سال اول شمارهٔ ششم | واحد | پانزدهم دی ۱۳۰۹

مجلهٔ

[ریاضیات]

عالی و مقدماتی

مدیر مسئول و مؤسس: مصاحب

جای اداره: موقتاً اداره: جریدهٔ قانون طهران خیابان باب همایون

اول و پانزدهم هر ماه منتشر میشود

وجه اشتراك در ایران

سالیانه: از ۴۰ تا ۲۵ قران (برای محصلین ۱۰ قران)

ششماهه: فقط براي محصلين ۶ قران

تك شماره: یك ریال

Ier Année, 6e No. JOURNAL DE 15 Déc. 1309

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES & SUPÉRIEURES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque Mois.

Dircteur : MOSSAHEB

Administration, Téhéran: Avenue Bibé-Homayoun

ABONNEME

PERSE : DE 40 A 25 KRANS — ETRANGER 60 FRANCS.

خیابان لاله زار مطبعهٔ دوستای - طهران کوچهٔ بوشهری

نیز بنظر میرسد مسئلهٔ ذیل است :
صفحهٔ دو ناحیه را از هم جدا می کند. متحرکی
وقتی در ناحیهٔ اول حرکت کند سرعتش v و
وقتی در ناحیهٔ دوم حرکت نماید سرعتش v' می
باشد. اگر این متحرک بخواهد در کمترین مدت
از نقطهٔ مفروضی از ناحیهٔ اول بنقطهٔ مفروضی
از ناحیهٔ دوم برود بر چه مسیری باید حرکت کند؟
فرما سطوح محدود بخطوط مستقیمه و منحنیات
مخصوصه را حساب کرده (رجوع کنید بجلد اول
Analyse Mathematique
تالیف E. Goursat صفحهٔ ۱۶۶) و
نیز طول قوس بعضی از منحنیاتی را که تا زمان
او حسابش را نتوانسته بودند معین نموده است.
قبل از اینکه کتاب هندسه Géometrie
از آثار دکارت Descartes منتشر
شده باشد فرما طرقی برای حل مسائل راجع
بمکانهای هندسی بکار می برده که می توان
آنها را اولین مبادی هندسهٔ تحلیلی دانست
لاپلاس ریاضی دان بزرگ فرانسوی فرما و
پاسکال را کاشفین حساب احتمالات
(Calcul des Probabilités)
که مخصوصا در علوم تجربی اهمیت زیادی دارد میداند.
فرما در حیات خود کتابی منتشر نساخته و پس
از مرگ او پسرش ساموئل فرما
(Samuel Fermat)
در صدد جمع آوری یادداشتها و نوشتجات
پدر خود بر آمد ولی چون این آثار خیلی
متفرق بود کاملا باین مقصود موفق نشد.

فرما و حساب عالی - قسمت عمدهٔ زحمات
فرما در حساب عالی است و علت عمدهٔ اشتهار
او قضایائی است که در این علم کشف کرده و
می توان گفت حساب عالی از زمان فرما بوجود
آمده. مسائل و قضایای فرما راجع بحساب
عالی بر دو نوعند اول قضایا و مسائلی که
اثبات آنها را ذکر ننموده و یا نوشته است
ثابت کرده ام ولی اثبات آنها بدست نیامده
قسمت دوم قضایائی که اثبات آنها را ذکر کرده است
صحت تمام قضایائی که فرما طرح کرده جز
دو قضیه که ذیلا ذکر خواهد شد بعد از او
در نتیجهٔ زحمات علمای ریاضی ثابت شده است.
اولین قضیه که فرما طرح کرده و خطای آن
ثابت گشته قضیهٔ ذیل است :
تمام اعدادی که بصورت $2^{2^n}+1$ باشند اولند

در باب این قضیه به پاسکال می نویسد :
«این حقیقتی است و اثبات آن خیلی صعب
و مشکل است و اعتراف می کنم که کاملا آنرا
پیدا نکرده ام و اگر خود کاملا آنرا ثابت نموده
بودم بشما تکلیف تفکر در اثبات آنرا نمی کردم.»

و نیز در ۲۵ دسامبر ۱۶۴۰ به مرسن (Mersenne) می نویسد:

«گمان می کنم اگر علت اینکه اعداد رشتهٔ ۳ و ۵ و ۷ و ۱۷ و ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ و ..... اولند بفهمم مطلب خیلی خوبی کشف خواهم کرد چه تاکنون نکات عجیبی کشف کرده ام که برای شما خواهم نگاشت.»

خطای فرما را اول دفعه اولر Euler در سنهٔ ۱۷۳۲ ثابت کرده. توضیح آنکه بازاء $n=5$ عدد $2^{2^n}+1$ مساویست با: ۴۲۹۴۹۶۷۲۹ و دانشمند مذکور این نتیجه را بدست آورده:

۴۲۹۴۹۶۷۲۹ = ۶۷۰۰۴۱۷ × ۶۴۱

(در این باب مطالب جالب توجهی هست که بعدها از نظر خوانندگان محترم خود خواهیم گذرانید)

دومین قضیهٔ که فرما طرح کرده قضیه ایست که به آخرین قضیهٔ فرما Le dernier theorème de Fermat موسوم است و یکی از معماهای علوم ریاضی بشمار میرود و در صفحات بعد بتفصیل ذکر خواهد شد.

۲- قضایائی که نه فقط طرح کرده بلکه اثبات آنها را نیز ذکر کرده است در تمام کتب حساب عالی ذکر شده لهذا ذکر آنها در این مقام لازم نیست بعلاوه اهمیت این قضایا که بمنزلهٔ پایه و بنیان حساب عالی است نیز محتاج بتذکر نمیباشد.

یکی از روشهای فرما - فرما در حل مسائل حساب عالی طرق مخصوصی بکار می برده که بعضی از آنها در دست است و بعدها علمای ریاضی از روی همان طرق بعضی قضایائی را که فقط طرح کرده ثابت نموده اند.

یکی از طرقی که فرما در اثبات قضایای حساب عالی استعمال کرده طریقی است که خودش آنرا «نزول لایتناهی» (Descente à l'infini) میخواند. مثلا برای اثبات این قضیه که وجود مثلث قائم قائم الزاویه که اضلاعش اعداد صحیح و وسعتش مربع کامل باشد ممتنع است ابتدا ثابت می کند که اگر چنین مثلثی موجود باشد مثلث دیگری حائز همان شرایط که اضلاعش کوچکتر از اضلاع مثلث اول باشند وجود خواهد داشت و از اثبات وجود این مثلث وجود مثلث دیگری حائز همان شرایط با اضلاع کوچکتر نتیجه می گردد و هکذا. حال اگر ملاحظه کنیم که عدهٔ اعداد صحیحی که کوچکتر از عدد صحیح مفروضی باشند محدود است صحت حکم مذکور در فوق معلوم می شود. از آنچه از نوشتجات فرما معلوم می شود ابتدا این روش را در اثبات قضایای سالبه (مانند قضیهٔ فوق) بکار میبرده و استعمال

آزاد قضایای اثباتی نمیتوانستند برای بعدها دایرهٔ این استدلال را توسعه داده و آنرا در اثبات قضایای موجبه نیز استعمال کرده. مثلاً برای اثبات این قضیه که هر عدد اولی که مضرب از چهار بعلاوهٔ واحد باشد مجموع دو مجذور است ابتدا ثابت میکند که اگر عدد اولی که مضرب ۴ بعلاوهٔ واحد است مجموع دو مجذور و نباشد عدد اولی کوچکتر از آن نیز یافت می شود که مضرب ۴ بعلاوهٔ واحد بوده و مجموع دو مجذور و نباشد و همکذا چون استدلال را مداومت دهیم بعد ده میرسیم که مضرب ۴ بعلاوهٔ واحد و مجموع دو مجذور و است و ایجاد این تناقض حکم را ثابت میکند.

آخرین قضیهٔ فرما
Le dernier theoreme de Fermat

در قدیم الایام عادت باین جاری بود که علما در موقع فراغت و مطالعهٔ کتب قلم در دست گرفته و حواشی بر کتاب می نوشتند و یا مطالبی که خود در ضمن مطالعه درک می کردند یادداشت نموده و یا از نکات شاق نویسنده انتقاد می کردند پس از مرگ فرما در کتابخانهٔ او بین چند کتاب که شامل حواشی و یادداشتهای فرما بود یافت شد و در حاشیهٔ یکی از این کتب مطالب ذیل یادداشت شده بود:

«ممکن نیست مکعب کاملی را بمجموع دو مکعب کامل تجزیه کرد و یا قوهٔ چهارم کاملی را بمجموع دو قوهٔ چهارم کامل تجزیه نمود و همکذا... من این قضیه را بوجه تعجب آوری ثابت کرده ام (Demonstratio mirabilis sane) اثبات آنرا در این حاشیه نمی گنجد.»

این قضیه بآخرین قضیهٔ فرما معروف است و اثبات آن فقط در باب قضیه چهارم از خود فرما باقی مانده و از موقعی که صورت آن منتشر گردید فکر عدهٔ زیادی از علمای بزرگ ریاضی را بخود مشغول داشته ولی متأسفانه تا امروز کسی از عهدهٔ حل آن برنیامده است.

(چند سال قبل یک نفر دانشمند آلمانی موسوم به دکتر ولفسکل (Dr. Wolfskehl) مبلغ ۱۰۰۰۰۰ مارک برای اولین کسی که قضیه را در حالت کلی ثابت کند معین کرده و تاریخی که اطلاع دارم هنوز این مبلغ باقی است.)

قبل از این که مطلب دیگری در باب این قضیه بنگارم لازم است متذکر شوم که قبل از این که فرما این قضیه را طرح کند مسلمین آنرا می دانستند و آنرا جزو معضلات علوم ریاضی میشمردند چنانکه

شیخ بهاء الدین عاملی علیه الرحمه (۱۰۳۰ ه)

در کتاب خلاصة الحساب خود می فرماید:

«قد وقع للحکماء الراسخین فی هذا الفن مسائل صرفوا فی حلها افکارهم ووجهوا الی استخراجها انظارهم وتوصلوا الی کشف نقابها بکل حیلة وتوسلوا الی رفع حجابها بکل وسیلة فما استطاعوا الیها سبیلا ولا وجدوا علیها مرشدا ودلیلا فهی باقیة علی عدم الانحلال من قدیم الزمان الی هذا الآن .....

وانا اوردت فی هذه الرسالة سبعة منها علی سبیل الانموذج اقتداء بمنارهم واقتفاء لآثارهم وهی هذه: الاولی .....

الرابعة عدد مکعب قسم بقسمین مکعبین .. ..»

مسئلهٔ چهارم از هفت مسئله که شیخ ذکر می کند بحل معادلهٔ $x^3+y^3=z^3$ راجع می گردد. (بقیهٔ این مسائل را بتدریج در صفحات مجله ذکر خواهیم نمود) وچنانکه خواهیم دید این حالت خاص را اول دفعه اولر بقیاس استدلال فرما برای اثبات امتناع معادلهٔ $x^4+y^4=z^4$ ثابت کرده است. خلاصه آخرین قضیهٔ فرما را می توان چنین بیان کرد: «اگر n عدد صحیحی بزرگتر از ۲ باشد معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$ با مقادیر صحیح x و y و z ممکن نیست.»

بازاء $n=2$ معادلهٔ فوق چنین می شود:

$$x^2+y^2=z^2$$

این معادله را اجوبه بی شمار است وکلیه جوابهای آن ازین دستورات بدست می آید:

$$x=a^2-b^2 \qquad y=2ab$$

$$z=a^2+b^2$$

تعبیر هندسی حل معادلهٔ $x^2+y^2=z^2$ تعیین مثلثات قائم الزاویه ایست که اضلاعشان اعداد صحیحه باشند.

چنانکه گفتیم بازاء $n=3$ اولر قضیه را ثابت نموده وبازاء $n=4$ اثبات آن از فرما باقی مانده وچنانکه خواهیم دید اثبات فرما برای حالت $n=4$ مبنی بر روش نزول لایتناهی است.

لژاندر Legendre ریاضی دان معروف فرانسوی در ۱۸۲۳ قضیه را برای $n=5$ ثابت نموده واثبات آنرا در کتاب حساب عالی خود ذکر کرده است.

لژون دیریخلت Lejeune Dirichlet. در ۱۸۳۲ برای $n=14$ قضیه را مدلل نموده.

در ۱۸۴۰ لامه Lamé و لبسک Lebesgue قضیه را در حالت $n=7$ ثابت نموده اند.

در ۱۸۴۹ کومر Kummer بمدد

اعداد مخصوصی موسوم به اعداد خیالی Nombres idéaux که خودش داخل حساب عالی نموده قضیهٔ فرما را برای کلیهٔ اعدادی که حائز سه شرط معین نباشند ثابت کرده. اگرچه معلوم نیست اعدادی حائز این شرایط موجود باشند ولی عدم آنها نیز ثابت نشده و فقط معلوم شده است که اگر چنین اعدادی موجود باشند از صد بزرگترند پس زحمات کومر قضیهٔ فرما را برای نمایندههائی که از ۱۰۰ کوچکتر باشند ثابت می کند.

خلاصه آنکه زحمات علمای ریاضی در باب اثبات این قضیه بکلی بی نتیجه مانده این نکته نیز ناگفته نماند که مقصود از لفظ بی نتیجه در همین مورد بخصوص است و الا زحمت هیچگاه بی نتیجه نماند. مثلاً در نتیجهٔ تفکر در همین مسئله بود که نابغهٔ بزرگ اولر بمنبع نور جدیدی دست یافت و مبحث ریشههای اولیه (Racines Primitives) را کشف کرد و این منبع نور بود که دانشمند بزرگ و مشهور گوس (Gauss) را بقضیهٔ معروف تقسیم محیط دایره راهنمائی و هدایت نمود و نتایج گوس راه جدیدی پیش پای علمای ریاضی باز کرد و قدم زدن در این راه آبل (Abel) و گالوا (Galois) و کومر و کرونکر Kron و هرمیت (Hermite) را در تحقیقات عمیقهٔ انداخت و نتایج این تحقیقات که امروز قسمت عمدهٔ جبر عالی را تشکیل میدهد برای اینکه طریق استعمال روش نزول لا یتناهی معلوم شود اثبات امتناع معادلهٔ $x^4+y^4=z^4$ را با بعضی اختصارات از کتاب حساب عالی Theorie des nombres تالیف Sommer اقتباس کرده از نظر خوانندگان محترم می گذرانیم:

اولاً معلوم است که همیشه در معادلهٔ $x^4+y^4=z^4$ می توان x و y و z را نسبت بهم متباین فرض کرد. اینک اگر معادلهٔ فوق را به صورت: $(x^2)^2+(y^2)^2=(z^2)^2$ بنویسیم دیده می شود که کلیهٔ اجوبهٔ آن چنین خواهند بود:

$x^2=u^2-v^2$ و $y^2=2uv$ و $z^2=u^2+v^2$

چون x و y و z نسبت بهم اول فرض شده اند u و v نیز نسبت بیکدیگر اول خواهند بود و برای سهولت فرض می کنیم هر دو مثبت باشند چون $2uv$ مجذور کامل و u و v نسبت بهم اولند یا u و $2v$ و یا v و $2u$ مجذور کامل

خواهند بود مثلاً فرض کنیم:

$u = \rho^2 \qquad 2v = 4\sigma^2$

از آنجا: $y = 2\rho\sigma$ و $x^2 = \rho^4 - 4\sigma^2$ (۲)

اجوبهٔ معادلهٔ (۲) باین صورتند:

$\rho^2 = a^2 + b^2 \qquad \sigma^2 = ab$

$x = a^2 - b^2$

چون a و b نیز نسبت بهم اوّلند باید هر یک مجذور کامل باشند فرض کنیم $a = f^2$ و $b = g^2$ نتیجه می شود: $\rho^2 = (f^2)^2 + (g^2)^2$ و این معادله بصورت معادلهٔ اصلی است. اینک گوئیم چون

$u < \frac{y^2}{2}$

بالنتیجه $\rho \leq \frac{y}{\sqrt{2}}$ اما $\rho > a$ ، $\rho > b$ پس $a < \frac{y}{\sqrt{2}}$ و $b < \frac{y}{\sqrt{2}}$ از آنجا $g^2 < \frac{y}{\sqrt{2}}$ و $f^2 < \frac{y}{\sqrt{2}}$

بنابراین از هر رشتهٔ جواب معادلهٔ (۱) رشتهٔ جواب کوچکتری نتیجه می شود و این مطلب امتناع وجود یک رشتهٔ جواب را ثابت می کند.

بی مناسبت نیست قبل از ختم مقاله بعضی نتایج امتناع معادلات $x^3 + y^3 = z^3$ و $x^4 + y^4 = z^4$ را متذکر شویم

۱- چون اعداد u و v نسبت بهم متباین اند $u+v$ و $u-v$ نیز متباین خواهند بود و چون حاصل ضرب دو مقدار اخیر مجذور کامل است ناچار $u+v = \xi^2$ و $u-v = \xi^2$ بالنتیجه امتناع $y^2 = 2uv$ باین امتناع راجع می شود:

$y^2 = 2 \cdot \frac{\xi^2 + \xi^2}{2} \cdot \frac{\xi^2 - \xi^2}{2}$

یا $2y^2 = \xi^4 - \xi^2$ پس معادلهٔ $x^4 - y^4 = 2z^2$ نیز ممتنع است.

۲- چون معادلات $z^2 = u^2 + v^2$ و $x^2 = u^2 - v^2$ ممتنع اند $u^4 - v^4$ مجذور کامل نتواند بود و لهذا معادلهٔ $x^4 - y^4 = z^2$ نیز ممتنع می باشد.

و این قضیه را فرما این طور بیان کرده. مثلث قائم الزاویه که اضلاعش اعداد صحیح و سطحش مربع کامل باشد ممتنع الوجود است.

۳- هیچ یک از مقادیر: $\sqrt[3]{x^3 \pm 1}$ و $\sqrt[4]{x^4 \pm 1}$ منطق نتوانند بود زیرا اگر مثلاً $\sqrt[3]{x^3 \pm 1} = \alpha$ باشد نتیجه می شود:

$x^3 \pm 1 = \alpha^3$

و این معادلات ممتنع اند.

۴- معادلهٔ $\sqrt{a^3} \pm \sqrt{b^3} = \sqrt{c^3}$ ممتنع است و غیره.

تشکر

از بدو انتشار مجلهٔ ریاضیات تا کنون عدهٔ زیادی از معارف پروران و دانش دوستان که هم بر موانع و مشکلات انتشار یک مجلهٔ علمی در ایران واقفند و هم اهمیت چنین مجلهٔ را میدانند از راه معارف پروری نگارندهٔ ناچیز مجلهٔ ریاضیات را با بیاناتی مشوق و کلماتی محرک روح فداکاری که تنها وسیلهٔ موفقیت در انجام کلیهٔ خدمات اجتماعی است نواخته و کتبا یا شفاها وسیلهٔ دلگرمی نگارنده شده اند چون بواسطهٔ ضیق صفحات تشکر از یک یک آنها ممکن نیست لذا بدین وسیله تشکرات و امتنانات قلبی خود را تقدیم عموم آنها مخصوصا آقای رسا مدیر محترم جریدهٔ شریفهٔ قانون و آقای امینی مدیر محترم جریدهٔ فریدهٔ اخگر و آقای فرهپور مدیر محترم جریدهٔ شریفهٔ پیستون نموده بقا و دوام آنها را در انجام خدمت مهمی که بر عهده دارند از حضرت باری مسئلت مینماید.

از مراسلات وارده

آقای مدیر محترم متمنی است در صورتی که ممکن باشد مسئلهٔ ذیل را درج فرموده راه حل آنرا از خوانندگان محترم مجلهٔ شریفه بخواهید:

میخواهیم از سه چشمه (ا) و (ب) و (ج) به سه شهر (ه) و (و) و (ز) بوسیلهٔ مجری آب ببریم. این مجاری را طوری رسم کنید که یکدیگر را تلاقی نکنند.

(محمود شیبانی محصل کلاس ۵ علمی مدرسهٔ متوسطهٔ تبریز.)

در مراسلهٔ آقای شیبانی چند مسئلهٔ دیگر نیز طرح شده بود ولی این مسائل از جمله مسائل عادی بوده و گمان می کنیم اغلب آنها را شنیده باشند و لهذا از درج آنها خودداری نمودیم

مسئله ۱

قطعهٔ مقوائی بشکل مربع را به ۲۰ مثلث مساوی تقسیم کنید.

مسئله ۲

مسدس منتظمی را به ۵ جزء مساوی چنان تقسیم کنید که اگر آنها را بطرز مناسبی پهلوی یکدیگر بگذاریم مربعی حاصل شود.

حل مسائل شمارهٔ ۳

(مسائل این قسمت تا نمرهٔ ۱۳۵ در جلد دوم پروگرام دورهٔ اول منتشر شده)

۴۲- **مسئله**- از صحبت دختر معلوم می‌شود که عدهٔ دخترها یکی بیشتر از عدهٔ پسرهاست و از صحبت پسر معلوم می‌شود که نصف عدهٔ دخترها مساوی است با فضل عدهٔ دخترها بر دو پس فضل عدهٔ دخترها بر نصف عدهٔ آنها یعنی نصف عدهٔ دختران ۲ است و بالنتیجه پدر آنها ۴=۲×۲ دختر و ۳=۱-۴ پسر دارد.

۴۳- **مسئله**- عبارت فوق را با f نموده آن را برحسب قوای x مرتب می‌کنیم:

$$f = x^3(z-y^2) - x^2z^2(z-y^2) - xy(z-y^2) - yz^2(z-y^2)$$
$$= (z-y^2)[x^3 - x^2z^2 - xy - yz^2]$$

مقدار داخل کروشه را برحسب قوای y مرتب می‌نمائیم:

$$f = (z-y^2)(x^2-y)(z-y^2) = [(x-z^2)(z-y^2) + x^2(x-z^2) - y(x-z^2)]$$

۴۴- **مسئله**- بواسطهٔ تجزیه بعوامل معلوم می‌شود که:

$$12x^2 + 34x + 24 = 2(3x+4)(2x+3)$$
$$12x^2 - 14x - 48 = 2(3x-8)(2x+3)$$
$$9x^2 - 12x - 32 = (3x-8)(3x+4)$$

قسمی که طرف اول معادله چنین می‌شود:

$$\frac{(2x+3)(2x-4)(3x+4) + 4(3x+4)(x+14) - (x+2)(3x-8)}{2(3x+4)(2x+3)(3x-8)}$$
$$= \frac{2(3x-8)(2x+3)}{(3x+4)(2x+3)(3x-8)} = \frac{2}{3x+4}$$

پس معادلهٔ مفروض باین صورت بیرون می‌آید: $\frac{2}{3x+4} = 5$ از اینجا

$$x = -1,2$$

۴۵- **مسئله**- سرعت اولی $\frac{dl}{a}$ و سرعت دومی $\frac{dl}{b}$ است پس در موقع ملاقات اولی که $a-m$ ساعت حرکت کرده مسافتی معادل $\frac{dl}{a}(a-m)$ و دومی که $b-n$ ساعت حرکت بوده مسافتی مساوی $\frac{dl}{b}(b-n)$ پیموده پس: $(a-m)\frac{dl}{a} + \frac{dl}{b}(b-n) = 0$

یا: $b(a-m) + a(b-n) = ab$ (۱) از طرف دیگر $a-m = b-n$

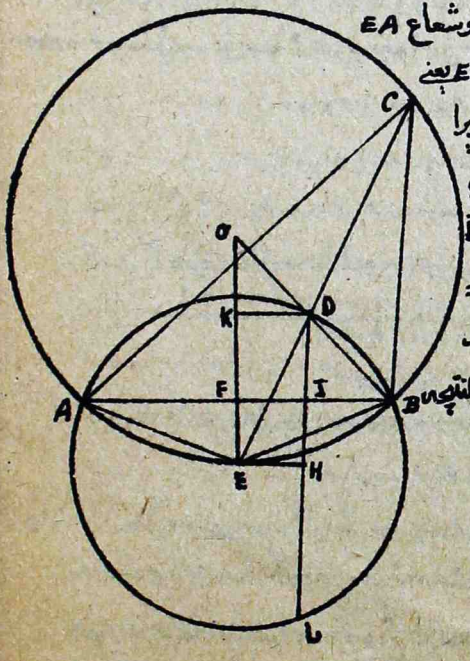
حال در تساوی (۱) یک مرتبه $b-m$ را بجای $a-m$ و یک دفعه $a-m$ را بجای $b-m$ قرار می دهیم این دو رابطه حاصل می شود: $a^2=m(a+b)$ و $b^2=n(a+b)$ و از تقسیم آنها نتیجه می شود: $\frac{a^2}{b^2}=\frac{m}{n}$

۴۶- **مسئله** - اگر عددی که روی تابلوی اول نوشته شده، $\overline{xy}$ بنامیم اعدادی که روی دو تابلوی دیگر نوشته شده بترتیب $\overline{yx}$ و $\overline{x0y}$ خواهند بود و از این رو این معادله حاصل می شود: $\overline{x0y}-\overline{yx}=\overline{yx}-\overline{xy}$ یا:

$$100x+y-(10y+x)=(10y+x)-(10x+y)$$

یا: $y=6x$. چون y از ۱۰ کوچکتر است ناچار $x=1$ و بالنتیجه $y=6$ پس عدد که روی تابلوی اول نوشته شده ۱۶ و سرعت اتومبیل $16\times 4=64$ کیلومتر در ساعت است.

۴۷- **مسئله** - فرض کنیم ABC مثلث مفروض و O مرکز دایرهٔ محیطی و E وسط قوس AB باشد. معلوم است اگر به مرکز E و شعاع EA دایره ای رسم کنیم محل تلاقی این دایره با خط CE یعنی نقطهٔ D مرکز دایرهٔ محاطی مثلث است. زیرا EC منصف الزاویه C است بعلاوه:



$$\widehat{DBC}=180-\widehat{BDC}-\widehat{BCD}$$
$$=\widehat{BOE}-\widehat{ABE}=\widehat{EBD}-\widehat{ABE}=\widehat{ABD}.$$

پس OB نیز منصف الزاویه B می باشد و این مطلب حکم مذکور را ثابت می کند و بالنتیجه مقصود مسئله محاسبهٔ OD است که برای سهولت آن را به کمک قضیه ای برای نیل باین مقصود از نقطهٔ O عمودهای OK و OL را بترتیب بر OE و AB فرود می آوریم. از مثلث OOK نتیجه می شود: $\delta^2=OK^2+KI^2$. اما اگر F محل تلاقی OE و AB و I محل تقاطع OL با AB باشد:

$KD=FI$ و $OK=OF-\rho$ (ρ مطابق معمول شعاع دایرهٔ محاطی مثلث است) پس:

$$\delta^2=(OF-\rho)^2+FI^2 \qquad (1)$$

امّا: $(AF+FI)(AF-FI)=AF^2-FI^2$ یا $AI.IB=AF^2-FI^2$

حال اگر FI را از این تساوی استخراج کرده در تساوی (۱) قرار دهیم پس از بسط پرانتز حاصل می‌شود $\delta^2=OF^2+AF^2-2\rho.OF-AI.IB+\rho^2$ امّا اگر R شعاع دایرهٔ محیطی و L محل تلاقی عمود DL با محیط دایرهٔ ED باشد $OF^2+AF^2=R^2$ و $AI.IB=\rho.IL$ پس: $\delta^2=R^2-2\rho.OF-\rho(IL-\rho)$ (۲) فرض کنیم H محل تلاقی DL با خطی که از E بموازات AB رسم شود باشد: $IL=HI+HL=2HI+\rho$

بنابراین تساوی (۲) باینصورت بیرون می‌آید: $\delta^2=R^2-2\rho(OF+HI)=R^2-2R\rho$ از آنجا:

$$\delta=\sqrt{R(R-2\rho)}$$

۱۲۸- مسئله- دو عمله با هم کار می‌کنند. اوّلی هر روز دو قران بیش از دوّمی می‌گیرد. بعد از این که چند روز کار کردند اوّلی ۱۷۵ قران و دوّمی ۱۲۵ قران دریافت کرد. مطلوبست اجرت روزانهٔ هر یک (سال دوّم دار المعلّمین مرکزی سنهٔ ۱۳۰۰)

حل- اگر x اجرت روزانهٔ دوّمی باشد. اجرت روزانهٔ اوّلی $x+2$ خواهد بود پس عدّهٔ روزهای کار آنها بترتیب $\frac{175}{x+2}$ و $\frac{125}{x}$ می‌باشد و از آنجا این معادله بدست می‌آید: $\frac{175}{x+2}=\frac{125}{x}$ یا: $\frac{7}{x+2}=\frac{5}{x}$ از آنجا $x=5$ و $x+2=7$

۱۲۹- مسئله- خیاطی دو قسم لباس دوخته مخارج یک دست لباس قسم اوّل ۶ تومان و مخارج یک دست لباس قسم دوّم ۷٫۵ تومان است. خیاط ۲۳ دست لباس را بمبلغ ۱۷۸٫۷۷ فروخته بنابر آنکه ۱۸٪ منفعت کرده باشد از هر قسم چند دست دوخته؟ (امتحان سال سوّم اناث سنهٔ ۱۳۰۷)

حل- قیمت ۲۳ دست لباسی که فروخته مساویست با: $178{,}77\left(1-\frac{18}{100}\right)=\frac{178{,}77\times 41}{50}$

حال اگر x عدّهٔ لباسهای نوع دوّم باشد عدّهٔ لباسهای نوع اوّل $23-x$ خواهد بود و از آنجا این معادله حاصل می‌شود: $7{,}5x+6(23-x)=\frac{178{,}77\times 41}{50}$

از این معادله x بدست می‌آید (معلومات مسئله بد انتخاب شده زیرا برای x مقدار صحیح بدست نمی‌آید و این غیر معقول است)

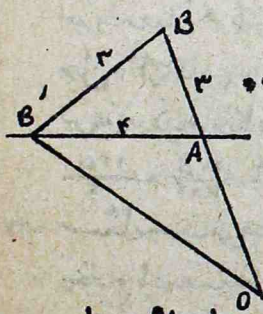
مسائل حل کردنی

۱۳۰- مسئله- دستگاه ذیل را حل کنید: $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{y+1}=\frac{1}{20}$ و $\frac{8}{x-1}+\frac{10}{y-1}=4$ دار المعلمین مرکزی سنه ۱۳۳۷ قمری

۱۳۱- مسئله- شخصی میخواهد مبلغ ۵۳ تومان قرض خود را با ۱۶ اسکناس دو تومانی و پنج تومانی ادا کند از هر یک چند عدد لازم است. (دار المعلمین مرکزی سنه ۱۳۰۱)

۱۳۲- مسئله- چند نفر داخل باغی شدند اولی یک انار چید. دومی دو انار. سومی سه انار و هکذا بعد کلیهٔ انارها را بالسویه بین خود تقسیم کردند و بهر یک ۶ انار رسید مطلوب است عدهٔ آنان. (نقل از کتاب مفتاح الحساب)

۱۳۳- مسئله- عابدی با یک عده دو قرانی وارد مسجد شد و انقدر یک شاهی بفقرا داد که از حیث عدد برابر عدهٔ دو قرانی هائی که داشت بود خداوند بقیهٔ دو قرانی های او را به ۵ قرانی تبدیل کرد مجدداً عابد ۷ قطعه ۵ قرانی بفقرا داد و با دو برابر پولی که داشت از مسجد خارج شد می‌خواهیم بدانیم ابتدا چقدر پول داشته؟



۱۳۴- مسئله- مطلوبست محاسبهٔ سطح مثلث بحسب طول سه میانهٔ آن.

۱۳۵- مسئله- تیری مایلاً در آب قرار دارد و سه ذرعش از آب خارج است ($AB=3$) در اثر وزش باد راس تیر بر سطح آب فرود آمد (وضع OB') بنابر آنکه فاصلهٔ دو وضع راس تیر ۳ ذرع ($BB'=3$) و فاصلهٔ دو مطلع آن از آب ۴ ذرع ($AB'=4$) باشد طول آن را معلوم کنید. (نقل از مفتاح الحساب)

۴۸- مسئله- معادلهٔ $x^2+px+q+(x+a)(2x+p)=0$ (۱) را میتوان چنین نوشت:

$$3x^2+2x(p+a)+ap+q=0$$

مبیّن این معادله عبارتست از:

$$(p+a)^2-3(ap+q)=p^2-ap+a^2-3q=\left(a-\frac{p}{2}\right)^2+3\left(\frac{p^2}{4}-q\right)$$

اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^2+px+q=0$ حقیقی باشند $\frac{p^2}{4}-q>0$ و آنوقت از تساوی فوق معلوم می‌شود که مبین معادلهٔ (۱) نیز مثبت و بنابراین ریشه‌های آن حقیقی اند.

۴۹- مسئله- معادلهٔ دوم دستگاه را می‌توان چنین نوشت: $\frac{x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4}{x^2-xy+y^2}=\frac{121}{13}$. فرض کنیم $xy=z$ صورت کسر فوق چنین می‌شود:

$$(x^2+y^2)^2-x^2y^2-xy(x^2+y^2)=[(x+y)^2-2xy]-z^2-z[(x+y)^2-2xy]$$

$$=4(2-z)^2-z^2-2z(2-z)=7z^2-24z+16$$

و مخرج آن مساویست با: $(x+y)^2-3xy=4-3z$ بالنتیجه:

$$\frac{7z^2-24z+16}{4-3z}=\frac{121}{13}$$

از آنجا $z'=-3$ و $z'=\frac{92}{65}$ پس $(xy=-3,\ x+y=2)$ و $(x+y=2$ و $xy=\frac{92}{65})$. از دستگاه اول نتیجه می‌شود: $(\frac{x}{y}=-1$ و $\frac{y}{x}=+3)$ از دستگاه دوم دو رشته جواب موهومی بدست می‌آید.

۵۰- مسئله- برای آنکه کرهٔ مفروض ۵ میلی‌متر بالا رود باید ۵۰۰ گرم سبک شود بنا براین باید هوای سرپوش را آنقدر متراکم کرد تا فشاری که از جانب آن از تحت بفوق بر کره وارد می‌آید ۵۰۰ گرم بیشتر گردد. خلاصه در شرایط متعارفی فشار وارد از تحت بفوق بر کرهٔ مذکور مساویست با: $\frac{5}{12}\times 1/3=0/54$ پس اگر x فشار مطلوب باشد این معادله حاصل می‌شود: $0/54x-0/54=500$ از آنجا $x=926/9$

۵۲- مسئله- فرض کنیم $u_n=an^3+bn^2+cn+d$ جملهٔ nام رشتهٔ مفروض باشد چون بجای n مرتباً ۱ و ۲ و ۳ و ۴ قرار دهیم این دستگاه نتیجه می‌شود:

$$u_1=16=a+b+c+d$$

$$u_2=80=8a+4b+2c+d$$

$$u_3=240=27a+9b+3c+d$$

$$u_4=544=64a+16b+4c+d$$

برای حل این دستگاه هر یک از معادلات را از معادلهٔ که زیر آن نوشته شده میکاهیم دستگاه ذیل نتیجه می‌شود:

$۳۷a+۷b+c=۳۰۴$ و $۱۹a+۵b+c=۱۶۰$ و $۷a+۳b+c=۶۴$

حال هر یک از این معادلات را از آنکه در سمت راستش نوشته شده کم می‌کنیم حاصل میشود:

$$۱۸a+۲b=۱۴۴ \qquad ۱۲a+۲b=۹۶$$

از آنجا: $۶a=۴۸$ پس $a=۸$ از آنجا $b=۴۸-۶\times۸=۰$ و $c=۶۴-۳\times۰-۷\times۸=۸$

و $d=۱۶-۱۶=۰$ پس $u_n=۸n(n^۲+۱)$ مجموع n جملهٔ متوالی این رشته مساویست با:

$$S=۸\left[(۱^۳+۲^۳+\cdots\cdots+n^۳)+(۱+۲+۳+\cdots\cdots+n)\right]$$

$$=۸\left[\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}+\frac{n(n+۱)}{۲}\right]=n^۴+(n^۴+۴n^۳+۶n^۲+۴n)$$

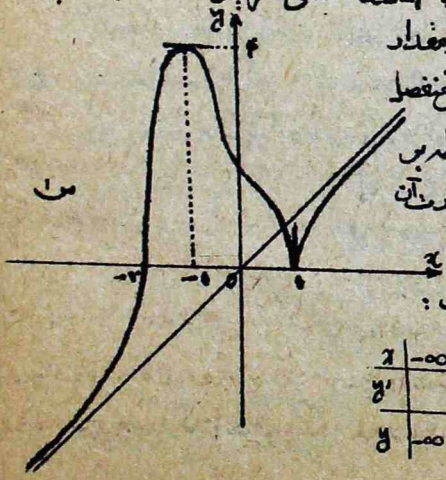
پس: $S+۱=n^۴+(n^۴+۴n^۳+۶n^۲+۴n+۱)=n^۴+(n+۱)^۴$

۵۴- مقدار تحت رادیکال بازاء $x=۱$ صفر می‌شود پس به $x-۱$ قابل قسمت و پس از تقسیم چنین حاصل می‌شود: $x^۳-۳x+۲=(x-۱)^۲(x+۲)$ پس بازاء $x=۱$ و $x=-۲$ y صفر می‌شود بعلاوه معلوم است که y تابعی است متصل.

برای محاسبهٔ مشتق آن آنرا چنین مینویسیم: $y=(x^۳-۳x+۲)^{\frac{۱}{۳}}$ پس:

$$y'=\frac{۱}{۳}(۳x^۲-۳)(x^۳-۳x+۲)^{-\frac{۲}{۳}}=\frac{x+۱}{\sqrt[۳]{(x-۱)(x+۲)^۲}}$$

چنانکه ملاحظه می‌شود مشتق با $(x+۱)(x-۱)$ تغییر علامت می‌دهد بدین معنی که وقتی بین ۱- و ۱+ باشد $y'<۰$ و تابع نزولی و وقتی x در یکی از فواصل $(-\infty,-۱)$ یا $(۱,+\infty)$ باشد $y'>۰$ و بنابراین تابع صعودی است بازاء $x=-۱$ مشتق صفر میشود و از + به − میرود



پس بازاء این مقدار تابع ماکزیموم دارد و مقدار این ماکزیموم معادل چهار است. بازاء $x=۱$ مشتق منفصل و تابع متصل است پس مماس مرسوم از این نقطه بر منحنی قائم است و بالنتیجه شکل منحنی در مجاورت آن بقراریست که در س' دیده می‌شود.

جدول تغییرات تابع از قرار ذیل است:

x	$-\infty$	↗	-۲	↗	-۱	↗	۰	↗	۱	↗	$+\infty$
y'			+		۰		−		منفصل		+
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۴	↘	$\sqrt[۳]{۲}$	↘	۰	↗	$+\infty$

برای رسم مجانب نمایش تابع باید قبلاً مجانب غیر موازی با محورهای آن را تعیین کرد. برای این مقصود قبلاً بخاطر آوریم که اگر $y=ax+b$ چنین مجانبی باشد $a=\lim_{x=\infty}\frac{y}{x}$ و $b=\lim_{x=\infty}(y-ax)$

پس در اینجا:

$$a=\lim_{x=\infty}\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=1$$

و

$$b=\lim_{x=\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x+2}-x\right)$$

با ازاء $x=\pm\infty$ مقدار داخل پرانتز بصورت مبهم $\infty\pm\infty$ بیرون می آید و چون موافق قاعدهٔ مذکور در شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۱۸ سطر ۳ (از پائین) ابهام را رفع کنیم نتیجه میشود $b=0$ پس خط $y=0$ مجانب منحنی است. حالا چون نمایش این خط را رسم کرده مواضع نقاطی را که در جدول معین کرده ایم بدست آورده بین آنها را وصل کنیم منحنی نمایش تابع بدست می آید (س)

مسائل حل کردنی

مسئله - ثابت کنید که کثیر الجملهٔ

$$f(x)=nx^{n+1}-(1+n)x^n+$$

$$(1-1)x^{n-1}+(1-1)x^{n-2}+\cdots\cdots+(1-1)x+1$$

بر $(x-1)^2$ قابل قسمت است (De long-champs.)

مسئله - اگر باقی مانده و خارج قسمت تقسیم عددی بر ۱۱ مجذور کامل باشند مربع آن عدد مجموع چهار مجذور است. بطور کلی مجذور $11a^2+b^2$ مجموع چهار مجذور می باشد. (مصاحب)

مسئله - معادلهٔ $(x+\alpha)(x+\alpha+1)(x+\alpha+2)(x+\alpha+3)=h$ را حل کنید

مسئله - معادلهٔ $(x-a)^3(x+a-2b)-(a-b)^3(a+b-2x)=0$ را حل کنید (Gelin)

مسئله - دو نفر دوچرخه سوار (ا) و (ب) می خواهند با یک دوچرخه که فقط یکنفر را حمل کند راهی را که بطول کیلومتر عدد فرد است بپیمایند. برای این مقصود قرار می گذارند ابتدا یکی سوار شده و پس از اینکه یک کیلومتر سواره رفت پیاده شده دوچرخه را بگذارد و پیاده براه افتد و دومی که پیاده با اولی براه افتاده بود دو قسمتی بدود و چرخه رسیده سوار شود و چون یک کیلومتر با دوچرخه بسود پیاده شده دوچرخه را بگذارد و پیاده براه افتد و وقتی دومی بدوچرخه رسید سوار شود و پس از اینکه یک کیلومتر رفت دوچرخه را بگذارد و پیاده برود و همکذا

ابتدا (ب) که سرعتش با دوچرخه مضاعف سرعتش با پا (یعنی پیاده) می باشد عزیمت می کند. سرعت (۱) با دوچرخه مساوی سرعت (ب) با دوچرخه است. خلاصه این دو نفر وقتی ۷ کیلومتر پیمودند یکدیگر را ملاقات می کنند و ملاحظه می نمایند که برای نیل بمقصود باید سریعتر حرکت نمایند لهذا قرار می گذارند که در ساعت $\frac{1}{2}$ کیلومتر بر سرعت خود بیفزایند مجدداً (ب) ابتدا سوار می شود ولی این مرتبه سرعتش با چرخ مضاعف سرعت (۱) است وقتی پیاده حرکت کند و سرعت (۱) با چرخ مساوی سرعت (ب) با چرخ است باین ترتیب این دو نفر باهم بمقصد میرسند معلوم کنید طول مسافت مطویه و سرعت اولیهٔ هر یک از دو مسافر را.

مسئله - مطلوبست مشتق n ام توابع $\frac{a}{b+x}$ و $\frac{1-x}{1+x}$ و $\frac{1}{x^2-a^2}$

مسئله - مطلوبست مشتق هفتم تابع:

$$y=\frac{x^8-3x^7+x^6+3x^5-2x^4+x^2-x-1}{(x-1)(x-2)} \quad \text{(De Longchamps)}$$

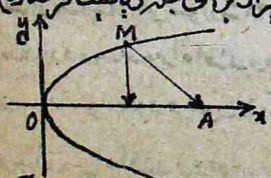
مسئله - مطلوبست مینیموم $y=\frac{x^{p+q}+1}{x^q}$ بدون استعانت مشتق.

مسئله - مطلوبست تغییرات و رسم منحنی نمایش $y=x^3-x$

مسئله - مجذور کاملی مانند $aabooc$ چنان بیابید که $b+c=a$ باشد. (مصاحب)

مسئله - مثلث ABC در سطحی واقع است که دو اثر آن بر یکدیگر عمودند و اثر قائمش با خط الارض زاویهٔ 30° تشکیل میدهد. بفرض آنکه $a'b'$ موازی اثر قائم و اختلاف رقوم نقاط A و B مساوی واحد و $b'c'$ و ac موازی اثر افقی سطح باشند ثابت کنید که نسبت سطح مثلث فضائی ABC بسطح تصویر قائم آن $(a'b'c')$ مساویست با $\sqrt{13}$

(این مسئله را دوست فاضل ما آقای میرزا احمد خان آرام معلم محترم علوم طبیعی و صاحب تألیفات عدیده در این علوم از شیراز برای مجلهٔ ریاضیات فرستاده اند)



مسئله - نقطهٔ مادی M بر سهمی $y^2=2px$ تحت اثر دو قوه که یکی عمودا متوجه محور سهمی و کمیتش معادل عرض نقطهٔ M و دیگری متوجه نقطهٔ ثابتی مانند A از محور منحنی و کمیتش مساوی AM است حرکت می کند مطلوبست شرط تعادل این نقطه و وضع تعادل آن

ریاضیات عالی

اجرای اعمال جبری بر سلاسل

دوست فاضل ما آقای سید عبدالله خان ریاضی که سالها در طهران بتعلیم علوم ریاضی اشتغال داشته و فعلا در دار و پادر ضمنهای مختصّصی ریاضیات و الکتریسیته کار می کنند مقالهٔ جالب توجّهی در باب اجرای اعمال جبری بر سلاسل برای مجلهٔ ریاضیات ارسال داشته اند. ذیلا این مقاله را از نظر خوانندگان محترم خود گذرانیده ضمنا چند بن امیدهای خود را تقدیم دوست فاضل مجلهٔ ریاضیات مینمائیم:

اجرای اعمال جبری بر عموم سلاسل جایز نیست و عدم دقّت در اجرای این اعمال بر سلسله ها ممکن است تولید اشکالاتی نموده و بنتایجی متناقض با اصول اولیه منجر گردد. ما این مطلب را بوسیلهٔ دو مثال توضیح میدهیم:

مثال ۱ - سلسلهٔ:

(۱) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots\ldots$

بازاء جمیع مقادیر x که قدر مطلقشان از واحد کمتر باشد متقارب بوده و بخصوص برای $x=1$ هم متقارب است (چه در این صورت سلسلهٔ فوق بیک سلسلهٔ توافقی که جملش متوالیا مثبت و منفی است تبدیل می شود و آن خارج می دانیم که چنین سلسلهٔ متقارب است.) بعلاوه می کنیم:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots\ldots$$

اما از رابطهٔ (۱) را می توان چنین نوشت:

$$\log(1+x) = x(1-x) + \frac{x^2}{2}(1-x^2) + \frac{x^3}{3}(1-x^3) + \ldots\ldots$$

که بازاء $x=1$ چنین نتیجه می دهد: $\log 2 = 0$ علت ایجاد این تناقض این است که در سلسله هائی که تمام جمل آنها مثبت نیستند (مانند سلسلهٔ (۱)) تغییر مکان جمل صلاحیت ندارد.

مثال ۲ - فرض کنیم S مجموع سلسلهٔ توافقی باشد:

(۱۱) $$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+1} + \ldots\ldots$$

یا: $$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \ldots\ldots + \frac{n}{n(n+1)} + \ldots\ldots$$

حال فرض کنیم :

$$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots\cdots$$
$$B=\quad\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots\cdots$$
$$C=\quad\frac{1}{12}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

واضح است که : $S=A+B+C+\cdots\cdots\cdots\cdots$

امّا :

$$A=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots=1-\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n=\infty}=1-0$$

وهمچنین میتوان معلوم کرد که : $B=\frac{1}{2}$ و $C=\frac{1}{3}$ وغیره پس :

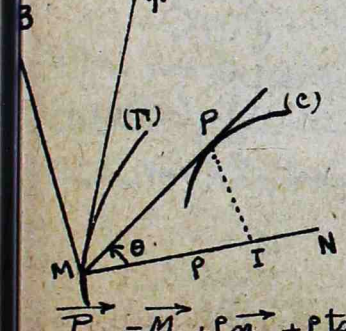
$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (۲)$$

از مقایسهٔ دو تساوی (۱) و (۲) باید حکم کرد که : $0=1$ واضح است که سبب ایجاد این تناقض عدم صلاحیت تصور حد برای سلسلهٔ توافقی بوده است .

(استعمال حاملها در بحث خواص منحنیات وسطوح)

(بقیه از شمارهٔ قبل)

۱۰ - دِوِلپِه ودِوِلپانت منحنیات معوج - هرگاه مماس های منحنی معوج (C) بر منحنی دیگری مانند Γ قائم باشند Γ را (دولپانت) C و C را (دولپهٔ) Γ خوانند.



برای تعیین دولپه های منحنی Γ فرض می کنیم MP یکی از خطوط سطح قائم Γ در نقطهٔ M و P نقطهٔ تماس آن با (C) و MT و MN و MB مماس و دو قائم منحنی Γ در نقطهٔ M و θ زاویهٔ MP با MN و I تصویر نقطهٔ P بر MN و $\overrightarrow{MI}=\rho\vec{n}$ باشد.

چون $\overrightarrow{OP}$ مجموع سه حامل OM و MI و IP است این تساوی حاصل میشود :

$$\overrightarrow{P}=\overrightarrow{M}+\rho\vec{n}+\rho\,tg\theta\,\vec{b}$$

اگر Γ قوس T باشد از این رابطه چنین برمی آید:

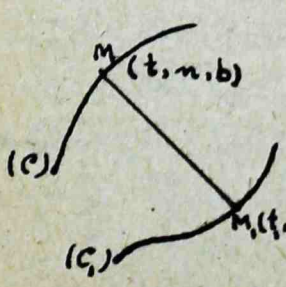
$$\frac{d\vec{P}}{ds} = \vec{t}\left(1-\frac{\rho}{R}\right) + \vec{n}\left(\frac{d\rho}{ds} + \frac{\rho}{\tau}\operatorname{tg}\theta\right) + \vec{b}\left(\operatorname{tg}\theta\frac{d\rho}{ds} + \frac{\rho}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{ds} - \frac{\rho}{\tau}\right)$$

از طرف دیگر مولفه‌های حامل PM که در سطح BMN واقع است عبارتند از: ρ و $\rho\operatorname{tg}\theta$ پس $\overrightarrow{PM} = \rho\vec{n} + \rho\operatorname{tg}\theta\vec{b}$ حال اگر C دولپهٔ T باشد بین حامل $\overrightarrow{PM}$ و $\frac{d\vec{P}}{ds}$ رابطه بصورت $\frac{d\vec{P}}{ds} = \lambda.\overrightarrow{MP}$ برقرار خواهد بود و از آنجا این سه تساوی نتیجه می شود:

$$1-\frac{\rho}{R} = 0 \quad , \quad \frac{d\rho}{ds} + \frac{\rho}{\tau}\operatorname{tg}\theta = \lambda\rho \quad , \quad \operatorname{tg}\theta\frac{d\rho}{ds} + \frac{\rho}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{ds} - \frac{\rho}{\tau} = \lambda\rho\operatorname{tg}\theta$$

از حذف λ بین دو رابطهٔ اخیر چنین حاصل می گردد: $\rho = R$ و $d\theta = \frac{ds}{\tau}$ از این دو معلوم می شود که اولاً تمام دولپه‌های یک منحنی بر سطح قطبی آن واقعند و ثانیاً تعیین آنها بمدد محاسبهٔ $\frac{d\rho}{d\theta}$ انجام می گیرد. جمع این نتایج پس از یک رشته محاسبات و عملیات ظاهراً بطرق معمولی تجزیه ریاضی بدست می آیند.

منحنیات برتران - برای اینکه بمدد مثال دیگری اختصاراتی را که از استعمال حاملها حاصل می گردد مشهود سازیم چند سطری در باب منحنیات برتران می نگاریم: مقصود مسئله تعیین منحنی است که قائم اول آنها قائم اول منحنی دیگری باشد مثلاً فرض کنیم قائم اول منحنی C قائم اول منحنی C_1 نیز باشد. اگر M نقطه از منحنی اول و M_1 نقطهٔ نظیر آن از منحنی دوم باشد بمناسبت اینکه حامل OM طبیعی و حامل OM و MM_1 است این تساوی حاصل می گردد: $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M} + \rho.\vec{n}$ (۱) اگر قوس منحنی C را به s نموده آنرا متغیر مطلق قرار دهیم و قوس نظیر آن از منحنی ثانی را به s_1 نمایش از اشتقاق تساوی (۱) نتیجه می شود:



$$\vec{t}_1 s_1' = \vec{t} + \vec{n}\rho' + \rho\frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{t}\left(1-\frac{\rho}{R}\right) + \vec{n}\rho' - \frac{\rho}{\tau}\vec{b} \qquad (۲)$$

حال اگر طرفین این رابطه را بطور ضرب داخلی در n ضرب کرده ملاحظه کنیم که اگر n (حامل واحد) قائم اول منحنی دوم باشد $n = \pm n_1$ نتیجه می شود $\rho' = 0$ پس ρ مقدار ثابت

ثابت و بالنتیجه تساوی (۲) باین صورت بیرون می آید :

$$\vec{t_1} = \vec{t}\cdot\frac{1}{s_1'}\left(1-\frac{\rho}{R}\right) - \vec{b}\,\frac{\rho}{T s_1'}$$

اگر مجدداً از طرفین این تساوی مشتق حساب کنیم حاصل می شود :

$$\vec{n_1}\,\frac{s_1'}{R_1} = \vec{t}\,\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s_1'}\left(1-\frac{\rho}{R}\right)\right] - \vec{b}\,\frac{d}{ds}\left(\frac{\rho}{T s_1'}\right) + \vec{n}\left(\frac{R-\rho}{R^2 s_1'} - \frac{\rho}{T^2 s_1'}\right)$$

(R_1 شعاع اوّل انحنای C_1 است) از این تساوی چنین بر می آید :

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s_1'}\left(1-\frac{\rho}{R}\right)\right] = 0 \qquad \frac{d}{ds}\left[\frac{\rho}{T s_1'}\right] = 0$$

بقسمی که اگر λ و μ دو مقدار ثابت باشند : $\rho = \mu T s_1'$ و $1-\frac{\rho}{R} = \lambda s_1'$

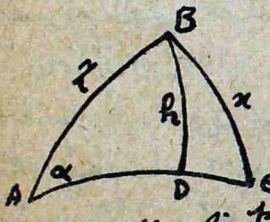
از آنجا پس از حذف s_1' قرار داد : $\frac{\lambda\rho}{\mu} = \mu_1$: $\frac{\rho}{T} + \frac{\mu_1}{R} = 1$

بنابراین بین دو انحنای منحنیات مطلوب رابطهٔ خطی برقرار است .

خوبست خوانندگان محترم مسئلهٔ ذیل را بعنوان مشق حل کنند :

هرگاه قائم اوّل منحنی (C) قائم دوّم منحنی C' باشد بین دو انحنای منحنی رابطهٔ بشکل $A\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{T^2}\right) = \frac{B}{R}$ برقرار خواهد بود (A و B مقادیر ثابته اند)

(مانهاین Mannheim)



۵۷- مسئله - فرض کنیم $2p$ محیط و $AB=z$ و $BC=x$ و $AC=y$ اوّلاً

$$(1) \qquad x+y+2z = 2p$$

واگر زاویهٔ BAC را به α و قوس BD را به h بنمائیم از دستورات مثلثات کروی این دو معادله نتیجه می شود :

$$(2) \quad \sin z = \frac{\sin p}{\sin\alpha} \qquad (3) \quad \cos x = \cos y \cos z + \sin y \sin z \cos\alpha$$

از معادلهٔ (۲) z بدست می آید واگر بطرف دوّم معادلهٔ (۳) $\sin y \sin z -$ $\sin y \sin z$ را بیفزائیم حاصل می شود :

$$2\sin\frac{x+y+z}{2}\sin\frac{y+z-x}{2} = 2\sin y \sin z \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

از آنجا : $\frac{\sin(y+z-p)}{\sin y} = \frac{\sin z \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin p}$ (۴) اگر مقدار معلوم طرف ثانی را به tg بنمائیم از معادلهٔ (۴) چنین نتیجه می شود : $tg\left(y+\frac{z-p}{2}\right) = tg\,\frac{p-z}{2}$.

$tg\left(\lambda+\frac{\pi}{4}\right)$. از این تساوی y بدست آمده بعد بمدد معادلهٔ (۱) x حاصل می گردد .

۵۸- مسئله- معادلهٔ مفروض را می توان باین صورت نوشت $\frac{d(y')}{y'} = f(y)dy$
از آنجا: $\log\frac{y'}{c} = \int f(y)dy$ پس $y' = ce^{\int f(y)dy}$ یا اگر برای سهولت
$ce^{\int f(y)dy}$ را به $F(y)$ بنمائیم: $y' = F(y)$ از آنجا پس از ضرب طرفین در
$2\frac{dy}{dx}$: $2y'd(y') = 2F(y)dy$ پس $y' = \sqrt{\int 2F(y)dy - c}$
و اگر رادیکال فوق را به $\varphi(y)$ بنمائیم جواب معادلهٔ مفروض چنین خواهد بود: $y = \int \frac{dy}{\varphi(y)}$

۵۹- مسئله- معادلهٔ (S) را در مختصات قائم می توان چنین نوشت:

$$z = \pm\sqrt{(x^2+y^2-hx)\left(\frac{l}{x}-1\right)} \qquad (1)$$

یا:

$$x^2+y^2+z^2-x(l+h)-l\frac{y^2}{x}+lh=0 \qquad (2)$$

از آنجا: $y+qz = l\frac{y}{x}$ و : $x+pz = \frac{1}{2}\left(l+h-l\frac{y^2}{x^2}\right)$

چون این مقادیر را در معادلهٔ کلی خطوط انحناء:

$$dp\cdot d(y+qz) - dq\cdot d(x+pz) \qquad (3)$$

قرار داده اعمال لازمه را بجا آوریم چنین حاصل می شود:

$$\left(dp+\frac{y}{x}dq\right)d\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

یک رشته از اجوبهٔ این معادله عبارتند از: $d\left(\frac{y}{x}\right)=0$ از آنجا: $\frac{y}{x}=c$
یا (ثابت $=0$) برای تعیین نوع این رشته از خطوط انحنا ملاحظه می کنیم که این خطوط از
طرفی در صفحهٔ $y=cx$ و از طرف دیگر بر کرهٔ $x^2+y^2+z^2-x(l+h)$
$-cly+lh=0$ واقعند و بنابراین رشتهٔ اول خطوط
انحنای (S) دوایری هستند واقع در صفحاتی مار بر محور OZ
برای تعیین مراکز انحنای نظیر آنها ملاحظه می کنیم که معادلات قائم (S) چنین اند

$$X = x+pz-pZ \qquad Y = y+qz-qZ$$

وقتی نقطهٔ M بر یکی از خطوط انحنا تغییر مکان دهد این خط لفافی دارد و ارتفاع نقطهٔ
تماس این خط با لفافش از معادلهٔ $-Zdp+d(x+pz)=0$ بدست می آید
اما برای رشتهٔ اول از خطوط انحنا $d(x+pz)=0$ از آنجا $Z=0$ بالنتیجه:
$X = x+pz = \frac{1}{2}\left(l+h-l\frac{y^2}{x^2}\right)$ و $Y = y+qz = l\frac{y}{x}$ یا پس از حذف $\frac{y}{x}$:

(۱) $y^2+2lx-l(l+h)=0$ و $z=0$ بنابراین مکان مراکز انحنای اصلی نظیر رشتهٔ اوّل خطوط انحناء عبارتست از سهمی (۱) واقع در سطح xoy

۲- معادلهٔ رشتهٔ دوّم خطوط انحناء چنین است: $xdp+ydq=0$

امّا $xdp=d(px)-pdx$ و $ydq=d(qy)-qdy$ از انجا:

$d(px)+d(qy)-(pdx+qdy)=0$ امّا $pdx+qdy=dz$ پس $dz=$

$d(px)+d(qy)$ از انجا: $px+qy-z=c$

چون در این معادله بجای p و q مقدارشان را قرار دهیم پس از مختصر تصرّفاتی نتیجه میشود

$$x^2+y^2+z^2-2c_1z-hl=0 \qquad (۴)$$

این معادله با معادلهٔ سطح رشتهٔ دوّم خطوط انحنا را نمایش میدهند.

واگر بجای معادلهٔ (۲) معادلهٔ را که از حذف y بین معادلات (۴) و (۲) حاصل میشود قرار دهیم معادلات خطوط انحناء باین صورت بدست می آید:

$$x^2+y^2+z^2-2c_1z-hl=0 \quad \text{و} \quad z=\frac{c_1\pm\sqrt{c_1^2+hl}}{l}(l-x)$$

ازین معادلات معلوم است که رشتهٔ دوّم خطوط انحنا دوایری هستند که سطح آنها خط $x=l$ ، $z=0$ می گذرد بالنتیجه سطح (S) یک نوع Cyclide de Dupin می باشد.

بازاء $\alpha=\infty$ معلوم می شود که: $z=0$ یعنی $\rho=h\cos\theta$ و $\rho=\frac{l}{\cos\theta}$

بالاخره مانند سابق معلوم می شود که مکان هندسی مراکز انحنای نظیر رشتهٔ دوّم خطوط انحنای سهمی $y=0$ و $2x=\frac{z^2}{l}+h$ می باشد.

مسائل حل کردنی

مسئله- مطلوبست محاسبهٔ $I=\int_1^\infty \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}}$

مسئله- بنابر آنکه $f(z)=x+iy$ و $x=\frac{2\sin 2z}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}$ و $f(z)$ تابع تحلیلی باشد $f(z)$ را تعیین کنید. (لیسانس گرنبل Grenoble سنهٔ ۱۸۸۴)

مسئله- متحرّکی بر کرهٔ چنان حرکت می کند که دائماً طول و عرضش متناسب میباشند. مطلوبست تعیین مؤلّفه های شتاب در امتداد شعاع کره و دو خطّ عمود واقع در صفحهٔ مماس بحسب عرض نقطهٔ متحرّک. (لیسانس پاریس سنهٔ ۱۸۸۹)

مصاحب — جبر و مقابله

(بقیه از شمارهٔ قبل)

مسائل حل کردنی

۱- سه نقطهٔ $A(1,1)$ و $B(0,1)$ و $C(2,-1)$ مختصات رؤس مثلثی هستند. مطلوبست اولاً معادلهٔ اضلاع مثلث ثانیاً معادلهٔ میانه‌ها. ثالثاً معادلهٔ ارتفاعات رابعاً طول اضلاع. خامساً طول ارتفاعات. سادساً طول میانه‌ها. سابعاً ثابت کنید که سه میانه از طرفی و سه ارتفاع از طرف دیگر بر یک نقطه تقاطع می‌کنند.

۲- بر محور طول نقطهٔ بطول (۳) و بر محور عرض نقطهٔ بعرض ۳ فرض کرده از نقطهٔ ثانی خطی رسم می‌کنیم که با محور طول زاویهٔ ۱۲۰° تشکیل دهد بعد از نقطهٔ اول خطی بر این خط عمود می‌نمائیم مطلوبست معادلهٔ این دو خط و مختصات نقطهٔ تقاطعشان.

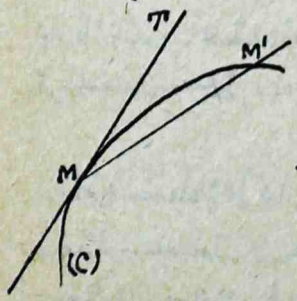
۳- مطلوبست فاصلهٔ نقطهٔ $M(x_0,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$

۴- مطلوبست مساحت مثلثی که روسش نقاط $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ و $C(x_3,y_3)$ باشد.

۵- مطلوبست بشرط آنکه خطوط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ و $a''x+b''y+c''=0$ بر یک نقطه مرور کنند.

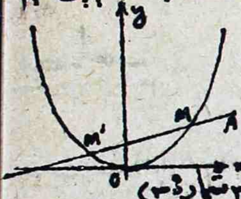
۶- مطلوبست بشرط آنکه سه نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ و $C(x_3,y_3)$ بر یک استقامت باشند.

۲۱- مماس بر منحنی‌ها. فرض کنیم قاطعی مانند MM' منحنی C را در نقطهٔ مفروض M و نقطهٔ دیگری مانند M' که نزدیک به M فرض شده قطع کند. فرض کنیم این قاطع حول نقطهٔ M بقسمی دوران کند که M' مدام نزدیک به M نزدیک گردد. وقتی M' به M نزدیک شود قاطع MM' بسمت حدی میل می‌کند که آن را مماس بر منحنی در نقطهٔ M گویند.



استعمال - منحنی $y=x^2$ و نقطهٔ $M(2,1)$ مفروض است مطلوبست معادلهٔ خطی که از این نقطه بر منحنی مماس شود.

حل - معادلهٔ کلیهٔ خطوطی که بر M مرور کنند عبارتست از: $y-1=a(x-2)$ یا این خط عمود منحنی را در دو نقطه M و M' قطع می‌کند و مختصات این نقاط از حل دستگاه $y=x^2$ و $y-1=a(x-2)$ بدست می‌آید. وقتی M' بر M منطبق گردد در جواب دستگاه فوق مساوی می‌گردند



یعنی دستگاه جوابهای مضاعف خواهد داشت پس کافی است a را چنان تعیین کنیم که دستگاه (۱) جواب مضاعف داشته باشد. از این دستگاه چنین نتیجه می شود $x^2 - ax + 2a - 1 = 0$ پس باید $a^2 - 4(2a-1) = 0$ یا: $a = 4 \pm 2\sqrt{3}$ و آن ایجاد دو مماس: $y - 1 = (4 \pm 2\sqrt{3})(x - 2)$ بدست می آید. (برای مثال دیگر رجوع کنید بمسئلهٔ ۳۵ شمارهٔ ۳)

مسائل حل کردنی

۱- تابع $y = 4 - x^2$ مفروض است. اولاً مطلوبست منحنی نمایش آن ثانیاً بازاء چه مقادیر m خط $y = 2x - m$ منحنی را در دو نقطهٔ متمایز قطع می کند ثالثاً m را چنان تعیین کنید که خط فوق بمنحنی مماس شود و مختصات نقطهٔ تماس را بدست آورید.

۲- تابع $y = \frac{x^2}{4}$ مفروض است. اولاً مطلوبست تغییرات و رسم منحنی نمایش آن ثانیاً از نقطهٔ $A(a, b)$ خطی با ضریب زاویهٔ m رسم می کنیم مطلوبست معادلهٔ این خط و شرط اینکه منحنی را در دو نقطه قطع کند. ثالثاً m را چنان تعیین کنید که خط مذکور بر منحنی فوق الذکر مماس باشد. رابعاً از نقطهٔ A دو مماس بر منحنی رسم می شود. مطلوبست تعیین معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه هایش طول نقاط تقاطع این دو مماس با محور طول باشند

۲۲- معادلهٔ مکانهای هندسی - برای تعیین معادلهٔ یک مکان هندسی (مانند عمود منصف قطعه خط - منصف الزاویه و امثال اینها) کافی است تعریف هندسی آنرا بواسطهٔ رابطهٔ بین مختصات نقاطشان تعبیر کنیم چنانکه سابقاً در تعیین معادلهٔ دایره مشاهده کردید (شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۲۰)

مسائل حل کردنی

۱- مطلوبست معادلهٔ خطی که از وسط خط AB مار بر دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ بگذرد و بر آن عمود شود

۲- مطلوبست معادلهٔ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ ثابت مفروض متساوی البعد باشند

۳- مطلوبست معادلهٔ مکان هندسی نقاطی که نسبت فواصلشان از نقاط $A(0, a)$ و $B(0, -a)$ مقدار ثابت K باشد.

۴- مطلوبست معادلهٔ منصف الزاویهٔ زاویهٔ دو خط $ax + by + c = 0$ و $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$

تبصره - اگرچه در ایجاد کره مختصری از ماکزیموم و مینیموم بدون استعانت مشتقات بی مناسبت نبود معذالک برای متابعت پروگرام این قسمت را بعد موکول مینمائیم.

(در مطبعهٔ علمی بطبع رسید)

مسائل حساب

مسائل (۱۴) و (۱۵) و (۱۶) و (۱۷) و (۲۰) حسین سینا محصل مدرسهٔ صنعتي.

۲۱ ـ کدام عدد است که نسبتش به ۴۸ مثل نسبت ۳٫۲۸۸ × ۳٫۲۸۸ باشد به ۰٫۲۰۵۵ × ۰٫۲۰۵۵ ؟

۲۲ ـ ظرفی ۵۰۰ گرم محلول آب و نمك دارد و ۱۴ درصد وزن آن نمك است. ظرف دیگری پر است از محلول قند و آب و ۵۶ در صد وزن آن قند میباشد. چقدر از مایع ظرف دوم در ظرف اول بریزیم تا وزن قند و نمك محلول حاصل مساوي باشد.

۲۳ ـ ۱۸۰۰ نفر غذای ۱۲ هفتهٔ خود را فراهم نموده اند. بنا بر آنکه ۶۰۰ نفر بآنها اضافه شده ولی از اشتهاي هر یك ۱/۳ کم شود غذای تهیه شده براي چند هفتهٔ آنها کفایت می‌نماید ؟

۲۴ ـ شخصی لیواني را پر از سرکنگبین خالص نموده ربع آنرا میخورد. بعد آنرا از آب پر کرده ثلثشرا مي‌نوشد. بالاخره مجدداً آنرا با آب پر کرده نصفش را میآشامد معلوم کنید چند یك سرکنگبین اصلي در ظرف مانده‌است

۲۵ ـ قمار بازي دست اول ربع پول خود را باخت بعد سه قران برد. دست بعد ثلث دارائی جدید خود را باخته بعد ۲ قران برد بالاخره ۱/۷ آنچه را در کیسه اش مانده بود باخت و از سر بزي بلند شد. وقتی حساب کرد دید ۱۲ قران برایش مانده. معلوم کنید با چه مبلغي شروع ببازي نموده.

عنوان آقای میرزا الهدی آرام

آدرس شیراز - معارف

روزهای شنبه

صبح روزهای شنبه از قرائت روزنامهٔ فکاهی و کاریکاتوردار قانون که با بهترین آثار نظم و نثر و کاریکاتورها وزیبا منتشر می‌شود و برای تهذیب اخلاق جامعه و پیشرفت مدنیت و تجدد قویترین و مؤثر ترین عوامل است غفلت نکنید.

(هتل مقدم)

(چهار راه حسن آباد)

از منظرهٔ باشکوه این هتل و ارکستر عالی آن که جدیداً با بهترین طرز برای پذیرائی واردین تشکیل شده است استفاده فرمائید.

(میز های بیلیارد برای بازی نیز حاضر است)

فامیلهای محترم می توانند در این هتل از مهمانهای گرامی خود با بهترین ترتیب پذیرائی نمایند.

بعد از یکهفته

همه شب دانسهای اروپائی را از ساعت ۹ ببعد معمول داشته فرمائید.