$ و $b'\approx b$ (a و b متناهی هستند)، آنگاه

$$a'+b'\approx a+b, \qquad (1)$$

$$a'b'\approx ab, \qquad (2)$$

$$\frac{a'}{b'}\approx\frac{a}{b}\ (\text{با فرض } b\not\approx 0). \qquad (3)$$

برای تحقیق درستی این اصل کافی است قرار دهیم $a'=a+\varepsilon$ و $b'=b+\delta$ و همانند مثال بالا عمل کنیم.

تمرین دوم: (دشوار). اگر $x\approx 1$ اما $x\not\approx 1$، بخش استاندهٔ $(x^2-1)/(x^2+x-2)$ چیست؟

حل: دانش‌آموز کارآزموده بلافاصله به‌این نکته توجه خواهد کرد که اگر $x\approx 1$، آنگاه

$$x^2-1\approx 1^2-1=0,$$

$$x^2+x-2\approx 1^2+1-2=0,$$

و از این رو با عبارتی به‌صورت (بینهایت کوچك / بینهایت کوچك) سروکار دارد؛ او تصدیق خواهد کرد که این تمرین مشکل است. (البته این امکان هم وجود دارد که دانش‌آموز حتی متوجه بعضی از دشواریهای این تمرین نشود) یك راه حل طبیعی این است که قرار دهیم $x=1+\varepsilon$، که $\varepsilon\approx 0$، و عبارات زیر را محاسبه کنیم:

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{(1+\varepsilon)^2-1}{(1+\varepsilon)^2+(1+\varepsilon)-2}=\frac{2\varepsilon+\varepsilon^2}{3\varepsilon+\varepsilon^2}$$
$$=\frac{2+\varepsilon}{3+\varepsilon}\approx\frac{2}{3}$$

یك راه حل هوشمندانه‌تر توجه به تساویهای زیر است

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)}=\frac{x+1}{x+2}\approx\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

تمرین دوم از لحاظی به‌یك تمرین معمول در حسابان می‌ماند: «$\lim_{x\to 1}(x^2-1)/(x^2+x-1)$ را بیابید.» درواقع نتیجهٔ این تمرین را می‌توان چنین هم بیان کرد. اگر قراردهیم

$$f(x)=\frac{(x^2-1)}{(x^2+x-2)}$$

آنگاه نشان داده‌ایم که هر گاه $x\approx 1$ ولی $x\neq 1$، خواهیم داشت $f(x)\approx 2/3$. به عبارت دیگر هر گاه x نزدیك ۱، ولی مخالف آن باشد، $f(x)$ نزدیك $2/3$ است. پس ما به‌زبان بینهایت کوچکها حکم $\lim_{x\to 1} f(x)=2/3$ را بیان کرده‌ایم.

چگونه می‌توان مفهوم حد را برای یك تابع دلخواه $f(x)$ تعریف کرد؟ طبیعی است که تعریف زیر به‌نظر برسد:

(*) می‌گوییم $\lim_{x\to a} f(x)=l$ درصورتی که وقتی مقدار x نزدیك به a ومخالف آن باشد، مقدار $f(x)$ نزدیك به l باشد.

باید به یاد آورد که تابع f، یك تابع حقیقی استانده فرض می‌شود، یعنی تابعی که دامنهٔ تعریفش، D، مجموعه‌ای از اعداد حقیقی استانده است و $f(x)$ (به‌ازای $x\in D$) نیز استانده است. با این‌وجود در تعریف (*)، x می‌تواند مقادیر ابرحقیقی نااستانده را هم بگیرد! پس باید فرض کنیم که $f(x)$ برای (دست کم بعضی از) مقادیر نااستاندهٔ x هم تعریف شده است.

درمثال ویژهٔ ما، تابع $f(x)=(x^2-1)/(x^2+x-2)$ هیچ مسأله‌ای ایجاد نمی‌کند، چون به خودی خود نه تنها به ازای مقادیر حقیقی x، بلکه به‌ازای همهٔ ابرحقیقیهای مخالف ۱ و ۲ نیز تعریف می‌شود. علت این امر آن‌است که $f(x)$ تابعی گویا است، یعنی تابعی است که از کاربست چهار عمل اصلی روی x و ثابتها نتیجه می‌شود. عملهایی که می‌دانیم می‌توان آنها را روی اعداد ابرحقیقی هم انجام داد. هیچ دلیلی ندارد که حوزهٔ کاربست این اصل را تنها محدود به این عملهای اصلی و ترکیبات آنها بدانیم. درواقع، فرض می‌کنیم که هر تابع $f(x)$ تعریف شده به‌ازای برخی ازمقادیر حقیقی استاندهٔ x، خود به‌خود به‌ازای اعداد ابرحقیقی متناظر هم تعریف می‌شود. گرچه این ایده اساسا ساده است، در عمل باید با مثالهایی آن را روشن ساخت. به‌این منظور فرض می‌کنیم که $\tan x$ که به‌ازای همهٔ اعداد حقیقی غیر از اعداد به صورت $(2k+1)(\pi/2)$، که k عدد صحیح (استانده) است، تعریف می‌شود، به‌ازای همهٔ مقادیر ابرحقیقی نیز، بجز اعدادی به‌صورت $(2k+1)(\pi/2)$، که k عدد صحیح (نه لزوما استانده) است، تعریف می‌شوند (k می‌تواند عدد صحیح متناهی، یا بینهایت و در نتیجه نااستانده‌ای باشد)؛ گذشته از این، ما بیشتر $\tan\alpha$ را به‌ازای بینهایت کوچك ناصفر α هم به‌کار برده‌ایم. همچنین فرض می‌کنیم که مثلاً رابطهٔ

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

حتی به‌ازای x و yهای نااستانده هم برقرار است. به‌همین ترتیب، $\log x$ تابعی است که بر اعداد ابرحقیقی مثبت تعریف می‌شود (و همواره داریم $\log(xy)=\log x+\log y$)، یا $\sqrt{x}$ به‌ازای همهٔ ابرحقیقیهای نامنفی تعریف می‌شود، وقس علی‌هذا. دبیر باید این ایده‌ها را به‌تدریج و از طریق تمرینهای بیشمار به دانش‌آموزان القا کند. اگر این‌کار انجام شود، آنگاه تعریف (*) به‌ازای هر تابع (تعریف شده نزدیك به a) موجه جلوه می‌کند. به‌زبان نمادی

(۱*) $\lim_{x\to a} f(x)=l$ اگر و تنها اگر $\forall x\approx a(x\neq a\to f(x)\approx l$

پس از این می‌توان مفاهیم زیر را تعریف کرد:

f در x پیوسته است اگر و تنها اگر $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$

(۲*) $\forall\varepsilon\approx 0(f(x+\varepsilon)\approx f(x))$ اگر و تنها اگر

(۳*) به‌ازای هر $\varepsilon\approx 0$ که $\varepsilon\neq 0$، $f'(x)=\dfrac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$.

باید تأکید کنیم که x در (۲*)، و x و $f'(x)$ در (۳*) همگی استانده فرض می‌شوند.

همان گونه که پیشتر گفتیم، لایب‌نیتس «dx» را برای نمایش تغییر بینهایت کوچکی در x به‌کار می‌برد. حال گیریم $y=f(x)$. وقتی مقدار x به اندازهٔ بینهایت کوچك dx به $x+dx$ تغییر می‌کند، مقدار y از $f(x)$ به $f(x+dx)$ تغییر خواهد کرد. اگر f پیوسته باشد، این تغییر در مقدار y هم بینهایت کوچك خواهد بود ولایب‌نیتس آن را با «dy» نشان می‌داده است. در این صورت

$$dy=f(x+dx)-f(x)$$

و

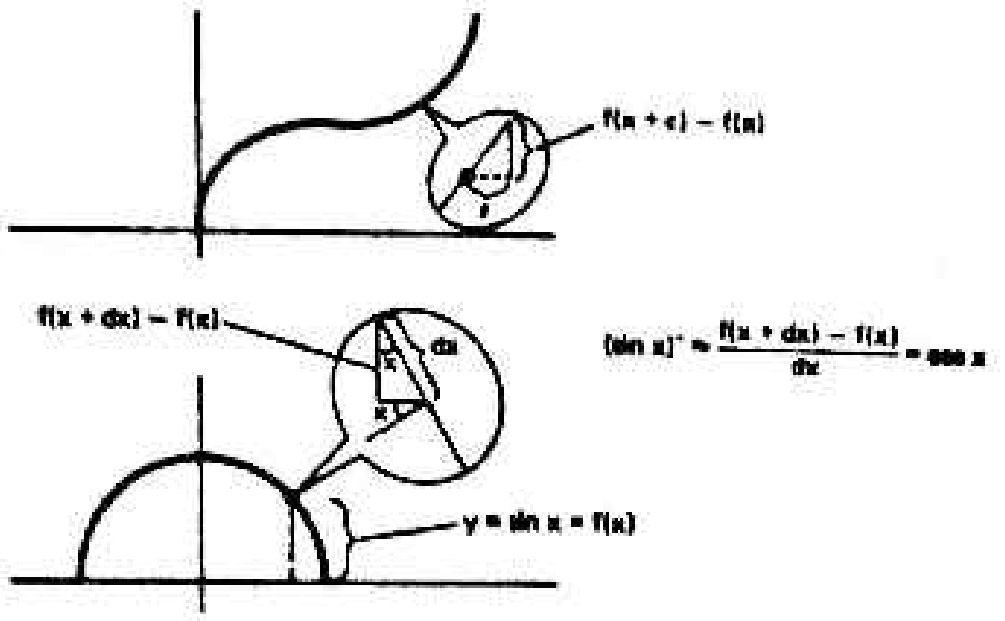
$$f'(x)\approx\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

این ملاحظات بود که لایب‌نیتس را به‌نماد آشنای «dy/dx» رهنمون شد. تأکید می‌کنیم که تساوی $f'(x)\approx dy/dx$ ماکروسکوپی است و اگر می‌خواستیم از دید میکروسکوپی به آن بنگریم، می‌بایست چنین می‌نوشتیم: $f'(x)=\mathrm{st}(dy/dx)$. همان گونه که قبلا اشاره شد لایب‌نیتس دردسر چنین تمایزات نمادین را به‌خود نداده است.

دو شکلی که در زیر از کتاب کایزلر می‌آوریم، به‌اندازهٔ کافی گویا هستند و شواهد خوبی برای نمایش توان آموزشی ترفند «میکروسکوپ» به‌شمار می‌روند. خواننده باید براساس این‌شکلها نشان‌دهد که مشتق $\cos x$، برابر $-\sin x$ (و نه $\sin x$) است.

تا اینجا کوشیدیم که به‌خواننده تصوری کلی از شیوهٔ آموزش حسابان درسطحی بسیار شهودی، برپایهٔ رهیافت بینهایت کوچکها بدهیم. در این راستا تنها به‌مقدمات حساب دیفرانسیل پرداختیم. درسنامهٔ کایزلر مجموعهٔ مفصلی ازموضوعات، ازجمله حساب انتگرال، را عرضه می‌کند. بیشتر مواد این درسنامه را می‌توان برای آموزش دبیرستانی بازنویسی کرد.

رهیافت بینهایت کوچکها از نظر آموزشی جذاب است،



زیرا تعاریف منطقی آن‌را می‌توان به‌طور شهودی هم پذیرفت؛ از این گذشته حتی ریاضیدانان حرفه‌ای هم که با تعریف اپسیلون - دلتایی حد به‌راحتی کار می‌کنند، عملا آن‌را به‌این‌صورت درک می‌کنند که کوچکی $x-a$، کوچکی $f(x)-l$ را ایجاب می‌کند. چون تعریف نااستانده (یعنی تعریف مبتنی بر بینهایت کوچکهای) حد این تصور شهودی را باز می‌تاباند، دریافت آن آسانتر است. مثلا دلایلی بر این مدعا وجود دارد که دانش‌آموزان دبیرستانی می‌توانند تمرین دومی را که ذکر شد، حل کنند. همان‌گونه که پیشتر گفتیم، با حل این تمرین آنها اثبات نااستانده صحیحی از حکم

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{2}{3}$$

خواهند داد. چندنفر از این دانش‌آموزان خواهند توانست اثبات استانده، یعنی اپسیلون - دلتایی، صحیحی از همین حکم را ارائه کنند؟ احتمالا تعداد معدودی.

این‌را هم بیفزاییم که تعریفهای نااستانده، ساختار منطقی ساده‌تری از مشابه‌های استانده‌شان دارند. مثلا تعریف نااستانده(*) از مفهوم حد، به‌طور ساده حکم می‌کند که به‌ازای هر x، یك شرط ساده و بی‌سور برقرار می‌شود. (عبارت «به‌ازای هر»، یا $\forall$، سور عمومی و عبارت «وجود دارد»، یا $\exists$، سور وجودی نامیده می‌شود.) برعکس در تعریف استانده حد، به توالی سورها مانند: «به‌ازای هر ε، وجود دارد یك δ، چنان‌که به‌ازای هر x ...» برمی‌خوریم. هرچه این توالی سورهای یك‌جمله بیشتر باشد، آن‌جمله پیچیده‌تر است و بالطبع دریافت معنی آن دشوارتر. تعریفهای نااستانده، پیچیدگی سوری کمتری از همانندهای استانده‌شان دارند.

۵. ماهیت کار رابینسون

از آنچه که تاکنون گفته‌ایم شاید چندان روشن نشده باشد که ماهیت و معنای کشف رابینسون چیست. اینك می‌کوشیم تا آنجا که ممکن است بدون ذکر جزئیات فنی زیاد، این معنا را بازگشاییم.

در پیدایش یك مفهوم نوین ریاضی، سه مرحله را می‌توان از هم بازشناخت.

(الف) مرحلهٔ آغازی. هر مفهوم نوینی از نیاز زاده می‌شود. در آغاز اغلب این مفهوم مبهم است و حتی ابداع کنندگانش هم نمی‌توانند به‌راحتی با آن کار کنند.

این مرحله را می‌توان به‌خوبی در پیدایش گونه‌های مختلف اعداد، چون اعداد گنگ، موهومی و ابدآل تشخیص داد (حتی خود این نامها نشانه‌هایی هستند از تردیدهای نخستین دربارهٔ این مفاهیم). همچنین می‌توان مفاهیم نقطه، خط، و صفحه یا مفهوم تابع را درنظر آورد.

(ب) مرحلهٔ آشنایی. مفهوم نوین بارها و بارها با اطمینان روزافزونی به‌کار برده می‌شود، تا آنجا که سرانجام کاملا متبلور شده و فهمیده شود. این مرحله ممکن است بسیار پیش از فراهم آمدن روایت اصل موضوعی از مفهوم (که جوهرهٔ مرحلهٔ سوم است)، طی شود. این موضوع را می‌توان به‌بهترین وجهی در مورد اعداد طبیعی مشاهده کرد. این اعداد پس از کشفشان، مدتها پیش از ارائهٔ روایت اصل موضوعی آنها توسط پئانو، که تنها در پایان سدهٔ نوزدهم آماده شد، کاملا درك شده بودند! به‌همین گونه، یونانیان نه‌تنها اعداد گویا، که حتی اعداد گنگ را دو هزار سال پیش از اصل موضوعی شدنشان (در سدهٔ نوزدهم) درك کرده بودند.

(پ) مرحلهٔ اصل موضوعی‌سازی، که خود از دو مرحلهٔ فرعی تشکیل می‌شود.

(پ۱) اصل موضوعی‌سازی مادی. پاره‌ای ویژگیهای اساسی مفهوم (یا مفاهیم) به‌عنوان اصول موضوع برگزیده می‌شوند. همهٔ ویژگیهای شناخته‌شدهٔ دیگر از این اصول موضوع استنتاج می‌شوند. اولین اصل موضوعی‌سازی مادی شناخته‌شده، بی‌تردید کار اقلیدس در هندسه است. اهمیت سترگ این کار را خللهایی که ما امروزه از آنها آگاهیم، خدشه‌دار نمی‌کند. اصل موضوعی‌سازی مادی اعداد حقیقی در اواخر سدهٔ نوزدهم انجام شد. شاخصترین اصل موضوع آن (در یکی از صورتبندیهایش) بیان می‌کند که هرمجموعهٔ [ناتهی] کراندار از اعداد حقیقی، یك کوچکترین کران بالا دارد.

(پ۲) اصل موضوعی‌سازی صوری. این، مرحله‌ای است امروزی که نیاز به‌آن حدود صدسال پیش آشکار شد و ماهیت آن تنها در سدهٔ حاضر به‌روشنی تبلور یافت.

ریاضیدان امروزی به‌فهرست اصول موضوعی که مفهومی مشخص را توصیف می‌کنند، از این دید می‌نگرد که آیا این اصول موضوع تناقض‌آمیزند یا نه. هرچه باشد این امکان وجود دارد که شهودمان، ما را گمراه کند و در واقع هیچ ساختاری که در همهٔ این اصول موضوع صدق کند، وجود نداشته‌باشد. این پرسش معمولا با ساختن یك الگو برای آن اصول موضوع، یعنی دستگاهی از اشیای ریاضی که در همهٔ اصول موضوع صدق کنند، پاسخ داده می‌شود.

این الگو را تنها کسانی می‌توانند به‌تمامی درك کنند، که از «بلوغ ریاضی» قابل‌ملاحظه‌ای برخوردار باشند. عموماً مشکل ذهنی عمده این است که اشیای الگو هیچ همانندی ظاهری با آن اشیای شهودی که اصل موضوعی شده‌اند ندارند. مثلا الگوهای بسیاری از اعداد حقیقی وجود دارد. معروفترین آنها، دستگاه برشهای ددکیند است. این برشها اصول موضوع اعداد حقیقی را برآورده می‌کنند، اما چون زوجهای مشخصی از مجموعه‌های نامتناهی اعداد گویا هستند، هیچ شباهتی با آنچه که ما شهوداً از اعداد حقیقی می‌فهمیم، ندارند. با این وجود در برخی از متنهای پیشرفته، برشهای ددکیند به اعداد حقیقی یکی گرفته می‌شوند. این کار البته از نظر ریاضی بسیار باشکوه است، اما وقتی به‌نوآموزان آموخته شود (همان‌گونه که گهگاه نابخردانه چنین هم می‌شود)، دراغلب موارد تأثیری

ناخوشایند بر آنهامی گذارد. احساسی که پدیدمی آید دربهترین حالت احساس مواجهه بایك معما و در بدترین حالت، چیزی است شبیه یك کابوس.

به سر وقت بینهایت کوچکها باز گردیم: هنگامی که از دید گذراندن این سه مرحله به تاریخچهٔ آنها می‌نگریم، در می‌یابیم که تا پیش از ۱۹۶۰ تنها نخستین مرحله واقعاً کامل شده بود. حال آنکه مرحلهٔ دوم، مرحلهٔ آشنایی، علیرغم کوششهای بسیار برای کامل کردن آن به فرجام نرسیده بود. رابینسون در آن سال به گونه‌ای درخشان مرحلهٔ اصل موضوعی سازی را به انجام رساند. او اصول موضوعی برای بینهایت کوچکها (یا دقیقتر، برای اعداد ابرحقیقی) معین کرد و الگویی (یا در واقع چند الگو) برای آنها ساخت. در خلال این کار او ماهیت بینهایت کوچکها را هم آشکار ساخت و با این عمل مرحلهٔ آشنایی را هم ضمن اصل موضوعی سازی به اتمام رساند. کایزلر، اصول رابینسون را ساده‌تر کرد. اصل موضوع تعیین کننده درفهرست کایزلر، «اصل موضوع جواب» نام دارد. این اصل حکم می‌کند که اگر $f(x)$ و $g(x)$ عبارتهایی استانده از متغیر x باشند (یعنی عبارتهایی که از ترکیب چند تابع استانده از متغیرها و ثابتهای حقیقی ساخته شده‌اند)، آنگاه معادلات $f(x)=0$ و $g(x)=0$ جوابهای حقیقی یکسان دارند اگر و تنها اگر جوابهای ابرحقیقی یکسان داشته باشند. به‌زبان نمادی، ویژگی

$$\forall x(f(x)=0 \leftrightarrow g(x)=0)$$

به ازای مقادیر حقیقی x برقرار است اگر و تنها اگر به ازای مقادیر ابرحقیقی x هم برقرار باشد. این اصل چیزی نیست مگر بیان دقیق حالت خاصی از اصل مبهم لایب‌نیتس، موسوم به «اصل پیوستگی»، (این اصل که ''یك ویژگی به ازای اعداد حقیقی برقرار است اگر و تنها اگر به ازای ابرحقیقیها برقرار باشد.'') همین حالت خاص هم برای مقاصد حساب دیفرانسیل و انتگرال بسنده است!

دست آخر می‌بینیم که رابینسون (و به تبع او کایزلر) تمایزات نمادی را به‌دقت مراعات کرده اند. همان گونه که پیشتر گفتیم، دو رابطهٔ متمایز $=$ و $\cong$ وجود دارد. $\mathbf{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است درحالی که $\mathbf{R}^*$ مجموعهٔ ابرحقیقیهاست و البته $\mathbf{R}\subset\mathbf{R}^*$. اگر f تابع استانده‌ای با مقادیر حقیقی و دامنهٔ $D\subset\mathbf{R}$ باشد، در این صورت (همان طور که اشاره شد) f «خودبه‌خود» روی یك مجموعهٔ «متناظر» از ابرحقیقیها تعریف می‌شود. به عبارت فنی‌تر، تابعی چون f^* با دامنهٔ تعریف D^* به f متناظر می‌شود، که $D\subset D^*\subset\mathbf{R}^*$، و به ازای هر $x\in D$ داریم $f^*(x)=f(x)$ و به ازای هر $x\in D^*$ عدد $f^*(x)$ ابرحقیقی است؛ f^* را توسیع طبیعی f می‌نامند. مثلاً اگر $f(x)=\sqrt{x}$، آنگاه D دامنهٔ f، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی نامنفی است، و D^* دامنهٔ توسیع طبیعی f، یعنی $f^*(x)=\sqrt{x^*}$، مجموعهٔ همهٔ ابرحقیقیهای نامنفی است. چون به‌ازای هر $x\in D$ داریم $(\sqrt{x})^2=x$، اصل جواب ایجاب می‌کند که به ازای هر $x\in D^*$ نیز تساوی $(\sqrt{x^*})^2=x$ برقرار باشد.

به دلایل عملی و آموزشی بهتر این است که تمایز نمادی بین یك تابع و توسیع طبیعی آن را نادیده بگیریم. به همین خاطر است که مثلاً هرگز جمع ابرحقیقیها را با نماد «$+^*$» نشان نمی‌دهیم (درحالی که باید چنین می‌کردیم). باز هم به‌همین دلیل، کایزلر پس از پشت سر گذاردن مقدمهٔ کتابش، نماد «f» را هم برای نشان‌دادن یك تابع استانده و هم برای نمایش توسیع طبیعی آن به‌کار می‌برد. شاید در آموزش دبیرستانی بهتر این باشد که این تمایزات نمادی را اصلاً مطرح نکنیم.

نتیجه‌گیری

همان‌گونه که کایزلر نشان‌داده است، بینهایت کوچکها، این‌ابزارهای خوب قدیمی و انگیزه‌بخش را می‌توان با اندکی انحراف از تعبیر لایب‌نیتسی آنها، به خوبی در آموزش حسابان به کار بست. تفاوت عمده، تمایز صریحی است که باید میان $\cong$ و $=$ قائل شد، و به کارگیری مفاهیمی است چون «بخش استانده» و چیزهایی از این قبیل که پیشتر به‌گونه‌ای صریح مطرح نشده بودند. درسطح کلاسهای درس، اهمیت عمدهٔ کار رابینسون این است که به ما معلمان اطمینان خاطر می‌بخشد. اطمینان از اینکه وقتی از «بینهایت کوچکها» سخن می‌گوییم، به واقع می‌دانیم چه می‌گوییم و از چه می‌گوییم.

ترجمهٔ رضا کرمی

• Harnik V., "Infinitesimals from Leibniz to Robinson, time to bring them back to school", *The Mathematical Intelligencer* (2)8 (1986) 41-47.

مراجع

1. Keisler H. J., *Elementary Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1976.
2. Keisler H. J., *Foundations of Infinitesimals Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1976.
3. Lakatos I., "Cauchy and the continum", *The Mathematical Intelligencer*, 1(1978) 151-161.
4. Robinson A., *Non-standard Analysis*, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1974.
5. Sullivan, K., "The teaching of elementary calculus using the nonstandard approach", *Amer. Math. Monthly*, 83 (1976) 371-375.

تاریخ ریاضیات دورهٔ باستان را چگونه باید بررسی کرد؟*

آرپاد سابو

در حدود دو دههٔ قبل تحقیقاتی را شروع کردم که امیدوارم به‌روشنتر شدن چندمسألهٔ تاریخ و فلسفهٔ ریاضیات کمک کرده باشد. در این مقاله چندان بر آن نیستم که نتایج این تحقیقات را مشخص کنم، بلکه بیشتر بر آنم که به مسائل وروشهای دنبال شده در این تحقیقات بپردازم.

ولی نخست می‌خواهم به‌رده‌بندی معروفی درمورد علوم، که‌مرا به‌یکی از مهمترین مسائلم هدایت کرد، اشاره کنم. شاخه‌های گوناگون تحقیقات‌علمی رامی‌توان به‌دو گروه مهم‌تقسیم کرد:علوم تجربی و علوم غیرتجربی. گروه‌اول به‌بررسی، توصیف، توضیح وپیش‌بینی‌رویدادهای جهانی که در آن زندگی می‌کنیم، می‌پردازد. احکام این علوم با واقعیتهای تجربهٔ ما مقابله می‌شوند، و تنها درصورتی قابل قبول‌هستند که درست بر شواهد تجربی استوار باشند؛ و خود علوم تجربی هم به‌طورکلی به‌علوم طبیعی و علوم اجتماعی تقسیم می‌شوند. (به‌اعتقاد من علوم رفتاری هم رویهمرفته جزو علوم اجتماعی به شمار می‌آیند، حتی‌اگر ازبرخی تأثیرات بسیارمهم علوم طبیعی برکنارنمانده باشند. ولی مسألهٔ من فعلاً این نیست.) به هر ترتیب، آنچه علوم تجربی را ازشاخه‌های غیرتجربی، یعنی‌منطق وریاضیات محض، متمایز می‌سازد وابستگی به شواهد تجربی است. زیرا گزاره‌های منطق و قضایای ریاضی‌بدون‌هیچ‌گونه‌ارجاع‌اساسی به‌یافته‌های‌تجربی‌اثبات‌می‌شوند. البته این تمایز را به‌صورت دیگری هم می‌توان بیان کرد، یعنی به‌این زبان‌که روش همهٔ‌علوم تجربی، استقرایی است، درحالی‌که روش هر دوشاخهٔ‌غیرتجربی، یعنی منطق و ریاضیات، قیاسی است. و تاآنجاکه این امربا‌ریاضیات‌ارتباط‌می‌یابد، این حکم‌آخر را می‌توانیم به‌کمک نکتهٔ ساده‌ای تکمیل کنیم که در سالهای اخیر به خصوص از سوی ریاضیدان معروفی چون پولیا مورد تأکید قرارگرفته است. او به ما یادآوری می‌کند که

> ریاضیات دو جنبه دارد: از یک سو علم دقیق اقلیدس است، ولی از سوی دیگر، چیزدیگری هم هست. ریاضیاتی که به‌سبک‌اقلیدسی ارائه می‌شود به‌صورت علمی قیاسی و منظم به‌نظر می‌آید، ولی ریاضیات درحال پیدایش به صورت علمی استقرایی، آزمایشی، و تجربی به‌نظر می‌آید.

درحقیقت،بیشتراحکام ریاضی درابتدا صرفاحدسها وگمان‌پردازیهایی بر مبنای تجارب عینی بوده‌اند، و مدتها بعد به قضایایی واقعی تبدیل شده‌اند، یعنی‌وقتی که ریاضیدانان‌سرانجام‌موفق به‌اثبات آنهامی‌شدند، به‌این معنی که‌آنها را از اصول ریاضی معینی استنتاج می‌کردند.

پرسشی که‌اکنون مطرح می‌شود پرسشی دوگانه‌است: ازیک‌سو پرسشی فلسفی است و ازسوی دیگر پرسشی تاریخی است (۱) فلاسفه باید این پرسش را پاسخ گویند که چرا ما برای یقین قیاسی، یعنی، یقینی که‌درمورد گزاره‌های ثابت‌شدهٔ ریاضی‌زبانزدهمگان است، ارج بیشتری قائل هستیم تا برای به اصطلاح عدم یقین استقرایی علوم تجربی؟ منظورم از عدم یقین این است:

> یک فرضیهٔ تجربی هر اندازه هم‌که مورد آزمون واقع شده باشد، و هر اندازه هم‌که توسط یافته‌های تجربی مورد تأیید قرارگرفته باشد، باز ممکن است در موارد بررسی نشده مردود شود. شواهد تجربی هیچگاه به‌تنهایی برای تصدیق یک‌فرضیه کفایت نمی‌کنند؛ به‌عبارت‌دیگر، هرگز نمی‌توانند صدق فرضیه را با یقین قیاسی تعیین کنند، بلکه تنها می‌توانند پشتیبان استقرایی کم و بیش‌قوی برای فرضیه به‌شمارآیند (همپل).

بدون شک، ارجی که ما برای «یقین قیاسی» قائل هستیم سبب می‌شود که ریاضیدانان همیشه تلاش کنند تا حدسها، وگمان‌پردازیهای صرف خود را به‌قضایای اثبات شدهٔ واقعی تبدیل کنند. ولی فکر می‌کنم که شاید احترام فوق‌العاده به «یقین قیاسی» تا اندازه‌ای مبالغه آمیز باشد. زیرا تا آنجا که اطلاع دارم هنوز پاسخ قانع کننده‌ای برای این‌پرسش وجود ندارد که چرا ریاضیدانان باید احکام خود را ــ حتی در مواردی هم که این احکام بدون هرگونه اثباتی بدیهی به شمار می‌آیند ــ ثابت کنند. همانطورکه پولیا نوشته است

> با اندکی اغراق می‌توان گفت که بشریت این اندیشه را ــ یعنی اندیشهٔ اثبات ریاضی را ــ تنها ازیک شخص وازیک‌کتاب‌آموخت، از شخص اقلیدس و ازکتاب اصول او.

حال بپردازیم به‌پرسش‌دوم‌خود، یعنی به‌پرسش‌تاریخی: ریاضیات چگونه توانست به‌علمی قیاسی ومنظم تبدیل شود؟ زیرا درابتدا، یعنی در تمدنهای باستانی و ماقبل یونانی مصر و بابل، ریاضیات صرفاً معرفت تجربی‌کاربردی و بسیارپیشرفته‌ای به‌شمار می‌آمد. در حقیقت، امروزه دیگر همه می‌پذیرند که بابلیها حدود هزار سال پیش از آغاز

ریاضیات یونان قادر بودند جواب مسائل ریاضی نسبتاً پیچیده‌ای را با تقریب بسیارخوبی پیدا کنند. لیکن، مطلقاً هیچگونه مدرکی وجود ندارد که حاکی از این امرباشدکه بابلیها (چه رسد به مصریان)هرگز تلاش کرده باشند که قضایای ریاضی را به‌سبك دقیقی ازاصول اولیه [معینی] استنتاج کنند. هنوز پاسخی برای این پرسش نیافته‌ایم که آیا ریاضیدانان مصر و بابل اصلاً مفاهیم علمی «قضیه»، «اثبات»، «استنتاج»، «تعریف»، «اصل متعارفی»، «اصل موضوع»، و غیره، را می‌شناختند یا نه. حتی در مورد این هم اطلاع قطعی نداریم که آیا بابلیها می‌دانستند چگونه قضایای کلی را باید صورتبندی کرد یا نه. ریاضیات تا پیش از تمدن یونان باستان چیزی جز دستورالعملهایی مفید (که گاهی حتی گردایه‌ای است از قواعد عملی بسیار ابتکاری) درارتباط با نحوهٔ انجام کارهای ریاضی مشخص نیست. تحول اساسی در تاریخ ریاضیات، یعنی دگرگونی معرفت تجربی-عملی گذشته، طی تکامل تمدن یونان باستان به‌وقوع پیوست. بنابراین، پرسش‌ما عبارت است از اینکه: دلیل اینکه یونانیان به معرفت تجربی قناعت و اکتفا نکردند چه بود؟ چرا آنان یك علم قیاسی دارای ساختمانی منظم را جانشین «مجموعه‌ای دستورالعمل» ساختند؟ چه امری موجب شد که آنان به‌ناگهان به‌آنچه به‌کمك نظریه می‌توانستند ثابت کنند ــ نشان دهند یا رد کنند ــ بیشتر اطمینان کنند تا به‌آنچه عمل صرف، درستی‌یا نادرستیش را نشان می‌داد؟ آشکار است که ریاضیات قیاسی زمانی زاده شد که معرفت صرفاً ناشی از تجربه دیگرمورد قبول نبود؛ ازآن پس،حتی آنچه‌تجربه همواره تأیید می کردمحتاج ملاحظات‌نظری‌بود.

به‌اعتقاد من شگفت‌انگیزترین جنبهٔ ریاضیات یونان، جنبه‌ای‌که آن را درهمان نگاه نخست از نظایر شرقی خود متمایز می‌سازد،وجود اثباتهای اصیل و واقعی است. علم یونانی تنها بـه بیان قضایا اکتفا نمی کندبلکه، مضافاً برآن، برای‌هرکدام ازآنها اثباتی ارائه می‌دهد. نقش اثبات در ریاضیات یونان‌کمتر از نقش‌آن در ریاضیات معاصر نیست؛ درواقع، در هر دو، نقش یکسانی دارد. افزون بر این، بیشتر اثباتهـای اقلیدس درنـوع خود الگو هستند و نسل اندر نسل معیار دقت ریاضی بوده‌اند، علیرغم ایـن واقعیت کـه ریاضیدانان جدید نقایصی دریك یا دو مورد می‌یابند، اثباتهای‌کتاب اصول در مجموع نمونه هستند.

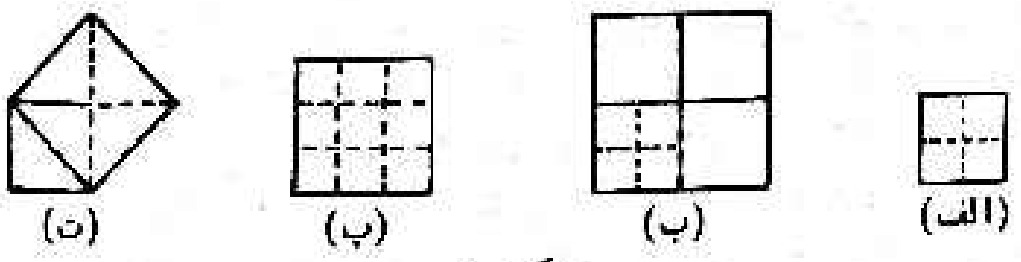
اکنون می‌توانم بازسازی خود را در مورد سیر تکامل اثبات ریاضی‌به‌شرح زیرخلاصه‌کنم. در ریاضیات یونان، اصطلاح فنی‌برای «اثبات» و «ثابت‌کـردن» فعل δείκνυμι (دیکنومی) است. اقلیدس در انتهای هر اثباتی آن را به‌کار می‌برد. او بحث خود را در مورد هـر قضیه با کلمات زیر به پایان می‌رسانـد ὅπερ ἔδει δεῖξαι «quod erat demonstrandum» یعنی«فهوالمطلوب» یـا «این همان است‌که می‌خواستیم ثابت کنیم».

این واقعیت که فعل یونانی دیکنومی از نظر ریشهٔ لغوی در ابتدا به‌معنای «اشاره‌کردن»، «نشان‌دادن»، و«قابل‌رؤیت ساختن» بوده است این فکر را به‌ذهن متبادر می‌سازدکه شاید نخستین «اثباتها» در ریاضیات مرکب از نوعی «اشاره کردن» به واقعیتها یا «قابل رؤیت ساختن» آنهـا بوده است. در تأیید ایـن نظر حتی می‌توان مثالی از افلاطون آورد.

سقراط در گفتگوی منون از یك غلام بیسواد عامی می پـرسد که‌چگونه می‌توان مساحت مربعی راکه هرکدام ازاضلاعش برابر با دوذرع‌است‌دوبرابرکرد. سقراط برای‌ممانعت ازهرگونه سوءتفاهمی، پس از طرح پرسش خود بی‌درنگ مربعی می کشد که هر کدام از اضلاعش طولی به‌اندازهٔ دوذرع را نمایش می‌دهند. (به‌سخن دیگر: او مربعی را که مساحتش باید دو برابر شود قابل رؤیت می‌سازد.) ازآنجا که سقراط به صراحت گفته بودکه اضلاع مربع اصلی طولی به‌درازای ۲ ذرع دارند، نخستین فکری‌که به ذهن این جوان خطور می‌کند این است که شاید بتوان مساحت مربع را با دو برابر کردن طول اضلاع آن دو برابـر کـرد. لیکن سقراط شکل دیگـری رسم می‌کند تا به‌او نشان دهد که مربعی‌که طول اضلاعش دو برابر طول اضلاع مربع اصلـی است مساحتی چهـار برابـر آن دارد. غـلام ناگزیر می‌پذیرد کـه نخستین پاسخ او به پرسش اصلی، پاسخ غلطی بوده است. و پیش خود چنین می‌انـدیشد: روشن است که مربعی با مساحتی دو برابر مساحت مربع اصلی باید اضلاع بلندتری داشته باشد؛ پس اضلاع مربع مطلوب باید بلندتر از۲ ذرع باشند. اما بیشتر از چهار ذرع هم نمی‌توانند باشند چون مربعی به اضلاع ۴ ذرع مساحتی چهار برابر مساحت مربع اصلی خواهد داشت. پس طول مطلوب باید کمتر از ۴ ذرع هم باشد. ازآنجا که سه مابین دو وچهار قراردارد، شاید مربعی که ضلعش سه ذرع طول دارد مساحتی دوبرابر مساحت مربع اصلی داشته باشد. بار دیگر واکنش سقراط این است که به‌کمك‌کشیدن شکلی نشان دهدکه مربعی باضلعی به‌طول سه‌واحد طول، مساحتی برابر با نه واحد سطح دارد، و درنتیجه بیش از اندازهٔ مطلوب بزرگ است. وسقراط عاقبت با کشیدن چهارمین شکل خود نشان می‌دهد که مربع حاصل ازقطر مربع اصلی، مساحتی درست دو برابر مساحت‌آن دارد.

به‌اعتقاد من این قسمت از منون افلاطون نمونهٔ بارزی است‌از اینکه در نخستین مرحلهٔ تکامل ریاضیات یونان احکام ریاضی چگونه مورد تحقیق و تصدیق قرار می گرفتند؛ یعنی‌آنکه به‌کمك‌آن می‌توان فهمیدکه قضایا «اثبات می‌شدند»، البته «اثبات» به‌معنای منسوخ کلمه.

«مربع حاصل ازقطر مربعی دیگر، مساحتی دو برابرآن دارد»ــ این قضیه‌ای بود که سقراط به صورت یك مسأله برای غلام بیسواد طرح کرد. تصاویر (ب) و (پ) شکل ۱ دو پاسخ نخستین را ابطال می کنند ونقص‌آنها را قابل‌رؤیت می‌سازند. درحالی‌که تصویر (ت) نه تنها پـاسخ صحیح را نشان مـی‌دهد (یعنی قضیهٔ مـورد نظر را صورتبندی می کند)، بلکه درعین حال «اثبات» قابل رؤیتی ازصحت آن است.



شکل ۱

البته خطاست ادعا کنیم که دوره‌ای وجود داشته است که طی آن، اثباتهای ریاضی چیزی جزقابل‌رؤیت ساختن‌واقعیتها نبوده‌اند. نباید فراموش کنیم که اثبات با فکر کردن در مورد آنچه دیده‌می‌شود به‌دست می‌آید. همین تفکر است‌که‌آنچه را می‌بینیم به مدرك تجربی و قابل‌رؤیت تبدیل می کند. قصد من فقط تأکید بر این نکته است‌که هستهٔ قدیمیترین اثباتهای ریاضی از راه قابل رؤیت ساختن واقعیتها تامین می‌شد.

ولی شکل نمونه‌وار اثباتهای اقلیدس بهیچوجه چنین نیست. اقلیدس، که‌آثارش برای ما درحکم قدیمیترین، و در عین حال شکل کلاسیك ریاضیات یونان است ، بهیچوجه دربند قابل رؤیت ساختن چیزی نیست. توجه او بیشترمعطوف به‌این‌است که‌باارائهٔ سلسله‌ای از

استدلالهای مجرد که در هر کدام می‌کوشد از دخالت هر گونه عنصر بصری پرهیز کند، خواننده را درمورد صدق قضایای خودقانع سازد. اکنون سعی می‌کنم تا این نظر خود را ــ یعنی اجتناب عامدانه و آگاهانه از توسل بـه عناصر بصری را ــ با اثبات اقلیدسی دو قضیهٔ بسیار ساده در مورد اعداد زوج و فرد روشن سازم. بنابریکی از این قضایا:

هرگاه تعداد دلخواهی عدد زوج را با یکدیگر جمع کنیم، کل حاصل هم زوج خواهد بود.

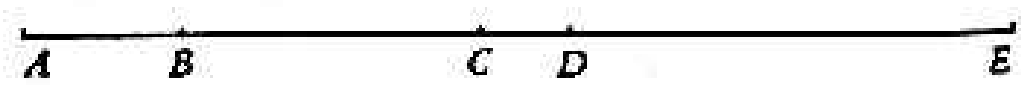
و بنابر قضیهٔ دوم:

هرگاه تعداد دلخواهی عدد فرد را با یکدیگـر جمع کنیم و این تعداد زوج باشد کل حاصل هم زوج خواهد بود.

البته، هردوی این قضایا برای کسی که با حساب آشنایی اندکی داشته باشد بیش از آن بدیهی به‌نظرمی آیند که نیازی به‌اثبات داشته‌باشند. این امراهمیت و جاذبهٔ نحوهٔ اثبات آنها را دوچندان می‌کند. در هر دو مورد، نخستین گام عبارت است از بیان یکی از مصادیق نمونه‌وار قضیه. برای مثال، در مورد اول

فرض کنید که تعداد دلخواهی عدد زوج AB، BC، CD، DE بـا یکدیگر جمع شوند؛ می‌گوییم که حاصل، AE، زوج است.

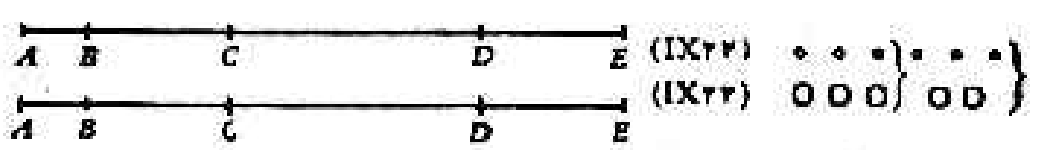
روشن است که اقلیدس اعداد مذکور را به‌صورت پاره‌خط در نظر می‌گیرد، زیرا هر یك را با دو حرف نمایش می‌دهد. همچنین، اینکه او حاصلجمع آنها را AE می‌نامد، بیانگر این امر است که نزد خودچنین تصورمی‌کرده است که حاصلجمع، از پشت سرهم قراردادن این پاره‌خطها حاصل می‌شود:



حال، اثبات چنین ادامه می‌یابد:

ازآنجا که هرکدام ازاعداد AB، BC، CD، DE زوج است، هر کدام نیمی‌دارد، بنابراین کل آنها یعنی AE هم‌نیمی دارد. اما عدد زوج عددی است که به دو جزء مساوی تقسیم‌پذیر باشد. پس AE زوج است. فهوالمطلوب

باید روشن شده باشد که این اثبات با آن نوع «قابل رؤیت ساختنی» که قبلاً در موردش سخن گفتم هیچ وجه اشتراکی ندارد. بهیچوجه‌نمی‌توان ادعا کرد که پاره‌خطهای AB، BC، وغیره، نمایش قابل رؤیت و دقیق «اعداد زوجی» هستند که به ما نشان می‌دهند که حاصلجمعشان، یعنی پاره‌خط AE، تنهامی‌تواند «عددی زوج» رانمایش دهد. زیرا کاملاً بیمعنی است کـه بگوییم پاره‌خط دلخواهی [تنها] می‌تواند نمایش قابل رؤیت «عددی زوج» باشد. لااقل به این دلیل که، در اثبات قضیهٔ دوم همان پاره‌خطها (با همان حروف) اعداد فرد رانمایش می‌دهند. درواقع بهیچوجه نمی‌توان اعداد زوج و فرد را، با استفاده ازپاره‌خط برای نمایش آنها، ازیکدیگرتشخیص داد. زیرا پاره‌خط را همیشه می‌توان به دو نیم تقسیم کرد. ولی، بنا بر تعریف، اعداد فرد را هرگز نمی‌توان به دو نیم تقسیم کرد درحالی که اعداد زوج را می‌توان.



شکل ۲

بنابراین درست است که اقلیدس طبق معمول، قرار داد نمایش اعـداد به وسیلهٔ پـاره خط را رعایت می‌کند، ولی فعل «δείκνυμι» («نشان‌دادن»، «چیزی‌را نشان‌دادن») را صرفاً به‌معنای مجازیش به‌کار می‌برد. او از نشان دادن چیزها سخن می‌گوید، ولی استدلالهای او اساساً مجرد هستند؛ مراحل آنها را نمی‌توان دید.

برای اینکه آسانتر تشخیص دهیم که اقلیدس تا چه اندازه از این امر پرهیز دارد که صدق قضایای ساده را قابل رؤیت سازد (یعنی آنها را «ثابت‌کند»، البته به‌معنای ابتدایی این لفظ)، کافی است که روش اثبات او (به‌کمك پـاره‌خطها) را بـا روش اثبات ابتدایـی آنها مقایسه کنیم. می‌دانیم که درآن موقع قضایای مربوط به‌اعدادفرد و زوج در ابتدا به کمك سنگریزه نمایش داده می‌شدند، بدین صورت که اعـداد زوج متضمن تعـدادی مساوی از سنگریزه‌هـای سیاه و سنگریزه‌های سفید بودند، در حالی که اعداد فرد با افزودن یا کاستن یك سنگریزه بـه، یا از، یکی از این دو نوع سنگریزه نمایش داده می‌شدند. این روش اثبات روشی بسیار ابتدایی است، ولی درعوض مضمون‌اصلی‌قضیه‌را قابل‌رؤیت می‌سازد. تنها کافی است که به‌ردیفهای سنگریزه نگاهی بیفکنیم تا خود را در مورد درستی قضیه قانع کنیم. زیرا سنگریزه‌ها به‌ما امکان می‌دهند تا ببینیم که‌آیا عددی زوج است یا نیست.

به نظر می‌آید که اقلیدس به این دلیل اثباتهای بصری را رها کرد که می‌خواست اثباتش برای همهٔ موارد ممکن معتبر باشد. به‌همین دلیل بود که پاره خط را جانشین سنگریزه کرد. زیرا نباید فراموش کرد که:نمی‌توان‌اعدادمخلوط($۵\frac{۲}{۳}$، ۳/۵، وغیره) را به‌کمك سنگریزه نمایش داد. ولی، پاره‌خط هم قرارنیست به‌جای عدد مخلوط به‌کار برود،بلکه به‌جای عدد دلخواه‌فرد یازوج مورد استفاده قرار می‌گیرد. افزون براین، اقلیدس به‌خاطردستیابی به تعمیم بیشتر بود که به‌استدلال منطقی روی‌آورد. به‌همین دلیل نقطهٔ شروع اثبات اویادآوری‌این‌امر است که عدد زوج، بنا بر تعریف، عددی است که به دو جزء مساوی تقسیم‌پذیر باشد. از این مطالب به‌وضوح نتیجه می‌شود که حاصلجمع اعداد زوج هم عددی زوج است، و . . .

اما، این نظر که اقلیدس، به‌دلیل تلاشش برای دستیابی به‌تعمیم هرچه بیشتر، قادر نبود که اعداد فرد و زوج را به‌نحو دقیقی نمایش دهد، ما را به‌یادقسمت جالب‌توجه دیگری ازاثرافلاطون می‌اندازد. منظورم آن قسمتی است که درآن‌سقراط توضیح می‌دهدکه‌تا آنجاکه به حساب مربوط می‌شود، اعداد نمی‌توانند پیکر قابل‌رؤیت و قابل لمسی‌داشته باشند؛آنها صرفاًعناصری آرمانی هستندکه تنها ازراه‌تفکر محض دریافتنی می‌باشند.

به‌این‌ترتیب می‌بینیم که‌در ریاضیات یونان، چنان‌که نمونه‌های آن در اثباتهای اقلیدس دیده می‌شود، با پرهیز از استدلال بصری تلاش می‌شود به‌موضوع ریاضی به‌عنوان چیزی نگریسته شود که‌صرفاً به عالم تفکر محض تعلق دارد. این گرایش در تکامل علم علت اصلی ارائهٔ‌جالبترین اثباتهای اقلیدس بوده‌است. مثال سوم من درست یکی از این اثباتهای اصیل اقلیدسی است.

درکتاب‌اصول قضیه‌ای وجود دارد (VII ۳۱) که خصوصیت

جالبی از اعداد مرکب را بیان می‌کند. ولی پیش از آنکه به تفصیل به آن بپردازم سه تعریف را که برای فهم آن لازم است یادآوری می‌کنم. این سه تعریف عبارت‌اند از:

VII ۲: «عدد، کثرتی متناهی است که از واحدها تشکیل یافته است.»
VII ۱۱: «عدد اول عددی است که تنها بر واحد تقسیم‌پذیر باشد.»
VII ۱۳: «عدد مرکب (یعنی عددی که عدد اول نیست) عددی است که بر عددی تقسیم‌پذیر باشد.» [یا به‌اصطلاح ریاضی عددی است که عددی آن را عاد کند.]

اما قضیه‌ای که می‌خواهم اثباتش را در اینجا با تفصیل بیشتری مورد بررسی قرار دهم می‌گوید که «هر عدد مرکب بر عدد اولی تقسیم‌پذیر است». اثبات آن به‌قرار زیر است.

اثبات. فرض کنید a عدد مرکبی باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که a بر عدد اولی تقسیم‌پذیر است. از آنجا که a مرکب است، دست‌کم یک عدد، مثلاً b، باید وجود داشته باشد که a بر آن تقسیم‌پذیر باشد. بنا بر تعریف خود عدد مرکب: «عدد مرکب عددی است که بر عددی تقسیم‌پذیر باشد.» اما b خود یا اول است یا مرکب، زیرا تعاریف «عدد اول» و «عدد مرکب» هر گونه امکان و حالت (سوم) دیگری را منتفی می‌کند. در حالت اول (که b اول است) قضیه ثابت می‌شود، زیرا a بر b تقسیم‌پذیر، و b عدد اول است. ولی در حالت دوم، عددی، مثلاً c، باید وجود داشته باشد که b بر آن تقسیم‌پذیر باشد (باز بنا بر تعریف «عدد مرکب»). اما واضح است که a هم بر c تقسیم‌پذیر خواهد بود؛ بنابراین اگر c اول باشد قضیه ثابت شده است. ولی اگر c مرکب باشد، عددی باید وجود داشته باشد که آن را عاد کند، و هکذا تا آخر. در این برهان، این امر مورد تأکید قرار می‌گیرد که این روند باید سرانجام به‌پایان رسد؛ زیرا در غیر این صورت دنباله‌ای نزولی از مقسوم‌علیه‌های مرکب a خواهیم داشت که نامتناهی خواهد بود. (به‌اعتقاد یونانیان هر عدد همواره بزرگتر از هریک از مقسوم‌علیه‌های خود است.) لیکن وجود یک چنین دنبالهٔ نامتناهی از مقسوم‌علیه‌های عدد دلخواهی چون a، تعریف عدد را نقض می‌کند: «عدد، کثرتی متناهی است که از واحدها تشکیل یافته است.» (واحد کوچکترین مقسوم‌علیه هر عددی است). پس a باید بر عدد اولی تقسیم‌پذیر باشد و قضیه اثبات می‌شود.

در این اثبات نه چیزی «نشان داده شده» و نه چیزی «قابل رؤیت ساخته شده» است. درست است که اقلیدس از پاره‌خط استفاده می‌کند تا مورد نمونه‌واری از قضیهٔ خود را روشن سازد؛ او عدد مرکب دلخواهی چون (a) را با چنین پاره‌خطی نمایش می‌دهد، و مقسوم‌علیه آن (b) را با پاره خطی کوتاهتر، اما این کار او چیزی جز رعایت قراردادی سنتی و منسوخ نیست. زنجیرهٔ استدلال او را نمی‌توان دید. اگر بخواهیم آن را درک کنیم، سودی ندارد که به‌اعداد (به‌صورتی که با پاره‌خط نمایش داده شده‌اند) نگاه کنیم؛ به جای این کار باید تعاریف انواع مختلف عدد را به خاطر بسپاریم، زیرا اثبات فقط بر آنها استوار است.

اثبات اقلیدسی که هم‌اکنون بررسی کردیم سوای اینکه استدلالی غیر قابل رؤیت است، لااقل دو جنبهٔ جالب توجه دیگر نیز دارد که مایلم در اینجا آنها را به‌طور صریح مورد تأکید قرار دهم. جنبهٔ اول عبارت است از اینکه: ما مجبور شدیم وجود عدد اولی را ثابت کنیم که مقسوم‌علیه عدد مرکب دلخواهی چون a بود، و دلیل قطعی این امر را از راه ابطال [فرض] «عدم وجود» آن به‌دست آوردیم. یعنی آنکه نشان دادیم که عدم وجود آن امری محال است. به‌سخن دیگر: اثبات ما به‌اصطلاح «اثباتی غیرمستقیم» بود، که در ریاضیات روش

بسیار متداولی است، یعنی روشی است که به کمک آن، صدق یک حکم معین از طریق نشان دادن کذب فرض نقیض آن اثبات می‌شود.

جنبهٔ دیگر اثبات مذکور که باید مورد تأکید قرار گیرد به‌شرح زیر است. برای اثبات غیرمستقیم حکم: «هر عدد مرکب دلخواه بر عدد اولی تقسیم‌پذیر است»، نخست نقیض این حکم را صورتبندی کردیم تا بتوانیم آن را ابطال کنیم، زیرا ابطال حکم اخیر اثبات حکم اصلی است. بنابراین گفتیم: «عدد a تعدادی نامتناهی مقسوم‌علیه دارد که هر کدام عددی مرکب است.» حال نکتهٔ جالب‌توجه این است که ببینیم چه امری نادرستی حکم اخیر را آشکار می‌سازد: این امر که حکمی آشکارا متناقض است. زیرا، عبارت «a عدد است» بدین معناست که «مجموعه‌ای است متناهی و متشکل از واحد»؛ و این نقیض این حکم است که «a تعدادی نامتناهی مقسوم‌علیه دارد.» با پذیرفتن صدق حکم اول از این دو حکم متناقض، در مورد حکم دوم کاری نمی‌توانیم بکنیم جز اینکه آن را به‌عنوان حکمی کاذب رد کنیم.

به‌اعتقاد من مهمترین گام تاریخی در تدارک زمینهٔ تحول ریاضیات تجربی و استقرایی ماقبل یونان به نظامی قیاسی، دقیقاً کاربرد همین روش اثبات غیر مستقیم بود. لیکن پیش از آنکه به منشأ این روش استادانه بپردازم، می‌خواهم، ولو به‌طور اجمال، دربارهٔ مشهورترین کاربرد آن در اثر اقلیدس سخن گویم. (فکر می‌کنم بسیاری این اثبات اقلیدس را به خاطر دارند، چون همهٔ ما آن را در دوران تحصیلات خود در مدرسه لااقل یک بار آموخته‌ایم.)

بنا بر قضیهٔ معروفی در حساب (IX ۲۰): «دنبالهٔ اعداد اول نامتناهی است.» اثبات غیر مستقیم این قضیه به صورت زیر است. نخست نقیض حکمی را که می‌خواهیم ثابت کنیم صورتبندی می‌کنیم، و نشان می‌دهیم که کاذب است، و بنابراین نتیجه می‌گیریم که قضیهٔ اصلی باید صادق باشد.

اگر دنبالهٔ اعداد اول نامتناهی نباشد، می‌توان دنبالهٔ کامل آنها را نوشت

$$۲, ۵, ۳, \ldots, P$$

که در آن P بنا بر ادعای مذکور «آخرین و بزرگترین عدد اول» به‌شمار می‌آید. حال ببینیم این حکم چه ایرادی دارد؟ ما می‌توانیم عددی مانند Q بسازیم (که عبارت باشد از حاصلضرب همهٔ اعداد اول به اضافهٔ یک)

$$Q = (۲ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot \ldots \cdot P) + ۱$$

عدد Q بزرگتر از P است و در نتیجه، از آنجا که بنا بر ادعای مذکور، Q نمی‌تواند عدد اول باشد، باید عددی مرکب باشد. (P، بنا بر فرض، بزرگترین عدد اول است.) بنابراین، Q باید بر عدد اولی تقسیم‌پذیر باشد. زیرا هر عدد مرکب بر عدد اولی تقسیم‌پذیر است. لیکن، همهٔ اعداد اول موجود، بنا بر فرض، در دنبالهٔ مذکور جای دارند. اما، حاصل تقسیم Q بر هر کدام از این اعداد باقیمانده‌ای برابر با یک دارد؛ و بنابراین، عدد اول مورد نظری که مقسوم‌علیه Q باشد هیچکدام از اعداد دنبالهٔ به‌اصطلاح کامل مورد ادعا نیست. پس با تناقضی روبرو هستیم؛ یعنی آنکه، در ابتدا حکم کردیم که: «دنبالهٔ متشکل از اعداد اول، کامل است.» ولی، از سوی دیگر، اکنون باید بپذیریم که: «همان دنباله کامل نیست.»

این تناقض، نادرستی این حکم را که دنبالهٔ کامل اعداد اول را می‌توان نوشت آشکار می‌سازد. نه، این حکم نمی‌تواند صادق باشد، و در نتیجه صدق حکم مخالف آن آشکار است: «دنبالهٔ اعداد اول

نامتناهی است.»

حال، [با در نظر گرفتن این مطالب] حدس من در مورد این مسالهٔ تاریخی این است که روش اثبات غیرمستقیم را ریاضیدانان نه خود آفریدند و نه آنکه نخستین کسانی بودند که آن را مورد استفاده قرار دادند. آنان این روش را، به‌اصطلاح حاضر و آماده، از فلاسفهٔ ایلیایی گرفتند. همان طور که احتمالاً اطلاع دارید، فلاسفهٔ ایلیایی با استفاده از این روش احکام متناقض بسیاری را، که در نقطهٔ مقابل تجربهٔ متعارف قرارداشتند، اثبات می کردند. برای مثال، زنون محال بودن حرکت را به‌طور غیرمستقیم ثابت می کرد، در حالی که تجربهٔ آگاهانه نشان می‌داد که حرکت، البته، امری واقعی است.

در این مقاله مجال آن نیست که درمورد فلسفهٔ ایلیایی توضیحات بیشتری بدهم. در نتیجه به شرح مهمترین جنبه‌های آن که چارچوب ریاضیات قیاسی را هم مشخص می کند اکتفا می کنم.

دردرجهٔ اول، این فلاسفه قایل اطمینان بودن حواس را مورد سؤال قرارمی‌دادند. آنان می گفتند که: حقیقت نمی‌تواند بر تجربیات حسی استوار باشد. به اعتقادآنان علیرغم انواع شواهدی که توسط حواس و تجربهٔ روزانهٔ ما تأمین می گردند، واقعیت و احکام صادق دربارهٔ آن تنها از طریق تفکر محض قابل اثبات است، زیرا حواس و تجربه گمراه کننده هستند. به‌همین دلیل بود که اقلیدس می کوشید تا در اثباتهای ریاضی خود از استدلالهای بصری پرهیز کند. اعداد نمی‌توانند پیکرقابل رؤیت و قابل لمسی داشته باشند، و تنها از راه تفکر محض می‌توان به‌صدق احکام مربوط به‌آنها پی برد.

جنبهٔ دوم در دیدگاه این فلاسفه این است که: پارمنیدس، و به‌طورکلی همهٔ فلاسفهٔ ایلیایی، فقدان تناقض را تنها معیارحکم‌صادق می‌دانستند. دراینجا نیازی به‌تأکید نیست که در ریاضیات هم‌ضمانت سازگاری هر نظام بسته‌ای تنها منوط است به‌فقدان تناقض.

نقش تعیین‌کنندهٔ تناقض در همهٔ بررسیهای مربوط به صدق، این امر را هم توضیح می‌دهد که چرا فلاسفهٔ ایلیایی در نظام فلسفی خود چنان ارزش عظیمی برای اثبات غیر مستقیم قائل بودند. آنان هیچکدام از احکام خود را اثبات نمی کردند؛ به‌جای این‌کار، احکام نقیض را ردمی کردند، یعنی نشان می‌دادند که این احکام مستلزم‌نوعی تناقض هستند. برای مثال، پارمنیدس سه امکان را از یکدیگر تمیز می‌داد: (۱) «هستی وجود دارد»، (۲) «هستی وجود ندارد»، و (۳) «هستی وجود دارد و وجود ندارد». آنگاه امکان دوم وسوم رابه‌عنوان احکامی آشکارا متناقض طرد می کرد، و این امر دلیل قانع کننده‌ای برای درستی امکان اول بود: «هستی وجود دارد.»

حال پرسشی که مطرح می‌شود این است که چه امری سبب شد تا ریاضیدانان این شکل بخصوص اثبات را از فلاسفه اقتباس کنند؟ به اعتقاد من به یاری این روش، اثبات واقعیت شگفت‌انگیزی در ریاضیات امکان‌پذیر گشت، که در غیر این صورت، یعنی بدون توسل به‌چنین‌شیوهٔ تفکری، هرگزقابل اثبات نبود. منظورم این واقعیت‌است که: نخستین ریاضیدانان یونان به‌دشواری (یا شایدبهتراست بگوییم که به محال بودن) بیان رابطهٔ ضلع و قطر یك مربع به‌وسیلهٔ اعداد، پی برده بودند. این واقعیت از این نتیجه می‌شود که این دو مقدار خطی ــ ضلع و قطر ــ مقادیری نامتوافق هستند. ولی فراموش نکنید که چرا این مفهوم (نامتوافق بودن) ــ که ازنظر به سرچشمه می گیرد و نه از تجربه ــ وارد ریاضیات شد. بنابر اثبات آن: اگر ضلع وقطر مربع متوافق باشند، یك‌عددمی‌بایست هم‌فردباشدهم‌زوج. ریاضیدانان برای آنکه از این تناقض پرهیز کنند مجبور شدند مفهوم «نامتوافق» را تعریف کنند. بنابراین می‌بینیم که کاربرد روش اثبات غیر مستقیم به‌پیدایش وآفرینش مفهوم علمی جدیدی منجر شد. اما درست همین امر منشأ تأسیس ریاضیات بر مبنای تعاریف و اصول موضوع بود.

در نتیجه حدس من این است که: ریاضیدانان یونان تحت‌تأثیر فلسفهٔ ایلیایی علم خود رابه‌نظامی قیاسی تبدیل کردند. برای آنکه این نظام را صورتی سازگار بخشند، یعنی به‌صورتی درآورند که دارای تناقض نباشد، آنان از اصول معینی آغاز می کردند که‌آنها را ازپیش و بدون هیچ برهانی می‌پذیرفتند. آنگاه، احکام (یا قضایا) می بایست خود را با اصول اثبات نشده هماهنگ سازند، یعنی آنکه خود را بدون تناقض با آنها تطبیق دهند.

حال حدس خود را به‌کمك مثالهای زیر روشن می‌سازم.

پیشتر به‌بحث دربارهٔ این قضیهٔ حساب پرداختیم که: «هر عدد مرکب a بر عدد اولی تقسیم‌پذیر است.» در اثبات آن خواندیم که: اگر عدد اول مطلوب پیدا نشود، معنی‌آن این خواهد بود که: عدد a بر اعدادی تقسیم‌پذیر است که دنباله‌ای نامتناهی تشکیل می‌دهند که هر کدام از آنها کوچکتر از دیگری است: امری که در مورد اعداد محال است. حال، وقتی این مطلب را در خود متن اصلی می‌خوانیم پرسشی که پدیدمی‌آید این است: چرا اقلیدس تأکید می کند که روند نامتناهی که وی توصیف کرده است «در مورد اعداد» محال است؟ از عبارات اوچنین برمی‌آید که گویا حوزهٔ دیگری وجود دارد که‌در آن، حالت مشابه این امرممکن است. این ملاحظه ما را به‌یادزنون ایلیایی می‌اندازد. زیرا نخستین بار، هم او بود که استدلال کرد جسم درحال حرکت نخست بایدنصف مسافت باقیمانده تا مقصد را بپیماید؛ لیکن این‌امرمستلزم آن است که‌نصف این‌نصف را بپیماید، والی غیرالنهایه. نکتهٔ مورد نظر زنون این بود که جسم در حال حرکت مسیری راطی می کند که از تعدادی نامتناهی فاصله تشکیل یافته است، که هر کدام کوتاهتر ازفاصلهٔ قبلی است. ولی این استدلال را می‌توان به‌صورت این ادعا هم تعبیر کرد که هر پاره‌خط مستقیمی، مانند AB، را می‌توان به‌تعدادی نامتناهی پاره‌خط تقسیم کرد به طوری که هر کدام کوتاهتر از قبلی باشد؛ اما این گفته، صرفاً بیان دیگری از این مطلب است که مقسوم‌علیه‌های AB دنباله‌ای نزولی و نامتناهی تشکیل می‌دهند. بنابراین چنین به‌نظر می‌آید که‌آثار نفوذ زنون در اثبات قضیهٔ مورد نظر ما در حساب منعکس است. زیرا واضح این اثبات راه خود را کج می کند تا این نکته را مورد تأکید قرار دهدکه اثباتش تنهابرای اعداد معتبر است، و انگیزهٔ او برای این کار احتمالاً این بوده که موردی را که زنون بررسی کرده بود، کنار گذارد.

درابتدای مقاله به‌تقسیم شاخه‌های مختلف تحقیقات علمی به‌دو گروه اصلی اشاره کردم: علوم تجربی و علوم غیر تجربی. بدون شك منشأ همهٔ علوم تجربی در نهایت تجربهٔ حسی است. لیکن، حواس‌ما قابل اعتماد نیستند. افزون بر این، روش علوم تجربی البته استقراء است، که این خود مستلزم عدم قطعیت قابل توجهی است. بنابراین علوم تجربی ما چیزی نیستند جز ــ به‌قول برخی از فلاسفهٔ امروزی ــ برنامه‌هایی تحقیقاتی، حدسهایی جسورانه وتلاشهایی صادقانه، نخست، برای تصدیق‌آنها، و سپس، برای ابطال همانها. از سوی دیگر، یقین معرفت ریاضیات قیاسی ازچه تشکیل شده است؟ بدون شك، قضایای ریاضی از راه برهان تثبیت می‌شوند، و این نشان می‌دهد که قضایای مورد نظر به‌طور منطقی از اصول نتیجه می‌شوند، به طوری که، اگر اصول صادق باشند، قضایا هم به‌یقین صادق خواهندبود. بنابراین‌یقین قضایا نسبت به اصول تعیین می‌شود. لیکن، موارد مشهوری وجود دارند که در آنها تصمیم در مورد صدق برخی اصول ریاضی امری کم‌وبیش دلخواهانه‌بوده است. (این‌موضوع را حتی درمرحلهٔ نخستین

دورهٔ باستان، یعنی لااقل در زمان قبل از ارسطو، نیز به‌خوبی می‌دانستند.) منظور من فقط اختلاف هندسهٔ اقلیدسی و نااقلیدسی نیست. (یعنی به‌اصل موضوع توازی اشاره نمی‌کنم، که نباید به طور مقدم بر تجربه در موردش تصمیم گرفت.) اصل اقلیدسی دیگری ــ از نوع اصول متعارفی ــ نیز وجود دارد که از شهرت کمتری برخوردار است: «کل بزرگتر از جزء است.» به نظر می‌آید که این اصل نه تنها در برابر استدلال شبهه‌انگیز زنون موضع می‌گیرد (استدلالی که در غیر این صورت ابطال‌ناپذیر می‌بود): «نصف زمان برابر است با دو برابر آن»، بلکه همچنین، اگر اغراق‌گویی نکنم، در برابر آن شیوهٔ تفکری هم که از ویژگیهای نظریهٔ جدید مجموعه‌هاست موضع می‌گیرد: «یک زیرمجموعهٔ نامتناهی، یک جزء واقعی از مجموعهٔ نامتناهی دیگر، با کل مجموعه معادل است.»

به‌اعتقاد من بررسی تاریخ ریاضیات باستان به‌این شکل، ممکن است به نحوی اساسی به حل مهمترین مسائل روز در زمینهٔ فلسفهٔ علم هم یاری رساند.

ترجمهٔ شاپور اعتماد

• Cohen R., Wartofsky M. (eds) *Methodology, Metaphysics and the History of Science*, 1984, D. Reidel Publishing Company, pp 283-294.

مراجع

1. Hempel C. G., *Philosophy of Natural Science*, New York, Prentice-Hall, 1966.
2. Hempel C. G., "Science unlimited?", *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, 3 (1973) 31-46.
3. Lakatos I., "Falsification and the methodology of scientific research programmes." In *Criticism and the Growth of Knowledge*, edited by I. Lakatos and A. Musgrave, Camberidge: Cambridge University Press, 1970, pp 91-195.
4. Polya G., *How to Solve It?*, Princeton: Princeton University Press, 1945.
5. Szabó Arpad, *Anfänge der Griechischen Mathematik*, München and Vienna: Oldenberg, 1969.

مرگ ارشمیدس به‌دست یک سرباز رومی، نمادی است از یک تغییر درجه اول در جهان؛ یونانیان نظریه‌پسند، با آن عشقی که به‌علم مجرد داشتند، به‌وسیلهٔ رومیهای عمل دوست از سروری اروپا کنار گذاشته شدند. لردبیکونفیلد در یکی از داستانهایش آدم عمل زده را کسی دانسته که خطاهای پدرانش را تکرار و تمرین می‌کند. رومیان نژادبزرگی بودند، اما به‌آن سترونی دچار شدند که در کمین عمل‌زدگی است. آنان معرفت پدرانشان را گسترش نبخشیدند و تمامی پیشرفتهایشان به‌امور جزئی کم‌اهمیتی در مهندسی محدود بود. رومیها آن‌قدر خیال‌پرداز نبودند که به‌پایگاههای نظری جدیدی برسند که می‌توانست عامل کنترل اساسیتری بر نیروهای طبیعت بشود. هیچ رومی به‌این دلیل زندگیش را از دست نداد که غرق تفکر در یک شکل ریاضی باشد.

آلفرد نورث وایتهد

چند خاطره از ریاضیدانهایی که شناخته‌ام*

جورج پولیا

جورج پولیا

پروفسور کلی[1]، خانمها و آقایان

قرارشده است که دراینجا سخنرانی کنم. ولی من خیلی پیر هستم و دوران خلاقیتم سپری شده است. چندتایی مطلب ریاضی هم که اخیراً تهیه کرده‌ام ناچیزتر و کم اهمیت‌تر از آن‌اند که بتوان دربارهشان سخنرانی کرد. دربارهٔ کارهای گذشتهٔ خودم هم که حدود شصت سال رویشان کار کرده‌ام، حرفی گفتنی ندارم، چون برای خیلی از شماها تازگی نخواهد داشت.

خوب، پس تکلیف سخنرانی چه می‌شود؟ البته صحبتم را برای بعد از شام نمی‌گذارم و همین حالا پیش از غذا، سخنرانی می‌کنم. برایتان چند خاطره از ریاضیدانهایی که می‌شناخته‌ام نقل می‌کنم. این مطالب درجایی چاپ نشده و شاید هم در خور چاپ‌شدن نبوده‌اند. در واقع، اینها داستانهایی هستند که سینه به سینه نقل می‌شوند و شما هم می‌توانید در مناسبتهایی آنها را برای دوستان یا شاگردانتان تعریف کنید.

وقتی اشخاص غیر ریاضیدان دربارهٔ ریاضیدانها صحبت می‌کنند (مثلاً وقتی که همسر یك استاد دانشگاه دربارهٔ شوهر خود یا دوستان شوهرش حرف می‌زند) معمولاً این سؤال مطرح می‌شود: چه ویژگی خاصی در ریاضیدانها وجود دارد؟ ریاضیدانها با بقیهٔ مردم چه فرقی دارند؟ جوابها هم اغلب یکسان است: «ریاضیدانها حواس‌پرت‌اند»، یا «ریاضیدانها غیرعادی‌هستند.» آیا واقعاً ریاضیدانان حواس‌پرت یا غیرعادی‌اند؟ من که نمی‌دانم، ولی داستانهای زیادی در تایید این مطلب وجود دارد که چندتایی از آنها را نقل می‌کنم. شاید بعضیهایش برایتان تکراری باشد ولی گمان نمی‌کنم همه‌شان‌را قبلاً شنیده باشید.

اول بپردازیم به موضوع حواس‌پرتی. خیلی از این داستانها دربارهٔ هیلبرت است. البته مطمئن نیستم که همهٔ اینها راست‌باشد ولی بعضیهایشان خیلی جالب‌اند. یکی از این داستانهای خیلی معروف از این قرار است: در یك مهمانی که در خانهٔ هیلبرت برپا شده بود، خانم هیلبرت ناگهان‌متوجه می‌شود که شوهرش فراموش کرده پیرهن تمیز بپوشد. با لحنی جدی به هیلبرت می‌گوید: «دیوید، برو اتاق بالا و پیرهن دیگری بپوش.» دیوید هم همان‌طور که از یك مرد متأهل جا افتاده انتظار می‌رود، مؤدبانه اطاعت می‌کند و راهی طبقهٔ بالا می‌شود. ولی به پایین برنمی‌گردد...، ده دقیقه می‌گذرد، ولی از هیلبرت خبری نمی‌شود. بالاخره خانم هیلبرت به اتاق خواب سر می‌زند و می‌بیند که هیلبرت به رختخواب رفته است. مطلب از این قرار بود که برای هیلبرت طبیعی‌ترین‌کاربعد از کندن کت و درآوردن کراوات و پیرهن، رفتن به رختخواب بود.

داستان دیگری هم هست که به‌آن علاقهٔ خاصی دارم، زیرا مرا به‌یاد گوتینگن قدیم می‌اندازد، جایی که بیش از نیم قرن پیش درآن تحصیل می‌کردم. آری... در آن زمانها در دانشگاه گوتینگن تشریفات خاصی وجود داشت. هرمدرس جدید که به‌دانشگاه می‌آمد، باید خودش را رسماً به همکاران معرفی می‌کرد. برای این کار کت سیاهی می‌پوشید، کلاه بلند ابریشمی به سرمی‌گذاشت، در تاکسی می‌نشست وروانهٔ کوی مسکونی دانشگاه می‌شد. تاکسی جلوی درهر خانه می‌ایستاد و همکار جدید کارت ویزیت خود را دم در ارائه می‌کرد. گاهی‌اوقات‌جواب می‌آمد که جناب استاد در منزل تشریف ندارند، ولی وقتی جناب استاد درمنزل بود، همکارجدید قاعدتاً باید وارد می‌شد و چند دقیقه‌ای خوش و بش می‌کرد. روزی یکی از این همکارهای‌تازه به‌خانهٔ‌هیلبرت آمد. هیلبرت‌تصمیم گرفت(یاخانم‌هیلبرت ازجانب‌اوتصمیم گرفت) که‌حضورش‌را درخانه‌اعلام کند. به‌این‌ترتیب، همکار جدید وارد خانه‌شد، نشست، کلاهش را برداشت و سرصحبت را باز کرد. تا اینجای قضیه اشکالی نداشت، ولی او ازصحبت باز نمی‌ایستاد. هیلبرت هم‌ـ که‌گویا این دیدار رشتهٔ تفکرات ریاضی او را پاره کرده بود ـ بیتاب‌تر وبیتاب‌تر می‌شد. فکرمی‌کنید آخرسرچکار کرد؟ کلاه‌ابریشمی رااز زمین‌برداشت وسرش گذاشت، دست همسرش را گرفت و گفت: «عزیزم، فکر می‌کنم به اندازهٔ کافی مزاحم‌وقت آقای همکارمان شده‌ایم» و ازخانهٔ خود خارج شد.

1. Klee

دیوید هیلبرت

درمورد ریاضیدانهای کم حافظه داستانهای معتبری وجود دارد؛ مثلاً می‌گویند که نیوتن وقتی روی مسأله‌ای شدیداً کار می‌کرد، اغلب یادش می‌رفت غذای خود را بخورد، یا وقتی غذایش را می‌خورد، فراموش می‌کرد که غذا خورده است. البته داستانهای دیگر اعتبار کمتری دارند.

داستان زیر را از تئودور فون کارمان[1] شنیده‌ام ولی تضمین نمی‌کنم که واقعاً چنین چیزی رخ داده باشد. راستش را بخواهید، او به داستانهای جالب خیلی علاقمند بود و بهترین داستانها هم اغلب واقعی نیستند، بلکه پرداختهٔ ذهن اشخاص‌اند. در آن ایام فون کارمان دو سمت داشت: هم استاد دانشگاه آخن درآلمان بود و هم در کلتک[2] پاسادنا (کالیفرنیا) تدریس می‌کرد. ضمناً به‌عنوان مهندسی چیره‌دست در رشتهٔ فضانوردی، طرف مشورت چند مؤسسهٔ هواپیمایی بود. به همین علت هم هروقت در هواپیمای یکی از این مؤسسات صندلی خالی یافت می‌شد، می‌توانست به رایگان با آن سفر کند. به این ترتیب بین آخن و پاسادنا رفت و آمد کم و بیش منظمی داشت. در هر دو جا هم یک درس را می‌داد. یک بار، وقتی به پاسادنا رسید خیلی خسته بود. با این حال شروع به درس دادن کرد. این کار چندان دشوار نبود، زیرا یادداشتهایی را که در آخن هم از آنها استفاده کرده بود، به همراه داشت. کارمان درس را شروع کرد ولی هرچه به دوروبرش می‌نگریست احساس می‌کرد که شنوندگانش بیش از همیشه مبهوت مانده‌اند. تازه پی‌برد که اوضاع از چه قرار است: او داشت به زبان آلمانی صحبت می‌کرد! خیلی ناراحت شد. «حقش بود به من تذکر می‌دادید ـ چرا چیزی نگفتید؟» دانشجویان ساکت بودند، ولی بالاخره صدای یکی بلند شد که: «ناراحت نباشید استاد؛ چه آلمانی صحبت کنید، چه انگلیسی، ما به یک اندازه از موضوع سر درمی‌آوریم.»

اما زیباترین داستانی که سراغ دارم، دربارهٔ نوربی[3] ـ یعنی همان نوربرت وینر[4] ـ است. (اسم «نوربی» را ضمن گفتگوی وینر با یکی از دوستانش شنیدم. وینر به دوستش گفت: «اعتراف کن که در غیاب من مرا وینی صدا می‌کنید.» دوستش هم جواب داد که «نخیر، نوربی صدایت می‌کنیم.») حالا ماجرایی را برایتان تعریف می‌کنم که خیلی جاها گفته شده است، ولی چندان حقیقت ندارد. موضوع دربارهٔ دانشجویی است که وینر را بسیار ستایش می‌کرد، ولی هیچوقت مجالی برای صحبت با او نمی‌یافت. یک روز صبح این دانشجو به ادارهٔ پست رفت. در آنجا وینر را دید که یک برگ کاغذ روی نیمکت جلویش گذاشته و غرق در تفکر به آن خیره شده است؛ ناگهان وینر با شتاب به‌سویی روانه شد و دوباره به سر وقت کاغذ برگشت و با همان حالت تفکر عمیق به آن چشم دوخت. دانشجو ازمشاهدهٔ این تلاش فکری فوق‌العاده که در حرکات وینر دیده می‌شد، سخت تحت تأثیر قرار گرفته بود. در این حال، مردد بود که برود یا وینر صحبت کند یا نه. اما ناگهان تردیدش برطرف شد، زیرا وینر که دوباره داشت ازکاغذش دور می‌شد، یکسره به سوی او آمد. دانشجو ناگزیر به‌حرف درآمد: «صبح بخیر، استاد وینر.» وینر درنگی کرد، قدری مبهوت ماند، دستش را به پیشانی کوبید و گفت: «آهان...! وینر...! دنبال همین کلمه می‌گشتم.»

در این زمینه داستان بهتری به‌خاطر ندارم که برایتان بگویم. پس برویم به سر وقت سؤال دوم: آیا ریاضیدانها اشخاصی غیر عادی‌اند؟ آیا افرادی غیرطبیعی و عجیب و غریب هستند؟

البته پاسخ به تعبیری مثبت است. ریاضیدان واقعی بودن، یعنی عمدهٔ تلاش خود را نه در راه کسب ثروت یا خدمتگزاری به‌مافوق خود، بلکه صرفاً دراندیشیدن به ریاضیات صرف کردن، البته رفتاری غیرمتعارف است. پس بهتر است سؤال را به این صورت طرح کنیم: آیا اگر ازاین جنبه بگذریم، بازهم ریاضیدانها غیرعادی‌اند؟

جواب این سؤال را نمی‌دانم. وقتی به ریاضیدانهایی فکر می‌کنم که آنها را نسبتاً بهتر شناخته‌ام، ترجیح می‌دهم که ازهرگونه قضاوت کلی پرهیز کنم. بگذارید برایتان از سه ریاضیدان که از نزدیک آنها را شناخته‌ام صحبت کنم: لئوپولد (لیپوت) فه‌یر[1] (۱۸۸۰ـ۱۹۵۹)، آدولف هورویتس[2] (۱۸۵۹ـ۱۹۱۹) و گادفری هارولد هاردی[3] (۱۸۷۷ـ۱۹۴۷). با هریک از این سه تن آشنایی چندین ساله داشته‌ام و افتخارکارکردن با هرسهٔ آنها نصیبم شده‌است

نوربرت وینر

1. Theodore von Kármán 2. Cal Tech 3. Norbie
4. Norbert Wiener

1. Leopold (Lipòt) Fejer 2. Adolf Hurwitz
3. Godfrey Harold Hardy

گادفری هارولد هاردی

و از هرسهٔ آنها با تمام وجود سپاسگزارم. بد نیست قدری ازشیوهٔ زندگی، شخصیت و نحوهٔ کارکردن آنها برایتان صحبت کنم و (چون چیزی به وقت‌غذا نمانده است)تنها به‌ذکر چند داستان‌گویا بپردازم.

لیپوت فه‌یر درمجارستان به دنیا آمد. در حدود بیست سال داشت که «قضیهٔ فه‌یر» را کشف کرد. این قضیه دربارهٔ میانگینهای حسابی سری‌فوریه است،ولی‌دراینجا وارد بحث‌درجزئیات‌ریاضی آن نمی‌شوم. رسالهٔ‌دکترای‌اوهم به‌همین‌قضیه‌مربوط است(فه‌یر دکترایش را در ۲۲ سالگی گرفت). پس از آن نیز وی بارها و بارها به سراغ کشف اولیه‌اش رفت: بیانهای بهتر، همسانیهای تازه و گسترشهای جدیدی برای آن یافت و مضمون اساسی این قضیه رادر حوزه‌های مجاور نیزپیگیری‌کرد. گرچه فه‌یر به نکات جالب دیگری در سایر زمینه‌ها نیزدست‌یافت، این کشف اولیه‌همچنان محورکارهای او باقی ماند.

خواندن مقاله‌های فه‌یر که با روانی خاصی نوشته‌شده‌اندبسیار آسان است. این امر ناشی ازسبک‌کار اوست: وقتی نکته‌ای می‌یافت، توجهش منحصرانه روی آن متمرکز می‌شد. سعی می‌کرد آن را هرچه کاملتر وساده‌ترکند وازفرعیات بپیراید. بادقت وباریک بینی موضوع را دنبال می‌کرد تا آن نکته روشن و ساده شود. سرانجام حاصل کارش همچون اثری هنری،کم‌حجم وبسیار پاکیزه ازآب درمی‌آمد.

وی علاوه برریاضیات قریحهٔ هنری نیزداشت. به‌موسیقی عشق می‌ورزید و خود پیانو می‌نواخت. استعداد خاصی درداستان گفتن داشت و یك یا «نقال» بود. موقع داستان گفتن ادای قهرمانهایش را درمی‌آورد و با لحن خاصی جملات را ادا می‌کرد. خیلی دوست داشت‌دربارهٔ معلمش صحبت کند؛ همان کسی که‌عامل غیرمستقیم‌موفقیت وی‌در نخستین‌کشفش بود: هرمان آماندوس شوارتس[1]. وقتی از بد-یاریهای این ریاضیدان بزرگ تعریف می‌کرد، تماشایی می‌شد و انسان نمی‌توانست از خنده خودداری کند.

این‌گوناگونی استعدادها تا حدی مربوط است به‌این سؤال که بارها شنیده‌ام: چرا مجارستان این همه ریاضیدان درخود پرورانده است؟ مجارستان کشور کوچکی بود (وامروز حتی کوچکتر هم شده است)؛ ازلحاظ‌صنعتی‌چندان‌پیشرفته نبود. بااین‌وجود، تعداد فوق‌العاده

1. Hermann Amandus Schwarz

چشمگیری ریاضیدان ازآنجا برخاسته‌اندکه عده‌ای ازآنها درهمین جا [آمریکا] فعالیت داشته‌اند. علت این پدیده چیست؟ پاسخ جامعی دراین‌مورد وجودندارد. به‌نظرمن مجارستان علاوه‌براین ریاضیدانها، عدهٔ زیادی موسیقیدان ونیز تعدادی فیزیکدان عرضه کرده است. ولی فکرمی‌کنم تا جایی که به‌ریاضیدانها مربوط است، بخش عمدهٔ پاسخ را می‌توان در شخصیت فه‌یر یافت. او باموفقیتی‌که در کارخودکسب کرد و نیز براثر جاذبهٔ شخصیتش، افراد زیادی را به‌سوی‌ریاضیات کشاند. خیلی وقتها در کافه‌ای‌که پاتوقش بود می‌نشست. در آنجا جوانهایی دور و برش را می‌گرفتند که به او عشق می‌ورزیدند ودر همان‌حال‌که اوروی برگه‌های فهرست‌غذا فرمول می‌نوشت وپی‌درپی ازریاضیات صحبت‌می‌کرد وداستانهایی‌دربارهٔ ریاضیدانان می‌گفت، سعی می‌کردند از روش او تقلید کنند. می‌توان گفت که تقریباً همهٔ ریاضیدانهای مجارستانی که معاصر او یا قدری جوانتر از اوبودند تحت نفوذ شخصیت وی قرار داشتند و خیلی از آنها زندگی ریاضی خود را با کار روی مسأله‌های او آغاز کردند.

برای تکمیل این‌تصویر ازفه‌یر، باید چند مورد ازبذله‌گوییهایش را که خودم از او شنیده‌ام نقل‌کنم.

یکی از این ماجراها ضمن یك گردهمایی در آلمان رخ داد. در آن ایام من «استاد بدون کرسی»[1] بودم. نمی‌توانم دقیقاً معنی چنین سمتی را توضیح بدهم. این شغل از لحاظ مالی چندان قابل اتکا نیست. سمتی‌است تقریباً ــ ونه‌کاملا ــ شبیه استادیار؛ جای‌شکرش باقی است که این روزها چنین سمتی رفته‌رفته به‌فراموشی سپرده می‌شود. من ازدواج کرده بودم و همسرم از ریاضیدانها عکس می‌گرفت. یك‌بارهم جلوی دانشگاه، توی خیابان ودرمسیرعبورماشینها جلوی فه‌یر را که با سه چهارزن از دوستانش ازآنجا می‌گذشت گرفت و ازآنها عکسی برداشت ومی‌خواست عکس بعدی را بگیرد که صدای فه‌یر بلند شد: «چه همسر خوبی! این همه استاد رسمی را یکجا سرراه اتومبیلها نگهداشته تا بلکه ماشین آنها را زیر بگیرد و شوهرش بتواند شغلی دست وپا کند.»

دریك گردهمایی دیگر (که سالها بعد برگزار شد) فه‌یر از دست یك ریاضیدان مجارستانی‌که توپولوژی‌دان بود و اسمش را اینجا نمی‌برم، خیلی عصبانی شد (وعصبانیتش هم بی‌دلیل نبود). مدتی با فه‌یر این‌سو وآن‌سو قدم زدیم واویکسره درمورد آن‌شخص صحبت می‌کرد. بالاخره‌حرفش را بااین‌جمله به‌پایان رساند: «چیزی که او می‌گوید نگاشتی توپولوژیك ازحقیقت است.» خودتان بهتر می‌دانید‌که چنین نگاشتی تا چه حد می‌تواند تحریف شده باشد.

از مطلب اصلی دور نشویم: آیا فه‌یر فردی غیر عادی بود؟ از حرفهای فوق‌که بگذریم، اگر او را درلباس محلی بوهمی (که‌گمان می‌کنم حساب شده انتخاب شده بود) می‌دیدید، حتماً به نظرتان خیلی عجیب جلوه می‌کرد. اما این سرووضع درمکان طبیعی او، یعنی در میان طبقهٔ متوسط بوداپست، عجیب تلقی نمی‌شد، زیرا خیلی از اهالی آنجا هم درهمان هیأت ظاهر می‌شدند، هر چند رفتار او را نداشتند. درآنجا هم فه‌یر به‌خاطر خصوصیات ویژه‌اش دست‌کم نیمه عجیب به‌شمار می‌آمد.

آدولف هورویتس ازیك لحاظ خیلی به فه‌یر شباهت داشت: ازلحاظ سبك نوشته‌ها. فلیکس کلاین در کتاب تاریخ ریاضیات در قرن نوزدهم هورویتس را «موجز نویس» خوانده است. ایجاز، سخن کوتاه و پرمعنی گفتن است. سخن موجز، به ظاهر کوتاه است ولی

1. Privatdozent

همین کوتاه‌شدن ممکن است مستلزم کاری طولانی بوده باشد. هورویتس هم روی موضوعهای مورد علاقه‌اش مشتاقانه کار می‌کرد تا به ساده‌ترین بیان ممکن که روشن و عاری از هرگونه پیرایه و مطلب اضافی باشد دست یابد. وی ازیك لحاظ دیگر هم به فه‌یر شباهت داشت. او هم مسائلی را ترجیح می‌داد که چندان بزرگ نباشند ودرنتیجه بتوان آنها را با روشنی هرچه بیشتری بیان کرد. ولی قلمروکار او بسیار گسترده‌تر از فه‌یر بود. اوبه‌طیف گستردهٔ ریاضیات عصر خود، تاحدی که درآغازقرن حاضر ممکن بود، تسلط داشت. بسیاری ازدانسته‌های خود را هم از سرچشمهٔ اصلی فرا گرفته بود: نظریهٔ اعداد وجبر را ازکومروکرونکر، تعبیرریمانی متغیرهای مختلط را از فلیکس کلاین، و تعبیر وایرشتراسی این مبحث را از خود وایرشتراس. دربارهٔ تسلط او به زمینه‌های گستردهٔ ریاضیات، دیگران خیلی بهتر ازآنچه درتوان من است سخن گفته‌اند واین کار را هیلبرت به بهترین وجه ممکن در زندگینامهٔ سرآغاز مجموعهٔ آثار هورویتس انجام داده است.

آری، مقاله‌های هورویتس نمونه‌هایی از فشرده نویسی هستند. او درقلمروگستردهٔ معلومات ریاضیش مسائل مشخص ومهمی را با راه حلهای فوق‌العاده ساده مطرح کرد وجوابها را نیز به‌طورکامل به‌دست داد. مثلاً می‌توانید دوصفحه از مجموعهٔ آثار اورا زیر عنوان «اثبات متعالی بودن عدد e» بخوانید.

ازیك لحاظ دیگرهم بین اوو فه‌یر تشابه وجود داشت: موسیقی در زندگی هورویتس جای مهمی داشت واو خود پیانو را عالی می‌نواخت. درواقع، طی سالهای جوانی مردد بودکه ریاضیدان شود یا پیانو نواز ــ خوشبختانه به ضرر پیانو تصمیم گرفت.

وجوه تشابه دراینجابه‌پایان می‌رسد. شخصیت هورویتس و فه‌یر بسیار متفاوت بود. پیش از هرچیز، کوچکترین نشانی از سرو وضع بوهمی یا ظاهرغیرعادی در هورویتس یافت نمی‌شد. اوهمیشه مؤدب، کم حرف، دور از خودنمایی و فوق‌العاده فروتن بود. معمولاً در برخورد با خدمتکاران همسایگانش به‌احترام کلاه ازسر برمی‌داشت. برای یك بیگانه اصلاً قابل تصور نبودکه دربشت این ظاهر بی‌ادعا، چیزی بیش از یك شخصیت محترم طبقهٔ متوسط وجود داشته باشد. تنها کسانی که آثارش را می‌خواندند یا سر درسش حاضر می‌شدند قادربه‌تصورچنین چیزی بودند وتنها کسانی که او را بهترمی‌شناختند، به احساس مسؤولیت شدید و دلبستگی عمیق وی به حقیقت و سادگی پی می‌بردند.

هرگزنشنیدم که هورویتس سخن تندی در میان جمع بر زبان آورده‌باشد. ولی درمحفل خانوادگی یا درجمع دوستان نزدیك گاهی حرف نیشدار یا کنایه‌آمیزی از اوشنیده می‌شد. برای داستانی که الان می‌خواهم بگویم ذکر مقدمه‌ای لازم است. هورویتس در انجام وظایف خود به عنوان یك استاد با وجدان، راهنمای بسیاری از دانشجویان دورهٔ دکترا بود و رفتارش با آنها با دلسوزی وشکیبایی همراه بود. دربین این افرادکسانی بودند که به‌کمك زیادی نیاز داشتند وحتی کار به‌جایی کشید که یك‌بار هورویتس صبور این‌جمله را برزبان آورد: «رسالهٔ دکترا مقاله‌ای است که توسط استاد راهنما نوشته می‌شود، منتهی با اعمال شاقه.»

هاردی یك‌وجه تشابه‌عمده با فه‌یرداشت. فه‌یر به‌عنوان یك‌نمونهٔ قابل‌تقلید، باشخصیت گیرا وتلاش فردی‌خودموجب گسترش ریاضیات درمجارستان شد، هاردی هم درانگلستان نقشی بسیارشبیه وی داشت. وجوه تشابه‌این‌دو در همین‌جا به‌پایان می‌رسد. در سایرموارد، شرایط محیطی و خصوصیات فردی آن دوبسیار متفاوت است.

ریاضیات کاربردی در انگلستان پایه‌های نیرومندی داشت که از نیوتن آغاز می‌شد. ولی نقش انگلستان در ریاضیات محض که عمدتاً در فرانسه و آلمان گسترش یافته بود، بدین حد نمی‌رسید. هاردی بر ریاضیات محض تأکید داشت و همین تأکید او روندکار ریاضی را درانگلستان دگرگون کرد. (می‌توان بعضی از قضاوتهای غیر منصفانه و غیر عادلانهٔ او را در مورد ریاضیات کاربردی نادیده گرفت.)

سبك نوشتن هاردی خیلی پاکیزه و روان بود، ولی خواندن مقاله‌هایش ــ به‌خصوص برخی ازمقاله‌هایی که‌مشترکاً با لیتلوود نوشته ــ کار چندان آسانی نیست. مسأله‌ها بسیار دشوار وروشها هم به ناگزیر خیلی پیچیده هستند. او به‌سادگی مطالب اهمیت می‌داد، ولی از نظر او مهمترین چیز درریاضیات نه‌سادگی، بلکه توانمندی و چیرگی بر موانع بزرگی بودکه دیگران نومیدانه رهایشان کرده بودند. او خودتوان‌ریاضی عظیمی داشت وفرضیهٔ‌ریمان اورا مجذوب کرده‌بود. (مسائل نسبتاً عینی، ازقبیل اثبات فرضیهٔ‌ریمان این روزها کمتر مورد بحث قرار می‌گیرند. این پدیده دلایل مثبت و منفی خاص خود را دارد. البته اگرلیتلوود دراینجا حضورداشت، وسط حرفم می‌دوید و می‌گفت: «این عوامل عمدتاً منفی‌اند.»)

باگذشت چند دهه، اوضاع تغییرکرد وجا دارد اینجا داستانی برایتان نقل کنم، هرچندکه مقدمه‌ای طولانی لازم دارد.

در آلمان افسانه‌ای راجع به امپراتور باربارروسا، فردریك اول، وجود دارد. مردم عادی در آلمان این شخص را دوست داشتند و پس از مرگ وی دریك جنگ صلیبی و مدفون شدنش درگوری دورافتاده، این افسانه برسر زبانها افتادکه او زنده است و درغاری واقع درکوهستان کوف‌هویزر[1] به‌خواب رفته است. اما هر وقت آلمان به اونیاز داشته باشد، حتی پس از گذشت صدها سال، بیدار می‌شود و از غار بیرون می‌آید.

می‌گویند یك‌بارکسی ازهیلبرت‌پرسید: «اگرشماهم مثل باربا-روسا، پس از پانصد سال زنده می‌شدید، چکار می‌کردید؟» هیلبرت پاسخ داد: «می‌پرسیدم آیا کسی فرضیهٔ ریمان را اثبات‌کرده است؟»

درباره به سروقت هاردی برگردیم. ماجراهای گفتنی دربارهٔ او زیاد است. ظاهراً او در هر جمعی غیرعادی به‌شمار می‌آمد، حتی درکالجهای آکسفورد وکمبریج که درآنجاها رفتار غیرعادی را تحمل و بلکه تشویق می‌کردند. هاردی فوق‌العاده خوش‌تیپ بود و وقتی‌اسمورکینگ می‌پوشید ابهت خاصی‌پیدا می‌کرد. وگاهی اوقات، به‌خصوص هنگام سفر به‌خارج ازانگلستان ژاس بیقواره‌ای می‌پوشید ــ گرچه این هم نوعی بیقوارگی هنرمندانه بود و خوش‌تیپی او را برهم نمی‌زد.

دیدگاه او دربارهٔ همه چیز کاملاً فردی و مشخص بود: گربه را دوست داشت ولی ازسگ خیلی بدش می‌آمد. عاشق بازی کریکت بود اما قایقرانی را کار بیخودی می‌دانست. (هاردی به‌کمبریج تعلق داشت ولی مدتی استادآکسفورد شد. روزی درآکسفورد شخصی که با خلق وخوی اوآشنا نبود ازاوپرسید: «شما طرفدارتیمهای ورزشی کدام دانشگاه هستید؟» هاردی گفت: «بستگی دارد به‌نوع ورزش، درکریکت طرفدارکمبریج هستم و درقایقرانی طرفدارآکسفورد.»)

هاردی دوست داشت که خونسردانه دیدگاههایی ابرازکندکه برای طرف مقابل کاملاً غیر مترقبه باشد. همچنین دوست داشت که صرفاً به‌خاطرآنکه بحث جالبی راه بیفتد از آنها دفاع کند، زیرا از بحث کردن خوشش می‌آمد. به‌لطیفه گفتن هم خیلی علاقه‌مند بود.

1. Kyffhaüser

ماجراهای مربوط به لطیفه گوییهای هاردی تمامی ندارد ولی بهتر است جلوی خودم را بگیرم و باعث نشوم که برنامهٔ غذا خیلی عقب بیفتد. اما یك قضیه را که به‌خودم مربوط می‌شود حتماً باید تعریف کنم. یك‌بار ضمن کار با هاردی نکته‌ای را مطرح کردم که برای هاردی هم جالب بود. ولی بعداً درست وحسابی روی آن نکته کار نکردم و این امر موجب ناخشنودی هاردی شد. البته به‌خود من چیزی نگفت. ولی موضوع وقتی آشکار شد که او به‌همراه مادسل‌ریس به‌دیدن باغ‌وحشی درسوئد رفته بود. دریك قفس خرسی دیده می‌شد. قفس دری داشت وقفلی به درآویزان بود. خرس قفل را بو می‌کشید، بر آن پنجه می‌کوبید، سپس قدری خروخر می‌کرد و برمی‌گشت و مشغول قدم زدن می‌شد. هاردی با دیدن این صحنه گفت: «این هم مثل پولیاست، نکته را خوب پیدا می‌کند ولی تا آخر پی قضیه را نمی‌گیرد».

هاردی عاشق آفتاب بود اما درانگلستان هوا زیاد آفتابی نمی‌شود. به‌همین سبب‌هرسال درتعطیلات تابستانی به‌محض تمام‌شدن فصل بازی کریکت به قاره (اروپا) می‌رفت و به دیدار دوستان می‌پرداخت. دوست اصلیش هارالد بور بود. برنامهٔ ملاقات آنها ثابت بود. اول می‌نشستند و صحبت می‌کردند، بعد قدمی با هم می‌زدند. وقتی به صحبت می‌نشستند، دستور جلسه‌ای تهیه می‌کردند و روی کاغذ می‌آوردند. اولین مادهٔ دستور جلسه همیشه یکسان بود: «فرضیهٔ ریمان اثبات شود.» لابد می‌دانید که این ماده هرگز اجرا نشد. با این حال هاردی اصرار داشت که هربارآن را بنویسند.

بدون ذکر لطیفهٔ اصلی مربوط به هاردی، تصویری که از او داده‌ام ناقص خواهدبود: تقدیرآسمانی با اوخصومت شخصی داشت. قضیه ازاین قرار بود که به‌نظرهاردی، تقدیرآسمانی وظیفه‌ای مبرمتر ازآزاردادن اونداشت. دراین باب داستانهای بیشماری وجود دارد که معروفترین آنها را برایتان نقل می‌کنم.

هاردی به‌همراه بور تاپایان تعطیلات‌تابستان دردانمارك مانده بود ووقتی‌لازم شد که برای شروع کار تدریسش به انگلستان برگردد تنها قایق‌کوچکی در دسترس بود (در آن ایام رفت وآمد با هواپیما مقدور نبود). دریای شمال‌کم و بیش متلاطم بود و احتمال غرق‌شدن چنین قایق‌کوچکی دقیقاً صفر نبود. با این حال هاردی با قایق روانه شد. ضمناً کارت پستالی با این مضمون برای بور فرستاد: «من فرضیهٔ ریمان را اثبات کردم. هاردی.» برایتان جالب خواهد بود که علت این کارش را بدانید. فلسفهٔ کار هاردی این بود که: اگر قایق درآب فرو می‌رفت و هاردی غرق می‌شد، همه باید باور می‌کردند که او فرضیهٔ ریمان را ثابت کرده است. ولی تقدیرآسمانی برآن بود که چنین افتخار عظیمی نصیب هاردی نشود و به همین علت نگذاشت قایق غرق شود.

من این داستان را باور می‌کنم، چون تقریباً عین همین قضیه در حضور من رخ داد. یك تابستان دیگر، هاردی در انگلبرگ واقع در یکی از دره‌های آلپ در سویس بود. ما درآنجا کلبه‌ای داشتیم. او دوستدار آفتاب بود ولی یکسره باران می‌بارید وچون کاردیگری نمی‌شدکرد، بریج بازی می‌کردیم. بازیکنان عبارت‌بودند ازهاردی که بریج باز ماهری بود، همسرم، خودم و یکی از دوستان ریاضیدان و فیلسوف من به نام گونست. پس از مدتی گونست ناگزیر شد ازآنجا برود و باید خودش را به قطاری می‌رساند. من شاهد بودم که هاردی به گونست می‌گفت: «لطفاً وقتی قطار به‌راه افتاد، پنجره را بازکن، سرت را از پنجره بیرون ببر و روبه آسمان فریاد بزن: من هاردی هستم.» به‌گمانم بعضیهایتان متوجه موضوع شده‌اید. منظور هاردی این بود که: وقتی تقدیر آسمانی تصورکند که هاردی از اینجا رفته است، برای ناراحت‌کردن او هم که شده، هوا را آفتابی می‌کند.

امیدوارم‌که غذایتان خیلی دیر نشده باشد. متشکرم.

ترجمهٔ محمد باقری

• این مقاله، متن سخنرانی جورج پولیاست که از منبع زیر ترجمه شده است.

Pólya G., "Some mathematicians I have known", *Amer. Math. Monthly*, 76 (1969) 746-753.

به‌عقیدهٔ من علم ریاضی یك کل تجزیه‌ناپذیر است، جانداری است که زندگیش مشروط به ارتباط اجزای آن است؛ زیرا با همهٔ نوعی که دانش ریاضی دارد، بازهم از شباهت ابزارهای منطقی، ارتباط ایده‌ها در کل ریاضیات و تشابهات فراوان دربخشهای گوناگون‌آن به‌خوبی آگاهیم. همچنین می‌بینیم که هرچه یك نظریهٔ ریاضی بیشتر گسترش می‌یابد، ساخت‌آن به‌صورت هماهنگ‌تر و یکنواخت‌تری پیش می‌رود و رابطه‌های غیرمنتظره‌ای بین شاخه‌هایی که قبلاً جدا از هم بودند، آشکار می‌شود. با گسترش ریاضیات، سرشت آن به‌عنوان یك موجود زنده از میان نمی‌رود بلکه با وضوح بیشتری جلوه می‌کند.

دیوید هیلبرت

صورتبندی نظم عالم: نقش ریاضیات*

(۱)

آرتور جفی

در سال ۱۹۸۴ «بنیاد ملی علوم» در ایالات متحدهٔ آمریکا کمیته‌ای برای بررسی وضع ریاضیات در آن کشور تشکیل داده، ریاست کمیته با ادوارد دیوید بود که ازمشاوران کاخ سفید و رئیس بخش تحقیقات کمپانی اکسون است. نتیجهٔ بررسیهای این کمیته به‌گزارش دیویده معروف شده است. انتشار این گزارش موجب افزایش حمایتهای مادی و معنوی از آموزش و پژوهش ریاضی در آمریکا شده است. مقاله‌ای که در زیر می‌خوانید ترجمهٔ یکی از پیوستهای این گزارش است که به‌علت طولانی بودن آن، در چند شماره خواهد آمد.

۱. ریاضیات

ریاضیات هنری است باستانی، و از همان آغاز از جملهٔ ذهنیترین و درعین‌حال عملیترین تلاشهای آدمی به‌شمار آمده است. از ۱۸۰۰ سال پیش ازمیلاد، بابلیها در زمینهٔ خواص تجریدی اعداد به‌پژوهش پرداختند، و در یونان دوران تمدن آتن، هندسه درحوزهٔ فعالیتهای ذهنی انسان بلندترین جایگاه را از آن خود کرد. ریاضیات، درکنار این جنبه‌های ادراکی‌نظری، به‌صورت ابزاری که‌هرروز برای مساحی زمین، دریانوردی، و ساختن بناهای بزرگ مورد نیاز بود، شکوفا شد. مسائل عملی و پیامدهای نظری یکدیگر را برانگیختند؛ تفکیک این دو رشته همواره ناممکن بوده است.

امروزه نیز وضع به‌همین منوال است. درقرن بیستم، دامنه وتنوع ریاضیات گسترش یافته وپیچیدگی و تجرید آن عمق پیدا کرده‌است. این رونق ناگهانی پژوهشهای ریاضی چندان ژرف بوده است که ممکن است حوزه‌هایی از ریاضیات برای افراد عامی ــ و در موارد زیادی حتی برای ریاضیدانانی که در زمینه‌های دیگری کار می‌کنند ــ نامفهوم به نظر برسد! علی‌رغم این‌روند به سوی تخصصی شدن ــ و در واقع به علت آن ــ ریاضیات بیش از هر زمان دیگری ملموس شده و نقش حیاتی یافته است.

در ربع قرن گذشته، ریاضیات و روشهای ریاضی به جزءلاینفک، فراگیر، و اساسی علوم، تکنولوژی، وتجارت تبدیل شده است. در جامعهٔ ما که تکنولوژیگراست، بیسوادی جای خود را به‌«ناتوانی در درک یا به‌کارگیری ریاضیات» که تمایانگر یك شکاف آموزشی است، سپرده است. می‌توان سهم ریاضیات را در جامعهٔ تکنولوژیك ما با نیاز موجود زنده به هوا و غذا مقایسه کرد. در واقع، می‌توان گفت که ما درعصر ریاضیات زندگی می‌کنیم ــ فرهنگ ما «ریاضی‌سازی» شده است. هیچیك از آثار ریاضیات در پیرامون ما شگفتی‌آفرینتر از این کامپیوتری که درهمه‌جا حضوردارد، نیست؛ به‌چند نمونهٔ معدود تأثیر کامپیوتر برزندگی خود نظرمی‌کنیم:

هواپیمایی. هم‌اکنون هواپیماهای خطوط هوایی تجاری می‌توانند درفرودگاهها فرود آیند بدون آنکه خلبان حتی ابزار کنترل را لمس کند. داده‌هایی در خصوص سرعت و موضع هواپیما به‌طور خودکار برای دستگاهی به نام پالایهٔ کالمن ـ باسی[1] رله می‌شود. این دستگاه با پیدا کردن پیوستهٔ «بهترین برازش با روش کمترین مربعها» برای تقریب مرتبهٔ اول قوانین فیزیك نیوتنی، هواپیما را به پرواز درمی‌آورد. «پالایه‌های حالتی» مشابه،موشکها وفضاکاوها وماهواره‌های ردیاب را راهنمایی می‌کنند. این‌ماهواره‌ها وموشکها عکسهای مهمی را به‌زمین مخابره می‌کنند، که از طریق «تجزیهٔ طیفی» با کامپیوتر آنها را واضحتر و روشنتر می‌کنند.

پزشکی. نمونه‌گیری بزرگ مقیاس داده‌ها، پژوهشهای پزشکی را برای‌یافتن همبستگی بیماریها با الگوهای سبك زندگی وتغذیه امکان‌پذیر می‌سازد؛ از این‌رو، تحلیل داده‌ها بررسی عامی از واگیرشناسی (اپیدمیولوژی) را ممکن می‌سازد. کامپیوترها با تدارك تجزیهٔ خودکار خون‌و ادرار،ونیز برش‌نگاری(توموگرافی(به‌کمك کامپیوتر(سی‌تی‌اسکن)[2] ازاندامهای‌درونی، انقلابی‌درتشخیص بیماریها برپا کرده‌اند. کامپیوترها به‌زودی قادر خواهند بود با انجام آزمونهای ساده، و آزمونهایی که نیاز به‌عمل جراحی (بردن دستگاهها به درون بدن) ندارند، خطر بیماریهایی را ده تا بیست سال زودتر پیشگویی کنند.

تجارت. روش سادکی (سیمپلکس) در برنامه‌ریزی خطی، یا ساده کردن محاسبهٔ کارامدترین تخصیص منابع، امر تولید، ساخت، کنترل موجودی وتوزیع‌محصولات صنعتی را دگرگون کرده است. ظرفیت دستیابی و ذخیرهٔ بانکهای بزرگ داده‌ها، نگهداری سوابق، صدور صورتحساب، حسابداری، و مانند آنها را به‌کلی تغییر داده است.

این کاربردهای بسیار گوناگون کامپیوتر ــ پالایهٔ کالمن ـ باسی، واضح‌سازی تصاویر به‌کمك تجزیهٔ‌طیفی، آمار پزشکی، سی‌تی‌اسکن‌کننده‌ها، و تحلیل برنامه‌ریزی خطی ــ چه نقطهٔ مشترکی‌دارند؟ هریك ازآنها عمدتاً بر جبرخطی استواراست؛ جبرخطی حوزه‌ای‌ازریاضیات است که در اواخر قرن نوزدهم به وجود آمد و در آن زمان هیچیك از این کاربردها به فکر کسی هم نیامده بود: انگیزهٔ تکامل این‌شاخه

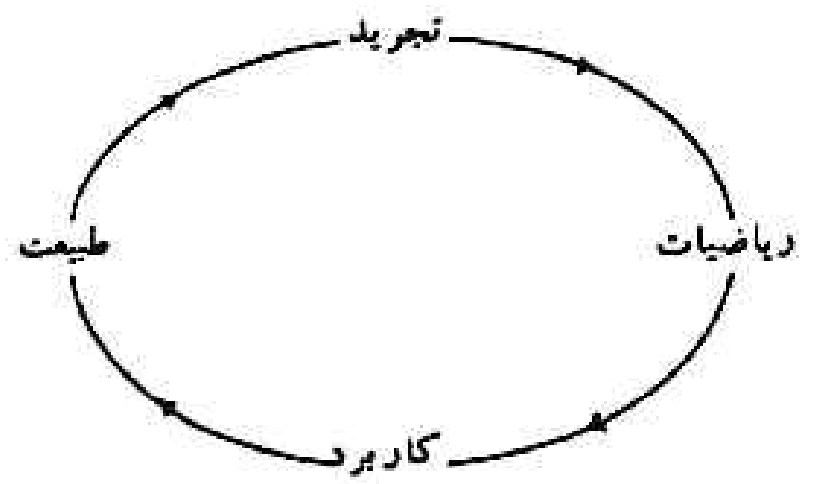
1. Kalman-Bucy 2. CT scan

ازجبر از تلاش برای فهم هندسهٔ فضای n بعدی منشأ می‌گرفت.

اعمال بخشی از این ایده‌ها در خلال همین قرن ـ به‌دست کسانی بااستعداد استثنایی در ریاضیات ـ انجام شد. وانگهی، هریك از این کاربردها متضمن داده‌های چندان زیادی‌اند که حتی سریعترین کامپیوترها نمی‌توانند تنها باجستجوی کورکورانه به‌پاسخهای لازم دست یابند. اینها به ابداع و بهره‌گیری از روشهای پیچیدهٔ ریاضی نیز نیاز داشتند.

می‌توانیم برای مستند کردن ارزش انتقاعی پژوهشهای ریاضی برای جامعهٔ خود ونمایاندن چگونگی نفوذ ایده‌های خاص ریاضی بر جهان خویش، چندین جلد کتاب بنویسیم. اما، چند مورد معدود را برگزیده‌ایم تا توان و ژرفای بسیاری از شاخه‌های فرعی را که از ریاضیات مشتق شده‌اند، نشان دهیم. هدف دیگری هم داریم که شاید مهمتر ازگزارشی ساده در خصوص برخی از پیشرفتها درجبههٔ مقدم ریاضیات و علوم باشد. می‌خواهیم بر دو موضوع که بارها و بارها درمسیر تاریخ پیش می‌آیند، تأکید ورزیم.

۱. ریاضیات عالی، هرچند تجریدی، به‌کاربردهای‌عملی درطبیعت منجرمی‌شود. مسائل مشکلی که درطبیعت پیش می‌آیندابداع‌ریاضیات نوینی را برمی‌انگیزند.



می‌توان ازهرسویی به این چرخهٔ تجرید وکاربرد عملی وارد شد. فاصلهٔ زمانی بین پیدایش ریاضیات تجریدی تا کاربردهای عملی بسیارگوناگون است. گاهی بی‌واسطه وآنی است؛ گاهی هم یك قرن طول می‌کشد تا نظریهٔ تجریدی از طریق کاربردهای عملیش انقلابی برپا کند. در بسیاری موارد، مقیاس زمانی چیزی بین این دوحالت است.

۲. پیشگویی‌این نکته که حوزه‌ای ازریاضیات دقیقاً درکجاسودمند خواهد بود ناممکن است. حتی مبدعین بسیاری از ایده‌های ریاضی هم غالباً ازکاربردهای آن ایده‌ها به شگفت آمده‌اند. تنها چیزی که می‌توانیم با قطعیت بیان کنیم این است که زمانه به کسی که مدعی باشد «هرگز کاربرد عملی نخواهد یافت» پندی سزاوار خواهد داد. مثلاً، هاردی[1]، ریاضیدان بزرگ انگلیسی، در اثرش، به نام اعتذار یك ریاضیدان[2]، می‌نویسد که به‌خاطر زیبایی ریاضیات به آن پرداخته است، نه به‌خاطر ارزش عملیش. او با بی‌پروایی بیان می‌کند که هیچگونه کاربردی برای نظریهٔ اعداد یا نسبیت نیافته است. از آن زمان تنها چهل سال گذشته است که پیامد های نظریهٔ تجریدی اعداد به آنجا کشیده شده که برای امنیت ملی مفید واقع می‌شود؛ خصیصهٔ اعداد اول شالودهٔ طرحهای نوینی را برای ساختن رمزهای سری تشکیل می‌دهد. درخلال چندسال، اختراع دستگاههای شکافت و گداخت [هسته‌ای]، نظریات هاردی را در مورد نسبیت ابطال کرد.

1. G.H.Hardy 2. *A Mathematician's Apology*

ممکن است حیرت‌آور باشدکه تجریدی‌ترین حوزه‌های‌ریاضیات ـ هندسه، نظریهٔ اعداد، منطق ـ اهمیت عملی بسیاری داشته باشند. د. ا. کنوث[1]، یکی از دانشمندان علوم‌کامپیوتری، می‌گوید: «هرمطلب اندکی هم که از ریاضیات می‌دانم به‌نحوی در کاربردی عملی مرا یاری رسانیده است.»

اویگن ویگنر[2] فیزیکدان از «تأثیرگذاری بی حدوحساب‌ریاضیات بر علوم طبیعی» در شگفت است. مطمئناً تمایل شدید ریاضیدان در این است‌که همه‌چیز را جزجنبهٔ اساسی مسأله‌کنار بگذارد، تا دیدگاه مشترکی را بیابد که از آن، دومسألهٔ ظاهراً متفاوت درارتباط نزدیك با یکدیگر قرارمی‌گیرند. اما این مطلب توضیحی‌کافی ارائه نمی‌دهد که‌چرا، درمواردی بسیار، ریاضیات تجریدی‌که به‌خاطر زیبایی‌خود تکامل یافته است، چند دهه بعد، توانسته است طبیعت را به‌تمامی توصیف کند.

اندرو گلیسون[3] ریاضیدانی از دانشگاه هاروارد پاسخ خود را چنین ارائه می‌دهد: «ریاضیات علم نظم است ـ موضوع آن یافتن، توصیف و درك نظمی است که‌در وضعیتهای ظاهراً پیچیده نهفته‌است. ابزارهای اصولی ریاضیات مفاهیمی‌اند که ما را قادر می‌سازند این نظم را توصیف‌کنیم. دقیقاً به خاطر آنکه ریاضیدانان قرنها در جستجوی کارامدترین مفاهیمی بوده‌اند که نمونه‌های مبهم نظم را توصیف کنند، ابزارهایشان برای جهان بیرونی کاربردپذیر است؛ زیرا دنیای واقعی نمونهٔ کوچکی از وضعیتی پیچیده است که درآن نظم فراوانی وجود دارد.»

یك‌دلیل دیگر ارائه می‌کنیم. ایده‌های ریاضی ازذهن پژوهشگران نمی‌روید. تاریخ نشان می‌دهد که ریاضیات غالباً الهام خود را از الگوهای طبیعت می‌گیرد. درسهایی که از یك برخورد با طبیعت فرا می‌گیریم وقتی پدیدهٔ طبیعی دیگری راکشف می‌کنیم، همچنان به کارمان می‌آیند.

دلایل اهمیت ریاضیات برای جامعه هرچه باشند، فهم چگونگی پیشرفت ریاضیات پیامدهایی تعیین‌کننده دارد. باید چگونگی پیشبرد ریاضیات عالی دراین کشور [امریکا] به بهترین وجه، و چگونگی حفظ رهبریی که درچهل سال‌گذشته به‌دست آمده، ارزیابی شود. ما به دو اصل اساسی اعتقاد داریم:

تحقیقات ریاضی باید تا حد ممکن گسترده و نومایه و با اهداف دراز مدت باشد. انتظار داریم تاریخ تکرار شود؛ براین گمانیم که ژرفترین و سودمندترین کاربردهای آیندهٔ ریاضیات را امروز نمی‌توان پیشگویی‌کرد، زیرا این‌کاربردها برپایهٔ ریاضیاتی استوارخواهد بود که هنوز کشف نشده است.

درحالی که سمت و سوی اکثر پژوهشهای ریاضی متوجه فهم و درك مسائل شناخته شده است، باید به یاد داشته باشیم که جهت خود ریاضیات همواره درحال‌تغییراست. ریاضیدانان با استعدادباید به پیگیری پژوهشهایی ترغیب شوند که مناسبت آنها را با خیلی‌کم می‌فهمیم یا اصلاً نمی‌فهمیم اما ممکن است سرانجام به دیدگاههای نو، یا به ابداع حوزه‌های نوین ریاضیات بینجامند.

ما درچهل سال گذشته یك دوران طلایی ریاضیات را تجربه کرده‌ایم. معلوم شده است‌که هرشاخهٔ فرعی ریاضیات، گویی باجادو به شاخه‌های فرعی دیگر، وبه بسیاری کاربردها در علوم طبیعی و مهندسی ارتباط پیدا کرده‌اند. این بافتهٔ سخت به هم پیوسته نه تنها هیجان‌انگیز است، بلکه توصیف پژوهشها و کاربردهای اخیر ریاضی

1. D.E.Knuth 2. Eugene Wigner 3. Andrew Gleason

را به‌صورت دائرةالمعارفی [مختصر و گسسته] ناممکن می‌سازد، و هرگونه نمودار سازمانی ساده‌ای که از آنها به دست دهیم، نادقیق خواهد بود.

انتخاب مثالهای زیر از جانب ما ضرورتاً مربوط به طرز تفکر شخصی، و متأثر از میزان آگاهی وسلیقهٔ ماست. آنها را به تسامح در چهار حوزه ــ محاسبه، فیزیك، ارتباطات، ومهندسی ــ مطرح کرده‌ایم؛ هرچند این مثالها ازمرزهای مشخص این حوزه‌ها به‌راحتی فراتر می‌روند. براین نکته آگاهیم که بربسیاری از حوزه‌ها و پیشرفتها چشم پوشیده‌ایم. علی‌رغم این چشمپوشیها، اطمینان داریم که مثالهای ما ماهیت ریاضیات را به‌عنوان یك کل آشکار می‌سازند.

پیش ازآنکه به‌این کاربردها بازگردیم، می‌خواهیم سرگذشت یك مبحث ــ آنالیزفوریه ــ را بازگوییم و چگونگی تکامل آن را در خلال ۱۷۵ سال حکایت کنیم. این داستان نشان می‌دهد که غالباً ریاضیات چگونه به چیزی بسیارمهمتر از آن مسألهٔ ویژه‌ای که‌حلش مورد نظربوده است، تبدیل می‌شود.

آنالیزفوریه

در اوایل دههٔ ۱۸۰۰، ژان باپتیست ژوزف فوریه[1] که به تازگی از مقام حکمرانی مصر درزمان ناپلئون [به فرانسه] بازگشته بود، برآن شدکه مسألهٔ رسانش گرما را درك کند. اومی‌خواست به این پرسش پاسخ دهد که: با فرض آنکه دمای اولیه در تمامی نقاط یك ناحیه معلوم باشد، گرماچگونه درطی‌زمان درسرتاسرآن ناحیه پخش‌خواهد شد؟ کنجکاوی درخصوص پدیده‌هایی مانند دمای جو وآب وهوابود که فوریه را به طرح این پرسش تجریدی کشاند.

فوریه، به منظورحل مسألهٔ پخش‌گرما، روش ریاضی ساده ــ اما تابناکی ــ را ابداع کرد. معلوم شد که اگر توزیع گرمای اولیه نوسانی ــ یعنی، اساساً موجی سینوسی ــ باشد، حل این مسأله ساده است. فوریه، با استفاده از این موضوع به‌این نتیجه رسیدکه بایدهر توزیع گرمای اولیه به‌مجموعی (احتمالاً نامتناهی) از امواج‌سینوسی تجزیه و آنگاه هریك از این مسأله‌های ساده را حل کرد. بنابراین جواب‌عمومی مسأله ازطریق جمع کردن جوابهای هریك ازمؤلفه‌های نوسانی، به‌نام همساز، به‌دست می‌آمد.

ریاضیدانان فرانسوی، مانند لاگرانژ، با ابراز تردید نسبت به این نکته که این‌همسازهای ساده بتوانند به‌طوربایسته‌ای‌تمامی توابع‌ممکن را بیان کنند، این ایده‌ها را به سختی رد کردند، و دقت و زحمت فوریه را به باد دشنام گرفتند. این حملات به‌مدت دو دهه همچنان متوجه فوریه بود، و او در خلال این مدت تحقیقات خود را با بصیرتی قابل ملاحظه دنبال می‌کرد. امروزه به‌ثبات قدم، سرسختی، و قدرت عمل او، علی‌رغم تردیدهای سهمناك در اذهان رهبران‌جامعهٔ علمی، دین فراوانی داریم. فوریه حتی پس از آنکه درسال ۱۸۱۱ جایزهٔ بزرگ ریاضی را به‌خاطر مقاله‌اش دربارهٔ مسألهٔ رسانش‌گرما از فرهنگستان علوم دریافت داشت، انتشار کارخود را مشکل یافت، زیرا فرهنگستان در حکم اعطای جایزه دربارهٔ عمومیت و دقت روش فوریه تردیدهای سختی قائل‌شده‌بود. فوریه استقامت کرد وسرانجام کارش درپی انتشار اثرش، نظریهٔ تحلیلی‌گرما، درسال ۱۸۲۲، اثری که هم‌اکنون کلاسیك شده است، مقبولیت عام یافت.

روش آنالیز همساز یا آنالیز فوریه، در واقع اکنون در هر زمینهٔ ریاضیات و علوم فیزیکی اهمیت زیاد خود را نمایان کرده است ــ اهمیتی بسیار فراتر ازحل مسألهٔ پخش گرما. درحوزهٔ ریاضیات، این‌مبحث به‌خودی‌خود به‌یك‌موضوع [مستقل] تبدیل شده است. در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل، نظریهٔ گروهها، نظریهٔ احتمال، نظریهٔ آمار، هندسه، نظریهٔ اعداد، وبسیاری دیگر، روش فوریه را برای تجزیهٔ توابع به‌یاسلمهای اساسیشان به‌کار می‌برند.

درفیزیك، مهندسی، و علوم‌کامپیوتری تأثیر آن به همان ژرفاست. فوریه تأثیر روش خود را در پیشگفتارش بر نظریهٔ تحلیلی‌گرما چنین‌پیشگویی می‌کند: «مطالعهٔ عمیق طبیعت بارورترین مرحلهٔ کشفیات ریاضیات‌است. این‌روش مطمئنی است برای... کشف... عناصربنیادیی که درتمامی پدیده‌های طبیعت مجدداً به‌وجود می‌آیند.» فوریه، عملاً یکی ازتواناترین ابزارها را برای فیزیك ریاضی تدارك کرد. به محض آنکه ماکسول در ۱۸۷۳ امواج الکترومغناطیسی را بامعادلات مشهورش تشریح کرد، آنالیز فوریه به‌یکی از روشهای کلیدی‌مطالعهٔ این امواج و مؤلفه‌های هماهنگ آن ــ پرتوهای ایکس، نورمرئی، میکروموجها، امواج رادیویی، ومانند آنها ــ تبدیل شد. هم اکنون بسیاری از دستگاههای الکتریکی والکترونیکی برشالودهٔ آنالیزفوریه استوارند، از جمله دستگاههای جدید مانند طیف‌نگارهای تشدید مغناطیسی هسته‌ای و طیف‌نگارهای بلورنگاشتی پرتو ایکس. در قرن اخیر، آنالیز فوریه زمینهٔ درك اساسی نظریهٔ کوانتومی ــ و از این رو درك تمامی فیزیك و شیمی نوین ــ را فراهم آورده است.

ایدهٔ تجزیهٔ داده‌ها به مؤلفه‌های دوره‌ای نیز درمهندسی نقشی‌عمده دارد. این ایده به تبدیل لاپلاس انجامید، که هردانشجوی مهندسی این تبدیل را به‌عنوان روش استاندهٔ مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل خطی می‌آموزد. آنالیز فوریه به آنالیز سریهای زمانی منجر شد که در اکتشاف نفت ــ از طریق تفسیر امواج زلزله‌ای فرستاده شده درمیان صخره‌هایی که‌گمان می‌رود حاوی نفت باشند ــ به‌کار می‌رود.

ظهور کامپیوتر اخیراً استفاده از آنالیز فوریه را به طور عددی به‌صورت جزئی عادی از تحلیل داده‌ها امکان‌پذیر ساخته است. کامپیوتر توانسته است تجزیهٔ صوت به مؤلفه‌های هماهنگ آن و امکان تولید و بازشناسی سخن آدمی را فراهم آورد. انجام عملیاتی مشابه بر روی عکسها ــ مثلاً، تصاویر ماهواره‌ای ازنواحی مختلف زمین ــ به کامپیوتر این امکان را می‌بخشد که «برفك» آن را حذف و بدینسان تصویر را واضح کند یا بر روشنی آن بیفزاید.

حتی امورپیش‌پا افتاده، مانند ضرب دو عدد، را می‌توان با استفاده از تبدیلات فوریه بسیار سریعتر از روش سنتی که در کلاسهای دبستان‌آموزش داده می‌شود، به‌انجام رسانید. این روش ارقام اعداد را به‌صورت یك تابع مورد نظرقرارمی‌دهد، که می‌تواند به یك‌سری فوریه بسط داده شود. درمورد اعداد ۱۰۰۰ رقمی، روش فوریه می‌تواند تا ۵۰ بار سریعتر از الگوریتمی باشد که با آن آشناتریم؛ و البته این روش درطراحی کامپیوتر به‌کار می‌رود.

کاری که مسؤول رمز نیروی دریایی با تبدیل فوریه انجام می‌دهد تنها به خاطر روشهای ظریفی که در ریاضیات به منظور محاسبهٔ تبدیل فوریهٔ دنبالهٔ اعداد ــ الگوریتمهایی که روبهمرفته تبدیلهای فوریهٔ سریع (FFT) نام دارند ــ کشف شد، امکان‌پذیر است. ایدهٔ این الگوریتمها درکار رانگ[1] وکونیگ[2] در ۱۹۲۴ بنیاد گرفت، هرچند هستهٔ اولیهٔ این روش شاید به یك قرن پیش به‌کار گاوس برگردد. پس‌ازانتشار مقالهٔ کولی[3] وتاکی[4]، درسال ۱۹۶۵، این روش

1. Jean Baptiste Joseph Fourier

1. Runge
2. König
3. Cooley
4. R. Tukey

کاملاً شناخته شد و کاربرد عام یافت، و گاروین[1]، رادنیك[2]، گود[3]، وینوگراد[4] و سایرین در آن اصلاحات گوناگونی انجام دادند.

محاسبهٔ مستقیم تبدیل فوریه با n عدد نیازمند حدود n^2 عمل است. تبدیل فوریهٔ سریع یافتن پاسخ را در تقریباً $n\log n$ مرحله میسر می‌سازد ـ که به‌ازای مقادیر بزرگ n کاهشی بزرگ است. بدون این اصلاح، کامپیوترها هرگز نمی‌توانند بسیاری ازمسائل را «بیدرنگ» تحلیل کنند ـ یعنی، پاسخها را با همان آهنگی به‌دست دهند که داده‌ها جریان دارند و بدینسان ازتنگناهای بسیاری پرهیز شود. (معلوم شده که تعیین مدت زمان دقیقی که برای انجام تبدیل فوریهٔ سریع لازم است مسألهٔ مشکلی است، که به‌برخی قضایای ژرف ناشی از نظریهٔ تحلیلی اعداد دربارهٔ توزیع اعداد اول، وابسته است.)

کاربردهای بیشمار آنالیز فوریه درعلوم ومهندسی دست‌کم تاحد کاربرد آن در خود ریاضیات مهم است. ریاضیدانان، مانند سایر دانشمندان پیوسته در جستجوی ابزارهای نوینی برای حل مسائل نظری‌خویش‌اند. بارها پیش می‌آید که روشهای کشف شده برای حل مسأله‌ای تجریدی، بعداً در گسترهٔ وسیعی از مسائل دیگر به‌کارمی‌آید.

برای روشن‌شدن مطلب،خوب‌است درکتابخانهٔ علوم یك دانشگاه درفهرست برگه‌ای آن به عنوان «فوریه» نگاهی بیندازید. مثلاً، درکتابخانهٔ هاروارد، ۲۱۲ مدخل وجود دارد، که ده‌تای اول آنها عبارت‌اند از: آنالیزفوریه درنظریهٔ احتمال، آنالیز فوریه درچندین متغیر مختلط، آنالیز فوریهٔ سریهای زمانی، آنالیزفوریهٔ اندازه‌های بیکران در گروههای آبلی موضعاً فشرده، آنالیزفوریه در گروهها و آنالیز موجی جزئی. آنالیز فوریهٔ میدانهای موضعی، آنالیز فوریهٔ فضاهای ماتریسی، ضرایب فوریهٔ اشکال خودریخت (اتوموروف)، انتگرال فوریه وکاربردهای آن، و عملگرهای انتگرال فوریه و معادلات دیفرانسیل جزئی.

درقرن گذشته سری فوریه روحی درجان سریهای دیریکله وریمان دمید، و این سریها سرانجام به L ـ سریها، که امروزه مورد مطالعه است، انجامید. این ایده‌ها نظریهٔ اعداد رابا نظریهٔ نمایشهای گروهها یکی کرده است. آنالیز فوریه به تعریف فضاهای تابعی (مانند فضاهای سوبولف[5]، فضاهای شوارتس، فضاهای توزیعی، و فضاهای هاردی) انجامیده که شالودهٔ آنالیز تابعی نوین را تشکیل می‌دهند. در این چهارچوب می‌توانیم‌معادلات دیفرانسیل (هم خطی‌وهم غیرخطی) و تعمیم نوین آنها ـ معادلات شبه‌دیفرانسیل ـ و عملگرهای انتگرال فوریه را تحلیل کنیم. با این روشها می‌توان ماهیت وانتشار تکینیها را مطالعه کرد.

هرچند فوریه خود اهمیت روشش را باز می‌شناخت ـ چنانکه دو دهه در برابر انتقادها استقامت کرد ـ هرگز نمی‌دانست که ابداعش تا چه میزان پربار خواهد بود. در حالی که هیچ پیشرفت جدیدی در ریاضیات از این نفوذ جدی آنالیز فوریه برخوردار نبوده است، اما الگوی اساسی همچنان یکسان و بی‌تغییر مانده است، تأثیر ایده‌های خوب ریاضی تادوردستها و در راستاهایی غیرمنتظره گسترش می‌یابد.

۲. محاسبه

شاید برجسته‌ترین کاربرد ریاضی این‌قرن‌پیشرفت‌حسابگر الکترونیکی بوده است. کامپیوتر اینك در دفاتر کار، مدارس، و کارخانه‌ها به وسیله‌ای ضروری بدل شده و درخانه‌ها نیز به سرعت به وسیله‌ای

1. Garwin 2. Rudnick 3. Good 4. Winograd 5. Sobolev

عادی تبدیل می‌شود. نکتهٔ اساسی این‌بخش بازنمودن این مطلب‌است که انقلاب کامپیوتری صرفاً یك انقلاب مهندسی نیست. این‌یك‌انقلاب ریاضی‌است، زیرا منشأ ایده‌های اختراع وکاربرد روزانهٔ کامپیوتر، ریاضیات پیچیده است.

کامپیوترها دستخوش دو محدودیت بنیادی‌اند. هرچند سریعترین کامپیوترها می‌توانند میلیونها عمل دریك ثانیه اجراکنند، با این حال همیشه بسیارکندند. این هم ظاهراً یك پارادوکس است، اما جان‌کلام اینجاست: هرچه کامپیوترها بهتر وبزرگترشوند، دانشمندان ومهندسان حل مسائل بیشتر و بزرگتری را از آنها توقع دارند. هرکه بامش بیش‌برفش بیشتر. وقتی میزان داده‌های مسأله‌ای را دوبرابر می‌کنید، تعداد مراحل مورد نیاز برای محاسبهٔ جواب غالباً چهاربرابر، یا هشت برابر، یا شانزده برابر می‌شود. دربسیاری موارد، زمان محاسبه جدیترین محدودیت‌درپیشرفت‌کاراست. دوبرابرکردن سرعت‌کامپیوتر درهر چند سال، تنهابه‌این معنی است‌که توانایی حل مسائل‌بزرگتری را ۱۰ الی ۲۰ درصد افزایش دهند، که غالباً هم به این میزان دست پیدا نمی‌کنند.توانایی بخشیدن به کامپیوتر جهت انجام محاسبهٔ مورد نیاز رهیافت ریاضی کاملاً نوینی را ایجاب می‌کند.

محدودیت دوم کامپیوترها ناشی از ماهیت رقمی آنهاست، زیرا بیشتر ریاضیاتی که بستر علم را تشکیل می‌دهد پیوسته است. تقریب زدن جواب مسأله‌ای پیوسته با ماشینی گسسته مهارت زیادی راطلب می‌کند. بیشتر محاسبات علمی به پاسخ پرسشهایی از این دست وابسته است: چه‌روشهای ریاضی درپس یك جواب عددی ارائه شده نهان است؟ چون کامپیوتر با اعداد با طول ثابت کار می‌کند (و درنتیجه، خطای ناشی از گردکردن دارد)، آیا انباشته شدن خطاها به خطای فاحش در جواب منجر می‌شود؟ آیا از تقریبهای دیگر نیز چنین خطاهایی حاصل می‌شود؟ اگرچنین نیست، برای دستیابی به‌یك‌درجه دقت‌مطلوب، یك‌محاسبهٔ رقمی‌چه‌مدتی طول می‌کشد؟ بازهم‌ریاضیدان باید همواره دیدگاههای‌نوینی را برای بهبود روش‌کامپیوتردرانجام محاسبه ارائه دهد.

بدینسان ریاضیات درکانون محاسبه قرار دارد. حال سرگذشت ریاضیات وکامپیوتر را از آغاز بیان می‌کنیم.

خود کامپیوتر

امروزه به سادگی می‌توان فراموش کرد که کامپیوتر همه منظوره محصول بسیارجدیدی است. تاپنجاه‌سال پیش، منظورازماشین‌محاسبه، ماشینی بود که برای انجام بسرعتی اعمال اصلی به‌کار می‌رفت. در قرن پانزدهم غیاث‌الدین جمشیدکاشانی ریاضیدان‌قرن پانزدهم‌ایرانی ماشین حسابی را برای محاسبهٔ خسوفهای ماه، وماشین حساب‌دیگری را برای تجسم و نمایاندن موضع‌ستارگان ساخت. ویلیام شیکارف[1]، بلزپاسکال، و ویلیام لایب‌نیتس‌همگی ماشینهایی برای‌انجام عمل‌جمع و تفریق خودکارساختند؛ چارلزبیبج[2] به خاطرماشین تحلیلی‌اش‌مشهور بود. برای محاسبهٔ مساحت زیریك منحنی مسطح، ژ هـ هرمان[3]، جیمز-کلرك ماکسول، وجیمز تامسون هریك صفحه سنجهایی را ابداع کردند که نوع دیگر کامپیوتر قیاسی (آنالوگ) بود. اما، یك ماشین تك، و عام که برای تمام مسائل وتمام محاسبات مناسب باشد از منبعی سر بر آورد که ظاهراً کمترین احتمال به آن می‌رفت. آن منبع مبحث مشکل منطق ریاضی است.

1. Schikarf 2. Babbage 3. J.H.Hermann

منطق و کامپیوتر

بنیانهای ریاضیات بر پایه‌های منطق استوارند. قرنها، ریاضیدانان بر این اعتقاد بودند که استدلال قیاسی هرگز نمی‌تواند به‌نتایج ناسازگار بینجامد. این نوع تعقل مرسوم را در سال ۱۹۵۳ پارادوکسهای مشهور برتراند راسل، و آلفرد نورث وایتهد، مورد تردید قرار دادند. مثلاً، اگر s مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی باشد که شامل خودشان نیستند، آیا s شامل خودش هست؟

در حدود ۱۹۱۵، دیوید هیلبرت نیز به تدوین برنامه‌ای برای اصلاح بنیانهای ریاضیات دست زد. در ۱۹۲۷، جان فون نویمان، یکی از همکاران جوان هیلبرت، مقالهٔ مشهوری منتشر کرد که در آن حدس می‌زد منطق ریاضی بزودی از هر تناقض ممکنی پالوده خواهد شد. با همهٔ اینها، تنها سه سال بعد بود که، کورت گودل اثبات کرد حتی حساب ساده هم شامل «گزاره‌های تصمیم ناپذیر» است، جمله‌هایی که صدق و کذب آنها را نمی‌توان ثابت کرد. روش او همچنین نشان می‌دهد که اثبات سازگاری منطقی ریاضیات ناممکن است. معلوم شد که پاسخهای این پرسش ظاهراً ذهنی، ثمرات عملی بسیار زیادی دارند.

در ۱۹۳۶، آلن تورینگ[1] و امیل پست[2] مستقل از هم دریافتند که این پرسش هم‌ارز آن است که کدام دنباله‌های از ۰ و ۱ را می‌توان به کمک یک ماشین تجریدی و با مجموعه‌ای متناهی از دستورالعملها بازشناخت؛ آنان این گونه اتوماتون را جعبهٔ سیاه ساده‌ای می‌دانستند که نواری برای نوشتن و خواندن نمادها دارد. تورینگ و پست قضیهٔ شگفت‌آوری را درخصوص اتوماتونها اثبات کردند: علی‌الاصول، باید یک «اتوماتون عمومی» وجود داشته باشد که بتواند هر دنباله را که با اتوماتون دیگری قابل تشخیص باشد، بازشناسد. یعنی، این ماشین عمومی می‌تواند ــ با دنباله‌ای متناهی از دستورالعملها ــ کارکرد ویژهٔ هر ماشین خاصی را تقلید کند.

در واقع تولد کامپیوتر عمومی همین‌جا بود. چرچ[3]، کلینی[4]، و سایرین، ایده‌های منطقی بیشتری را پی گرفتند. اما این جان فون نویمان، ریاضیدان بزرگ بود که دانست اتوماتون عمومی را چگونه به‌صورت یک حسابگر الکترونیکی (کامپیوتر) با دستورالعملهای ذخیره شده ــ «برنامه‌ای» که خود ماشین می‌توانست به‌هنگام محاسبه تغییر دهد ــ درآورد. فون نویمان و همکارانش آنگاه کار تکنیکی جاودان خود را که برای تبدیل امری نظری به واقعیت ضروری بود، به عهده گرفتند. در خلال یک دهه، ابزارهایی مانند انیاک[5] فون نویمان، در انستیتوی مطالعات پیشرفتهٔ پرینستون، که خودش در آنجا کار می‌کرد، ساخته شد. در هیچ لحظه‌ای از سالهای اولیهٔ این قرن هیچ کس حدس نمی‌زد که آن مناظرهٔ ذهنی پیرامون بنیادهای منطق ریاضی مآلاً به کجا می‌انجامد.

الگوریتم و پیچیدگی محاسبه

پیشتر به یکی از مسائل اصلی محاسبه اشاره کردیم: با رشد ابعاد مسائل محاسباتی، زمان و حافظهٔ مورد نیاز برای حل آنها با سرعت بیشتری رشد می‌کند. در نخستین روزهای تولد کامپیوتر و محاسبات کامپیوتری، ریاضیدان می‌بایست درستی و سرعت یک برنامه را با آزمودن آن در ورودیهای مختلف، با توجه به زمان حافظهٔ مورد نیاز، بررسی کند. موانع این روش نه چندان کارآمد آشکارند. برای اجتناب از آنها، ریاضیدانان برشالودهٔ کار تورینگ و پست الگوهای

1. Alan Turing 2. Emil Post 3. Church 4. Kleene
5. ENIAC

نظری محاسبه را بنا کرده‌اند تا بیازمایند که یک الگوریتم به چند عمل نیاز دارد. آنان دریافتند که بهتر است به‌جای تلاش در حل هر مسألهٔ جدید با شیوه‌ای خاص و مربوط به موضوع، مجموعه‌ای از روشهای ریاضی اساسی ابداع شوند تا بتوانند به صورت سنگهای زیربنا برای الگوریتمهای بسیار به کار روند.

مثلاً، به یک کار معمولی که یک کامپیوتر باید چندین بار انجام دهد توجه کنید: n عدد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ را درنظر می‌گیریم؛ می‌خواهیم آنها را به‌ترتیب صعودی بنویسیم. ساده‌ترین روش چنین است:

۱. a_1 را بنویس.

۲. بررسی کن که آیا a_2 کوچکتر از a_1 است یا خیر؛ اگر چنین است، آن را سمت چپ a_1 بنویس. در غیر این صورت، a_2 را در سمت راست a_1 بنویس.

۳. بررسی کن که a_3 از کوچکترین عددی که تاکنون نوشته شده کوچکتر است یا خیر. درصورت مثبت بودن پاسخ آن را در سمت چپ بنویس، درغیر این صورت آن را با عدد بعدی مقایسه کن، اگر کوچکتر است، آن را درسمت چپ و اگر بزرگتر است آن را در سمت راست بنویس.

۴. این فرآیند را به‌ازای $a_4, \ldots, a_5, a_6$ ادامه ده.

معیار خوبی برای زمان مورد نیاز انجام این الگوریتم تعداد مقایسه‌هایی است که باید انجام شود. اگر اعداد در ابتدا ترتیبی نزولی داشته باشند، این مدت زمان باید $n^2/2$ باشد. این را پیچیدگی بدترین حالت الگوریتم می‌نامند. اگر ترتیب این اعداد تصادفی باشد، می‌توان $n^2/4$ مقایسهٔ ضروری را انتظار داشت، که پیچیدگی حالت میانگین نام دارد. این نکته که زمان مورد نیاز متناسب با n^2 زیاد می‌شود، محدودیت واقعی برای بزرگی فهرستی است که می‌توان عملاً مرتب کرد. از ضریب ویژهٔ ۱/۲ یا ۱/۴ معمولاً چشم‌پوشی می‌شود و متخصصین کامپیوتر می‌نویسند که زمان این الگوریتم $O(n^2)$ است، که نمایشگر این نکته است که زمان اجرا از مرتبهٔ n^2 است.

باید بگوییم که پیچیدگی بدترین حالت و حالت میانگین یک الگوریتم ممکن است به طور محسوسی فرق داشته باشند. الگوریتم مشهور سادکی (سیمپلکس) برای برنامه‌ریزی خطی در بدترین حالت می‌تواند به تابعی نمایی از اندازهٔ مسأله نیاز داشته باشد. اما، این بدترین حالتها معدود و نادرند؛ بورگوارد[1] و اسمیل[2] در ۱۹۸۲ ثابت کردند که برای نوع دیگری از این مسأله، این الگوریتم به‌طور متوسط به‌زمانی از مرتبهٔ درجهٔ دوم اندازهٔ مسأله نیاز دارد.

در واقع، روش بسیار سریعتری برای مرتب کردن اعداد، بر پایهٔ اصل بازگشت، وجود دارد: تقسیم اعداد به دو گروه مساوی؛ مرتب کردن هر گروه؛ سپس ادغام این دو فهرست مرتب‌شدهٔ شامل $n/2$ عدد. برای مرتب کردن هریک از گروههای شامل $n/2$ عدد، از همان روش استفاده می‌کنند: آنها را در دو گروه شامل $n/4$ عدد مرتب می‌کنند؛ این اعداد را مرتب و سپس فهرستها را ادغام می‌کنند. هر یک از گروههای با اندازهٔ $n/4$ از طریق تقسیم آن به گروههایی با اندازهٔ $n/8$ مرتب می‌شود و به‌همین ترتیب تا آخر. زمان انجام این فرایند $O(n \log n)$ است، و بنابراین هنگام مرتب کردن ۲۵۶ عدد، این روش ۶۴ بار سریعتر از روش قبلی است.

اصل بازگشت در بسیاری از مسائل دیگر نیز به‌خوبی اعمال می‌شود. کامپیوترها همواره ماتریسهای بزرگ را ــ مثلاً، در انجام تحلیل آماری داده‌ها ــ ضرب می‌کنند. روش استاندهٔ دبیرستانی برای ضرب

1. Borgwardt 2. Smale

کردن ماتریسهای $n \times n$ نیازمند زمان $O(n^3)$ است. اما، به کمك تدبیرهایی می‌توان ضرب ماتریسهای ۲ × ۲ را به‌جای ۸ عمل ضرب با ۷ عمل ضرب انجام داد. با شکستن ماتریسهای بزرگ به پاره‌های کوچکتر و کوچکتر به‌طور بازگشتی می‌توان از این مزیت برای مسائل کوچك بهره گرفت و به الگوریتمی برای ضرب ماتریسها دست یافت که با زمان $O(n^{2.81})$ انجام می‌شود.

افزون بر روش بازگشت، بسیاری روشهای مفید دیگر نیز، ازجمله «ساختار داده‌ها»، برای سامان بخشیدن محاسبات وجود دارند. مثلاً، تمامی مثالهایی که در پیشگفتار این مقاله برشمردیم ــ پالایهٔ کالمن ـ باسی، واضح کردن تصویر، سی تی‌اسکن کننده‌ها، برنامه‌ریزی خطی، و آمار پزشکی ــ به‌استفاده از کامپیوتر برای حل دستگاه n معادلهٔ خطی n متغیری وابسته‌اند. درنتیجه، به این الگوریتمها توجه زیادی معطوف شده است. روش کلاسیك حذفی گاوس، زمان $O(n^3)$ می‌برد. اما، در بسیاری ازمسائل مهم ــ بارزتر ازهمه روشهای عنصر متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل یا برخی مسائل مقادیر ویژه ــ که برای شبیه‌سازیهای کامپیوتری هوا، پرواز فضایی، طراحی صنعتی، ومانند آنها ضروری است، در ضرایب معادلات صفرهای زیادی پیدا می‌شود، که توزیع آنها دارای الگویی منظم است. ریاضیدانان برای دستیابی به‌الگوریتمهای سریعتر از این ساختار بهره گرفته‌اند. این الگو را می‌توان به یك گراف برگرداند (ساختاری متشکل از نقاط و یالهایی که آنهارا بهم وصل می‌کنند.) و از این گراف به‌نوبهٔ خود می‌توان برای ابداع نظمی کارامد به منظور انجام روش حذفی گاوس سود جست. نتیجهٔ کار الگوریتمی است که زمانی که می‌برد تنها $O(n^{3/2})$ است ــ صرفه‌جویی عمده درعملی که باید هزاران‌بار انجام شود. اخیراً، معلوم شده است که این روش همچنین به الگوریتمی با زمان $O(n^{3/2})$ برای ماتریسهایی که گرافهایشان را می‌توان در یك صفحه رسم کرد، تعمیم پیدا می‌کند.

درحالی که الگوریتمهای بسیاری بر مفاهیم ریاضی نسبتاً مقدماتی متکی‌اند، سه الگوریتم اخیر از قضایای عمیقی متعلق به شاخه‌های بسیار گوناگون بهره می‌گیرند تا به مسائل محاسباتی مشکل راه پیدا کنند. معلوم شده است که برخی نتایج نسبتاً ذهنی، پیامدهای محاسباتی کاملاً عملیی در آزمودن اعداد اول، بازشناسی گراف، و برنامه‌ریزی با اعداد صحیح داشته‌اند.

اعداد اول بزرگ پایهٔ یك‌طرح رمزنگاری‌نوین‌را تشکیل‌می‌دهند. اما تا همین اواخر، آزمودن اینکه آیا عددی ۶۰ رقمی اول است یا خیر خارج ازحوزهٔ توانایی حتی سریعترین کامپیوترها بوده است. ساده‌ترین‌آزمون ــ وارسی تمامی اعداد صحیح تا ریشهٔ دوم عددمورد نظر برای دریافتن اینکه آیا آنها مقسوم‌علیه هستند یا خیر ــ نیازمند وارسی 10^{30} عدد است. (در اینجا 10^{30} تمساد علمی برای عددی است متشکل از یك و سی صفر در سمت راست آن.) اما، کارشناسان نظریهٔ اعداد از دیرباز در کار مطالعهٔ خواص اعداد اول بوده‌اند. بسیاری ازقوانینی که کشف کردند ــ مانند به‌اصطلاح‌قوانین تقابلی‌بالاتر ــ اخیراً برای آزمودن اول‌بودن اعداد درالگوریتم نوینی ادغام شده‌اند که وارسی حتی اعداد یکصد رقمی را عملی می‌سازد.

مسألهٔ دیگری که درمحاسبه بسیار رخ می‌دهد تعیین این امراست که آیا دو گراف n نقطه‌ای ظاهراً متفاوت درواقع همریخت هستند ــ یعنی، الگوی پیوند نقاط آنها یکی است ــ یا خیر. تا همین سالهای اخیر، این نکته را تنها ازطریق آزمون و خطا می‌توانستیم تعیین کنیم. اما هدف برخی از الگوریتمها کشف تقارن بین دو گراف است، که ازیکی ازپیروزیهای اخیرجبر، یعنی رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی، بهره می‌گیرد. الگوریتمهای جدیدکه بر تقارن استوارند، بسیارسریعتر از آزمون و خطا عمل می‌کنند، هرچند هنوز هم راههای بهتری مورد جستجو است.

مسألهٔ کامپیوتری دیگری که در صنعت اهمیت دارد، یعنی برنامه‌ریزی بااعداد صحیح، این‌است که بهینه‌سازی زمان‌بندی‌یا استفاده از مواد را برای یك مؤسسه میسرسازد. درچند سال گذشته، روشهای‌قرن نوزدهمی‌مطالعهٔ شبکه‌ها درهیأتهای اعداد جبری درمورد برنامه‌ریزی با اعداد صحیح به‌کار گرفته شده وبه‌الگوریتمهای جدیدی انجامیده است. (به‌علاوه، همین روشهای شبکه‌ای سریعترین الگوریتمها را برای تجزیهٔ چندجمله‌ایها به‌وجود آورده است.)

ریاضیدانان درکنارجستجوی الگوریتمهایی برای‌حل مسائل‌عملی، طرح پرسشهای عمیقی را آغازکرده‌اند. ازجمله «حدود مطلق کران پایین‌سرعت درحل مسائل کدام‌اند؟» و «آیا برخی مسائل ذاتاًسرکش هستند؟» باساختن‌مدلهای‌محاسبه‌براساس‌ماشینهای‌تورینگ،ریاضیدانان به پاسخهایی مقدماتی دست یافته‌اند. پیامدهای یکی از مباحث‌جالب توجه نمایانگر این نکته است که برخی مسائل را، به‌نام مسائل NP تمام، نمی‌توان در زمان چندجمله‌ای حل کرد. کارکردن برای اثبات اینکه رده‌ای از مسائل از لحاظ محاسبه سرکش می‌مانند، ظاهراً عبث می‌نماید، اما چنین برهانی دقیقاً روشن خواهد کرد که چه چیزی‌یك محاسبه را سرکش می‌کند، ولذا یافتن الگوریتمهایی را برای مسائل سرکش آسانتر می‌سازد.

تصادفی بودن محاسبه

یکی از زیباترین کشفیات ریاضی در زمینهٔ محاسبه این است که محاسبه‌ای که بر عاملی تصادفی ــ مثلاً، پرتاب سکه ــ متکی است می‌تواند بسیار کارامدتراز هرالگوریتم از پیش تعیین شده‌ای باشد.

نمونهٔ کلاسیك این موضوع روش مونت‌کارلو است، که در دههٔ ۱۹۴۰ ارائه شد. مثلاً، برای محاسبهٔ مساحت تخته هدفی که بر دیواره‌ای‌به‌مساحت ۱۰۰ فوت مربع‌سوارشده، و ۵۰۰ نیزه را به‌طور تصادفی به سوی دیوار پرتاب می‌کنند. فرض کنید ۳ نیزه برتخته می‌نشیند، مساحت‌آن‌تقریباً ۱۵/۵۰۰ مساحت دیوار، یا ۳ فوت مربع است. درحالت کلیتر، برای محاسبهٔ حجم یك ناحیهٔ R در درون یك جعبهٔ B، n نقطه را به‌طورتصادفی در B برمی‌گزینیم. براورد خوبی برای نسبت حجم R به حجم B کسری است از n نقطه، که در R واقع‌اند. در واقع خطای این روش با اختیارکردن نقاط بیشتر به سمت صفرمیل می‌کند، وآهنگ همگرایی با $n^{-1/2}$ متناسب است.

روش مونت‌کارلوبرای شکلهای پیچیده و/یا ابعاد زیاد فوق‌العاده کارامد است. این‌روش به‌روش عددی‌متداولی‌برای محاسبهٔ‌انتگرالهای چند بعدی تبدیل شده است و انتگرالگیری توابعی راکه به راههای دیگرناممکن‌است، استانده‌سازی می‌کند. درمقابل باروش‌مونت‌کارلو، برخی محاسبات مطلوب به‌ظرفیتی به مراتب بیشتر از ظرفیت کامپیوترهای موجود نیازدارند. معماران کامپیوتر درکارتحقیق‌اند که چگونه می‌توان واحدهای پردازش موازی زیادی را، خواه برای کامپیوتر چند منظوره یا برای کامپیوتر مختص یك محاسبهٔ ویژه، به‌طور مؤثر به‌هم پیوند داد.

تصادفی بودن الگوریتمها

مثالهای بالایکی ازکاربردهای تصادفی‌بودن دریك دستگاه‌پیوستار را نشان می‌دهد. اخیراً، تصادفی بودن کاربردپذیری خود را در مطالعهٔ مسائل جبری نیزنشان‌داده‌است. دراینجا یك روش تصادفی دقیقاً پاسخ

صحیح را به‌دست می‌دهد ـ مگر گاهگاهی، که پاسخی اشتباه باشد. هر یك از این روشها به ویژگیهای ساختاری نیانسی موجودات جبری مجردی مانند حلقه‌های چند جمله‌ایها، هیأتهای اعداد، و گروههای جایگشتها وابسته است.

چنین الگوریتمی چگونه سودمند می‌افتد؟ اجرای الگوریتمی که در ۱۰۰ درصد موارد درست باشد ممکن است نیازمند ۶ مرحله باشد، در حالی که الگوریتمی که پاسخ درست را تنها در ۹۹٫۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹ درصد موارد به دست می‌دهد اجرایش صرفاً نیازمند یك مرحله است. صرفه‌جویی‌های عظیم در وقت بر امکان ناچیز خطا می‌چربد. در هشت سال گذشته، به چندین نمونه از این گونه روشها دست یافته‌اند.

یکی از الگوریتمهای تصادفی، که دامنهٔ ایمنی کامپیوتر را با هزینهٔ اندکی بسیار بالا می‌برد بزودی در درون تراشه‌های سیلیسیم سیم‌بندی خواهد شد. این الگوریتم، ثبت «اثرانگشت» پرونده‌های کامپیوتری را به‌خاطر باز داشتن دیگران از تحریف آن، میسر می‌سازد. فرض کنیم در دیسك کامپیوتری ۲۰ میلیون لقمه (بایت) اطلاعات ذخیره شده باشد. این لقمه‌ها را به‌صورت ضرایب یك چندجمله‌ای از درجهٔ ۲۰,۰۰۰,۰۰۰ در نظر می‌گیریم؛ این چندجمله‌ای را بر یك چندجمله‌ای درجهٔ ۱۳ که به‌طور تصادفی اختیار شده است تقسیم می‌کنیم و باقیماندهٔ تقسیم را کنار می‌گذاریم. اکنون ضرایب چندجمله‌ای را که به‌طور تصادفی برگزیده‌ایم و ضرایب باقیمانده را یادداشت می‌کنیم و آنها را در برگه‌دان خود قرار می‌دهیم. اینها برای پروندهٔ شما حکم «اثرانگشت» را دارند. احتمال اینکه یك مداخله‌گر بتواند داده‌ها را بدون تغییر این اثرانگشت تصادفی عوض کند کمتر از یك در ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ یا با نماد علمی، 10^{-20} است.

اگر امکان خطای اندکی مجاز باشد، آزمون اول بودن یك عدد، مسأله‌ای که در بالا از آن یاد کردیم، بسیار آسان از کار درمی‌آید. اگر عدد صحیحی مانند n عدد اول نباشد، آنگاه دست‌کم ۳/۴ اعداد بین ۱ و n دارای خاصیت ویژه‌ای چون S اند که می‌توان آن را به سرعت وارسی کرد. اگر n عدد اول باشد، چنین اعدادی با خاصیت S وجود ندارند. آزمون ساده است: پنجاه عدد انتخاب کنید و ببینید آیا خاصیت S را دارند یا خیر. اگر یکی این خاصیت را داشته باشد، پس n اول نیست. درغیر این صورت، n تقریباً با اطمینان اول است ـ زیرا، اگر n اول نباشد، احتمال انتخاب کردن پنجاه عدد به‌طور تصادفی بدون اینکه خاصیت S را داشته باشند دست بالا در حدود $(1/4)^{50}$ (یا 10^{-30}) است. اگر این احتمال به‌اندازهٔ کافی مطلوب نباشد، روی پنجاه عدد دیگر همین کار را انجام دهید؛ این کار فقط یك یا دو ثانیه به درازا می‌کشد، و امکان خطا سریعتر کاهش می‌یابد.

کامپیوتر در خدمت اثبات

ریاضیدانان کامپیوتر را به‌صورت آزمایشگاهی علمی برای آزمودن ایده‌ها و رسیدن به پندارهای دقیق، بر پایهٔ مدارك عددی، به خدمت گرفته‌اند. این فکر اخیراً در مطالعه و بررسی نگاشتهای بازه، و به‌طور کلی در زمینهٔ سیستمهای دینامیکی، به‌بار نشسته است. کامپیوتر همین کاربرد را در نظریهٔ اعداد، هندسهٔ جبری، توپولوژی، آنالیز مختلط، و مطالعهٔ پتانسیلهای شبه دوره‌ای دارد. از محاسبهٔ بسیار دقیق، الگوهایی زاده می‌شوند. در مواردی، محاسبات مفصل، حتی نشان می‌دهند چه موقع تابعی نقاط بازگشت یا ناپیوستگیهایی دارد و بنابراین اساس پندارهای ریاضی را پایه‌ریزی می‌کنند.

اما، اخیراً امکانات تازهٔ فریبنده‌ای پدید آمده است: در برخی موارد کامپیوتر می‌تواند به‌جای اینکه آزمایشگاه ریاضیدان باشد، در پروراندن یك اثبات سنتی ریاضی، همچون یك همکار برای او عمل کند. کامپیوتر می‌تواند کار جبری، ترکیبیاتی، یا تحلیلی انجام دهد. درمورد اولی، مانند تحلیل مسألهٔ چهاررنگ، کامپیوتر این نکته را وارسی می‌کند که آیا تعدادی متناهی و معین از حالتهای یك حکم ترکیبیاتی برقرار است یا خیر؛ این کار با بازبینی یکی از آنها پس از دیگری انجام می‌گیرد. تبدیل این قضیه به حکمی ترکیبیاتی کاری است که بر عهدهٔ ریاضیدان می‌ماند.

کامپیوتر همچنین می‌تواند نامساویهای ضروری برای اثبات یك قضیه را تحقیق کند. این کار می‌تواند با دقت ۱۰۰ درصد انجام گیرد. ریاضیدانان باید کامپیوتری داشته باشند که بررسی کند آیا یك عدد خاص x قطعاً در بازهٔ $[a, b]$ واقع است یا خیر. اثبات نامساوی $x<y$ به اثبات این موضوع تبدیل می‌شود که کران بالای x ـ بازهٔ کمتر از کران پایینی y ـ بازه است. این محاسبه با بازه‌ها را می‌توان با تبدیل هرمحاسبه به حساب اعداد صحیح با اطمینان انجام داد.

این روش درمطالعهٔ تکرار نگاشتهای بازه با موفقیت به‌کار گرفته شده است، و در اثبات اخیر در مورد وجود یك نقطهٔ ثابت برای تکرار یك نگاشت درجهٔ دوم جزء با اهمیتی است. کامپیوتر می‌تواند تعداد زیادی براورد را وارسی کند، که هریك از آنها را می‌توان با دست انجام داد. اما انجام این براوردها وقتی کلاً مد نظر باشند، مشکلات زیادی را می‌آفریند.

این دو مثال هر دو انحرافی از سنت‌اند که می‌توانند از اهمیت فزاینده‌ای برخوردار باشند. در این مرحله ما پیشگویی نمی‌کنیم که کامپیوترها در طراحی ساختمان یك اثبات جایگزین تفکر ریاضیدان خواهد شد. اما در مواردی مطمئناً چنان به‌یاری ریاضیدان می‌شتابند که نقش آنها خیلی فراتر از آزمایشگاه تجربی یا مدل ریاضی خواهد بود؛ کامپیوتر با تثبیت تعداد زیادی اتحاد یا نامساوی در درون یك اثبات ریاضی، مکمل توانایی ریاضیدان خواهد بود.

آنالیز عددی و مدل‌سازی ریاضی

در پای مراحل اولیهٔ آنالیز عددی را می‌توان در آثار نیوتن (قرن ۱۷) و اویلر (قرن ۱۸) سراغ گرفت. اما، ریاضیات گسسته با ظهور کامپیوتر به سرعت تکامل پیدا کرد. در دورهٔ پس از ۱۹۵۰، وارونی ماتریسهای تنك و انتگرالگیری عددی به طور وسیعی مورد مطالعه قرار گرفتند؛ روشهای انتگرال گرفتن از معادلات دیفرانسیل معمولی جزئی نیز به همین منوال بود. این پیشرفتها طراحی مهندسی را در گسترهٔ وسیعی از مسائل میسر کردند. امروزه بیشتر طراحی و توسعهٔ تکنولوژی پیشرفته ـ از اتومبیل و هواپیما تا مهندسی نفت و ماهواره ـ بر شالودهٔ شبیه‌سازی کامپیوتری استوار است. افزون براین، محاسبات پیدرنگ به پیروزیهایی در زمینهٔ اکتشافات فضایی و کنترل خودکار موشك انجامیده است.

اما، همهٔ محاسبات را نیز نمی‌توان در مجرای خودکار انداخت. اهمیت مغز متفکر چندان است که هرچه بر آن تأکید ورزیم گزاف نگفته‌ایم. در یك سمت مدل‌سازی عددی، قوانین فیزیکی و معادلات ریاضی قرار می‌گیرند که یك فرایند مهندسی خاص را توصیف می‌کنند، در دیگر سر الگوریتمها و کدها (برنامه‌ها)ی عددی هستند که برای دستور دادن به کامپیوتر به‌کار می‌روند. پیوند دادن این دو حوزه مستلزم محاسبات ریاضی تقریبهای گسسته، و درکی ریاضی از ساختار معادلات، و پدیده‌های غیرخطی است که توسط این معادلات توصیف می‌شوند.

در اینجا روشهای تفاضل متناهی و عنصر متناهی نقشی اساسی‌بازی کرده‌اند. با ظهور محاسبهٔ برداری وموازی، مسائلی که از دیرباز غیر قابل حصول تصور می‌شدند اینك رام می‌شوند. علی‌رغم پیشرفتهای اخیر، آنالیز عددی معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی‌در سه بعد، همچون بسیاری ازمعادلات مرزی دیگر، باید منتظر روشهای ریاضی نوینی باشند.

همچنین ریاضیات نوین می‌تواند بین‌دوپرسش مهم دربارهٔ سرعت محاسبه تمیز قائل شود. آیا محاسبات را می‌توان آنقدر سریع انجام داد که سودمند باشد؟ دربسیاری ازمسائل رایج در مهندسی انجام‌کار درمدتی خیلی‌کم امری اساسی است. ثانیاً، ریاضیات نوین می‌تواند به‌این‌مساله پاسخ دهد که آیا محاسبه‌ای صرفاً شدنی است، یا آنکه می‌توان آن را در زمان لازم که عملاً بدکار می‌آید برای یك منظور عملی مانند به‌زمین نشاندن هواپیما انجام داد.

ریاضیات عددی درتحقق سه تحول‌قابل ملاحظه‌نقشی کلیدی‌بازی می‌کند: نشستن شبیه‌سازی کامپیوتری بـه جای آزمایش، علم تصمیم، و پردازش داده‌ها و سیگنالها. محاسبه می‌تواند از آزمایش ارزانتر تمام شود. اصلاح طرح آزمایشها در یك بررسی کامپیوتری از یك آزمایش فیزیکی واقعی بسیار ساده تر است. برای برخی پروژه‌هـا، آزمایش خطرناك یا ناممکن است.

در آئرودینامیك، طـراحی هـواپیما، توربین وکمپرسور به‌کمك کامپیوتر انجام می‌شود. برای عمل شبیه‌ساز پروازکه درآن خلبانهای فضاپیما آموزش می‌دیدند، توانایی محاسبهٔ نیروهای آئرودینامیکی وارد بر فضاپیما (شاتل) ضرورتی قطعی بود.

برخی ازکاربردهای دیگر دینامیك عددی سیالها عبارت‌اند از: طراحی بدنهٔ کشتی، محاسبهٔ الگوهـای احتراقی، جریان آمیزه‌ای از روغن و آب (یا سایر مواد شیمیایی) برای بازیابی روغن اضافی، جریان یافتن چنـد فـازی [مـواد] در رآکتورها تحت شرایـط گذرا، جریان آب زیرزمینی از میان صخره‌های خرد شده، و انتشار سیگنالهای صوتی در لایه‌های زمینی، و مانند آنها. طراحی رآکتور همجوشی هسته‌ای بربایهٔ مدل‌سازی ریاضی‌متکی‌است؛ به‌وجود آوردن پلاسما با چگالیهایی که مـورد نظر ماست هنوز برروی زمین ممکن نشده است؛ این نوع پلاسماها تنها به‌صورت‌مدلهای ریاضی‌موجودند. همین امر در مورد ایجاد لیزر همجوشی هم صدق می‌کند.

تحقیق درعملیات، حوزه‌ای از علم تصمیم که بر عملیات ریاضی روی داده‌هـای ذخیره شده متکی است، به‌ساده‌کردن عملیات‌بزرگ‌مقیاس یاری عظیمی رسانیده و استفادهٔ بهینه از منابع را تضمین کرده است. برنامه‌ریزی خطی، ازهمان نخستین کاربردهای صنعتی‌اش در جدول زمان‌بندی پالایشگاههای نفت درآغاز دههٔ ۱۹۵۰، به‌افزایش اساسی کارایی عملیاتی که در تجزیه [مواد] مورد استفاده قرار می‌گرفت، منجرشده‌است. توپولوژی، آنالیزمحدب، ریاضیات‌ترکیبیاتی، و هندسه، جملگی درپیشبرد این مدل ریاضی سهم داشته‌اند.

با انجام عملیات ریـاضی روی اطـلاعات ذخیره شده به‌صورت رقمی می‌توان جزئیات پنهان در توده‌ای از داده‌ها را استخراج کرد. دراینجا ریاضیات آمار وارد کار مـی‌شود تا گرایشها و همبستگیهای پنهان را نشان دهد. در علوم پزشکی، مدل‌سازی فیزیولوژیك در را به روی امکانـاتی برای فهم عملکردهای زیست‌شناختی موجـودات زنده و نیز طراحی اعضای مصنوعی مؤثر، می‌گشاید. شاید جالبترین موفقیت محاسبات [کامپیوتری] درپزشکی کاربرد آن در برش‌نگاری (توموگرافی) با پرتوایکس کامپیوتری است، ونیز درسایرپیشرفتهای تشخیص بدون استفاده ازجراحی (بردن دستگاههای تشخیص به‌درون بدن) که از فراصوتی، تشدید مغناطیسی هسته‌ای، و برش‌نگاری گسیل پوزیترون بهره می‌گیرند.

تأثیر کامل کامپیوتر در دهه‌های آینده‌آشکار خواهد شد. کامپیوتر مانند اختراع ماشین بخار، برای بالابردن سطح زندگـی ما دارای ظرفیت عظیمی است. ابتکاراتی کـه هم اکنون برای ابرکامپیوترها و کامپیوترهای نسل پنجم (که هدف آن هـوش مصنوعی، تشخیص الگوها، پردازش اطلاع و مـانند آنها، و نیز محاسبات علمی است) درجریان است می‌تواند تنها تا اندازه‌ای نتیجه‌بخش باشد، مگرآنکه چنین سخت افزاری با دیدگاههای ریاضی نوین تکمیل شود.

معماری کامپیـوتر امروزی، رشته‌ای است؛ ایـن کامپیوتر به افتخار فـون نویمان که چگونگی اجرای این نوع برنامه نویسی را نشان داد، ماشین فون نویمان نامیده می‌شود. در انقلاب آیندهٔ سخت‌افزار محاسبات، سازماندهی به‌جای‌اینکه رشته‌ای باشد، موازی‌است. این‌کامپیوترخیلی بیشترشبیه ساختار موازی مغزطراحی خواهد شد، که کندتراما بسیارپیچیده‌تراست. مطمئناً برای‌ساخت و برنامه‌دادن به آن و به‌دریافت مفهومی نوین نیازخواهدبود. کامپیوتر، درتمام‌کاربردهایش، به‌طور حیاتی به ایده‌ها، بینشها، و روشهای بـرگـرفته از ریاضیات وابسته است.

ترجمهٔ بهرام معلمی

• Jaffe Arthur, "Appendix C. ordering the universe: the role of mathematics", *Renewing U.S. Mathematics, Critical Resource for the Future*, National Academic Press, Washington D.C, 1984, 117-162.

آموزش هنر مسئله حل کردن*

آنی شوئنفلد

۱. مقدمه و کلیات

این مقاله دو سؤال زیر را بررسی می‌کند:

(الف) آیا می‌توانیم استراتژیهایی را که ریاضیدانهای «خبره» برای حل مسئله به‌کار می‌برند، دقیقاً تشریح کنیم؟ و

(ب) آیا می‌توانیم به کاربردن این استراتژیها را به دانشجویان بیاموزیم؟

دو فرض اصلی زیر را می‌پذیریم. نخست: ریاضیدانها درنتیجهٔ تجربهٔ خود درمسئله حل کردن، به‌تدریج استراتژیهایی سازگار و مفید به‌دست می‌آورند. دوم: بیشتر دانشجویان یا از این استراتژیها آگاهی ندارند یا آنها را به‌کار نمی‌برند. برای مثال مسئله‌های زیر را درنظر بگیرید:

مسئلهٔ ۱. فرض کنید a، b، c، و d اعدادی مفروض بین ۰ و ۱ باشند. ثابت کنید که

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)>1-a-b-c-d\,.$$

مسئلهٔ ۲. مجموع $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\dots+\frac{n}{(n+1)!}$ را تعیین کنید.

مسئلهٔ ۳. ثابت کنید که اگر 2^n-1 عدد اول باشد، آنگاه n اول است.

هر سهٔ این مسائل به وضوح برای دانش‌آموزان دبیرستانی قابل فهم است. حل هیچیک نیاز به‌داشتن معلومات ریاضی بیش‌ازجبر دبیرستان ندارد و همه، راه‌حلهای سرراستی دارند. با این حال دانشجویان مدارس عالی و ریاضیدانهای حرفه‌ای این‌مسئله‌ها را باروشهای کاملاً متفاوتی حل می‌کنند.

درمسئلهٔ ۱ اغلب دانشجویان باصرف انرژی‌زیاد چهارعامل ضرب طرف چپ را در هم ضرب کرده، جملات طرف راست را به‌طرف چپ می‌برند و سعی می‌کنند نامساوی

$$(ab+ac+ad+bc+bd+cd-abc-abd-acd-bcd+abcd)>0$$

را اثبات کنند. ولی معمولاً موفق نمی‌شوند. تا آنجایی که من مشاهده کرده‌ام همهٔ ریاضیدانها حل مسئله را با اثبات نامساوی

$$(1-a)(1-b)>1-a-b$$

آغاز می‌کنند. بعدبرای اثبات حالتهای سه و چهارمتغیره، این نامساوی را در $(1-c)$ و بعد نتیجه را در $(1-d)$ ضرب می‌نمایند.

همچنین درمسئلهٔ ۲ بیشتر دانشجویان شروع می‌کنند به‌جمع کردن و نوشتن تمام جمله‌ها با یك مخرج مشترك. از طرف دیگر، فرد خبره پیش خود می‌گوید: «مسئلهٔ ناجوری‌است، خوب است چند حالت آن را محاسبه کنم.» الگوی استقرایی روشنی به‌دست می‌آید و به‌آسانی اثبات می‌شود.

همکاری که مسئلهٔ ۳ را خواند و گفت «باید با یافتن تناقض حل شود»، نظرمتداول خبره‌ها را اظهار داشت. با توجه به‌ساختار مسئله، حقیقتاً هیچ راه دیگری وجود ندارد. اما آنچه‌که فرد خبره تقریباً به‌طوراتوماتیك مشاهده می‌کند، به‌نظردانشجویان نمی‌رسد. این‌مسئله را که به دانشجویان دادم، تعداد زیادی ازآنها، یا با جملاتی شبیه «نمی‌دانم ازکجاشروع کنم» پاسخ دادند، یاکمی محاسبه کردندبیننند نتیجه قابل قبول است یا نه، و به‌نتیجه نرسیدند.

البته اینها، مسئله‌های ویژه‌ای‌هستندکه درموردآنها عملکردخبره‌ها از یك‌طرف و مبتدیها از طرف دیگر به‌طور قابل ملاحظه‌ای با هم سازگار است. با اینکه خبره‌ها آگاهانه از استراتژی معینی پیروی نمی‌کردند، رفتار آنهادست‌کم بادستورهای «ابتکاری» زیرسازگاربود:

(الف) در مسئله‌های پیچیده که متغیرها زیاد هستند، حل‌مسئله‌ای مشابه را که متغیرهای کمتری دارد در نظر بگیرید. سپس بکوشید یا از روش حل یا ازنتیجهٔ این مسئله بهره‌بگیرید.

(ب) اگر مسئله‌ای با پارامتر صحیح n داده شده باشد، برای مقادیر کوچك n، حالات‌خاص‌را محاسبه کنید ودرجستجوی یك الگو باشید.

(پ) روش برهان خلف را درنظر بگیرید؛ بخصوص وقتی که‌بانفی حکم مورد نظر، امکانات بیشتری برای حل مسئله به دست می‌آید.

بسیاری‌ازمبتدیان ازاین‌استراتژیها بی‌اطلاع بودند، وتعداد زیادی هم «اطلاعاتی دربارهٔ آنها داشتند» (یعنی وقتی حل مسئله‌رامی‌دیدند می‌گفتند که قبلاً راه‌حلهای مشابهی‌را دیده‌اند) ولی به‌فکرشان‌نرسید آنها را به‌کاربرند. روشن است که خبره و مبتدی در مسئله حل کردن روشهای متفاوتی دارند. سؤال اصلی این است: آیا می‌توان به‌مبتدی آموخت که مانند خبره مسئله حل کند؟ جواب من، «بلهٔ» مشروط است. من فکر می‌کنم امکان دارد به‌دانشجویان درسی داده شودکه آنها را

قادر سازد مسئله‌های مختلفی را ــ از جمله مسئله‌هایی را که نظیر آنها درسر کلاس حل نشده‌است ــ بهتر و با توفیقی بیشتر از زمانی که این درس را نخوانده‌اند، حل کنند. ولی در اینجا پرسشهای زیادی مطرح می‌شوند که باید به‌آنها پاسخ داده شود. دانشجو به‌چه‌اندازه پرورش فکری و معلومات نیازمند است تا این درس برایش مفید واقع شود؟ درك یك استراتژی نظیر «هدفهای فرعی تعیین کنید» و درك نحوهٔ استفاده از آن مستلزم چیست؟ علاوه بر تسلط بر تك تك استراتژیها به‌چه‌چیز دیگری نیاز است؟ به‌طور خلاصه نظر من این است:

نخست اینکه استراتژیها پیچیده‌تر از آن هستند که از توصیف سادهٔ آنها مستفاد می‌شود. اگر بخواهیم دانشجویان آنها را به‌کار ببرند، باید آنها را به‌تفصیل شرح دهیم و تدریس آنها را به‌اندازهٔ هر درس دیگر ریاضی جدی بگیریم. دوم، کاملاً روشن است که هرگاه تعداد کمی استراتژی انتخاب کنیم و آنها را در شرایط کاملاً کنترل شده‌ای تدریس نماییم، مؤثر واقع می‌شوند. سوم، توانایی درکاربرد تك‌تك استراتژیها کافی نیست. باید بدانید از کدامیك وچه‌موقع استفاده کنید. می‌توانیم دانشجو را با اسلوبی معقول برای خوب حل کردن مسئله تجهیز کنیم و می‌توانیم پیشرفت درکار را عملاً نشان دهیم.

۲. پیچیدگی استراتژیهای ابتکاری

اولین کسی که استراتژیهای مسئله حل کردن را چنان توصیف کرد که می‌شد آنها را تدریس نمود، پولیا بود (هرچند وی چنین ادعایی نکرده وهیچ وعده‌ای هم دربارهٔ نتایج حاصل نداده است). در کتاب چگونه مسئله حل کنیم [۱۹] و در کتاب دوجلدی اکتشاف ریاضی [۲۰] پولیا اساس کاوش دربارهٔ ابتکارات را بنا نهاد.

استراتژی ابتکاری را چنین توصیف می‌کنیم: یك پیشنهاد یا یك تکنیك کلی که به‌کسانی که با مسئله‌ای درگیر شده‌اند کمك می‌کند که آن را درك یا حل کنند. استراتژیهای ابتکاری که دربخش نخست ذکر کردیم: «متغیرهای کمتر»، «محاسبهٔ حالات خاص» و «استدلال به‌روش برهان خلف» از جملهٔ استراتژیهای ابتکاری هستند. در شکل ۳ استراتژیهای بیشتری عرضه شده‌اند. پژوهشگران زیادی کوشش کرده‌اند نشان دهند که این استراتژیها می‌توانند دانشجو را در حل کردن مسئله یاری کنند، اما به‌طور کلی نتایج حاصل قطعیت ندارند. یك علت آن این است که ممکن است معلوم شود این استراتژیهای به‌ظاهر ساده، خیلی پیچیده هستند. به‌استراتژی و چند مسئله‌ای که در زیر می‌آیند توجه کنید.

«اغلب بررسی و حل یك مسئلهٔ مشابه ساده‌تر، به حل مسئلهٔ پیچیده کمك می‌کند. مسئلهٔ ساده‌تر را حل کنید و از آن برای حل مسئلهٔ پیچیده استفاده نمایید.»

مسئلهٔ ۴. دو نقطهٔ واقع بر روی کرهٔ واحد (در فضای سه بعدی) به‌وسیلهٔ کمانی چون A که از داخل کره می‌گذرد، به‌هم وصل شده‌اند. ثابت کنید که اگر طول A کمتر از ۲ باشد، یك نیمکرهٔ H وجوددارد که A را قطع نمی‌کند.

مسئلهٔ ۵. فرض کنید a، b، c اعدادی حقیقی و مثبت باشند. نشان دهید امکان ندارد که هرسه‌عبارت $a(1-b)$، $b(1-c)$ و $c(1-a)$ از ۱/۴ بیشتر باشند.

مسئلهٔ ۶. حجم کرهٔ واحد در فضای ۴ بعدی را بیابید.

مسئلهٔ ۷. ثابت کنید که اگر

$$a^2+b^2+c^2+d^2=ab+bc+cd+da$$

آنگاه $a=b=c=d$.

این چهار مسئله را مانند مسئلهٔ ۱، می‌توان با استراتژی «مسئلهٔ مشابه» حل کرد. با این حال بعید است دانشجویی که در به‌کار بردن این استراتژی تجربه ندارد، بتواند دربیشتر این مسئله‌ها با موفقیت از آن استفاده کند. یکی از علل آن این است که درهرمسئله باید استراتژی را به‌گونه‌ای متفاوت به‌کار برد.

در حل مسئلهٔ ۱، براساس حل مسئله در حالت دو متغیره، یك راه حل استقرایی بنا کردیم، و از آن، مانند جای‌پایی برای رسیدن به‌حل مسئلهٔ اصلی استفاده نمودیم.

برخلاف مسئلهٔ اول، در مسئلهٔ ۴ از تشابه برای به‌دست‌آوردن ایدهٔ یك برهان استفاده می‌شود. تجسم مسئله درفضای سه‌بعدی دشوار، ولی دیدن آن در صفحه آسان است: می‌خواهیم در دایرهٔ به‌شعاع ۱ قطری رسم کنیم که کمانی را که طولش از ۲ کمتر است و دوانتهایش روی دایره هستند، قطع نکند. می‌بینیم که قطر موازی با خط راستی است که از دو انتهای کمان می‌گذرد و ویژگی مطلوب را دارد، و این ما را قادر می‌سازد که به‌فضای سه‌بعدی برگردیم وصفحهٔ مشابه را رسم کنیم.

مسئلهٔ ۵ به‌وقت نیاز دارد. به‌نظرمی‌رسد که مشابه دومتغیرهٔ آن باید مفید باشد. ولی من راه ساده‌ای برای حل آن نیافته‌ام. در نظر اول، مشابه یك متغیرهٔ آن بی‌معنی به‌نظرمی‌رسد، ولی چنین نیست. اگرمسئله را در این حالت حل کنید و به‌فکرتان برسد که سه‌جملهٔ داده شده را به‌کار ببرید مسئله حل می‌شود. در اینجا نیز از حل مسئلهٔ مشابه‌استفاده می‌کنیم، ولی این‌بار از نتیجه‌ای متفاوت و با روشی متفاوت.

در مسئلهٔ ۶، هم از روشها و هم از نتیجه‌های مسئله در بعدهای کمتر استفاده‌می‌کنیم. باهمان روش حل مسئله دربعدکمتر، ازمقطعهای عرضی انتگرال می‌گیریم؛ اندازهٔ این مقطعها نتیجه‌هایی هستند که مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در مسئلهٔ ۷ شاید روشن باشد که مسئله باید در حالت دو متغیره بررسی شود. اما برای دانشجو اصلاً روشن نیست که کدام مسئلهٔ دو متغیره را در نظر بگیرد. تعداد زیادی از آنهایی که من مراقب کارشان بوده‌ام کوشیده‌اند مسئلهٔ زیر را حل کنند.

مسئلهٔ ۷'. ثابت کنید اگر $a^2+b^2=ab$، آنگاه $a=b$.

درحالی که باید مسئلهٔ زیر را حل می‌کردند.

مسئلهٔ ۷''. ثابت کنید اگر $a^2+b^2=ab+ba$، آنگاه $a=b$.

نتیجه می‌گیریم که «بهره‌برداری ازمسئله‌های مشابه ساده‌تر» حقیقتاً یك استراتژی نیست، بلکه‌مجموعه‌ای‌ازاستراتژیهای‌مشابه‌است. برای‌حل مسئله‌ای بااستفاده ازاین استراتژی باید: (الف) به‌فکر استفاده از آن بیفتیم (واین ساده نیست)، (ب) بتوانیم مسئله‌های مشابهی طرح کنیم که مناسب به‌نظر می‌رسند، (پ) از میان مسئله‌های مشابه، مسئلهٔ‌مناسب را برگزینیم، (ت) این مسئله را حل کنیم، و (ث) بتوانیم خواه از روش حل یا از نتیجهٔ مسئلهٔ مشابه به‌نحو مناسبی بهره‌برداری کنیم.

این استراتژی زیادپیچیده‌نیست. اما استراتژی «وقتی یك پارامتر صحیح در مسئله می‌بینید، در جستجوی راه حل استقرایی باشید» از آن هم ساده‌تر است؛ ولی استراتژی «هدفهای فرعی تعیین کنید و از آنها بهره بگیرید» به‌مراتب مشکلتر است. منظور ما در این بخش آن است که نشان دهیم آموزش دانشجویان برای به‌کاربردن حتی یك استراتژی، مستلزم صرف وقت زیادی است. باید از میان استراتژیها

یك استراتژی مناسب انتخاب کنیم؛ به‌عنوان نمونه مسئله‌هایی را (مانند مسئله‌هایی که دربالا آوردیم) ذکر کنیم که طرز کار استراتژی را نشان دهند؛ باید وقتی استراتژی را در دیگر مسئله به‌کار می‌بریم، استعمال آن‌را به‌دانشجویان خاطرنشان کنیم؛ و وقتی آن‌را به‌کار نمی‌برند، از آنان بازخواست کنیم.

۳. آموزش استراتژیها به‌دانشجویان (گاهی) مؤثر واقع می‌شود

شواهدی معتبر وجود دارد که «خبره‌ها» از استراتژیهای ابتکاری که دربالا بحث کردیم، استفاده می‌کنند. ولی این استراتژیها را به‌ندرت به طرز صریح به‌دانشجویان می‌آموزند: ممکن است گفته شود «این استراتژیها عادتهای خوبی هستند، که شخص آنها را از راه مسئله‌حل کردن فرا می‌گیرد». بنابراین ممکن است ادعا شود (در واقع ادعا نیز شده است) که اگر پیشرفتی در مسئله حل کردن به‌دست آید، از آموزش استراتژیها نیست، بلکه در اثر تمرین درمسئله حل کردن است. به همین دلیل من آزمایشی ترتیب دادم که درآن، به دو گروه از دانشجویان تعلیم اساساً یکسانی درمسئله حل کردن داده شد، جز اینکه برای یکی از دو گروه، استراتژیها نیز صریحاً تشریح گردید.

من با هفت دانشجوی علوم سالهای بالای دورهٔ کارشناسی به‌طور انفرادی کار کردم و به‌طور انفرادی از آنان امتحان گرفتم. برای اینکه تدریس قابل تکرار باشد و همکاران بتوانند آن‌را بررسی کنند، «درسها» را روی نوار ضبط کردم. به‌دانشجویان آموزش دادم که مسئله را «به‌صدای بلند» حل کنند، وسؤالهای امتحانی نیز برنوار ضبط شدند. این آزمایش برای این طرح شده بود که استفادهٔ دانشجویان ازپنج استراتژی ابتکاری زیر آزمایش شود:

۱. در صورت امکان شکل رسم کنید.
۲. اگر در مسئله پارامتر صحیح وجود داشته باشد، روش استقرا را بیازمایید.
۳. یك راه منطقی را در نظر بگیرید. از راه برهان خلف یا از راه عکس نقیض استدلال کنید.
۴. مسئلهٔ مشابهی را که متغیرهای کمتری دارد، درنظر بگیرید.
۵. کوشش کنید هدفهای فرعی تعیین کنید.

درجریان تعلیم، همهٔ دانشجویان روی‌بیست مسئله‌کار کردند وسپس حل هریك ازمسئله‌ها رادیدند. به آنان برای حل‌مسئله‌ها ودیدن راه‌حل آنها وقت مساوی داده‌شد. اما به‌چهار نفراز دانشجویان، یك آموزش ابتکار نیز داده شد. به آنان صورت و توضیح پنج استراتژی مورد استفاده داده شد و نیز درقسمت حل هر مسئله یك «توضیح اضافی» هم داده‌شد که شرح می‌داد ازاستراتژی چگونه استفاده شده‌است. شکل ۱ حل مسئله‌ای را که قبلاً دیدیم، ارائه می‌دهد. طرف چپ، حل مسئله است که همهٔ دانشجویان آن‌را دیدند. طرف‌راست راتنها دانشجویان «ابتکار آموز» دیدند. به‌همهٔ دانشجویان گاه (هم در طول جلسه‌های تمرین و هم درآزمونها) تذکر داده می‌شد که به‌دقت مرور کنند ببینند چه می‌کنند و درتذکرهایی که به گروه «ابتکار آموز» داده شد، عبارت «به‌فهرست استراتژیها نگاه کنید» هم وجود داشت.

نتیجه‌های این آزمایش را درمقالهٔ «آموزش صریح ابتکار ...» [۲۳] به‌تفصیل شرح داده‌ام. حتی این نمونهٔ کوچك نشان داد که در عملکرد دو گروه دانشجویان موردآزمون، یك تفاوت معنی‌دار آماری وجود دارد: هریك از چهار دانشجوی «ابتکارآموز» از دانشجویان غیر ابتکار آموز پیشی گرفتند. آزمونی آماری براساس این نمونه، نشان می‌دهد که درسطح معنی‌دار بودن ۱/۳۵ ، تفاوت مورد بحث در عملکرد دو گروه وجود دارد. اما مهمتر اینکه ورقه‌های حل مسئله‌ها نشان‌می‌دهند که کاربردصریح استراتژیها بین‌دو گروه‌تفاوتهایی به‌وجود آورده است.

در تمرین مربوط به «متغیرهای کمتر» مسئله‌های ۱، ۵ و ۷ بالا و مسئلهٔ زیر آمده بودند.

مسئلهٔ ۸. نشان دهید اعدادی حقیقی چون a، b، c، d، e، A، B، C، D، و E وجود ندارند که برای تمام مقادیر x، y، z، r و s رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$x^2+y^2+z^2+r^2+s^2$$
$$=(ax+by+cz+dr+es)(Ax+By+Cz+Dr+Es)$$

همهٔ دانشجویان دیدند که چگونه مسئلهٔ مشابه یك یا دو متغیره برای حل هریك ازاین مسئله‌ها به‌کار گرفته می‌شود. اگر «تمرین» تنهاچیزی است که باید به‌حساب آید، همهٔ آنها مسئلهٔ زیر را که بعد از امتحان به‌آنها داده شد، باید حل می‌کردند:

مسئلهٔ ۹. فرض کنید p، q، r و s اعداد حقیقی‌مثبتی باشند، نامساوی زیر را ثابت کنید

$$\frac{(p^2+1)(q^2+1)(r^2+1)(s^2+1)}{pqrs} \geqslant 16.$$

هر چهار دانشجوی «ابتکارآموز» و تنها یك نفر دیگر آن‌را حل کردند. ودودانشجوی دیگرغیرابتکارآموز دوطرف رابطه را در $pqrs$ ضرب کردند و (به‌طور ناموفق) سعی کردند نامساوی حاصل را اثبات کنند.

این‌نشان‌می‌دهد که ما نباید انتظارداشته‌باشیم که بدون‌دادن‌آموزش صریح برای استفاده از استراتژیهای مناسب، دانشجویان بتوانند استراتژیهای مفید مسئله حل کردن را بیاموزند، وهمچنین‌نشان می‌دهد که آموزش، «مؤثر واقع شد». دقیقتر بگوییم، ابتکارات در شرایط تجربی زیرمفید واقع شدند: (۱) تعداد استراتژیهایی که باید به‌آنها «توجه» شود محدودبود، (۲) به‌تناوب تذکر داده شد که به‌استراتژیها توجه کنند و (۳) مسئله‌های آزمون به وضوح با یکی از روشهای «ابتکاری» پیشنهادی حل شدنی بودند. انتقال آموزش ابتکار به خارج از آزمایشگاه و به‌دنیای واقعی کارآسانی نخواهد بود.

۴. نیاز به‌استراتژیهای جامع

اگر ابتکارات می‌توانند مؤثرواقع شوند، چرا درنوشتارهای‌مربوطه، نتیجه‌ها این‌چنین‌مبهم هستند؟ پژوهشهای اصلی (به‌مقاله‌های گلدبرگ، کانتوسکی، لوکاس، اسمیت، وب، و ویلسن‌رجوع کنید) عموماً دلگرم کننده هستند، ولی همین و نه‌بیش. به‌نظر من دو دلیل می‌تواند وجود داشته باشد، که یکی ازآنها به‌آسانی قابل رفع است

دیدیم که میزان‌کارلازم برای آموزش یك استراتژی خاص، معمولاً کمتر از میزان واقعی آن درنظر گرفته می‌شود. به‌عنوان مثال، درسال ۱۹۷۸ کانتوسکی در کنفرانس‌مربوط به‌آموزش ریاضی[1] گزارش داد که در یك آزمایش مسئله حل کردن، با اینکه ۴۰درصد ازوقت آموزش

1. NCTM

مسئله در حالت چهار متغیره خیلی مشکل است.

آیا از مسئلهٔ مشابه یک‌متغیره چیزی دستگیرتان می‌شود؟
خیر

از مسئلهٔ مشابه دو متغیره چطور؟ حل آن آسان است.

آیا می‌توان این نتیجه را به‌کار برد؟ بلی...

از آن حالت سه‌متغیره و سپس حالت چهار متغیره را بسازید.

به خاطر داشته باشید که وقتی مسئله‌ای مشکل است؛ مسئلهٔ مشابه با تعداد متغیرهای کمتر را در نظر بگیرید. سپس از روش یا از نتیجهٔ آن برای حل مسئلهٔ اصلی استفاده کنید.

چهار عدد حقیقی a، b، c، d که هر کدام بین ۰ و ۱ واقع است، داده شده‌اند. نامساوی زیر را ثابت کنید

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) > 1-a-b-c-d$$

حل

برای حل مسئله، اول نامساوی

$$(1-a)(1-b) > 1-a-b \qquad (*)$$

را ثابت می‌کنیم. اگرضرب طرف‌چپ را انجام دهیم می‌بینیم که (*) درست‌است اگر و تنها اگر

$$1-a-b+ab > 1-a-b$$

درست باشد و این نامساوی درست است اگر وتنها اگر $ab>0$. ولی $ab>0$، زیرا a و b مثبت فرض شده‌اند. پس (*) ثابت شد. حال براساس این نامساوی اقدام می‌کنیم. عدد c بین ۰ و ۱ است و بنابراین $1-c$ مثبت است. از ضرب دو طرف (*) در $(1-c)$ به‌دست می‌آید

$$(1-a)(1-b)(1-c) > (1-a-b)(1-c)$$

یا

$$(1-a)(1-b)(1-c) > 1-a-b-c+ac+bc$$

چون ac و bc مثبت هستند، داریم

$$(1-a)(1-b)(1-c) > 1-a-b-c \qquad (**)$$

با ادامهٔ این روش، توجه می‌کنیم که $1-d$ مثبت است. از ضرب دو طرف (**) در $(1-d)$ داریم

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) > (1-a-b-c)(1-d)$$

یا

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) > 1-a-b-c-d+ad+bd+cd.$$

مانند گذشته می‌بینیم که ad، bd، cd همه مثبت هستند. بنابراین

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) > 1-a-b-c-d$$

و این همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

شکل ۹

صرف «مرور» شده بود،دانشجویان پاسخهای خود را مرور نکردند. نوارهای ویدئوی جلسه‌های کلاسی نشان می‌دهد که معلم بعد از حل‌هر مسئله کنار رفته و گفته بود «اکنون ببینیم چه‌کار کرده‌ایم»، و این کار را انجام داده بود. ولی روی ارزش این استراتژی تأکید نشده بود. به‌دانشجویان نشان داده نشده‌بود که چرا «مرور» مفید است ودرنتیجه آنان این‌کار را نکردند. اگر می‌خواهیم دانشجویان یک‌استراتژی‌را جدی بگیرند، باید آنها را قانع کنیم که مفید است.

اماحتی‌اگرموفق‌شویم‌به‌دانشجویان‌یادبدهیم‌یک‌سری‌ازاستراتژیهای ابتکاری مهم را به‌کار ببرند، تضمینی وجود ندارد که به‌طور کلی در مسئله حل کردن پیشرفت کرده باشند. دانستن نحوهٔ استفاده از یک استراتژی کافی نیست. دانشجو باید به‌فکرش برسد که درمواردمناسب آن را به کار ببرد. برای اثبات این ادعا، ابتدا به یک تشبیه متوسل می‌شوم‌وسپس به‌اختصارتجربه‌ای‌را شرح می‌دهم که آن‌را تأیید می‌کند.

یک استراتژی را می‌توان «کلیدی» برای گشودن یک مسئله تصور کرد. تعداد زیادی کلیدوجود دارد ومسئله تنها باتعداد اندکی از آنها «باز» می‌شود. تصور کنید که درمقابل دری بسته با یک دسته کلید متشکل ازسی کلید، که تنها دوتا ازآنها در را بازمی‌کنند، ایستاده‌اید. اگرتنها برای امتحان کردن سه‌یا چهار کلید وقت داشته باشید، دانستن اینکه «کلید قفل» در دسته کلید هست، ممکن است کمک چندانی به‌شما نکند. ازطرف دیگر، یک استراتژی برای انتخاب کلید مناسب، ممکن است کمکی باشد. اگربتوانید تعدادکلیدهایی راکه باید امتحان کنید به‌ده عدد تقلیل دهید، بافرصتی که برای امتحان سه‌یاچهار کلیددارید، برای موفقیت شانس خیلی بیشتری به‌دست می‌آورید.

روشهای انتگرالگیری درحساب دیفرانسیل وانتگرال را درنظر بگیرید. تعداد تکنیکهای مهم به یک دوجین نمی‌رسد، و تمام آنها الگوریتمی و یادگرفتنشان نسبتاً آسان است. اغلب دانشجویان می‌توانند هریک‌از روشهای انتگرالگیری جزءبه‌جزء، تبدیل متغیر وتجزیه به‌کسرهای جزئی را یادبگیرند وآنها را به‌کاربرند با این فرض که تکنیکی راکه باید به‌کاربرند، بشناسند. (آزمونی‌را درنظربگیرید که درآن روش حل‌هرمسئله مشخص‌شده‌است؛ احتمالاً امتحان‌دانشجویان خیلی خوب خواهد شد) اما وقتی انتخاب روش با خود آنها باشد، اغلب به‌راه غلط می‌روند. مثلاً انتگرال

$$\int \frac{x\,dx}{x^2-9}$$

که اولین مسئلهٔ «اهدایی» یك آزمون بود، تعداد زیادی از دانشجویان را که سعی کردند آن را از راه تجزیه به کسرهای جزئی حل کنند دچار سردرگمی کرد؛ حتی وقتی سعی کردند متغیر را یك تابع مثلثاتی بگیرند، سردرگمی بیشتر شد!

درمقالهٔ «معرفی یك استراتژی برای محاسبهٔ انتگرال نامعین» [۳۱] آزمایشی را مورد بحث قرار داده‌ام که در آن به‌نصف دانشجویان یك کلاس (نه کلاس خود من) یك استراتژی برای انتخاب روش انتگرالگیری داده شده بود . این استراتژی مبتنی بود بر الگویی از عمل «خبره». به‌دانشجویان دیگر گفته شده بود که طبق معمول مطالعه کنند، یعنی تمرینهای گوناگون کتاب را به‌کار برند تا به‌تدریج خودشان روشهایی برای مسئله حل کردن به‌دست آورند. میانگین وقت مطالعه برای گروه «استراتژی» ۱ر۷ ساعت و برای دیگر دانشجویان ۸ر۸ ساعت بود، با وجود این در یك آزمایش مهارت انتگرالگیری ، بهتر عمل کردن گروه «استراتژی» از گروه دیگر مشخص بود، علیرغم اینکه به دانشجویان گروه «استراتژی» انتگرالگیری تعلیم داده نشده بود و تنها انتخاب روشهای انتگرالگیری یاد شده بود.

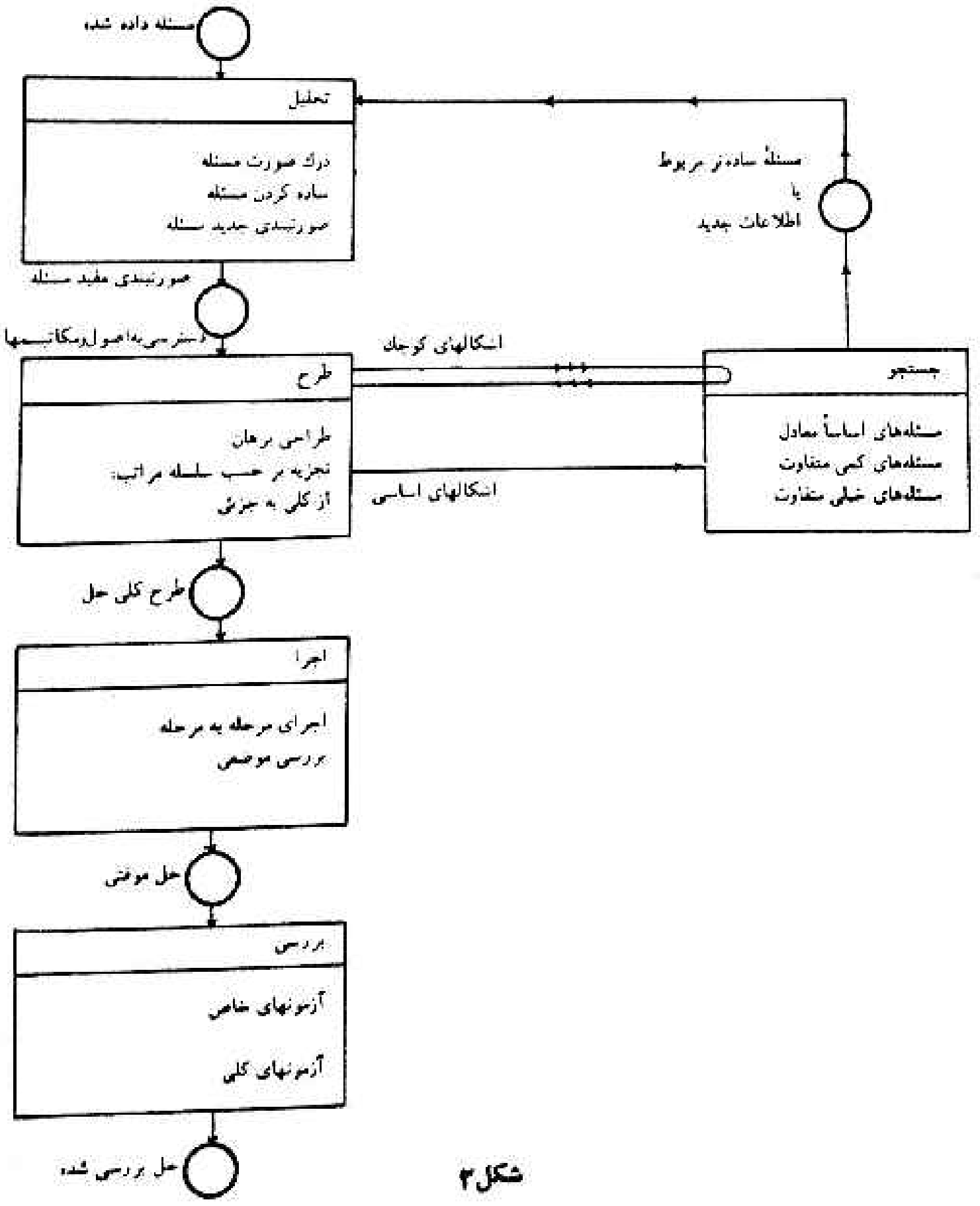
حاصل این تجربه آن است که نتیجهٔ کار دانشجویانی که نمی‌توانند دریافت «صحیح» به‌مسئله را به‌دست آورند ــ حتی در زمینه‌ای که تنها چند راه سرراست وجود دارد ــ با آنچه که «قابل انتظار» است فاصلهٔ زیادی دارد. اگر از تکنیکهای انتگرالگیری به حالت کلی حل کردن مسئلهٔ ریاضی بپردازیم ، تعداد روشهای بالقوه مفید بسیار افزایش می‌یابند، همان‌طور که مشکلات و ریزه‌کاریهای به‌کاربردن تکنیکها نیز خیلی زیاد می‌شوند. بنابراین وسایل مؤثر برای انتخاب روشهای حل مسئله ــ جهت اجتناب از «راههای بی‌ثمر» و تخصیص فنون مسئله حل کردن ــ در حالات کلی، اهمیت زیادتری می‌یابند. بدون این وسائل ممکن است از آموزش تك‌تك ابتکارات نفعی حاصل نشود.

۵. الگو

الگوی عمل «خبره» که در زیر توضیح داده می‌شود، چارچوب درسهای من در مسئله حل کردن است. البته هر کس که بکوشد نحوهٔ حل کردن مسائل ریاضی را تنها در چند صفحه مشخص کند، نگفته‌هایش به‌مراتب بیش از گفته‌هایش خواهد بود.

خلاصهٔ کل این استراتژی در شکل ۲ ارائه شده‌است. با استفاده از نمودار ، این فرایند را که عموماً طبیعتی متغیر ولی اسلوبمند دارد، نشان داده‌ام. این نمودار راهنمایی است برای عملهای سودمند، و نه وسیله‌ای که حاکم بر این اعمال باشد و آنها را محدود سازد. در بعضی از مراحل فرایند، غالباً تك ابتکارهایی می‌توانند به‌مناسبترین وجه مورد استفاده قرار گیرند. این ابتکارات در شکل ۳ درج شده‌اند.

خلاصهٔ نموداری استراتژی مسئله حل کردن



شکل ۲

ابتکاراتی که معمولاً در حل یك مسئله به کار می‌روند

تحلیل

۱. در صورت امکان نمودار رسم کنید.
۲. حالتهای خاص را بررسی کنید.
(الف) برای توصیف مسئله با مثال و "لمس کردن" آن، مقادیر خاصی را انتخاب کنید.
(ب) برای کشف دامنهٔ امکانات، حالتهای حدی را بررسی کنید.
(پ) هر پارامتر صحیح را به ترتیب مساوی با ۱، ۲، و ۳،... قرار دهید و یك الگوی استقرایی جستجو کنید.
۳. سعی کنید مسئله را با
(الف) بهره‌گیری از تقارن، یا
(ب) با استفاده از استدلالهای "بدون کاسته شدن از کلّیت" (از جمله مقیاس‌بندی)
ساده کنید.

جستجو

۱. مسئله‌های اساساً معادل را با توجه به نکات زیر به دست آورید:
(الف) با گذاشتن شرایط معادل به جای شرایط داده شده،
(ب) با ترکیب مجدد عناصر مسئله از راههای مختلف،
(پ) با وارد کردن عناصر کمکی،
(ت) با صورتبندی مجدد مسئله به وسیلهٔ
(یك) تعویض دید یا نماد،
(دو) در نظر گرفتن استدلال از راه برهان خلف یا عکس نقیض،
(سه) فرض اینکه مسئله حل شده است و تعیین ویژگیهای آن.
۲. مسئله‌های کمی متفاوت با مسئلهٔ مفروض را در نظر بگیرید.
(الف) هدفهای فرعی را انتخاب کنید. (مسئله‌ای به دست آورید که بعضی از شرایط مسئلهٔ اصلی در آن صدق کند.)
(ب) شرطی را کنار بگذارید و بعداً آن را اعمال کنید.
(پ) حوزهٔ مسئله را تجزیه کنید و یك به یك روی حالتهای آن کار کنید.
۳. مسئله‌های خیلی متفاوت با مسئلهٔ مفروض را در نظر بگیرید.
(الف) یك مسئلهٔ مشابه با متغیرهای کمتر بسازید.
(ب) همهٔ متغیرها جز یکی را ثابت نگه دارید و عملکرد آن را تعیین کنید.
(پ) سعی کنید از همهٔ مسئلهٔ مربوط که دارای
(یك) صورت
(دو) داده‌های
(سه) حکمهای
مشابه است، بهره بگیرید.
به خاطر داشته باشید: پس از حل مسئله‌های مشابه مربوط، بکوشید هم از نتیجه و هم از روش حل آنها در حل مسئلهٔ مورد نظر استفاده کنید.

بررسی نهایی حل

۱. آیا راه‌حلّ شما از نظر آزمونهای خاص زیر موفّق است؟
(الف) آیا از همهٔ داده‌های مسئله استفاده کرده‌اید؟
(ب) آیا با برآوردها و پیش‌بینیهای معقول تطبیق می‌کند؟
(پ) آیا با آزمونهای تقارن، تحلیل بعد و مقیاس‌بندی سازگار است؟
۲. آیا راه‌حلّ شما از نظر آزمونهای کلی زیر موفّق است؟
(الف) آیا می‌توان آن را به طریق دیگری به دست آورد؟
(ب) آیا می‌تواند به وسیلهٔ حالتهای خاص تأیید شود؟
(پ) آیا می‌تواند به نتایج شناخته شده تحویل شود؟
(ت) آیا می‌توانید آن را برای تولید چیزی که می‌شناسید به کار ببرید؟

شکل ۳

فرایند مسئله حل کردن با تحلیل اینکه محتوای مسئله چیست آغاز می‌شود. قسمتی ازاین تحلیل این است که با بررسیهای زیر بتوانیم مسئله را «لمس» کنیم: مسئله برای چه داده شده است؟ خواستهٔ مسئله چیست؟ چرا «داده‌های مسئله» داده شده‌اند؟ آیا خواستهٔ مسئله معقول است؟ مکانیسمهای اساسی که احتمالاً باید به کار روند، کدام‌اند؟ مسئله به چه مطلبی مربوط می‌شود؟ و . . . . اینکه چه ابتکاراتی (درصورت وجود) درحین تحلیل به کارمی‌روند ممکن است هم به مسئله بستگی داشته باشد وهم به کسی که مسئله را حل می‌کند. اما، دراین مرحله از مسئله حل کردن مثالهایی مناسب از کاربرد چند استراتژی ابتکاری عبارت‌اند از:

(۱) نموداری رسم کنید حتی موقعی که به‌نظرمی‌رسد مسئله ازطریق دیگری حل می‌شود؛ مانند مسئلهٔ زیر:

مسئلهٔ ۱۰. برای t مقادیری بیابید که به‌ازای آنها دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x-t)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

۰، ۱، ۲، ۳ یا ۴ جواب داشته باشد.

(۲) حالتهای خاص را بررسی کنید، و در حل آنها بکوشید یا الگوها را تعیین کنید. مثلاً در مسئلهٔ زیر:

مسئلهٔ ۱۱. به‌ازای $a, b > 0$، $\lim_{n\to\infty} (a^n + b^n)^{1/n}$ را تعیین کنید.

می‌توانید a را برابر با ۱ بگیرید؛ یا در مسئلهٔ زیر

مسئلهٔ ۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ را پیدا کنید.

برای دیدن جواب (که به‌طور عجیبی واضح است)، می‌توان مجموع ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵ جمله را حساب کرد.

(۳) در جستجوی ساده‌کردنهای مقدماتی باشید. مثلاً در مسئلهٔ زیر

مسئلهٔ ۱۳. بزرگترین مساحت مثلثهای محاط در دایرهٔ به‌شعاع R را پیدا کنید.

(یك) دایرهٔ واحد را در نظر بگیرید. (دو) توجه کنید که بدون کاسته شدن از کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد که قاعدهٔ مثلث افقی است و (سه) چند طرح را بررسی کرده، سعی کنید قبل از شروع به حل تحلیلی، جواب را حدس بزنید.

طرح به معنایی «کنترل اصلی» است. در نمودار جای جداگانهٔ بخصوصی ندارد، بلکه در سراسر فرایند حل پخش شده است. کارش تضمین این نکته است که حل کنندهٔ مسئله مشغول فعالیتهایی است که به‌احتمال زیاد مفید هستند. طرح ما را وا می‌دارد که همواره یك دید کلی از مسئله داشته باشیم و سلسله مراتب را در حل آن رعایت کنیم. ممکن است طرح حل مسئله در سطحی کلی ریخته شود و سپس به‌تدریج که فرایند حل مسئله پیش می‌رود، جزئیات طرح تکمیل شود. مثلاً، محاسبات مفصل یا اعمال پیچیده را نباید انجام داد مگر اینکه (یك) راههای مختلف مطالعه شده باشند، (دو) توجیه روشنی از آنها در دست باشد، و (سه) مراحل دیگر حل مسئله به‌جایی رسیده باشند که نتایج محاسبات یا لازم باشند یا به‌روشنی معلوم شده باشد که مفید خواهند بود. (چقدر ناراحت کننده است که برای حل یك معادلهٔ دیفرانسیل وقت و انرژی صرف کنیم و بعد متوجه شویم که جواب آن در مرحلهٔ کلی «بعدی» حل مسئله هیچ کمك مؤثری نمی‌کند.)

جستجو «هستهٔ» ابتکار و استراتژی است. در مرحلهٔ جستجو است که بیشتر ابتکارات مسئله حل کردن وارد معرکه می‌شوند. شکل ۳ نشان می‌دهد که جستجو به سه گام تقسیم می‌شود. به‌طور کلی پیشنهادهای گام اول در مقایسه با پیشنهادهای گام دوم، یا به‌کاربرد نشان آسانتر است و یا با احتمال بیشتری دسترسی مستقیم به راه حلی از مسئلهٔ اصلی را فراهم می‌کنند. همچنین است رابطهٔ بین گامهای دوم و سوم. هر گاه تمام عوامل دیگر یکسان باشند، حل کنندهٔ مسئله در مرحلهٔ جستجو به‌طور خلاصه قابل قبول بودن پیشنهادهای گام اول را بررسی می‌کند؛ یك یا چند پیشنهاد برمی‌گزیند و سعی می‌کند از آنها استفاده کند. اگر روشن شود که استراتژیهای گام اول کافی نیستند به گام دوم می‌پردازد؛ وقتی که گام دوم کاملاً بررسی شد، درصورت نیاز استراتژیهای گام سوم را امتحان می‌کند. درصورتی که در گامی پیشرفت قابل توجهی حاصل شود، حل کنندهٔ مسئله می‌تواند یا به طرح کردن نقشه‌ای برای حل و اصلاح راه حل برگردد یا تصمیم بگیرد دوباره وارد مرحلهٔ تحلیل شود، با این اعتقاد که نظریات به‌دست آمده در مرحلهٔ جستجو می‌تواند در قالب ریزی مجدد مسئله از طریقی که قبلاً دیده نشده است، کمك کند.

اجرا به‌توضیح نیاز ندارد، جز اینکه این مرحله باید آخرین گام در حل عملی مسئله باشد. از طرف دیگر بررسی نهایی نیازمند به‌توجه بیشتری است. زیرا در اغلب موارد نادیده گرفته می‌شود. در بررسی موضعی می‌توان به‌اشتباهاتی که در اثر بی‌توجهی رخ داده است، پی‌برد، در بررسی کلی، با مروری بر حل مسئله ممکن است روشهای دیگری به‌دست آید، ارتباط با موضوع دیگری آشکار شود که به‌ظاهر نامربوط به‌نظر می‌رسد، و گاهی تکنیك مفیدی به‌دست آید که شخص بتواند آن‌را به‌رهیافت کلی مسئله حل کردن خود بیفزاید.

۶. تعلیم و چند نتیجه

الگویی که در بخش پیش توصیف شد، به‌عنوان اساس دو درس در زمینهٔ مسئله حل کردن به‌کار رفته است ـ درس اول به‌هشت دانشجوی ریاضی سال سوم و چهارم در برکلی در سال ۱۹۷۶ و درس دوم به ۱۹ دانشجوی (عمدتاً) سال اول و دوم دانشکدهٔ ادبیات و علوم در کالج هامیلتون در سال ۱۹۷۹ داده شد. در هر درس الگوی فرایند مسئله حل کردن به عنوان راهنما به دانشجو داده شد. هر جلسهٔ درس به یك سری از مسئله‌های قابل حل با یك استراتژی (یا بیشتر) از استراتژیهای مندرج در شکل ۳ اختصاص داده شد. با تأکید بر استراتژی مورد نظر و همچنین (در ارتباط با الگو) با تأکید بر اینکه چگونه با کل مسئله برخورد کنیم که تا حدودی کارامد باشد حل مسئله را مرور می‌کردیم.

عمدتاً به‌دلیل تفاوت سطح معلومات ریاضی دانشجویان دو گروه، تفاوتهای اساسی بین دو درس وجود داشت. مثلاً، پیشنهاد «استدلال به‌وسیلهٔ عکس نقیض یا برهان خلف را در نظر بگیرید» برای دانشجویان دو گروه معانی خیلی متفاوتی داشت. دانشجویان ریاضی دو سال آخر، با چند مثال و توضیح اینکه چه موقعی در نظر گرفتن این استراتژی ممکن است مناسب باشد، به‌مطلب پی‌بردند. در مورد دانشجویان سال اول، داستان کاملاً فرق می‌کرد. خیلی از آنها اصلاً اعتقاد نداشتند که چیزها باید از راه ریاضی اثبات شوند و بسیاری استدلال از راه برهان خلف را ندیده بودند! در برکلی مسئلهٔ زیر را داده بودم که دانشجویان به عنوان بخشی از امتحان میان ترم در منزل روی آن کار کنند.

مسئلهٔ ۱۴. فرض کنید a یکی از ارقام ۱ تا ۹ باشد. از اعداد به صورت $aaaa\ldots a$ که در آنها a، n بار تکرار می‌شود، کدامها مربع کامل‌اند؟

همهٔ دانشجویان جز یکی آن را حل کردند. در مقابل، این مسئله در هامیلتون چندروز از وقت ما را گرفت.

باوجود این شباهتهای زیادی بین دو گروه وجود داشت. تعداد کمی از دانشجویان از استراتژیهای ابتکاری مورد بحث آگاهی دقیق داشتند. در نخستین جلسهٔ درس در برکلی تنها دو نفر از هشت نفر موفق شدند $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n(n+1)$ را با استفاده از سری ادغامی حساب کنند. به‌فکر هیچیك نرسیده بود به n، مقادیر ۱، ۲، ۳ و ۴ بدهد. همچنین جاهایی که لازم بود شکل رسم کنند، نکرده بودند، و الی آخر. درس که به‌پایان رسید به روشنی دیده می‌شد که دانشجویان ابتکارات را آگاهانه و به خوبی به‌کار می‌برند و تشخیص می‌دهند چه ابتکاری برای چه نوع مسئله‌ای مناسب است. برای مثال، مسئلهٔ زیر یکی از مسئله‌های امتحان پایان

ترم بود.

مسئلهٔ ۱۵. فرض کنید S یك مجموعهٔ نامتهی متناهی باشد. $E(S)$ را به‌عنوان تعداد زیرمجموعه‌های S با تعداد عنصرهای زوج، تعریف کنید. این زیرمجموعه‌ها، مجموعهٔ تهی و احتمالاً S را شامل می‌شوند. فرمولی برای $E(S)$ تعیین و درستی جواب خود را اثبات کنید.

هفت نفر از هشت دانشجو، در برخوردشان با مسئله به دنبال روش استقرا رفتند، که با رفتاری که در بدو ورود به این درس داشتند، خیلی متفاوت بود. (دانشجوی هشتمی، تنها دانشجویی که ادعا می‌کرد مسئله را قبلاً دیده است، رئوس یك برهان ترکیبیاتی را نوشت.)

در هامیلتون نیز دربارهٔ این استراتژی نتایج مشابهی حاصل شد. در یك آزمون، در آغاز درس ۴ نفر از ۱۹ دانشجو، در مسئلهٔ:

مسئلهٔ ۱۶. مجموع اولین ۸۹ عدد فرد چیست؟

به‌فکر جمع کردن افتادند و بعضی دیگر برای به‌دست آوردن جواب، روش جفت کردن جملات (روش گاوس) را به کار بردند (روشی که قبلاً دیده بودند). در امتحان پایان ترم ۱۸ نفر از ۱۹ دانشجو مسئلهٔ زیر را درست حل کردند.

مسئلهٔ ۱۷. مجموع ضرایب بسط $(x+1)^{31}$ چیست؟

مسئله‌ای مشابه با مسئلهٔ ۱۷ قبلاً در کلاس مطرح نشده بود.

همچنین در هر دو کلاس تفاوتهای آشکاری، در ابتدا و انتهای درس، دربارهٔ استراتژی «متغیر کمتر» وجود داشت و این امر برای استراتژیهای دیگر که تعریف روشنی داشتند نیز صادق بود. عملکرد دانشجویان در مورد مسئلهٔ ۱، که آن را در آغاز هر دو کلاس دادم، بررسی شد. مسئلهٔ ۹، یکی از مسئله‌های امتحان نهایی هر دو کلاس بود، و بیش از سه چهارم دانشجویان هر کلاس آن را حل کردند.

باید تا حدودی این «داستانهای موفقیت» را تعدیل کنم. همان‌طور که در بخش ۲ دیدیم، ابتکارات نکات ظریفی دارند، و دانشجو در به کار بردن آنها ممکن است به آسانی سر درگم شود. در آن بخش دیدیم که انتخاب مسئلهٔ مشابه «مناسب» کار آسانی نیست. همچنین ما «خبره‌ها» توانایی «دیدن» صورتهای معینی را داریم که حتی دانشجویان خیلی قوی دورهٔ لیسانس هم از دیدن آنها عاجزند. در سطر آخر برهانی که در برکلی برای مسئلهٔ ۷ آورده بودیم، نوشته شده بود: «چون $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2=0$، پس $a=b$، $b=c$، $c=d$ و $d=a$». از پاك کردن این سطر از روی تخته‌خودداری کردم و مسئلهٔ زیر را به دانشجویان دادم.

مسئلهٔ ۱۸. اعداد a_i و b_i به ازای $i=1, 2, \dots, n$ داده شده‌اند. شرایطی لازم و کافی برای a_i و b_i تعیین کنید به طوری که اعدادی چون A و B وجود داشته باشند که به‌ازای هر x، تساوی زیر برقرار باشد

$$(a_1x+b_1)^2+\dots+(a_nx+b_n)^2=(Ax+B)^2$$

رفتاری نمادهای این مسئله، از جمله متغیر x، اندیسها و غیره، مانع دیدن شباهت این دو مسئله شد. دانشجویان نتوانستند تشخیص دهند که ساختار «مجموعی از مربعات برابر با چیزی است که می‌توان آن را صفر کرد» با ساختار «مجموعی از مربعات برابر با صفر است» اساساً شبیه است. از این رو آنها نتوانستند مسئلهٔ دوم را حل کنند.

نمی‌توانیم از دانشجو انتظار داشته باشیم که ابتکاری را در حالتهایی به‌کار برد که به‌طور قابل توجهی از حالتی که به‌کاربردنش را آموخته است، پیشرفته‌تر باشد. وقتی از دانشجویانم خواستم که $D(N)$، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح N را پیدا کنند، دانشجویان بدون زحمت دیدند که باید $D(N)$ را به‌ازای مقادیر مختلف N حساب کنند. اما هنگامی که نتایج حاصل، روشن نبود، آنها فکر نکردند از خود سؤال کنند که به‌ازای چه مقادیری از N مقادیر خاصی برای $D(N)$ به‌دست می‌آید ــ سؤالی که راه را برای حل مسئله باز می‌کند.

همچنین اگر در مسئله‌ای ترکیب ماهرانهٔ دو ابتکار از ابتکارات تدریس شده مورد نیاز باشد، (نظیر قضیهٔ پیك[1] که برای اثبات آن نخست باید یکی از متغیرها را ثابت نگه داشت و سپس روی متغیر دیگر به‌استقرا عمل کرد) معمولاً دانشجو موفق نمی‌شود آن را حل کند. اینها موضوعهای ناامید کننده نیستند، بلکه تنها انتظارات واقعی را می‌رسانند.

انتظارات معقول ما می‌تواند عملاً تا حدودی زیاد باشد. دست کم در کوتاه‌مدت، امتحانهای قبل و بعد از درس، نشان می‌دهد که دانشجویان واقعاً پیشرفت کرده‌اند. البته، مطلب مهمتر تأثیر تعلیم در درازمدت و اثر آن (اگر اثری داشته باشد) در عملکرد دانشجو در خارج از کلاس درس است. البته هنوز خیلی زود است که در این باره نظری اظهار کنیم، اما گزارشهای اولیهٔ دانشجویانی که این درسها را گرفته‌اند، پراحساس و امیدبخش بوده است.

برای اینکه کاملاً حقیقت را گفته باشم، باید متذکر شوم که درس مسئله حل کردن، برای همهٔ افراد درگیر وظایف سنگینی ایجاب می‌کند. معلم باید بسیار انعطاف‌پذیر باشد، زیرا فرایند مسئله حل کردن است که ارزش دارد و معلم اساساً به‌صورت یك «مربی تیم» عمل می‌کند. از دانشجویان خواسته می‌شود که، فکر کنند و بیافرینند و نه اینکه مطلبی را داز بر بخوانند. این کار آسانی نیست، اما مهم است ــ و سرانجام بسیار پرارزش؛ به‌زحمتی که دانشجویان می‌کشند می‌ارزد؛ و البته برای معلم موفق منبع رضایت خاطری عظیم است.

ترجمهٔ محمد جلوداری ممقانی

• Schoenfeld A. H., "Teaching problem-solving skills", *Amer. Math. Monthly*, **87**(1980) 794-805.

مراجع

1. Bloom B. S., *Problem Solving Processes of College Students*, university of Chicago Press, Chicago, Ill, 1950.
2. D'Amour G., Wales C., "Improving problem-solving skills through a course in guided design", *Engineering Education*, **67** (1977).
3. Daniels P., *Strategies to Facilitate Problem Solving*, Cooperative Research Project No-1810, Brigham Young University, Provo Utah, 1964.
4. Dodson J., *Characteristics of Successful Insightful Problem Solvers*, No71-13,048, University Microfilms, Ann Arbor, 1970.
5. Duncker K., *On Problem Solving, Psychological Monographs*, 58, No.5 American Psychological Association, Washington, D.C., 1945.
6. Flaherty E., *Cognitive Processes Used in Solving Mathematical Problems*, No 73-23, 562, University Microfilms, Ann Arbor, 1973.
7. Goldberg D., *The Effects of Training in Heuristic Methods on the Ability to Write Proofs in Number Theory*, No. 75-07836, University Microfilms, Ann Arbor, 1975.

1. Pick

8. Hadamard J. W., *Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Dover, New York, 1954.
9. Hayes J. R., *Memory, Goals, and Problem Solving*, in B. Kleinmuntz, ed., Problem Solving: Research, Method, and Theory, Wiley, New York, 1966.
10. Kilpatrick J., *Problem Solving in Mathematics*, Review of Educational Research, 1969.
11. Kilpatrick J., *Research in the Teaching and Learning of Mathematics*, paper Presented to the MAA, Dallas, 1973.
12. Kilpatrick J., *Variables and Methodologies in Research in Problem Solving*, paper for research workshop on Problem Solving in Mathematics Education, University of Georgia, 1975.
13. Lakatos I., *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976, rev. ed., 1977.
14. Landa L. N., *Algorithmization*, Educational Technology Publications, Englewood Cliffs, N. J., 1974.
15. Landa L. N., "The ability to think: how can it be taught?" *Soviet Education*, vol. 18, 5 March 1976.
16. Larkin J., "Skilled problem solving in physics: a hierarchical planning model" *Journal of Structural Learning* (in press).
17. Lucas J., *An Exploratory Study on The Diagnostic Teaching of Heuristic Problem-Solving Strategies in Calculus*, No. 72-15, 368, University Microfilms, Ann Arbor, 1972.
18. Newell A., Simon H., *Human Problem Solving*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1972.
19. Pólya G., *How to Solve It*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1945.
20. Pólya G., *Mathematical Discovery*, vols. 1 and 2, Wiley, New York, 1962 (vol. 1) and 1965 (vol. 2).
21. Schoenfeld A., "Presenting a strategy for indefinite integration", *Am. Math. Monthly*, 85 (1978) 673-678.
22. Schoenfeld A., *Can Heuristics Be Taught?* in J. Lockhead, ed., Cognitive Process Instruction, Franklin Institute Press, Philadelphia, 1979.
23. Schoenfeld A., "Explicit heuristic training as a variable in problem solving performance", *Journal for Research in Mathematics Education*, May 1979.

24. Schoenfeld A., *Heuristics in the Classroom*, 1980, Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, 1980.
25. Skinner B. F., Teaching Thinking, Chapter 6 of *The Technology of Teaching*, Appleton-Century-Crofts, New York, 1968.
26. Smith P., *The Effect of General vs. Specific Heuristics in Mathematical Problem Solving Tasks*, No. 73-26367, University Microfilms, Ann Arbor, 1973.
27. Turner R., *Design Problems in Research on Teaching Strategies in Mathematics*, in T. Cooney, ed., Teaching Strategies: Papers from a Research Workshop, ERIC, Columbus, Ohio, 1976.
28. Wickelgren W., *How to Solve Problems*, W. H. Freeman, San-Francisco, 1974.
29. Woods D. R., etal, *How Can one Teach Problem Solving?*, Program for Instructional Development Newsletter, Ontario Universities, May 1977.

منابع مسئله

30. Burkill J. C., Cundy H. M., *Mathematical Scholarship Problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1961.
31. Bryant S. J., et al, *Non-Routine Problems in Algebra, Geometry, and Trigonometry*, McGraw-Hill, New York, 1965.
32. Dynkin E. B., et al, *Mathematical Problems: An Anthology*, *Gordon and Breach*, New York, 1969.
33. Eves H., Starke E. P., *The Otto Dunkel Memorial Problem Book*, Mathematical Association of America, 1957.
34. Lidsky D., et al, *Problems in Elementary Mathematics* (transl. by V. Volosov), Mir Publishers, Moscow, 1963.
35. Polya G., kilpatric J., *The Stanford Mathematics matics Problem Book*, Teacher's College Press, New York, 1974.
36. Rapaport E., Transl., *The Hungarian Problem Book*, Mathematical Association of America, 1963.
37. Shklorsky D. O., et al, *The USSR Olympiad Problem Book*, W. H. Freeman, San Francisco, 1962.
38. Trigg C. W., *Mathematical Quickies*, McGraw-Hill, New York, 1967.
39. Yaglom, Yaglom, *Challenging Mathematical Problems With Elementary Solutions*, Holden-Day, San Francisco, 1967.

سهم ما از منطق ریاضی

ضیاء موحد

مانند خیلی چیزهای دیگر که تعریف مختصر و مفیدی ندارند، منطق ریاضی هم به‌معنای عام آن تعریف مختصر ومفیدی ندارد. گونا گونی نوشته‌هایی که به‌نام منطق ریاضی منتشر می‌شوند چنان است که هیچ تعریفی نمی‌تواند همهٔ آنها را دربر گیرد. از این‌رو، تنها راهی که می‌ماند این است که فهرستی از موضوعهای این نوشته‌ها فراهم کنیم و از میان آنها چند موضوع کلیتر را برگزینیم وبگوییم منطق ریاضی یعنی این چند موضوع. این همان راهی است که ویراستار راهنمای منطق ریاضی[۲]، به‌پیروی از دیگران و با اقرار به‌نیافتن راهی بهتر، رفته است.

بنابرفهرست راهنمای مذکور، منطق ریاضی دارای چهار موضوع اساسی است: نظریهٔ الگوها، نظریهٔ مجموعه‌ها، نظریهٔ تابعهای بازگشتی، و نظریهٔ برهان. و البته هرموضوع هم مجموعه‌ای است از موضوعهای فرعی دیگر.

پیش از پرداختن به‌موضوع اصلی این نوشته که معرفی وارزیابی کوتاهی است ازکتابهایی که دراین زمینه به‌فارسی داریم، لازم است دربارهٔ هرکدام ازاین چهار موضوع شرح کوتاهی بدهیم.

۱. نظریهٔ الگوها[1]

نظامهای صوری ریاضی و منطقی چیزی جز نشانه‌هایی بر کاغذ و قاعده‌هایی برای گونه‌ای بازی با این نشانه‌ها نیستند. اما بازی به‌همین‌جا ختم نمی‌شود. باید دید این نشانه‌ها تعبیری هم دارند یا نه واگر دارند رابطهٔ میان نشانه‌ها و تعبیرهای آنها چگونه برقرار می‌شود. نظریهٔ الگوها چیزی جز بیان همین رابطه نیست. بخش مهمی از این نظریه، منطق محمولهای مرتبهٔ اول است که می‌توان آن‌را به انضمام فراقضیه[2]های گودل وچرچ منطق ریاضی به‌معنای خاص دانست. بخش اصلی کتابهای درسی منطق ریاضی همین بخش ازنظریهٔ الگوها ونظریهٔ برهان است. اگر از این بخش پاره‌ای از ریزه‌کاریهای ریاضی و فراقضیه‌های منطقی را حذف کنیم، موضوعی به‌دست می‌آید که می‌توان آن را با منطقدانان سنتی در میان گذاشت و برسر برتری آن برمنطق ارسطویی جر وبحث کرد.

۲. نظریهٔ مجموعه‌ها

ریاضیدانان از قدیم حدس زده بودند که مفهومهای معروف به بدیهی چندان هم بدیهی نیستند. اما اهمیت این حدس هنگامی آشکارشد که یکی ازهمین‌مفهومها ـ پارادوکس‌راسل ـ راه را برتأویل‌ریاضیات به‌منطق بست. کشف این پارادوکس سرآغاز کشف پارادوکسهای دیگری شد که مبانی ریاضیات را با بحران روبرو گردانید. این پارادوکسها اغلب به‌مفهوم مجموعه، که می‌خواستند ریاضیات را براساس آن‌بنا کنند، مربوط می‌شدند. مجموعه مفهومی نیست که‌بتوان از آن گذشت اما تناقض هم چیزی نیست که بتوان آن را دریك نظام صوری راه داد. بنابراین چاره‌ای نبود جز آنکه دست‌از خوشینیهای شهودی بردارند و نظامی اصل موضوعی وخالی از تناقض برای مجموعه‌ها تأسیس کنند. از آن‌پس نظامهای گوناگونی آورده شدکه از میان‌آنها نظام تسرملو ـ فرانکل(ZF) اکنون بیش‌ازهمه قبول‌عام یافته است. ازبحثهای جالب نظریهٔ مجموعه‌ها اثبات سازگاری اصلهای آن باهم واستقلال آنها از یکدیگر است. شگردهای گودل و کوهن دراین‌اثباتها فراموش‌نشدنی است. این‌اثباتها روشهای‌تازه‌ای درحل مسائل ریاضی پدید آوردند.

۳. نظریهٔ تابعهای بازگشتی[1]

اینکه برای چه تابعهایی می‌توان راه‌حلهای ماشینی یافت و برای چه تابعهایی نمی‌توان، از تازه‌ترین و مهمترین کشفهای دانشمندان منطق ریاضی است. از جالبترین نکته‌های این نظریه این است که همهٔ راههای گوناگونی که منطقدانان برای پیداکردن تابعهای‌محاسبه‌پذیر[2] رفتند به‌یك نتیجه رسید. شگفتی‌انگیز است که گروه کوچکی ازتابعها به‌نام تابعهای بازگشتی تمام تابعهای محاسبه‌پذیر را در بر بگیرند. محاسبه‌پذیری مفهومی است و تابعهای بازگشتی مفهومی دیگر. ولی به‌نظر می‌رسد که این دو مفهوم مصداقهای یکسانی داشته باشند. فرضیهٔ معروف چرچ بیان همین امر است.

این حرف درستی است که اگر منطقدانان این تابعها را کشف نمی‌کردند، محققان کامپیوتر کشف می‌کردند، اما اینکه چرا منطقدانان به‌این بررسی پرداختند دلیلهای متعددی دارد که یکی از آنها ارتباط این مسأله با نظریهٔ برهان است.

۴. نظریهٔ برهان[3]

کار ریاضیدانان برهان‌سازی است. این برهانها به‌ویژه در ریاضیات

1. model theory 2. meta-theorem

1. recursive 2. computable 3. proof theory

جدید تنوع چشمگیری دارند. برهان کانتور در بزرگتر بودن هر مجموعه از مجموعهٔ توانی آن، برهان هنکین در تمامیت منطق، برهان گودل در ناتمامیت ریاضیات، برهانهای مستقیم و غیرمستقیم و سازنده[1] و غیر-سازنده از شناخته‌ترین این انواع‌اند. نظریهٔ برهان، بررسی انواع برهانها و بحث در باب آنها به‌عنوان شیئهای ریاضی است. دستاوردهای این نظریه با همهٔ نوپایی آن کم نبوده‌اند. برای مثال، اگر روزی برخی از ریاضیدانان در قضیهٔ ناتمامیت گودل دنبال اشتباهی در زنجیرهٔ طولانی برهان آن می‌گشتند، امروز دست‌کم می‌توان یك قضیهٔ مشخص ریاضی را نام برد و نشان داد که از اصلهای موضوع پئانو نمی‌توان آن را استنتاج کرد[۵] این یکی از نتیجه‌های مهم نظریهٔ برهان است.

شمارهٔ موضوعهایی که این چهار نظریه در بر می‌گیرند در حال حاضر از صد عنوان هم بیشتر است و تازه ما در این تقسیم‌بندی منطقهای به‌اصطلاح نااستانده و نیز فلسفهٔ منطق و زبان را که خود موضوعی بسیار پردامنه است به‌حساب نیاورده‌ایم.

بدیهی است که در موضوعی تا این‌حد زنده و پویا نوشته‌های فراوانی در کشورهایی که کار تحقیقی جدی گرفته می‌شود انتشار یابد. بحث دربارهٔ این انتشارات موضوع دیگری است. ما در این مقاله تنها به کتابهای درسی و آموزشی اشاره‌ای می‌کنیم.

نلسون گودمن[2] جایی در معرفی کواین[3] گفته است که آثار منطقی کواین شمارش‌ناپذیر است. این توصیف از زبان کسی که خود منطقدان شایسته‌ای است اغراقی است بزرگتر از «زمین شش شد و آسمان گشت هشت». مجموعهٔ همهٔ اتمهای عالم هم شمارش‌ناپذیر نیست. اما در این اغراق حقیقتی هم نهفته است: تنها یکی از منطقدانان نوشته‌هایش چنان زیاد است که شمارش آنها کار ساده‌ای نیست. در زبانهای غربی، به‌ویژه زبان انگلیسی، برای هر گروه از خوانندگان و در هر سطحی از مقدماتی گرفته تا تخصصی شمارهٔ کتابهای درسی و آموزشی به اندازه‌ای است که فهرست آنها خود یك کتاب بزرگ می‌شود.

در واقع یکی از معیارهای معتبری که با آن می‌توان میزان رشد هر علمی را در هر کشوری معین کرد شمارهٔ کتابهای آموزشی و کیفیت این کتابها در آن کشور است. با این معیار، چنان که خواهیم دید، نصیب ما از منطق ریاضی به‌راستی ناچیز است و این در کشوری که گذشته‌ای غنی در منطق سنتی و منطقدانان بزرگی چون فارابی و ابن‌سینا دارد کمبود کمی نیست.

بررسی کتابهای منطق را با توضیحی دربارهٔ کتابهای درسی و آموزشی آغاز می‌کنیم.

امروز که نوآوریها و کشفهای علمی در پایان‌نامه‌های دانشگاهی و سمینارها و نشریه‌های تخصصی گزارش می‌شوند، کتابهای درسی وظیفهٔ محدود و معینی پیدا کرده‌اند. این وظیفه گزارش دادن و آموزش دادن و مرتب نتیجه‌های پذیرفته شده و جا افتاده است. از این گذشته در نوشتن یك کتاب آموزشی باید از پیش دانست که کتاب برای چه گروهی از خوانندگان و در چه سطحی نوشته می‌شود. منظور آنکه برای ریاضیدانان کتاب درسی منطق را باید به گونه‌ای نوشت و برای فلسفه‌دانان یا زبانشناسان به گونه‌ای دیگر. در هر مورد هم باید معلوم کرد که کتاب برای دورهٔ مقدماتی نوشته شده است یا دوره‌های بالاتر. البته کتابهایی هم هستند که بخشهایی از آنها برای دورهٔ مقدماتی مناسب‌اند و بخشهایی برای دوره‌های بالاتر؛ در این گونه کتابها رسم بر این است که نویسندگان راهنماییهای لازم را بیاورند و چگونگی استفاده از کتاب و ترتیب خواندن فصلها و ارتباط هر فصل را با فصلهای دیگر شرح دهند.

نکتهٔ مهمی که در نوشتن یك کتاب درسی باید همیشه به‌یادداشت این است که از نویسندهٔ چنین کتابی انتظار نمی‌رود که کشف تازه‌ای کرده باشد یا حرفهایی بزند که تاکنون هیچ کس نزده باشد. این نکته ممکن است در گروهی این گمان را برانگیزد که کتاب درسی نوشتن کاری است آسان و نه‌چندان مهم. اما این گمانی است سخت باطل. در هر زبان کتابهای درسی خوب و موفق و کم‌نقص در هر موضوع بسیار اندك‌اند. اجازه بدهید مطلب را روشنتر کنیم.

در نظریهٔ مجموعه‌ها به‌ویژه برای دورهٔ مقدماتی کتابهای زیادی به‌زبان انگلیسی نوشته شده است. اما از میان انبوه این کتابها تنها کتاب نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها نوشتهٔ هالموس[۱] شهرت جهانی پیدا کرده است و به اغلب زبانهای دیگر ترجمه شده است. مطالب این کتاب همان مطالب معمول کتابهای دیگر در این موضوع و در این سطح است. اما از زمان انتشار آن (۱۹۶۰) تاکنون هیچ کتابی در نظریهٔ مجموعه‌ها نوشته نشده است که ارجاع به این کتاب نداده باشد. جالب این است که برای دوره‌های بالاتر در نظریهٔ مجموعه‌ها، اگرچه کتابهای فراوانی نوشته شده است اما در مورد هیچ کدام چنین اتفاق نظری وجود ندارد. نمونهٔ دیگر کتاب مندلسون[۴] در منطق ریاضی است. این کتاب هم که برای دوره‌های بالاتر از مقدماتی نوشته شده از زمان انتشار آن (۱۹۶۴) در شمار مرجعهای اصلی این موضوع درآمده است. در سایر زمینه‌ها نیز قضیه از همین قرار است. این نشان می‌دهد که کتاب درسی خوب نوشتن هنری است که هر کس ندارد. بیهوده نیست که در میان انبوه کتابهایی که در منطق قدیم داریم تنها چند کتاب در حوزه‌ها راه یافته‌اند و نسل پس از نسل آن همه شرح بر آنها نوشته‌اند.

بنابراین، کتاب درسی نوشتن کاری است دشوار و مهم. البته دستورهایی هم برای نوشتن چنین کتابهایی هست. ولی رعایت این دستورها لزوماً توفیق کتاب را تضمین نمی‌کند. این که گفتیم کاری است هنری، یکی نیز به‌همین دلیل است.

با در نظر گرفتن آنچه گفتیم حرف آخر این مقاله این است که در منطق ریاضی به‌معنای خاص، که در نظریهٔ الگوها تعریف آن را آوردیم، در حال حاضر، در زمینهٔ تألیف تنها یك کتاب و در زمینهٔ ترجمه نیز تنها یك کتاب داریم! در منطق ریاضی به معنای عام هم تنها در نظریهٔ مجموعه‌هاست که کتابهایی به فارسی تألیف و ترجمه شده‌است. بررسی این کتابها را برای مقالهٔ دیگری می‌گذاریم.

کتابهای تألیفی

اولین کتابی که در فارسی برای آشنا کردن «مبتدی» (به‌اصطلاح مؤلف) نوشته شد کتاب مدخل منطق صورت از دکتر غلامحسین مصاحب بود. این کتاب که در سال ۱۳۳۴ یعنی ۳۲ سال پیش توسط دانشگاه تهران انتشار یافت تا امروز تنها تألیف باارزشی در این زمینه است. این کتاب از پاکیزگی نثر، روشنی بیان و ترتیب منطقی مطالب گرفته تا تنظیم انواع فهرستها و فراهم آوردن علامتهای تازه و نسخه‌پردازی و چاپ، بدون شك کاری بزرگ و بی‌سابقه بوده است. به‌گمان من تا کسی کتاب درسی ننوشته باشد ارزش این کتاب را چنانکه باید درنخواهد یافت. اما این کتاب در میان مبتدیان راه پیدا نکرد و البته یکی از دلیلهای این راه پیدا نکردن را باید در پایین بودن کیفیت آموزش در ایران دانست اما دلیل دیگر آن را باید در

1. constructive 2. Nelson Goodman 3. Quine

خود کتاب پیدا کرد.

از پیش باید اعتراف کنم که برای من خرده‌گیری بر کتابی که با آن بامنطق جدید آشنا شدم دلپذیر نیست. اما آنچه از سنگینی این نادلپذیری می‌کاهد این است که اگر این خرده‌گیریها پذیرفتنی باشند به‌این دلیل است که از تاریخ انتشار این کتاب ۳۲ سال دیگر بر عمر منطق گذشته است و در این سالهاست که راه و روشهای آسانتری مانند جدولهای معنایی[1] و استنتاج طبیعی[2] برای آموزش آن پیداشده است. روشن است که اگر این روشها در آن زمان متداول بودند دانشمند جستجوگری چون مصاحب از آنها بیخبر نمی‌ماند.

کتاب مدخل منطق صورت یک دورهٔ عمومی درمنطق جدید وشامل این بحثهاست: منطق جمله‌ها، منطق محمولها، نظریهٔ مجموعه‌ها و اصول منطق ارسطویی. منطق جمله‌ها با یک قاعده ومجموعهٔ قانونهای این منطق، و منطق محمولها با پنج قاعده ومجموعهٔ قانونهای منطق جمله‌ها وسه قانون خاص منطق محمولها پایه‌گذاری شده است. بنابراین اگر بخواهیم در منطق جمله‌ها برهان استنتاجی را بنویسیم باید نخست فهرست نسبتاً طولانی راستگوها را برابرخود بگذاریم و با کاربرد مکرر قانونهای آن و آن یک قاعده، نتیجه را به‌دست آوریم. این روش چند عیب اساسی دارد. یکی اینکه برهانها طولانی می‌شوند و برای گرفتن یک نتیجهٔ ساده ازچند مقدمه‌ناچار می‌شویم بارها به‌فهرست قانونها متوسل شویم. دیگر آنکه این روش خیلی دور از روش طبیعی ذهن در استنتاجهای عادی است. اما عیب اساسی آن درهم آمیختن بحثهای صوری و معنایی است. توضیح آنکه نکته‌گاه این‌گونه استنتاجها قانونها هستند که با کاربرد مفهوم صدق و کذب و جدولهای ارزش به‌دست می‌آیند. بدین‌ترتیب، اگرچه نتیجه‌ها، بنابه‌تعریف، نتیجه‌های صوری[3] هستند، اما دخالت ملاحظات معنایی درآنها آشکار است. البته‌می‌توان درتعریف این‌قانونها ملاحظات معناشناسی را کنارنهاد، اما دراین‌صورت توجیه پذیرفتن یک فهرست بینهایت ازاصول برای نوآموزان‌دشوارمی‌شود. وازاینها که‌بگذریم دیگر بیان‌دقیق‌فراقضیه‌های سازگاری وتمامیت ممکن نخواهدبود. زیرا این‌دو فراقضیه‌بیان کنندهٔ یکی بودن‌نتیجه‌های صوری ومعنایی هستند. اماتعریف نتیجهٔ‌صوری‌جز درچهارچوب یک‌نظام اصل موضوعی یا نظام صوری دیگر[4] که خالی ازمفاهیم معناشناختی باشد ممکن‌نیست و این درست همان‌چهارچوبی است که درهمهٔ کتابهایی که با این روش نوشته می‌شوند جلوه ونمایی ندارد.

البته نویسندهٔ دانشمند کتاب به‌این نکته توجه داشته است و در مبحث آخر کتاب با کاربرد یک دستگاه اصل موضوعی، تمامیت منطق جمله‌ها را به‌وقت تمام بیان واثبات کرده است. اما مسأله این است که کمتر نوآموزی می‌تواند این کتاب را به‌مبحث آخر برساند واین‌خردهٔ دیگری است که می‌توان براین کتاب گرفت.

کتاب مدخل منطق صورت اگرچه به تصریح دکتر مصاحب برای مبتدی نوشته شده‌است اما درواقع چنین‌نیست؛ آوردن بسیاری از موضوعهای فرعی که مناسب یک کتاب ابتدایی نیست، استخراج قاعده‌های کمکی فراوان از قاعده‌های اصلی که اغلب مبتدی را گیج می‌کند وبه‌ویژه روش‌دشواری که درتأسیس منطق محمولها به‌کاررفته است مطالعهٔ آن را برای مبتدی به‌تدریج دشوار می‌سازد. درست است که برای خواندن این‌کتاب نیازی به‌دانستن ریاضیات عالی نیست اما تا کسی تجربهٔ حل مسائل ریاضی را نداشته باشدنمی‌تواند ازعهدهٔ بازی‌بافرمولهای‌منطق محمولها برآید. به‌این‌ترتیب باید گفت از صد صفحهٔ اول کتاب که بگذریم مخاطبان کتاب دیگر مبتدیان نمی‌توانندباشند واین فراموش‌شدن یکی ازاصولی‌است که‌درنگارش کتابهای درسی بدان اشاره‌کردیم.

فصل مهم دیگر کتاب نظریهٔ مجموعه‌هاست. دراین‌کتاب نظریهٔ مجموعه‌ها به‌روشی مبتنی برنظریهٔ انواع[1]، یا به‌اصطلاح مصاحب «نظریهٔ طبقات» راسل شرح داده شده است. این فصل با دیدگاه منطقدانان اوایل این‌قرن که ریاضیات را قابل‌تأویل به‌منطق می‌دانستند نوشته شده است. امروز این نظر را افراطی می‌دانند. در هر صورت اگر دکتر مصاحب زنده بود ومی‌خواست این‌فصل را دوباره بنویسد گمان‌نمی‌کنم بابودن نظام تسرملو-فرانکل این روش را به‌کارمی‌برد.

مباحث دیگر کتاب مجموعه‌ای است ازاطلاعات مفید وارزنده که بادقت و استواری تمام تقریر شده است. خلاصه آنکه:

۱. روش آموزش منطق‌ریاضی دراین‌کتاب روشی‌وقتگیر وخسته‌کننده و دربرابر روشهای آسان امروز قدیمی است؛
۲. اگرچه کتاب به اعتبار مطالب آن، کتابی مقدماتی است ولی برای مبتدیان نوشته نشده است و آن‌را نمی‌توان کتاب درسی مناسبی برای شروع منطق دانست؛
۳. به‌عنوان اولین کتاب منطق ریاضی که به فارسی تألیف شده است اثری است مهم و ارزنده که هنوز هم نظیری ندارد.

پس‌ازکتاب مدخل‌منطق صورت حق‌این است‌که بادرنظر گرفتن کیفیت مطالبی‌که دراین موضوع تاکنون نوشته شده است حرفی از تألیف به‌میان نیاوریم، اما کار شده را نمی‌شود ناشده انگاشت.

پس‌ازکتاب مصاحب، تا جایی‌که من اطلاع دارم، کتاب‌مستقلی دراین موضوع، مگر یک‌کتاب که شرح‌آن خواهد آمد، تألیف نشده است وآنچه دراین زمینه داریم درحد مقدمه یا بخش‌کوتاهی از کتابهایی هستند که موضوع اصلی آنها منطق نیست. در میان این نوشته‌ها هم‌آنچه جدی و دقیق و خواندنی است بخشهایی است‌که دکتر مصاحب درآغاز جلد اول وضمیمه‌های جلد دوم آنالیزریاضی خود آورده است. از اینکه بگذریم دو سه نوشتهٔ دیگری‌که داریم، آشفته، ناقص وگمراه‌کننده‌اند. مشروحترین این نوشته‌ها را در دو کتاب زیر می‌توان یافت:

۱. عسجدی، غلامرضا. مبادی منطق و ریاضی‌جدید، انتشارات مجلهٔ یکان، ۱۳۴۸؛
۲. منتظرحقیقی، علی‌اکبر. دستگاه اصولی و نظریهٔ اصولی مجموعه، مؤسسهٔ آموزش عالی آمار، ۱۳۵۲.

نویسندهٔ کتاب اول‌ازآنچه نوشته‌است چنین‌برمی‌آید که درصدد تقریرمنظم ومرتب‌منطق جدید نبوده است. ترجمهٔ مطالبی از این‌کتاب و آن‌کتاب یا بخشهای مجزایی از یک‌کتاب را دنبال هم نهاده است. کتاب دوم از یک‌نظر بی‌ضررتر ازکتاب اول است. این‌کتاب گذشته از غلطهای فراوان به‌زبانی نوشته شده است‌که هیچ فارسی‌زبانی از آن سر درنمی‌آورد. ترجمه‌ای پرغلط به‌زبانی نامفهوم.

حالامی‌رسیم به‌کتاب مستقلی‌که دربالاذکرکردیم. منظور ما از این بحث نقد این‌کتاب خاص نیست، می‌خواهیم نمونه‌هایی از

---

1. کتاب درسی مقدماتی برای این روش منبع ۳ است که ترجمه‌ای از آن زیر چاپ است.
2. دراین روش نیز کتابی تألیفی زیرچاپ است.
3. syntactical consequences
4. مانند نظام استنتاج طبیعی که تنها مبتنی برقاعده است.

1. theory of types

روشهای نادرست در کتاب‌نویسی را معرفی کنیم.

۳. بروجردیان، ناصر. منطق ریاضی به زبان ساده، جهاد دانشگاهی دانشگاه تهران، ۱۳۶۳.

در زبان فارسی کتاب ساده برای آموزش منطق جدید نداریم و اگر این کتاب به نام خود وفادار مانده و واقعاً کتابی برای دورهٔ مقدماتی به‌زبان ساده بود تاکنون بارها تجدید چاپ شده بود ولی چنین نیست. کتاب شامل پنج فصل است. فصل اول و پنجم مجموعه‌ای است از آرای شخصی نویسنده در باب منطق و زبان. به‌دلیل همین دو فصل است که نویسنده در پیشگفتار کتاب می‌گوید:

> در این کتاب چهرهٔ خاص فلسفی این منطق بیشتر موردنظر ما بوده است. (ص الف)

نویسنده مدعی است که کتاب را برای آشنا کردن فیلسوفان ایران با ریاضیات و منطق جدید نوشته است، زیرا به‌اعتقاد او:

> اصولاً یك فیلسوف باید همه چیزدان باشد و فلاسفهٔ اولیهٔ بزرگ تاریخ هم همگی همه‌چیزدان بوده‌اند و به‌تمامی علوم عصرخویش واقف بوده‌اند... ولی مطمئناً این عمل امروز خیلی مشکل است و عمر آدمی کفاف آن را نمی‌دهد که تمام علوم عصر فرا گرفته شوند اما به هرصورت چارهٔ دیگری نیست. (ص ب)

از این دو فصل که هرچه هستند هیچ تناسبی با یك کتاب آموزشی دورهٔ مقدماتی ندارند می‌گذریم و به‌سه فصل دیگر که فصلهای جدی کتاب‌اند می‌رسیم. این سه فصل در باب مجموعه‌ها، منطق جمله‌ها و منطق محمولهاست. پیش از آنکه نگاهی به‌این سه فصل بیندازیم لازم است نکته‌ای را شرح دهیم.

در منطق منظور از کتاب دورهٔ مقدماتی کتابی است که خواننده را با مثالهای حساب‌شده و متعدد با مفهوم صورت، اداتهای منطقی و معادلهای آنها در زبان طبیعی و به‌ویژه روش استنتاج آشنا کند. در این کتابها تکیهٔ اصلی بر استنتاج و قاعده‌ها و اصول آن است. در این دوره خواننده باید با انواع و اقسام استنتاجها و کیفیت کاربرد قاعده‌ها و استخراج عینی نتیجه‌ها از مقدمه‌ها، با حل تمرینهای فراوان، آشنا شود. این مطالب به‌اندازهٔ کافی ارزنده و آموزنده و در عین حال گسترده هستند که یك کتاب و دست‌کم یك نیم‌سال تحصیلی (چهار ساعت در هفته) به‌آموزاندن آنها اختصاص داده شود. این همان مطالبی است که باید در سالهای آخر دبیرستان و برای تمام رشته‌ها تدریس شود.

و اما کتابهای دوره‌های بالاتر. در این کتابها فرض بر این است که خواننده مطالب دورهٔ مقدماتی را می‌داند. از این رو در این کتابها کمتر با استنتاجهای واقعی در زبان موضوعی برمی‌خوریم. در این کتابها بیشتر برهانها در فرازبان انجام می‌شوند و احکام ثابت‌شدهٔ در آنها نیز در باب خواص نظامهای منطقی و نظریه‌های گوناگون ریاضی است. مباحثی چون سازگاری اصلهای یك نظام صوری، تمامیت قیاسی آن، تعریف دقیق تعبیر و رابطهٔ میان الگوها و بحثهای فراوانی از این گونه، موضوع این کتابها هستند. کوتاه سخن آنکه کتابهای مقدماتی، منطق هستند و کتابهای بالاتر از مقدماتی، فرامنطق.[1] به‌این اعتبار هم کتاب مدخل منطق صورت دکتر مصاحب کتاب دورهٔ مقدماتی است و نویسندهٔ روش‌شناس آن تنها مبحث آخر کتاب را به‌مباحث فرامنطقی منطق جمله‌ها اختصاص داده و از درهم آمیختن منطق و فرامنطق آگاهانه پرهیز کرده است.

و اما کتاب منطق ریاضی به‌زبان ساده. در این کتاب از همان اول

1. metalogic

بحثهای دورهٔ مقدماتی و دورهٔ بالاتر درهم آمیخته و حتی هیچ یك هم ادا نشده است. برای مثال، خواننده هنوز فصل منطق جمله‌ها را شروع نکرده است که با تعریف جمله‌های درست‌ساخت[1] زبان صوری آن، آن هم با روشی آشفته در پنج صفحه روبرو می‌شود. از استنتاج تنها تعریف آن، آن هم در آخر این فصل، داده شده و اصلهای موضوعی نیز که بی‌مقدمه معرفی می‌شوند تناسبی با زبان صوری این فصل که همهٔ ادانهای منطقی آن استقلال دارند، ندارد. فصل منطق محمولها هم به تمامی صرف همین تعریفها شده است. در این فصل صفحه‌های زیادی به‌تعریف تابع، تعریف ترم و تعریف تعبیر این دو اختصاص داده شده که اصولاً در یك کتاب آموزشی مقدماتی بحثهای زائدی است. نویسنده هیچ نظام استنتاجی برای این فصل معرفی نکرده و در سرتاسر فصل تنها یك استنتاج آورده که در آن از سورها که اساس بحث منطق محمولهاست خبری نیست. این فصل مجموعه‌ای است از تعریف سازگاری، استلزام، تمامیت، و استنتاج.

البته تقصیر این بی‌روشیها را تا اندازه‌ای هم باید به‌گردن نظام آموزشی موجود انداخت. در رشته‌های ریاضی دانشگاههای ما یا منطق جدید تدریس نمی‌شود و یا تدریس آن را به‌قیاس کشورهای غربی با کتابهای دوره‌های بالاتر که اصولاً فرا منطق‌اند تا منطق، آغاز می‌کنند. کتابهای معروفی چون کتاب مندلسون، که ذکر آن گذشت و کتاب اندرتون، که ذکر آن خواهد آمد، برای دانشجویانی مفید است که دورهٔ مقدماتی منطق را گذرانده باشند. اما در نظام آموزشی ما چنین دوره‌ای وجود ندارد و آن مقدار منطقی هم که در درس مبانی ریاضی برای دانشجویان تدریس می‌شود، تا آنجا که من اطلاع دارم، جای منطق دورهٔ مقدماتی را نمی‌تواند بگیرد. نتیجه آن می‌شود که دانشجویی هم که مانند نویسندهٔ این کتاب به مباحث منطقی علاقه‌مند است تصور درستی از روش آموختن و آموزاندن منطق نداشته باشد.

نقصهای این کتاب متأسفانه منحصر به‌آنچه بر شمردیم نیست. نثر کتاب نااستوار و گاهی نادرست است. نویسنده در انتخاب اصطلاحها به‌راستی کج سلیقگی کرده است. برای مثال انتخاب «صحت» و «صحیح» به‌جای «صدق» و «صادق» و «منطق عبارات» به جای «منطق جمله‌ها» نویسنده را ناچار کرده است که اغلب به‌جای اصطلاحهای انتخابی خود همان معادلهای جا افتادهٔ آنها را به‌کار برد و کتاب واژگان آشفته‌ای پیدا کند. اظهارنظرهای شتاب‌زده و نادرست هم در آن دیده می‌شود. برای مثال نویسنده معتقد است:

> در حقیقت منطق اصلی همان منطق محمولات است منتها این تفکیك کردن فائده‌هایی را در بردارد که از لحاظ تعلیم عملی منطق ضروری است. (ص ۶۵)

که اشتباهی است مسلم. منطق جمله‌ها اساس و پایهٔ منطق محمولهاست و این تفکیك کردن هم دلیل نظری دارد نه عملی. کوتاه سخن نویسنده، کتاب‌نویسی را دست‌کم گرفته و تاوان آن را هم ناچار با بی‌خوانده مانند آن خواهد پرداخت.

بحث کتابهای تألیفی را با اشاره‌ای به‌کتابهای دبیرستانی پایان می‌دهیم.

در کتابهای دبیرستانی زیر عنوان «ریاضیات جدید» ۳۰ صفحه در سال اول و ۲۲ صفحه در سال چهارم به‌منطق اختصاص داده شده است. در این ۵۲ صفحه منطق جمله‌ها را با جدولهای ارزش معرفی کرده‌اند و منطق محمولها را در حد علامتهای سور وجودی و عمومی و نقیضهای آنها. در چنین کتابهایی حتی بیدقتی هم نباید راه پیدا کند چه رسد

1. well-formed

به‌اشتباه، امامتأسفانه درآنها اشتباه هم هست. درپایین به‌چند موردآن اشاره می‌کنیم.

۱. درصفحهٔ۳ ازکتاب ریاضیات جدید سال چهارم«گزاره‌های همیشه درست» چنین تعریف شده‌اند:

> گزارهٔ Q یک گزارهٔ همیشه درست است هرگاه ارزش آن، مستقل از ارزش مؤلفه‌هایش، همیشه درست باشد.

که البته تعریف درستی است. اما درصفحهٔ بعد در تعریف قضیه به‌این جمله می‌رسیم:

> دریک‌شاخهٔ ریاضی، قضیه‌گزاره‌ای است که ازاصول آن‌شاخهٔ ریاضی نتیجه شده و درستی آن با برهان بیان می‌شود. می‌توان ثابت کردکه یک‌قضیه، گزارهٔ همیشه درست است.

جملهٔ اخیر تنها درمورد قضیه‌های منطقی صادق است نه هر شاخهٔ ریاضی. این‌ازآن جمله‌های کاذبی‌است که اگر در ذهن دانش‌آموزی بنشیند بیرون‌کردن آن از ذهن او دیگر ساده نخواهد بود.

۲. درصفحهٔ ۱۶ استنتاج چنین تعریف شده:

> استنتاج به‌مفهوم نتیجه‌گیری است بدین معنا که از گزاره‌های مفروضی با استفاده از دستورهای معینی‌که به‌نام قوانین خوانده می‌شوندگزارهٔ دیگری را نتیجه می‌گیریم.

که‌تعریفی‌است‌غلط. استنتاج بدون‌کاربرد قاعده غیرممکن‌است وقاعده هم البته چیزی است غیراز قانون. اصولاً نویسندگان این کتابها قاعده را ازقانون جدا نکرده‌اند. این را ازآنچه درمورد استنتاج نوشته‌اند می‌توان دریافت.

۳. درکتاب سال اول صفحهٔ ۲۳ می‌خوانیم:

> عبارات زیر برای خواندن $p \Rightarrow q$ به‌کار برده شده است:
> — اگر p، آن‌گاه q
> — p نتیجه می‌دهد q را
> — اگر p q
> — q شرط لازم برای p است
> — p شرط‌کافی برای q است

ازاین عبارات دومی وچهارمی وپنجمی ازعباراتی است‌که به‌کار بردن آنها برای «$p \Rightarrow q$» بسیار گمراه‌کننده است و دست‌کم در کتابهای منطق نباید به‌کار رود. البته نویسندگان درکتاب سال چهارم درصفحهٔ ۲ با اضافه‌کردن قید «همیشه درست بودن $p \Rightarrow q$» اشتباه سال‌اول راتصحیح کرده‌اند ولی‌تکلیف دانش‌آموز دراین‌میان چیست؟

درهرصورت بخش منطق این کتابها باید از نو نوشته شوند. دیگر زمان‌آن رسیده است‌که منطق را در دبیرستانها آن‌چنان که‌هست یعنی به‌عنوان یک‌نظام دقیق صوری آموزش دهند.

کتابهای ترجمه‌ای

درترجمه نیز شمارهٔ کتابهای ما، چنان‌که از فهرست زیر معلوم می‌شود، بسیار اندک است:

۱. لنکر، سوزان. منطق سمبولیک، ترجمهٔ منوچهر بزرگمهر، تهران، خوارزمی، ۱۳۴۹.

کتاب سوزان‌لنکر دراصل انگلیسی کتابی متوسط است ولی در ترجمه به‌کتابی پراز غلطهای گوناگون تبدیل شده است. خوانندگان می‌توانند برای اطلاع ازچگونگی این ترجمه به دو مقاله‌ای که در بازدهم آبانماه ۱۳۴۹ و ۲ اسفند همان سال در نقد این ترجمه در روزنامهٔ آیندگان به‌چاپ رسید ونیز به‌شمارهٔ آبانماه مجلهٔ سخن همان سال برای جواب منوچهر بزرگمهر به‌اولین نقد مراجعه کنند.

۲. هاجز، ویلفرد. راهی نودمنطق، ترجمهٔ عبدالحسین‌آذرنگ، تهران، اطلاعات، ۱۳۶۴.

این کتاب نیز دراصل انگلیسی کتابی است مفید و آسان ولی ترجمهٔ آن متأسفانه قابل اطمینان نیست. خوانندگان برای اطلاع از کیفیت این‌ترجمه می‌توانند به‌این مقاله رجوع کنند: هرندی، منوچهر، راهی‌نو در ترجمهٔ منطق، نشر دانش، شمارهٔ دوم، بهمن و اسفند ۱۳۶۵، ص۱۵۹.

۳. کراسلی، ج. ن. و دیگران، منطق ریاضی چیست؟ ترجمهٔ شاپوراعتمادوغلامرضا برادران‌خسروشاهی، تهران، نشرروز، ۱۳۶۳.

مجموعهٔ چند سخنرانی در زمینهٔ معروفترین بخشهای منطق ریاضی. از اصل انگلیسی این کتاب نیز انتقاد شدیدی کرده‌اند.[1] درهرصورت کتابی است غیرآموزشی و شاید تورق آن برای کسانی که با منطق ریاضی آشنایی‌کافی دارند خالی از لطف نباشد.

۴. ناگل، ارنست و جیمز نیومن، آلفرد تارسکی. برهان‌گودل و حقیقت و برهان، ترجمهٔ محمد اردشیر، تهران، مولی، ۱۳۶۴.

دربارهٔ این کتاب لازم است‌برای طرح چند مطلب تازه شرحی بیاوریم.

این مجموعه،ترجمهٔ‌یک‌کتاب‌ویک مقاله است.موضوع کتاب‌بیان قضیهٔ گودل به زبان ساده است. گودل در ۱۹۳۱ و درسن ۲۵ سالگی مقاله‌ای انتشار دادکه دانشمندان ریاضی ومنطق را به‌حیرت افکند. در این مقاله گودل نه تنها یکی از باور نکردنی‌ترین حکمهای منفی را در باب ریاضیات به اثبات رسانده بود بلکه در اثبات، روشی را به کار برده بودکه تا آن زمان نظیری نداشت، و فهم درست آن بدون تسلط‌کافی بر منطق ریاضی وآشنایی‌کافی با نظریهٔ صوری اعداد ممکن نبود. ازاین‌رو تلاش برای عامه فهم‌کردن‌آن آغاز شد.کتاب ارنست ناگل و جیمز نیومن یکی از موفقترین تلاشها در این راه است. یکی از نتیجه‌های مهم قضیهٔ گودل این است‌که همهٔ احکام صادق ریاضی‌را نمی‌توان دریک‌نظام اصل موضوعی به اثبات رسانید، و به بیان دیگر صدق به‌معنای برهان‌پذیری نیست. از اینجا می‌توان ارتباط مقاله‌ای راکه در این‌کتاب ترجمه شده باکتاب ناگل ونیومن دریافت. مقاله، نوشتهٔ آلفرد تارسکی و دربیان رابطهٔ مفهوم صدق وبرهان است.

باید انصاف دادکه مترجم در ترجمهٔ این مجموعه‌کوشش خود را کرده‌است وترجمهٔ اوبه‌ویژه از برهان‌گودل قابل فهم است وخواننده راگمراه‌نمی‌کند. اگردرترجمهٔ این بخش‌که بخش اصلی این مجموعه است‌اصلاحاتی که‌مواردآن هم‌زیادنیست انجام‌شود،ترجمه‌خواندنی‌تر و بی‌نقص می‌شود.

ترجمهٔ مقالهٔ تارسکی متأسفانه به‌روشنی ودرستی برهان گودل نیست. دلیل‌آن هم‌این است‌که مقاله شامل مفهومهایی است‌که یابرای آنها معادلهای مناسب نداریم یا داریم و مترجم به‌کار نبرده است. گرفتاری از همان عنوان مقاله شروع می‌شود. ترجمهٔ عنوان حتماً باید «صدق‌وبرهان» باشد نه «حقیقت وبرهان». معادل «truth» درمتنهای منطقی «صدق» است نه «حقیقت». این نکته‌ای است‌که هنوز به آن توجه‌نمی‌کنند. نظریهٔ دلالت تارسکی نظریهٔ صدق است برای زبانهای صوری. صدق در یک زبان صوری با ارجاع به تعبیر که ساختاری ریاضی است تعریف می‌شود. این صدق لزوماً متناظر با حقیقت‌که در ترجمهٔ «reality» به‌کارمی‌رود نیست. قضیه‌های هندسه‌های‌نااقلیدسی

---

۱. باتشکر ازآقای شاپور اعتمادکه این اطلاع را دراختیار من نهادند.

یا نظریه‌های مجرد ریاضی بنا بر نظریهٔ دلالت تارسکی صادق‌اند اما نمی‌توان گفت حقیقی هم هستند. در بسیاری از موارد صدق مفهومی است نسبی اما حقیقت، هرچه باشد، موضع متافیزیکی متعین‌تری دارد. از اینها هم که بگذریم در منطق از قدیمترین ایام برای جمله صفت «صادق» و «کاذب» را به‌کار می‌برده‌اند نه «حقیقی» و «غیر حقیقی» را. این اصرار بی‌دلیل نیست و بیان دلیل آن هم خارج از موضوع این مقاله است. مترجم خود به این نکته توجه کرده است و در بسیاری از موارد به جای «حقیقت» کلمهٔ «راست» را به‌کار برده است. در متن انگلیسی این ناهماهنگی در واژگان وجود ندارد و همه‌جا آنچه را مترجم «حقیقت» ترجمه کرده کلمهٔ «truth» و آنچه‌را «راست» ترجمه کرده کلمهٔ «true» آمده و این دلیل دیگری بر دقیق نبودن ترجمهٔ کلمهٔ اول به «حقیقت» است.

در ترجمهٔ این مقاله جمله‌هایی هم مانند جمله‌های زیر دیده می‌شوند:[1]

۱) لغت «راست» بطور چند معنایی در بعضی حالات خاص استفاده میشود نه بطور قاطع ومعین. (ص ۱۲۷)

۲) ما قادر نیستیم یك تعریف عام، بوسیلهٔ تشکیل الصاق منطقی همهٔ تعاریف جزئی ارائه دهیم. با این وجود، آنچه که بدست میآوریم، به یك معنای شهودی معادل الصاق خیالی نامتناهی است. (ص ۱۲۸)

۳) باید دانست که این روش، تقریبی برای روش واقعی است، به‌دلایل تکنیکی، روش تراجعی نه برای تعریف حقیقت، بلکه بمفهوم معناشناختی ارضاء بکار می‌رود. بعد، حقیقت بر حسب ارضاء تعریف میشود. (ص ۱۲۸)

درجملهٔ (۱) معادلهای «چند معنایی» و «قاطع ومعین» در ترجمهٔ «syncategorematic» و «categorematic» به‌کار رفته‌اند که معادلهای غلطی هستند اما معادلهای مناسبی‌هم، تا آنجا که می‌دانم، برای آنها نداریم. این دو لغت در اصل یونانی هستند و در آثار منطقدانان قرون وسطای اروپا به‌کار می‌رفته‌اند. در زمان ما کواین از منطقدانانی است که این دو لغت را دوباره رایج کرده است. درجملهٔ (۲) مترجم با کاربرد «الصاق» به جای اصطلاح متداول «ترکیب عطفی» جمله را نامفهوم کرده است. درجملهٔ (۳) گذشته از «حقیقت» که شرح آن گذشت «ارضا» برای «satisfaction» به کار رفته که معادلی است نامناسب و متأسفانه متداول. نویسندگان کتابهای درسی ما ازسالهاپیش درترجمهٔ این کلمه ومشتقات آن ازمشتقات کلمهٔ «صدق» استفاده می‌کردند و برای مثال درترجمهٔ

2 satisfies the equation $2X+1=5$

می‌نوشتند

۲ در معادلهٔ ۵ = ۱ + ۲x صدق می‌کند

یا

۲ معادلهٔ ۵ = ۱ + ۲x را صادق می‌کند

حال اگر بخواهیم «ارضاء» را به‌کار ببریم باید بگوییم

۲ درمعادلهٔ ۵ = ۱ + ۲x ارضا می‌شود

۲ معادلهٔ ۵ = ۱ + ۲x را ارضا می‌کند

در این مورد گمان نمی‌کنم توضیح بیشتری در نامناسب بودن این معادل لازم باشد.

---

۱. درنقل، رسم‌الخط کتاب حفظ شده است.

این مجموعه هم مانند کتاب قبلی کتاب درسی نیست وچنانکه مترجم آن توجه کرده است، وبا قید این شرط که به دقت ویراسته‌شود می‌تواند کتاب مفیدی درفلسفهٔ ریاضی باشد.

۵. اندرتون، هربرت، ب. آشنایی با منطق ریاضی، ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی ومحمدرجبی طرخورانی، تهران، مرکز نشردانشگاهی، ۱۳۶۶.

این کتاب از کتابهای معروف منطق ریاضی ونویسندهٔ آن نیز از منطقدانان شناخته شده است. کتاب برای آموزش دورهٔ بالاتر منطق به دانشجویان ریاضی مناسب است. بخش اساسی این کتاب فصلهای ۱ تا ۳ هستند. درفصل ۱ و ۲ منطق جمله‌ها ومنطق محمولها و همهٔ قراضیه‌های مهم این درمبحث آمده‌اند. فصل ۳ اختصاص به‌مسألهٔ «تصمیم ناپذیری» (که البته معادل خوبی برای «undecidability» نیست و معادل مناسبی هم تا کنون برای آن نداریم) واثبات قضیهٔ گودل وتابعهای بازگشتی دارد. این مبحثی است که اندرتون دراین کتاب تکیهٔ زیادی برآن کرده و تقریراو از این بحث بسیار جالب و آموزنده است. از ویژگیهای این کتاب مثالهای فراوان از چگونگی کاربرد منطق در ریاضیات است. فصل آخر کتاب شامل بحث کوتاهی دربارهٔ منطق محمولهای مرتبهٔ دوم است.

برای فهمیدن این کتاب خواننده باید ازنظریهٔ مجموعه‌ها بیشتر از خلاصهٔ فشرده‌ای که اندرتون در اول کتاب آورده است اطلاع داشته باشد.

ترجمهٔ کتاب درمجموع خوب است وخواننده می‌تواند به آن اطمینان کند. از موردهایی که مترجمان بهتر است در چاپهای بعدی در آن تجدید نظر کنند کلمهٔ «ارضا» است که شرح آن گذشت. در چاپ کتاب نیز دقتهای لازم به‌کاررفته است.

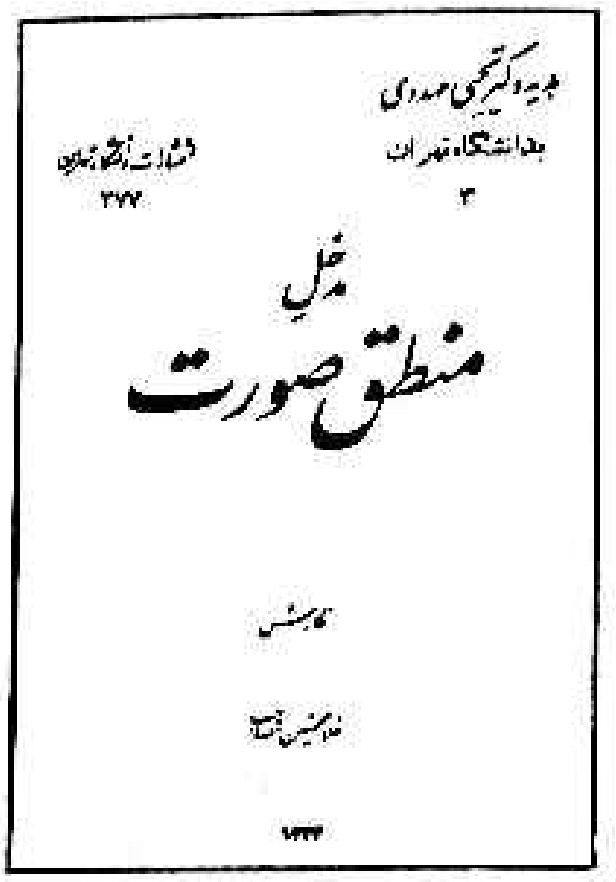
بررسی ما باکتاب با ارزش مدخل منطق صورت آغاز شد و باکتاب با ارزش دیگری حسن‌ختام یافت. ازدانش منطق‌ریاضی نصیب ما تاکنون درترجمه وتألیف همین دوکتاب بوده است. امیدواریم در سالهای آینده منطق‌آموزان ما از این دانش سهمی را که شایستهٔ آنان است دریافت کنند.

پیوست

کتاب مدخل منطق صورت شادروان دکترمصاحب پس از انتشار، در نشریهٔ معتبر *J. of Symbolic Logic* («مجلهٔ منطق نمادی» شمارهٔ چهارم ـ جلد بیست ودوم سال ۱۹۵۷، مورد نقد و بررسی قرار گرفت. این نقد به قلم لطفی عسکرزاده استاد ایرانی تبار دانشگاه کالیفرنیا (برکلی) است که درآن دیار به زاده شهرت دارد. ترجمهٔ این بررسی را در ذیل می‌بینید.

مصاحب، غلامحسین. مدخل منطق صورت، دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۳۴. ۷۰۹ صفحه.

این اثر در موضوع منطق ریاضی جدید در نوع خود نخستین کتاب در زبان فارسی است. و اساسا کتابی است درسی که درآن نظامهای کلاسیك منطقی ازقبیل حساب گزاره‌ها، حساب محمولهای مرتبهٔ اول، حساب‌محمولهای‌مرتبهٔ اول وهمانی، نظریهٔ گسترش یافتهٔ مجموعه‌ها، نظریهٔ نسبتها، ونظریهٔ صوری‌اعدادشرح وبسط داده‌شده است. مطالب در مجموع درسطح نسبتاً بالایی تقریرشده و نویسنده برای به‌روشنی



فهم‌پذیر کردن موضوع از هیچ کوششی دریغ نکرده است.

کتاب به شش مبحث که مندرجات آنها را به کوتاهی خلاصه می‌کنیم تقسیم شده است. مبحث اول با بررسی تاریخی رشد منطق جدید از زمان لایب‌نیتس تا به امروز آغاز می‌شود. آنگاه نویسنده به‌صورتی غیر رسمی مفاهیم بنیادی روش منطقی را معرفی می‌کند. متغیرهای گزاره‌ای و ثابتها، قاعده‌های استنتاج ومفهوم برهان به‌تفصیل، اما نه با دقت، بررسی می‌شوند.

در مبحث دوم، حساب گزاره‌ها با تقریری نسبتاً شتاب‌زده ارائه می‌گردد. اداتهای دوتایی براساس جدولهای ارزش وقضیه‌ها به‌عنوان راستگوها تعریف می‌شوند. از مسألهٔ تمامیت بحثی نمی‌شود و قضیهٔ استنتاج بدون اثبات بیان می‌گردد. صورتهای نرمال فصلی اصلی و عطفی اصلی به اختصار بررسی و به کاربرد آنها در طرح مدارهای الکتریکی اشاره‌می‌شود. این مبحث با فهرستی که شامل حدودصدوپنجاه اصل و قضیه است پایان می‌یابد.

مبحث سوم مربوط به حساب محمولهای مرتبهٔ اول و حساب محمولهای مرتبهٔ اول و همانی است. تقریر مطالب در سطحی بالاتر و تا اندازه‌ای کاملتر از مبحث دوم است. مفاهیم سورهای وجودی و عمومی به‌تفصیل بررسی و با مثالهای متعدد روشن می‌شوند. قاعده‌های استنتاج وتعویض صوری بیان می‌شوند وقضیهٔ استنتاج، اگرچه اثبات آن داده نشده است، آزادانه به‌کار می‌رود. قوانین ابتدایی سورها از قبیل جابه‌جایی سورها وتبدیل $\exists$، $\&$، و $\vee$ دریک سور، مورد بحث قرار می‌گیرد. اما روش یافتن صورت نرمال پیش ذنجیره‌ای عرضه نمی‌گردد. وهمچنین مسألهٔ سازگاری وتمامیت حساب محمولهای مرتبهٔ اول نیز بررسی نمی‌شود.

مبحث چهارم تقریری است کوتاه از نظریهٔ گسترش یافتهٔ مجموعه‌ها، نظریهٔ نسبتها و نظریهٔ صوری اعداد. اصلهای عضویت، بیان ونظریهٔ طبقات طرح‌ریزی می‌شود. مفاهیم جمع، ضرب و تفریق منطقی تعریف و قضیه‌های بنیادی نظریهٔ مجموعه‌ها اثبات می‌شوند. در نظریهٔ نسبتها، مفاهیم انعکاسی، تعدی، همانی و ترتیب جزئی به‌تفصیل بحث‌ومثالهای روشنگر فراوانی، به‌ویژه ازهندسه، برای ایضاح اهمیت این مفاهیم آورده می‌شود. بحث نظریهٔ اعداد مبتنی بر نظام پئانو است.

دومبحث آخر به بحثهای کوتاه در موضوعهای گوناگونی که در چهار مبحث اول نیامده بودند اختصاص دارد. اصول استدلالهای قیاسی، مفاهیم تمامیت و سازگاری یک نظام منطقی و اثبات قضیهٔ استنتاج از این گونه موضوعها هستند. از این گذشته تقریر نسبتاً کاملی ازصورت‌بندی رسر[1] از حساب گزاره‌ها وبحثی کوتاه از نظام نیکود[2] داده می‌شود.

منابع

۱. هالموس، پ. ر. نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها، ترجمهٔ عبدالمجید داداللهٔ، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۲.

2. *Handbook of Mathematical Logic*, ed. J. Barwise, North-Holland, New York, Oxford, 1983 (3rd printing).
3. Jeffrey R., *Formal Logic: Its Scope and Limits*, McGraw - Hill, 1967.
4. Mendelson E., *Introduction to Mathematical Logic*, Van-Nostrand, Princeton, 1964.
5. Paris J., and Harrington L., "A mathematical incompleteness in Peano arithmetic", *Handbook of Mathematical Logic*, New-York, Oxford, 1983, 1133-1142.

نقد خوب چیست؟*

آلن ادموندز ، جان اِوینگ

نقدخوب کتاب چیست؟ به‌شما نمی‌گوییم که نقد خوب چیست (هرچه باشد مطمئن نیستیم که این پرسش فقط یك‌پاسخ داشته‌باشد)، بلکه می‌گوییم که از نظر ما (ویراستاران) نقد خوب برای مجلهٔ ماتنلی چیست.

نخست، نقد بدچیست؟ خیلی ساده،نقدی بد است که ملال‌انگیز باشد. این نقد، محتوای کتاب را به اختصار چنان شرح می‌دهد که متخصصان علاقه‌مند به‌مطالعهٔ آن‌کتاب دقیقاً تشخیص می‌دهند که چه مباحثی در کتاب آمده‌اند. در این نقد ممکن است به‌شما گفته شود که مثلاً در صفحهٔ ۳۵۱ چنداشتباه چاپی به‌چشم می‌خورد، نمادگذاری در فصل ۷ بسیار بداست، وچون مؤلف ارجاعات به‌مقالهٔ سال۱۹۸۶ پروفسور بیکر را ازقلم انداخته، درواقع کاملاً سهل‌انگار بوده‌است؛ وممکن است با این عبارت تجلیل‌آمیز ختم شود (ومحتملا هم‌می‌شود) که به‌نظر نقدنویس، در مجموعهٔ نوشتارها در زمینهٔ شبه‌جبرهای محدب‌نما، این کتاب اثر مفیدی است. چه‌نقدکسالت آوری!

نقد مجلهٔ ماتنلی بایستی مقاله‌ای باشد با عباراتی مأنوس و خودمانی درموضوع کتاب، نه‌یك گزارش کسل کنندهٔ رسمی؛ بایدشرحی از موضوع کتاب‌باشد نه فهرستی ازمطالب آن. مقاله بایستی آموزنده و، مهمتر از هرچیز دیگر، جالب باشد ــ جالب برای گروه وسیعی از ریاضیدانان. مخاطب این‌مقاله باید هزارها تن از اهل فن باشد، نه ده‌دوازده نفر ازمتخصصان.

هرسال صدها کتاب برای نقد وبررسی به‌دست ما می‌رسد، وما می‌توانیم فقط درحدود ۶۰ تا از آنها را نقدکنیم. چگونه اینها را انتخاب می‌کنیم؟ جزئی از پاسخ که جنبهٔ عملی دارد این است که فقط کتابهایی را می‌توانیم نقدکنیم که بتوانیم نقدنویس مناسبی برای آنها پیداکنیم. ولی‌ملاك اصلی ما درانتخاب این است: سعی می‌کنیم کتابهایی‌رانقد کنیم که‌آموزنده‌باشند ــ درسطح لیسانس،فوق‌لیسانس، یا حتی در سطح پژوهش. مجموعهٔ مقالات کنفرانسها و جزوه‌ها اغلب از این مقوله نیستند. متون دورهٔ لیسانس وفوق‌لیسانس، ونیز بسیاری ازکتابهای در سطح پژوهش در عداد این کتابها قرار می‌گیرند. البته منظور این است که کتابهایی که نقد می‌شوند رشتهٔ وسیعی از زمینه‌ها و سطوح علمی را دربر می‌گیرند.

در نقدکتابهای در سطح پژوهش، ممکن است مطالب چندانی دربارهٔ خودکتاب گفته نشود. کتاب را باید به‌مثابهٔ چارچوبی که نقد دربارهٔاش نوشته شده است به‌کار برد (خانه بدون پی بنا نمی‌شود، ولی دراکثر موارد وقتی خانه‌کامل شد، پی‌دیده نمی‌شود). برای بیشتر خوانندگان شرح محتویات این‌گونه کتابها غیرآموزنده و همچنین ملال‌آور است. معمولاً خواننده فقط به‌محتوای یك یا دو کتاب از کتابهای در سطح پژوهش، که در طی یك‌سال نقد شده، علاقه‌مند است. از سوی دیگر، گرچه ممکن است شخصاً به‌مطالب کتابی در زمینهٔ عملگرهای شبه‌دیفرانسیلی علاقه‌مند نباشم، ولی می‌خواهم بدانم موضوع آن چیست؟ چه‌وقت عده‌ای به‌این چیزها علاقه‌مند شده‌اند؟ (یا اصلا کسی علاقه‌مند شده است؟) آیا جبر است؟ آنالیز است؟ توپولوژی است؟ مسائل اصلی آن کدام‌اند؟ این‌گونه نقد محتمل است برای ۲۵ درصد از خوانندگان جالب باشد؛ یك گزارش تفصیلی از مندرجات کتاب شاید فقط برای یك‌درصد از خوانندگان جالب باشد.

البته خیلی خوب است که منقدی بتواند مقاله‌ای بنویسد که هم دربارهٔ کتاب باشد وهم مقامی را که کتاب در بین نوشتارهای مربوط به‌موضوع کتاب دارد، برای خواننده به‌صورتی کلی روشن سازد. این‌کار را اغلب می‌توان انجام‌داد بدون ذکر مطالب و بدون کسل‌کردن اکثریت خوانندگان که هرگز قصد انتخاب این‌کتاب را ندارند (صرفنظر از گفتهٔ نقدنویس). ولی اگر در انتخاب بین تحقیق دربارهٔ‌آن‌کتاب یا تحقیق دربارهٔ ریاضیات مخیر باشیم، ما همواره ریاضی را اختیار می‌کنیم.

نقد متون دورهٔ لیسانس و سالهای اول دورهٔ فوق لیسانس، اغلب ممکن است روی نکات آموزشی و برنامه‌ای متمرکز شود. ولی باز هم صلاح در این است که اندکی از ریاضیات حقیقی در آن گنجانیده شود. (خواننده‌ای که یك‌درس فوق‌لیسانس درنظریهٔ‌اندازه را در ۲۰ سال قبل گذرانیده ولی از آن به بعد در نظریهٔ گروههای متناهی کار کرده است، اندکی به‌یادآوری چند وچون قضیهٔ یگوروف نیاز دارد.) دراینجا نیز نقد باید برموضوع کتاب مبتنی باشد نه‌اینکه برخود کتاب متمرکز شود. تا چه اندازه این موضوع با برنامه مطابقت دارد؟ (یا آیا اصولاً مطابقت دارد؟) مباحث اساسی و قضایای عمدهٔ آن کدامها هستند؟ آیا برخی از مباحث از بعضی دیگر

مهمترند؟ متون «استانده» کدام‌اند؟

به علت ماهیت متون درسی، نقد و بررسی آنها احتمالاً تا حد زیادی رنگ و بوی سلیقهٔ شخصی می‌دهد. بسیار خوب. فلان و بهمان چیز را چگونه تدریس می‌کنید؟ از شخصی که فهرست بالا-بلندی ازشقوق مختلف به شما یکهد چیزی نخواهید فهمید. ولی خواندن نظر قوی وروشن یك فرد ــ حتی اگربا آن موافق نباشید ــ بینشی بیش از آنچه که قبلاً داشته‌اید به شما می‌دهد.

آیا کتابهای خوب وبد وجود دارند؟ البته که وجود دارند. ما همواره احساسات خود را دربارهٔ کتابهای بد و خوب شفاهاً با همکارانمان‌درمیان می‌گذاریم:ــسرناهار، هنگام صرف چای، درسالن غذاخوری. این روش را درنوشتن نقد هم باید به‌کار ببریم، و بایداز همان بیان‌روشن و تخطی‌ناپذیر استفاده کنیم. حتی اگر خشم ناشران یا مؤلفان را بر انگیزیم. ریاضیدانان متأسفانه به نحوهٔ تدریس موضوع توجه چندانی ندارند. داوریهای قوی و مسؤولانه ما را به تفکر وامی‌دارند ــ به اصطلاح مغز را به‌کار می‌اندازند.

ضمناً داوری «مسؤولانه»، الزاماً داوریی نیست که ویراستاران با آن موافق باشند (درعین اینکه ماکاملاً به‌داوری خود علاقه‌مندیم، میل داریم داوریهای دیگران را نیز بشنویم، حتی اگر با آنها موافق نباشیم ــ اغلب هم این کار را می‌کنیم.) اگر درصفحات مقاله‌های روزنامه‌ها تنها مقالات و نامه‌های مورد قبول ناشران چاپ می‌شدند، واقعاً صفحات کسالت‌آوری می‌شدند؛ بخش نقدکتاب ما هم به‌همین اندازه کسالت‌آور می‌شد.

نقد «کامل» آمیزه‌ای است از همهٔ مطالب مذکور دربالا. این نقد شامل تاریخ، ریاضیات، و عقاید است؛ این نقد از موضوع کتاب و از خود کتاب صحبت می‌کند (بی‌آنکه دیده شود)، به ما آگاهی می‌بخشد و ما را سرگرم می‌سازد و بالاتر ازهمه دلنشین است. قابل توجه اینکه همهٔ این کارها باید در۴ تا ۶ صفحه انجام گیرد. (توجهٔ ما: به نقد نویسان می‌گوییم دست‌کم سه صفحه بنویسند و هرگز بیش از ده صفحه ننویسند.)

آیا این نوع نقد در حق مؤلفان غیرمنصفانه تلقی نمی‌شود؟ آیا این تصور برای خواننده‌پیدا نمی‌شود که ندادن اطلاعات مشروح دربارهٔ خود کتاب، اظهار نظری مؤدبانه دربارهٔ کم ارزشی آن است؟ امیدواریم چنین نباشد، ما می‌خواهیم نسبت‌به مؤلفان (و ناشران) منصف باشیم. اما می‌خواهیم نسبت به‌خوانندگان نیز چنین باشیم. انتشار نقدهای رسمی، که تقریباً خواننده‌ای ندارد در حق هیچکس منصفانه نیست.

نقد خوب کتاب برای ما مثلی کدام است؟ مطلبی خواندنی و جالب دربارهٔ یك کتاب.

ترجمهٔ م. هـ. شفیعیها

• Edmonds A., and Ewing J., "What's a good book review? An editorial comment", *Amer. Math. Monthly*, 88 (1981) 318-319.

ریاضیات عالیترین دستاورد فکری و اصیلترین ابداع ذهن آدمی است. موسیقی می‌تواند روح را برانگیزد یا آرام سازد؛ نقاشی می‌تواند چشم‌نواز باشد، شعر می‌تواند عواطف را تحریك کند، فلسفه می‌تواند ذهن را قانع و راضی سازد، مهندسی می‌تواند زندگی مادی آدمی را بهبود بخشد. اما ریاضیات همهٔ این ارزشها را عرضه می‌کند.

موریس کلاین

در شماره‌های آینده می‌خوانید