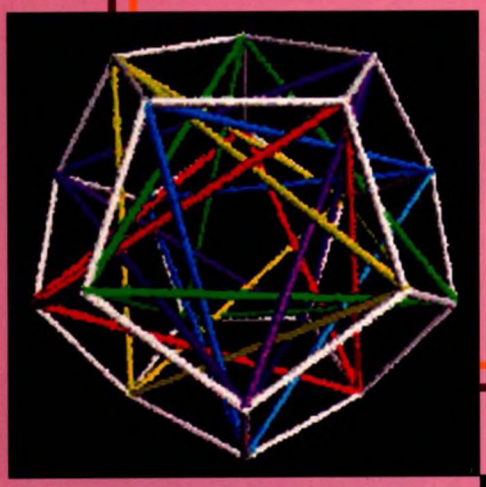
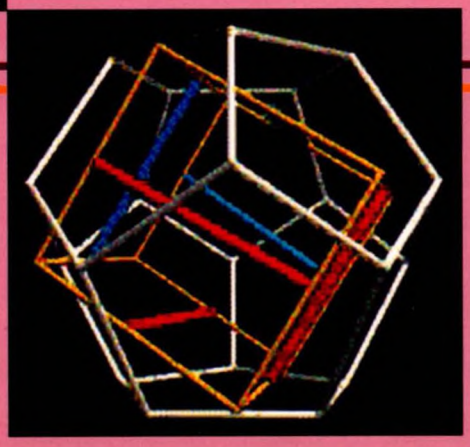
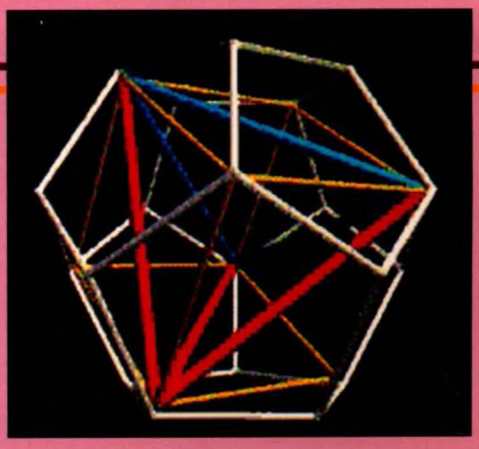
نشریه ریاضی

سال ۱۴، شمارهٔ ۲

شمارهٔ پیاپی ۲۷







بسم‌الله الرحمن الرحیم

مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

تهران، صندوق پستی ۴۷۴۸ـ۱۵۸۷۵

بهای این شماره ۱۰۰۰۰ ریال؛ حق اشتراک سالانه برای داخل کشور ۲۰۰۰۰ ریال.
(برای دانشجویان با ۳۰٪ تخفیف)

وجه اشتراک به حساب شمارهٔ ۹۰۰۰۹ بانک ملی شعبهٔ خیابان پارک تهران به نام مرکز نشر دانشگاهی واریز شود.

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر شش ماه یک بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجّه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی‌پژوهان فارسی‌زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به‌ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبک مقاله‌های چاپ‌شده در *نشر ریاضی* باشد. به همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه‌شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حک و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخش‌بندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ‌شده در *نشر ریاضی* باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۱۴، شمارهٔ ۲

تاریخ انتشار: مرداد ۱۳۸۳

شمارهٔ پیاپی: ۲۷

nashriaz@acnet.ir

صاحب امتیاز: مرکز نشر دانشگاهی

مدیر مسؤول: سیاوش شهشهانی

فهرست

روی جلد

به مناسبت درج مقالهٔ «به سوی حدس پوانکاره ...»

گزارش

اهدای جایزهٔ آبل به اتیا و سینگر

سرمایکل فرانسیس اتیا و ایزادور سینگر مشترکاً برندهٔ جایزهٔ آبل سال ۲۰۰۴ شدند. آکادمی علوم و ادبیات نروژ که جایزهٔ آبل را اهدا می‌کند، این دو ریاضیدان را «به دلیل کشف و اثبات قضیهٔ شاخص، که توپولوژی، هندسه، و آنالیز را به‌هم می‌پیوندد و به خاطر نقش برجستهٔ آنها در برقرارساختنِ پیوندهای جدید بین ریاضیات و فیزیک نظری» سزاوار دریافت این جایزه دانسته است.

ما دنیای واقعی را با اندازه‌گیری کمیتها و نیروهایی که برحسب زمان و فضا تغییر می‌کنند توصیف می‌کنیم. قوانین طبیعت در بسیاری موارد با فرمولهایی بیان می‌شوند که شامل آهنگ تغییر آن کمیات‌اند (معادلات دیفرانسیل). چنین فرمولهایی می‌توانند یک «شاخص» یا «اندیس» داشته باشند که عبارت است از تعداد جوابهای فرمولها منهای تعداد قیدهایی که آنها بر مقادیر کمیات مورد نظر تحمیل می‌کنند. قضیهٔ شاخص، این تعداد را برحسب هندسهٔ فضای جایگاه این فرمولها به‌دست می‌دهد (شرح فنی و مفصلتری در بارهٔ این قضیه در انتهای بخش گزارش آمده است). قضیهٔ شاخص اتیا-سینگر در واقع نقطهٔ اوج و حاصل تکامل سلسله‌ای از ایده‌ها در بیش از یک‌صد سال، از قضیهٔ استوکس تا نظریه‌های نوین پیشرفته‌ای چون نظریهٔ هاج در بارهٔ انتگرالهای همساز و قضیهٔ نشان[1] هیرتسبروخ است. قضیهٔ شاخص در طی چهل سالی که از کشف آن می‌گذرد، کاربردهای بیشماری، نخست در ریاضیات و سپس، از اواخر دههٔ ۱۹۷۰، در فیزیک نظری داشته است ازجمله در نظریهٔ پیمانه‌ای، اینستانتون‌ها، و نظریهٔ ریسمان.

اتیا و سینگر که هر یک مستقلاً از تأثیرگذارترین ریاضیدانان قرن گذشته به‌شمار می‌روند هنگام پرداختن به این قضیه، پیش‌زمینه‌های متفاوتی داشتند: سینگر از قلمرو آنالیز آمده بود و اتیا از هندسهٔ جبری و توپولوژی. هر یک از آنها در زمینهٔ کاری خود نیز صاحب دستاوردهای مهمی است، ازجمله تحقیقات اتیا در زمینهٔ صورتهای برخه‌ریخت روی واریته‌های جبری و مقالهٔ مهم ۱۹۶۱ او در بارهٔ همبافتهای توم. کار پیشگامانهٔ اتیا همراه با فریدریش هیرتسبروخ در ارائهٔ همتایِ توپولوژیکِ نظریهٔ Kی گروتندیک کاربردهای بسیاری در مسائل کلاسیک توپولوژی داشت و بعداً معلوم شد ارتباط عمیقی با قضیهٔ شاخص دارد. سینگر موضوع جبرهای عملگری مثلثی را (با همکاری ریچاردکدیسن[1]) پایه‌ریزی کرد و نام او با قضیهٔ هولونومی امبروز-سینگر[2] و ناوردای تابِ ری-سینگر[3] نیز همراه است. وی به اتفاق هنری مک کین[4] از اطلاعات هندسی عمیقی که در نظریهٔ هسته‌های گرمایی نهفته است پرده برداشت.

مایکل اتیا در سال ۱۹۲۹ در لندن به دنیا آمد و مدرک کارشناسی و دکتری خود را ازکالج ترینیتی درکیمبریج گرفت. بیشتر دورهٔ کار دانشگاهی او درکیمبریج و آکسفرد سپری شد و در این مدت، طراوتی دوباره به ریاضیات بریتانیا بخشید. مدتی هم استاد ریاضیات در مؤسسهٔ مطالعات عالی در پرینستن بوده است. وی از عوامل مؤثر در ایجاد مؤسسهٔ آیزک، نیوتن و اولین مدیر آن بود. اتیا درکار علمی و دانشگاهی خود به افتخارات فراوان دست یافته، ازجمله دریافت مدال فیلدز (۱۹۶۶)، پذیرفته‌شدن به عضویت انجمن سلطنتی بریتانیا در ۳۲ سالگی (۱۹۶۲)، و دریافت نشان سلطنتی از این انجمن. در سالهای ۱۹۹۰ تا ۱۹۹۵ ریاست این انجمن را به‌عهده داشت. اکنون بازنشسته و استاد افتخاری دانشگاه ادینبورو است.

ایزادور سینگر در سال ۱۹۲۴ در دیترویت به دنیا آمد و درجهٔ کارشناسی را از دانشگاه میشیگان در ۱۹۴۴ و درجهٔ دکتری را از دانشگاه شیکاگو در ۱۹۵۰ گرفت و بعداً به هیأت علمی دانشگاه ام.آی.اتی. پیوست. از آن زمان بیشتر زندگی دانشگاهی خود را در همین دانشگاه گذرانده و هم‌اکنون نیز استاد ام.آی.تی. است. سینگر عضو آکادمی هنرها و علوم آمریکا، انجمن فلسفهٔ آمریکا، و آکادمی ملی علوم این کشور است. از میان جوایزی که دریافت داشته، می‌توان از جایزهٔ انجمن ریاضی آمریکا برای خدمات ممتاز عمومی (۱۹۹۲)، جایزهٔ بوچر (۱۹۶۹) و جایزهٔ استیل برای دستاورد دورهٔ زندگی (۲۰۰۰) را نام برد.

جایزهٔ آبل به مبلغ ۶۰۰۰۰۰۰ کرون نروژ (معادل ۸۷۵۰۰۰ دلار آمریکا و ۷۱۰۰۰۰ یورو) از سال گذشته به‌وسیلهٔ آکادمی علوم و ادبیات نروژ به ریاضیدانان برجسته اهدا می‌شود و جایزهٔ سال ۲۰۰۳ به ژان پیر سر تعلق گرفت که شرح آن را در شمارهٔ قبلی نشر ریاضی خواندید.

جوزف دوب (۱۹۱۰–۲۰۰۴)

جوزف لیو دوب[5] یکی از بنیانگذاران نظریهٔ نوین احتمال در تاریخ ۷ ژوئن ۲۰۰۴ در شهر اوربانا، مقر دانشگاه ایلی‌نوی آمریکا، درگذشت. کتاب فرایندهای تصادفی او که در سال ۱۹۵۳ چاپ شد یکی از مهمترین آثار در زمینهٔ علم احتمال پس از کتاب ۱۸۱۲ لاپلاس محسوب می‌شود. در این کتاب بود که نظریهٔ مارتینگل[6] که دوب بنیانگذار آن بود به‌طور مبسوط مطرح شد. در این کتاب، آثار بعدی او، و آثاری که ریاضیدانان دیگر به پیروی از تحقیقات دوب منتشر کردند، نقش اساسی مفهوم مارتینگل در نظریهٔ احتمال و کاربردهای متنوع آن معلوم شد. تحقیقات بعدی دوب روابط عمیق میان نظریهٔ پتانسیل، فرایندهای مارکوف، توابع همساز و ابرهمساز و حرکت براونی را آشکار کرد. دوب که از سال ۱۹۳۵ به عضویت هیأت علمی دانشگاه ایلی‌نوی درآمد، عضو آکادمی علوم آمریکا بود و یک دوره ریاست انجمن

1. signature

1. Richard V. Kadison 2. Ambrose-Singer holonomy theorem
3. Ray-Singer torsion invariant 4. Henry P. Mckean
5. Joseph Leo Doob 6. Martingale

ریاضی آمریکا و یک دوره ریاست مؤسسهٔ آمار ریاضی را به عهده داشت. برای شرح حال علمی مفصلتر دوب به وبگاه اینترنتی دانشگاه ایلی‌نوی در نشانی زیر مراجعه کنید:

http://www/uiuc.edu/people/doob_obit.html

ح. ح.

پروژهٔ تاریخ شفاهی ریاضیات پرینستن در دههٔ ۳۰

این خبر متعلق به سال ۱۹۸۴ است ــ البته نه کاملاً. در این سال آلبرت تاکر[1]، که از سال ۱۹۲۹ همواره به نوعی عضو دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه پرینستن بود، چه به‌صورت دانشجوی دکتری، عضو هیأت علمی، یا رئیس دانشکده، با همکاری چارلزگیلیسپی[2]، استاد بخش تاریخ علم پرینستن، اجرای پروژه‌ای را برای ثبت تاریخ شفاهی ریاضی پرینستن در دههٔ ۳۰ آغازکردند. در این دهه یکی از مهمترین و بزرگترین مراکز تحقیقاتی و آموزش تکمیلی ریاضیات در دنیا، در پرینستن شکل گرفت: این دوره مقارن بود با تأسیس مرکز مطالعات عالی[3] در پرینستن، که با قسمت ریاضی آن آغاز شد و تا زمان پایان ساخت بنای دائمی آن در ۱۹۳۹ از همان ساختمان دانشکدهٔ ریاضی پرینستن استفاده می‌کرد. دانشمندان صاحب‌نامی چون جیمز الکساندر، سالومن بوچنر[4]، آلبرت اینشتین، سولومن لفشتس[5]، مارستن مورس[6]، جان فون نویمان و هرمان وایل در شکل‌گیری این دورهٔ درخشان در پرینستن سهیم بودند. گرچه بسیاری از این افراد در زمان اجرای پروژهٔ تاریخ شفاهی دیگر زنده نبودند، اما چندین عضو هیأت علمی، دانشجویان دکتری و محققان آن دوران با نقل خاطرات خود به تحقق این پروژه کمک کردند. این پروژه، تاریخ ریاضیات نیست، بلکه تاریخ ریاضیدانان است، و شرایط اجتماعی آن زمان که به تشکیل چنین نهاد ریاضی منجر شد.

با اینکه مصاحبه‌های افراد همگی از روی نوارپیاده، غلط‌گیری، بازنویسی، و توسط خود مصاحبه‌شوندگان منقح شده بود و نسخه‌های آن در کتابخانهٔ پرینستن نگهداری می‌شد، ولی برنامه‌ای برای چاپ آنها وجود نداشته و ندارد. در سال ۱۹۹۹ رابرت یانتسن[7]، که دانشجوی دکتری یکی از مصاحبه‌شوندگان هم بود، به‌صورت اتفاقی و در حین جستجوی مطلب برای تحقیقات خود به مصاحبه‌های مزبور برخورد و تصمیم گرفت پس از کسب اجازه‌های لازم به‌طور داوطلبانه آنها را روی وب قرار دهد. این مطلب اکنون در نشانی

http://infoshare1.princeton.edu/libraries/firestone/rbsc/finding_aids/mathoral/pm02.htm

قرارگرفته است. همچنین مراجع جالبی در بارهٔ تاریخ (مکتوب) پرینستن در [همان نشانی بالا، فقط به جای pm02 بگذارید pm06] ذکر شده است، به‌ویژه مقالهٔ خواندنی آرمان بورل:

Borel, Armand, "The School of mathematics at the Institute for Advanced Study", in *A Century of Mathematics in America, Part* III, History of Mathematics, volume 3, Amer Math. Soc., (1989) 119-147

را توصیه می‌کنیم.

پ. ص.

1. Albert Tucker 2. Charles Gillispie
3. Institute for Advanced Study 4. Salomon Bochner
5. Solomon Lefschetz 6. Marston Morse 7. Robert Jantzen

بزرگداشت صدسالگی هانری کارتان

هانری کارتان در تاریخ ۸ ژوییهٔ ۲۰۰۴ صد سال زندگی را پشت‌سر گذاشت. او که فرزند الی کارتان هندسه‌دان بزرگ اوایل قرن بیستم فرانسه است خود از ریاضیدانان پرنفوذ قرن بیستم به‌حساب می‌آید. او یکی از مؤسسان گروه بورباکی در سال ۱۹۳۵ بود، سالها در دانشگاههای پاریس، استراسبورگ، آرسه و اکول‌نرمال‌سوپریور به تدریس و تحقیق مشغول بود، در اواخر دههٔ ۱۹۶۰ ریاست اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان را به‌عهده داشت، به عضویت آکادمی علوم فرانسه و انجمن سلطنتی انگلیس انتخاب شد و مدالها و جوایز بین‌المللی متعددی دریافت کرد. کارتان از چهره‌های برجسته و اثرگذار در تعدادی از شاخه‌های ریاضیات ازجمله توابع چند متغیر مختلط، جبر هومولوژیک و هندسهٔ جبری-تحلیلی است و مفهوم ساختار یکنواختی در چارچوب فضاهای توپولوژیک از ابداعات اوست. علاوه بر این، سمینارهای معروف کارتان در پاریس سالها گهوارهٔ پرورش چند نسل ریاضیدان در فرانسه بوده و شاگردان و شاگردانِ شاگردان او و بسیاری ریاضیدانان دیگر به‌طور مستقیم و غیرمستقیم از تعلیمات و دیدگاههایش بهره برده‌اند.

به مناسبت ورود کارتان به دومین قرن زندگی مراسم ویژه‌ای از ۲۸ ژوئن تا ۲۳ ژوییهٔ امسال در پاریس برپا بود. ازجمله برنامه‌های این مراسم برگزاری یک نمایشگاه بود که در آن تعدادی از تألیفات کارتان، تألیفات در بارهٔ کارتان، گزارشهای سمینارهای متعدّدی که زیر نظر او اداره شده، و عکسها و نوارهای مصاحبه‌های او برای عموم به نمایش گذاشته شد. به علاوه در روز ۲۸ ژوئن یک سلسله سخنرانی در بزرگداشت کارتان در محل اکول‌نرمال‌سوپریور برگزار شد که در آن عده‌ای از ریاضیدانان مشهور، ازجمله ژان پیر سرو فریدریش هیرتسبروخ، در بارهٔ جنبه‌های مختلف کار و زندگی کارتان سخن گفتند.

برای اطلاعات بیشتر به وبگاه‌های زیر نگاه کنید:

http://www.dma.ens.fr/bibliotheque/cartan.html
http://www.smf.emath.fr/VieSociete/Rencontres/JourneeCartan/

س. ش.

آرزوی تندرستی

همکار گرانقدر ما دکتر علی عمیدی که در ۲۹ آبان ۱۳۸۱ بر اثر سانحهٔ تصادف به حال اغما فرو رفت، متأسفانه هنوز به حال عادی بازنگشته است. ایشان که از آماردانان سرشناس کشور و نزدیک به دو دهه عضو گروه آمار و ریاضی مرکز نشر دانشگاهی بوده است، از بدو تأسیس نشر ریاضی در سال ۱۳۶۷ تا زمان حادثهٔ مشاور مجله در زمینهٔ آمار بود و مقالاتی نیز با ترجمه یا ویرایش او در مجله به چاپ رسیده است. نشر ریاضی ضمن ابراز همدردی عمیق با خانوادهٔ ایشان، برای همکار گرامی خود آرزوی تندرستی و بازگشت به زندگی عادی دارد.

یادی از دوست

در خرداد ماه امسال، با دریغ و درد، شاهد از دست رفتن دوست فرزانه‌ای بودیم که گهگاه با نکته‌سنجی‌ها، گره‌گشایی‌ها، و سلیقه‌ورزی‌هایش ما را در کار مجله یاری می‌داد. او دکتر حسن مرندی روان‌پزشک ادیب و فرهیخته بود که از پیشگامان امر ویرایش در کشور به شمار می‌آید. یادش گرامی باد.

در بارهٔ قضیهٔ شاخص اتیا-سینگر•

ناورداهای ریاضی همچون نشانه‌های راهنما در شاهراههای پرپیچ و خم نظریه‌های ریاضی جهت حرکت را مشخص می‌کنند. شاید اولین ناوردایی که به آن برخورد کرده‌ایم مجموع زوایای یک مثلث در فضای اقلیدسی باشد که مستقل از اندازه و شکل مثلث همواره 2π رادیان است. این واقعیت مشخصهٔ فضای اقلیدسی است. در جبر خطی رابطهٔ میان بُعد هسته و بُعد تصویر یک نگاشت خطی را می‌توان برحسب ناوردای زیبایی بیان کرد. فرض کنید K یک میدان باشد و $T : K^m \to K^n$ یک نگاشت خطی. مقصود از پادهستهٔ T (که آن را به $\operatorname{coker} T$ نمایش می‌دهیم) فضای خارج‌قسمت $K^n/T(K^m)$ است. حال می‌توان رابطهٔ $m = \dim(\ker T) + \dim(T(K^m))$ را به‌صورت زیر بیان کرد: تفاضل $\dim(\ker T) - \dim(\operatorname{coker} T)$ یک ناوردای مستقل از نگاشت خطی T و در واقع همواره برابر $(m-n)$ است. این تفاضل را **شاخص** می‌نامیم. اگر به‌جای K^m و K^n فضاهای باناخ بینهایت بعدی داشته باشیم و نگاشت خطی T دارای هسته و پادهسته‌ای با بُعد متناهی باشد (چنین نگاشتهای خطی را فردهولم می‌نامند)، این تفاضل دو بعد هسته و پادهسته (= **شاخص نگاشت فردهولم** T) همچنان نقش مهمی ایفا می‌کند که در ادامهٔ بحث خواهیم دید.

فرض کنید M یک خمینهٔ هموار فشرده، جهتدار و بی‌لبه باشد، E و F دو کلاف برداری مختلط C^∞ روی M با بعد تاریِ به ترتیب، p و q، و بالاخره $C^\infty(E)$ و $C^\infty(F)$ فضاهای خطی توابع C^∞ روی E و F باشند. یک **عملگر دیفرانسیل** $D : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ طوری تعریف می‌شود که تحدید آن به کلافهای مبتذل همان مفهوم متداول عملگر دیفرانسیل باشد. به بیان دقیقتر، به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید $(x_1, \ldots, x_m)$ مختصات موضعی برای زیرمجموعهٔ باز U از M باشند و مقطعهایی برای E و F روی U طوری در نظر بگیریم که به ازای هر $x \in M$، این مقطعها برای E_x و F_x تشکیل پایه دهند. در این صورت D نگاشتی از $C^\infty(U)^p \to C^\infty(U)^q$ القا می‌کند که به صورت ماتریسی $P(x,D) = [p_{ij}]$، $i = 1, \ldots, p$، $j = 1, \ldots, q$، ارائه می‌شود. در اینجا p_{ij} یک چندجمله‌ای نسبت به $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ با ضرایب تابعهای C^∞ روی U است. مقصود از **مرتبهٔ عملگر دیفرانسیل** D بالاترین درجه از عملگرهای مشتق جزئی $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ است که در میان p_{ij}ها ظاهر می‌شود. اگر به‌جای $\frac{\partial}{\partial x_i}$ نماد ξ_i را قرار دهیم یک ماتریس $p \times q$، $P(x,\xi)$ حاصل می‌شود. در حالتی که $p = q$ و این ماتریس به‌ازای هر $\xi \neq 0$ وارون‌پذیر باشد (برای هر $x \in U$)، D را یک **عملگر بیضوی** می‌نامیم. می‌توان نشان داد که برای عملگرهای بیضوی، هسته و پادهسته هر دو از بُعد متناهی هستند و تفاضل این دو بُعد، یعنی $I_a(D) = \dim(\ker D) - \dim(\operatorname{coker} D)$، **شاخص آنالیزی** D خوانده می‌شود. مدتی بود که معلوم شده بود تحت تغییرات پیوسته، $I_a(D)$ ناوردا می‌ماند. از این‌رو گلفاند این سؤال را مطرح کرده بود که آیا $I_a(D)$ برحسب ناورداهای توپولوژیک مربوط به M، E و F قابل بیان است یا نه.

قضیهٔ اتیا-سینگر به این سؤال جواب مثبت می‌دهد و تعمیمهای قابل توجهی فراتر از حالت ذکر شده نیز دارد. در واقع قضیهٔ اتیا-سینگر دربرگیرندهٔ تعدادی قضیهٔ مهم مانند قضیهٔ ریمان-رُخ-هیرتسبروخ و فرمول شاخص لفشتس است، و به‌علاوه دامنهٔ کاربردهای آن طیف وسیعی از ریاضیات و فیزیک نظری از هندسهٔ جبری، معادلات دیفرانسیل جزئی، نظریهٔ اعداد، نظریهٔ پیمانه‌ای و عملگر دیراک را دربر می‌گیرد.

اتیا و سینگر نشان دادند $I_a(D)$ برابر ناوردای توپولوژیک $I_t(D)$ است که فرایند رسیدن به تعریف آن به نسبت طولانی است و بر پایهٔ آثاری است که کمی قبل از اتیا و سینگر در تحقیقات ریاضیدانان دیگری چون هیرتسبروخ و گروتندیک پایه‌گذاری شده بود. $I_t(D)$ برابر اثر جزء mبعدی حاصلضرب ناوی[1] دو ردهٔ کوهومولوژی خمینهٔ $ch(D) \smile Td(M)$ روی دور بنیادی[2] خمینهٔ جهتدار M است. تعریف $ch(D)$ (سرشت چرن[3] D) بر اساس رده‌های کوهومولوژی چرن کلافهای E و F است و $Td(m)$ که به ردهٔ تاد[4] معروف است بر پایهٔ رده‌های کوهومولوژی کلاف مماس مختلط‌شدهٔ M تعریف می‌شود.

اثبات اولیهٔ اتیا و سینگر از این قضیه به کمک نظریهٔ کوبوردیسم در توپولوژی بود که در آن زمان تازگی داشت و به وسیلهٔ رنه توم ابداع شده بود [۴]. بعدها این دو نفر اثباتهای دیگری نیز ارائه دادند که یکی از آنها معروف به اثبات «معادلهٔ گرما» تکیهٔ بیشتری بر آنالیز و نظریهٔ طیفی عملگرهای خودالحاق[5] دارد. ریاضیدانان دیگری نیز اثباتهای دیگری برای این قضیه ارائه داده‌اند یا استدلالهای اولیهٔ اتیا و سینگر را ساده‌تر کرده‌اند که از آن جمله باید از اثبات هیگسن [۲] نام برد. باید افزود که می‌توان قضیهٔ اتیا-سینگر را یکی از نقاط شروع نظریهٔ هندسهٔ ناجابه‌جایی آلن کُن دانست. سرشت چرن در واقع به کمک نظریهٔ Kی کلافهای برداری یا معادلش، نظریهٔ Kی جبری مقاطع کلافهای برداری تعریف می‌شود. مفهوم متناظر نظریهٔ K برای جبرهای C^* نیز تعریف شده است. آلن کُن با ابداع کوهومولوژی دوری در مقابل کوهومولوژی دُرام و تعریف دو شاخص وابسته به این مفاهیم، تساوی آنها را ثابت کرد. این موضوع کاربردهای مهمی در فیزیک دارد که در این زمینه می‌توانید به کارهای ذکر شده از بلیسار[6] در [۱] مراجعه کنید.

1. A Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press (1994).
2. N. Higson, "On the K-theory proof of index theorem" in *Contemp. Math.*, Amer. Math. Soc., **148** (1993).
3. L. Nicolaescu, "Notes on the Atiyah-Singer Index theorem", Univ. Notre Dame (2004).
   http://www.nd.edu/~luicolae/ind-thm.pdf
4. R. Palais, *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem*, Princeton (1965).
5. J. Rognes, "On the Atiya-Singer index theorem", Univ. Oslo (March 2004).
   http://www.abelprisen.no/nedlastning/2004/popular_english_2004.pdf

* * * * * *

• این متنِ خلاصهٔ نوشته‌ای است که آقای سید ابراهیم اکرمی برای مجله تهیه کرده‌اند و در اینجا از همکاری ایشان قدردانی می‌کنیم.

1. cup product 2. fundamental cycle 3. Chern character 4. Todd class 5. self-adjoint 6. Bellisard

نشر ریاضی، سال ۱۴، شمارهٔ ۲، صص ۵ـ۱۶

برخی مسائل حل‌نشدهٔ کلاسیک در نظریهٔ اعداد•

میشل والدشمیت*

ترجمهٔ مریم رفیع، کامبیز محمودیان

چکیده

مسائل حل‌نشدهٔ بسیاری در نظریهٔ اعداد وجود دارد. برخی از آنها بسیار مشهورند (به‌ویژه، پس از تعیین جایزه از طرف بنیاد کلی[1] [J 2000])، مانند فرض ریمان یا حدسِ برچ[2] و سوینرتن‌ـدایر[3]. ما مسائل کلاسیک دیگری را که بیان صورت آنها معلومات زیادی نمی‌طلبد، بررسی می‌کنیم. این مسائل شامل بعضی معادلات دیوفانتی، حدسهای کاتالان[4] و پیلایی[5]، حدسِ abc، طیف مارکوف و مسألهٔ وارینگ[6] است.

۱. معادلات دیوفانتی

۱.۱ نقاط روی خمها

در بین ۲۳ مسألهٔ هیلبرت ([Hi 1900]، [Gu 2000]) دهمین مسأله کوتاهترین صورت را دارد:

> اگر معادله‌ای دیوفانتی با هر تعداد مجهول و با ضرایب عددی صحیح داده شده باشد، فرایندی طراحی کنید که به‌وسیلهٔ آن بتوان با تعدادی متناهی عملیات، تعیین کرد که معادله جواب صحیح گویا دارد یا نه.

معادلهٔ دیوفانتی معادله‌ای به شکل $f(\underline{x}) = 0$ است که در آن $f \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ یک چندجمله‌ایِ مفروض است و مجهولات $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ اعداد صحیح گویا هستند. حل این معادله، معادل است با تعیین نقاط صحیح روی ابررویهٔ متناظر در فضای آفین. مسألهٔ دهم هیلبرت این است که الگوریتمی ارائه دهیم که به ما بگوید معادلهٔ دیوفانتی مفروض جواب دارد یا نه.

انواع دیگری از معادلات دیوفانتی نیز وجود دارد. اولاً می‌توان جوابهای گویا را به‌جای جوابهای صحیح در نظر گرفت: در این حالت نقاط گویای روی یک ابررویه بررسی می‌شود. در مرحلهٔ بعد می‌توان نقاط صحیح یا گویا روی یک میدان عددی را بررسی کرد. وضعیتی میانی بین نقاط صحیح و گویا نیز وجود دارد، که در آن مجهولات، نقاط Sـصحیح هستند. بدین معنی که S یک مجموعهٔ متناهی ثابت از اعداد اول (اولهای گویا، یا ایده‌آلهای اول در میدان عددی) است و [شمارنده‌های اولِ] مخرج جوابها مقیدند که به S تعلق داشته باشند. دو مثال از اینها عبارت‌اند از معادلهٔ تو‌ـمالر[1]:

$$F(x, y) = p_1^{z_1} \ldots p_k^{z_k}$$

که در آن F یک چندجمله‌ای همگن با ضرایب صحیح است و p_1، ...، p_k اولهای ثابتی هستند (و مجهولات x، y، z_1، ...، z_k اعداد صحیح گویا با ضابطهٔ $z_i \geq 0$اند) و معادلهٔ رامانوجان‌ـناگل[2] تعمیم‌یافته $x^2 + D = p^n$ که در آن D یک عدد صحیح ثابت، p یک اول ثابت، و مجهولات x و n اعداد صحیح گویا با ضابطهٔ $n \geq 0$ هستند (برای این معادلات و معادلات مشابه دیگر مثلاً به [ShT 1986]، [Ti 1998]، [Sh 1999] و [BuSh 2001] نگاه کنید).

کارکردن با دستگاهی از معادلات دیوفانتی نیز جالب است، یعنی بررسی نقاط گویا یا صحیح روی واریته‌های جبری.

در پیِ کارهای دیویس[3]، پاتنم[4] و رابینسن[5]، پاسخ نهایی به‌صورت اصلی مسألهٔ دهم هیلبرت را ماتیاسویچ[6] در سال ۱۹۷۰ به‌دست داد. این جواب نقطهٔ اوج نظریه‌ای غنی و زیبا بود (به [DaMR 1976] و [Mat 1999] نگاه کنید). پاسخ منفی است: امروزه دیگر امیدی نیست که بتوان به نظریه‌ای کامل دربارهٔ این موضوع دست یافت. اما هنوز می‌توان امیدوار بود که اگر مسألهٔ اولیهٔ هیلبرت را به معادلات با متغیرهای کم‌محدود کنیم پاسخ مثبتی وجود داشته باشد، مثلاً حالت $n = 2$ که معادل است با بررسی نقاط صحیح روی یک خم مسطح. در این حالت نتایج عمیقی در طول قرن

1. Clay 2. Birch 3. Swinnerton-Dyer 4. Catalan 5. Pillai 6. Waring

1. Thue-Mahler 2. Nagell 3. M. Davis 4. H. Putnam 5. J. Robinson 6. Yu. Matiyasevich

بیستم به‌دست آمده است و مطالب بسیاری معلوم شده است، اما بسیار بیشتر از آن هنوز پوشیده مانده است.

اساسیترین نتایج، نتایجِ زیگل (۱۹۲۹) و فالتینگس (۱۹۸۰) است. قضیهٔ زیگل با نقاط صحیح سرو کار دارد و الگوریتمی ارائه می‌دهد که مشخص می‌کند مجموعهٔ جوابها مجموعه‌ای متناهی است یا نامتناهی. نتیجهٔ فالتینگس که حدس موردل را حل و فصل می‌کند همین کار را برای جوابهای گویا، یعنی نقاط گویا روی خمها، انجام می‌دهد. به این دو دستاورد برجستهٔ قرن بیستم، سهم وایلز را نیز می‌توان افزود. کار او نه تنها آخرین قضیهٔ فرما را فیصله داد، بلکه شماری از نتایج مشابه را برای سایر خمها نیز به‌دست داد [Kr 1999].

در اینجا چند مسألهٔ طبیعی پیش می‌آید:

الف) جواب‌دادن به مسألهٔ دهم هیلبرت برای حالت خاص خمهای مسطح، یعنی ارائهٔ الگوریتمی برای تشخیص اینکه یک معادلهٔ دیوفانتی مفروض $f(x,y)=0$ جواب (در $\mathbb{Z}$ یا در $\mathbb{Q}$) دارد یا نه.

ب) ارائهٔ یک کران بالا برای تعداد نقاط گویا یا صحیح روی یک خم.

ج) ارائهٔ الگوریتمی برای حل صریح یک معادلهٔ دیوفانتی مفروض با دو مجهول.

مسائل دیگری را نیز می‌توان مطرح کرد. مثلاً در مسألهٔ (ب) می‌توان از تعداد دقیق جوابها پرسید. ممکن است مناسبتر باشد که به‌طور کلیتر تعداد نقاط روی هر میدان عددی را بررسی کرد، یا تعداد نقاطِ از درجهٔ کراندار را در نظر گرفت و سری مولد مربوطه را مطالعه کرد ... تعداد مسائل حل‌نشده بی‌پایان است!

هدف ما در اینجا این نیست که آخرین دستاوردها را در مورد این مسأله‌ها به‌دقت تشریح کنیم (مثلاً [La 1991] را ببینید). بلکه بسنده می‌کنیم به گفتن اینکه:

— پاسخ کاملی برای مسألهٔ (الف) هنوز در دسترس نیست: تاکنون هیچ الگوریتمی (بجز تعدادی حدس) برای تشخیص اینکه یک خم نقطهٔ گویا دارد یا نه به‌دست نیامده است؛

— شماری نتایج دربارهٔ مسألهٔ (ب) به‌دست آمده است. جدیدترین کار در این باب را رمون [Re 2000] انجام داده است. او برای تعداد نقاط گویا روی یک خم از گونهٔ بزرگتر یا مساوی با ۲، کران بالای کارآمدی یافته است؛

— و مسألهٔ (ج) حتی برای نقاط صحیح، و حتی برای حالت خاص خمهای از گونهٔ ۲، پاسخی نیافته است.

الگوریتمی عملی موردنظر ما نیست، بلکه (برای شروع) تنها در جستجوی الگوریتمی نظری هستیم. پس اولین مسألهٔ حل‌نشدهٔ ما یافتن صورت کارآمدی از قضیهٔ زیگل است.

مسألهٔ ۱.۱. فرض کنید $f \in \mathbb{Z}[X,Y]$ یک چندجمله‌ای باشد به‌طوری که معادلهٔ $f(x,y)=0$ تنها تعدادی متناهی جواب $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ داشته باشد. کرانی بالا برای $\max\{|x|,|y|\}$ که در آن (x,y) یک جواب است، برحسب درجهٔ f و ماکسیمم قدرمطلق ضرایب f، ارائه دهید.

وجود چنین کرانی بخشی از فرض است، اما مسأله، ارائهٔ آن به‌صورت صریح (و در صورت امکان، بسته) است.

می‌توان مسأله‌های مشابه دیگری با متغیرهای بیشتر مطرح کرد (نقاط گویا روی واریته‌ها)، مثلاً معادلاتِ فُرمِ نُرمی اشمیت. برای این‌گونه مسائل و ازجمله حدسهای لانگ‌وُیتا[1]، خواننده را به [La 1974] و [La 1991] ارجاع می‌دهیم.

حتی حالت فرمهای درجهٔ دوم که ساده‌ترین حالت است به مسأله‌هایی حل‌نشده منجر می‌شود: تعیین همهٔ اعداد صحیح مثبتی که با فرم دوتایی داده‌شده‌ای قابل نمایش هستند، فاصلهٔ زیادی تا حل‌شدن دارد. همچنین، گرچه انتظار می‌رود تعداد نامتناهی میدان درجهٔ دوم حقیقی با عددِ رده‌ای یک وجود داشته باشد، اما حتی نمی‌دانیم که آیا تعداد نامتناهی میدان عددی (بدون محدودیت درجه‌شان) با عدد رده‌ای یک وجود دارد یا نه. به خاطر آورید که اولین حل کامل مسأله‌های عدد رده‌ای ۱ و ۲ی گاوس (برای میدانهای درجهٔ دوم موهومی) با روشهای متعالی به‌دست آمده است (بیکر و استارک)، بنابراین، می‌توان این مسائل را از نوع دیوفانتی محسوب کرد. امروزه روشهای کارآمدتری (گولدفلد[2]، گروس-زاگیر[3]، ... — [La 1991] فصل V، بخش ۵ را ببینید) در دسترس است.

یک مسألهٔ حل‌نشدهٔ مرتبط با این مطلب، تعیین اعداد مناسب اویلر [Ri 2000] است. عدد صحیح مثبت n را ثابت نگه دارید. اگر p یک عدد اول فرد باشد که برای آن اعداد صحیح $x \geq 0$ و $y \geq 0$ وجود داشته باشند که $p = x^2 + ny^2$، آنگاه

(i) $gcd(x, ny) = 1$

(ii) معادلهٔ $p = X^2 + nY^2$ با مجهولات صحیح $X \geq 0$ و $Y \geq 0$ تنها جوابِ $X = x$ و $Y = y$ را دارد.

حال فرض کنید p عددی فرد باشد به‌طوری که اعداد صحیح $x \geq 0$ و $y \geq 0$ با ضابطهٔ $p = x^2 + ny^2$ وجود داشته باشند و شرایط (i) و (ii) بالا صادق باشند. اگر از این ویژگیها نتیجه شود که p اول است، آنگاه عدد n یک عدد مناسب نامیده می‌شود. اویلر ۶۵ تا از چنین اعدادی را یافت:

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۳, ۱۵, ۱۶, ۱۸, ۲۱, ۲۲, ۲۴,
۲۵, ۲۸, ۳۰, ۳۳, ۳۷, ۴۰, ۴۲, ۴۵, ۴۸, ۵۷, ۵۸, ۶۰, ۷۰, ۷۲, ۷۸,
۸۵, ۸۸, ۹۳, ۱۰۲, ۱۰۵, ۱۱۲, ۱۲۰, ۱۳۰, ۱۳۳, ۱۶۵, ۱۶۸, ۱۷۷,
۱۹۰, ۲۱۰, ۲۳۲, ۲۴۰, ۲۵۳, ۲۷۳, ۲۸۰, ۳۱۲, ۳۳۰, ۳۴۵, ۳۵۷,
۳۸۵, ۴۰۸, ۴۶۲, ۵۲۰, ۷۶۰, ۸۴۰, ۱۳۲۰, ۱۳۶۵, ۱۸۴۸.

معلوم شده است که حداکثر یک عدد دیگر در این فهرست وجود دارد، ولی انتظار می‌رود عدد دیگری موجود نباشد.

یک مثال ([Sie 1964] مسألهٔ ۵۸ صفحهٔ ۱۱۲؛ [Guy 1994]، D۱۸) از مسأله‌ای حل‌نشده که با حل دستگاهی از معادلات درجهٔ دوم دیوفانتی سروکار دارد می‌آوریم: آیا یک مکعب مستطیل صحیح کامل وجود دارد؟ مسألهٔ وجود مکعب مستطیلی که طول یالهای آن اعداد صحیح x_1، x_2، x_3، طول اقطار وجوه آن اعداد صحیح y_1، y_2، y_3 و طول قطر بزرگ آن عدد صحیح z باشد، معادل با حل دستگاه زیر مرکب از چهار معادلهٔ دیوفانتی

1. Lang-Vojta 2. Goldfeld 3. Gross-Zagier

با هفت مجهول در $\mathbb{Z}$ است:

$$x_1^2 + x_2^2 = y_3^2$$
$$x_2^2 + x_3^2 = y_1^2$$
$$x_3^2 + x_1^2 = y_2^2$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = z^2.$$

نمی‌دانیم که آیا این دستگاه جوابی دارد یا نه، ولی مشخص شده است که مکعب‌مستطیل صحیح کاملی که طول کوچکترین یالش کوچکتر یا مساوی با 2^{31} باشد وجود ندارد.

۲.۱ معادلات دیوفانتی نمایی

در معادلهٔ دیوفانتیِ مجهولات به شکل متغیرهای چندجمله‌ای ظاهر می‌شوند، درحالی که در معادلهٔ دیوفانتی نمایی (به [Sh T 1986] نگاه کنید)، برخی از نماها نیز متغیر هستند. مثلاً معادلهٔ رامانوجان‌ـنگل $x^2 + D = p^n$ مذکور در بالا را می‌توان یک معادلهٔ دیوفانتی نمایی در نظر گرفت.

یک مسألهٔ مشهور که تا سال ۲۰۰۲ حل‌نشده بود، مسألهٔ کاتالان است که پیشینهٔ آن به ۱۸۴۴ [Cat 1844] برمی‌گردد، همان سالی که لیوویل اولین نمونه‌های اعداد متعالی را ساخت (همچنین به [Sie 1964] مسألهٔ ۷۷، صفحهٔ ۱۱۶؛ [Sie 1970] شمارهٔ ۶۰، صفحهٔ ۴۲؛ [Sh T 1986] فصل ۱۲؛ [N 1986] فصل ۱۱؛ [Ri 1994]؛ [Guy 1994]، D۹؛ [Ri 2000] فصل ۷ نگاه کنید). در «یادداشت مستخرج از نامه‌ای از آقای کاتالان مربی مدرسهٔ پلی‌تکنیک پاریس خطاب به سردبیر»، چاپ شده در مجلهٔ کرِله [Cat 1844]، چنین آمده است:

> «آقا، از شما خواهش می‌کنم قضیهٔ زیر را در مجله‌تان به چاپ برسانید. من به‌درستی آن اعتقاد دارم، گرچه هنوز موفق به اثبات کامل آن نشده‌ام. شاید دیگران به اثبات آن موفق شوند:
>
> دو عدد صحیح متوالی، بجز ۸ و ۹، نمی‌توانند توان کامل باشند؛ به عبارت دیگر معادلهٔ $x^m - y^n = 1$، که در آن مجهولات اعداد صحیح مثبت هستند، بیش از یک جواب ندارد.»

این ادعا نهایتاً در سال ۲۰۰۲ توسط پردا میهایلسکو[1] به اثبات رسید (گزارش یوری بیلو[2] را در وب‌گاهش

`http://www.math.u-bordeaux.fr/~yuri`

ببینید).

قضیهٔ ۲.۱ (حدس کاتالان). معادلهٔ

$$x^p - y^q = 1$$

که در آن x، y، p، q همگی اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی با ۲ هستند، تنها یک جواب دارد: $(x, y, p, q) = (3, 2, 2, 3)$.

به عبارت دیگر تنها مورد از دو عدد متوالی که هر دو توان کامل (یعنی به شکل x^p با $p \geq 2$) باشند عبارت است از $(8, 9)$. اطلاعات بیشتر درین باب در کتاب ریبن‌بویم [Ri 1994] آمده است. نتیجهٔ تایدمن [Ti 1976b] در سال ۱۹۷۶ نشان می‌دهد که تعداد جوابها متناهی است. به بیان دقیقتر، به‌ازای هر جواب x، y، p، q، برای عدد $\max\{p, q\}$ می‌توان ثابت مطلقی به‌عنوان کران ارائه کرد که به‌طور کارآمدی قابل محاسبه باشد. وقتی $\max\{p, q\}$ کراندار شد، تنها تعدادی متناهی معادلهٔ دیوفانتی نمایی برای بررسی باقی می‌ماند و الگوریتمهایی برای تکمیل جواب (مبتنی بر روش بیکر) وجود دارد. چنین کران بالایی محاسبه شده است، اما نسبتاً بزرگ است: بنا بر تحقیق مینیوت[1] هر جواب x، y، p، q برای معادلهٔ کاتالان در نابرابری

$$\max\{p, q\} < 10^{18}$$

صدق می‌کند. جواب نهایی که توسط میهایلسکو داده شده است، نه تنها با میزان دقیق استقلال خطی لگاریتم اعداد جبری (در اینجا تخمینی خاص برای دو لگاریتم منسوب به اوران، مینیوت و نسترنکو[2] مورد نیاز است)، بلکه با ابزارهایی از نظریهٔ میدانهای دایره‌بُر سروکار دارد.

در حالی که در حدس کاتالان همچون قضیهٔ زیگل، جوابهای صحیح موردنظرند، قضیهٔ فالتینگس با نقاط گویا سروکار دارد. دیپندرا پراساد[3] حدس زد که مجموعهٔ چندتایی‌های (x, y, p, q) در $\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{N}^2$ که در شرایط زیر

$x^p - y^q = 1$، و خم $X^p - Y^q = 1$ گونهٔ بزرگتر یا مساوی با ۱ دارد

صدق می‌کنند، باید متناهی باشد ــ شواهدی برای این مطلب از حدس abc حاصل می‌شود (بخش ۱.۲ را ببینید).

اینکه سمت راست معادلهٔ کاتالان ۱ است، بسیار مهم است: اگر آن را با هر عدد صحیح مثبت دیگر عوض کنیم [در مورد معادلهٔ جدید] چیزی نمی‌دانیم. حدس بعدی توسط پیلایی [Pi 1945] در یک همایش انجمن ریاض ـند در علیگره مطرح شد (همچنین [Sie 1964] مسألهٔ ۷۸ صف ۱۱۷؛ [ShT 1986]؛ [Ti 1998]؛ [Sh 1999] را ببینید).

حدس ۳.۱ (پیلایی). فرض کنید k یک عدد صحیح مثبت باشد. معادلهٔ

$$x^p - y^q = k$$

که در آن مجهولات x، y، p و q همگی اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی با ۲ هستند، دارای [حداکثر] تعداد متناهی جواب (x, y, p, q) است.

این حدس بدان معنی است که در دنبالهٔ صعودی توانهای کامل x^p با ضوابط $x \geq 2$ و $p \geq 2$:

$$4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, 100,$$
$$121, 125, 128, 144, 169, \ldots$$

تفاضل دو جملهٔ متوالی به سمت بینهایت میل می‌کند. حتی نمی‌دانیم که آیا مثلاً برای $k = 2$ معادلهٔ پیلایی تنها تعدادی متناهی جواب دارد یا نه. یک سؤالِ پاسخ نیافتهٔ دیگر در این زمینه این است که آیا ۶ تفاضل دو توان کامل است یا نه، یعنی آیا معادلهٔ دیوفانتی $x^p - y^q = 6$ جواب دارد ([Sie 1970] مسألهٔ ۲۳۸a صفحهٔ ۱۱۶ را ببینید).

1. Preda Mihailescu 2. Yuri Bilu

1. M. Mignotte 2. Nesterenko 3. Dipendra Prasad

یک حدس که حدس پیلایی از آن نتیجه می‌شود توسط شوری در [Sh 2000] مطرح شده است (این همان مسأله‌ای است که به زیگل در [Si 1929] انگیزه بخشید): فرض کنید $f \in \mathbb{Z}[X]$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n با حداقل دو ریشهٔ متمایز باشد و $f(0) \neq 0$. تعداد ضرایب ناصفر f را L بگیرید و بنویسید:

$$f(X) = b_1 X^{n_1} + \cdots + b_{L-1} X^{n_{L-1}} + b_L$$

که در آن $n = n_1 > n_2 > \ldots > n_{L-1} > 0$ و $b_i \neq 0$ به‌ازای $1 \leq i \leq L$. قرار دهید $H = H(f) = \max_{1 \leq i \leq L} |b_i|$.

حدس ۴.۱ (شوری). عددی مثبت مانند C (فقط وابسته به L و H) با خاصیت زیر وجود دارد. فرض کنید m، x و y اعداد صحیح گویایی با ضوابط $m \geq 2$ و $|y| > 1$ باشند به‌طوری که

$$y^m = f(x).$$

آنگاه یا $m \leq C$ و یا یک زیرمجموع سره از

$$y^m - b_1 x^{n_1} - \ldots - b_{L-1} x^{n_{L-1}} - b_L$$

وجود دارد که صفر است.

حال اعداد صحیح مثبتی را در نظر بگیرید که توان کامل y^q با $q \geq 2$ باشند و تمام ارقامشان در پایهٔ x (که $x \geq 2$) برابر ۱ باشد، مثلاً ۱۲۱ در پایهٔ ۳، ۴۰۰ در پایهٔ ۷، ۳۴۳ در پایهٔ ۱۸. یافتن همهٔ چنین اعدادی معادل است با حل معادلهٔ دیوفانتی نمایی

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$$

که در آن مجهولات x، y، n، q اعداد صحیح گویای مثبتی هستند که $x \geq 2$، $y \geq 1$، $n \geq 3$ و $q \geq 2$. فقط ۳ جواب شناخته شده است:

$$(x, y, n, q) = (3, 11, 5, 2), (7, 20, 4, 2), (18, 7, 3, 3)$$

متناظر با

$$\frac{3^5 - 1}{2} = 11^2, \quad \frac{7^4 - 1}{6} = 20^2, \quad \frac{18^3 - 1}{17} = 7^3.$$

نمی‌دانیم که آیا اینها همهٔ جوابها هستند یا نه (به [Sh T 1986]؛ [Guy 1994] D۱۰؛ [Ti 1998]؛ [Sh 1999]؛ [BuM 1999] و [Sh 2000] نگاه کنید). اما انتظار می‌رود جواب دیگری وجود نداشته باشد.

مسألهٔ بعدی تعیین همه توانهای کاملی است که در یک پایه ارقام مساوی دارند، که معادل است با حل معادلهٔ

$$c\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$$

که در آن مجهولات x، y، n، q و c اعداد صحیح گویای مثبتی هستند با ضوابط $x \geq 2$، $y \geq 1$، $n \geq 3$، $1 \leq c < x$ و $q \geq 2$.

مسائل حل‌نشدهٔ زیر ([La 1996] را ببینید) را گرچه نمی‌توان معادلهٔ دیوفانتی به‌حساب آورد، اما به این مبحث مربوط‌اند: حدس اعداد اول دوقلو، مسألهٔ گلدباخ (آیا هر عدد صحیح زوج بزرگتر یا مساوی با ۴ مجموع دو عدد اول است؟)، حدس بونیاکوفسکی[1]؛ فرض شینتسل[2] (H)([Sie 1964] بخش ۲۹ را نیز ببینید) و حدس بیتمن-هورن[3].

معادلهٔ دیوفانتی

$$x^p + y^q = z^r$$

نیز تاریخی طولانی در ارتباط با آخرین قضیهٔ فرما دارد ([Kr 1999]، [Ri 2000] بخش D. ۹.۲). اگر فقط جوابهای صحیح مثبت (x, y, z, p, q, r) را که در شرط

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$$

صدق می‌کنند و x و y و z نیز نسبت به هم اول‌اند، در نظر بگیریم، تنها ۱۰ جواب (با تقریب تقارنهای بدیهی؛ مثلاً $1 + 2^3 = 3^2$ فقط یک جواب حساب می‌شود) شناخته شده است:

$$1 + 2^3 = 3^2,\ 2^5 + 7^2 = 3^4,\ 7^3 + 13^2 = 2^9,\ 2^7 + 17^3 = 71^2,$$
$$3^5 + 11^4 = 122^2,\ 17^7 + 76271^3 = 21063928^2,$$
$$1414^3 + 22134592^2 = 65^7,\ 9262^3 + 15312283^2 = 113^7,$$
$$43^8 + 96222^3 = 30042907^2,\ 33^8 + 15490342^2 = 15613^3.$$

به هر حال حدس abc (به بخش ۱.۲ نگاه کنید) پیش‌بینی می‌کند که مجموعهٔ همهٔ چنین جوابهایی متناهی است (این حدس فرمالکاتالان است که توسط دارمون[4] و گرانویل[5] فرمولبندی شده است ــ [Mau 1997] را ببینید). در همهٔ جوابهای شناخته‌شده یکی از p و q و r، ۲ است؛ و این موضوع، تایدمن و زاگیر را به این حدس (که به حدس بیل[6] نیز مشهور است ــ [Mau 1997] را ببینید) رهنمون شد که هیچ جوابی با این قید اضافه که p و q و r هر سه بزرگتر یا مساوی با ۳ باشند، وجود ندارد.

بنابر تعریف [Gy 2001]، یک چندتایی دیوفانتی، چندتایی $(a_1, \ldots, a_n)$ از اعداد صحیح مثبت متمایز است به‌طوری که به‌ازای هر $1 \leq i < j \leq n$، $a_i a_j + 1$ مربع کامل باشد. فرما مثال $(1, 3, 8, 120)$ را ارائه کرد و اویلر نشان داد که دوتایی دیوفانتی (a_1, a_2) را به چهارتایی دیوفانتی (a_1, a_2, a_3, a_4) می‌توان گسترش داد. نمی‌دانیم که آیا هیچ پنج‌تایی دیوفانتی $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ وجود دارد یا نه، ولی دویه‌لا [Du 2001] ثابت کرد که هر پنج‌تایی دیوفانتی در $\max\{a, a_2, a_3, a_4, a_5\} \leq 10^{10^{24}}$ صدق می‌کند. او همچنین ثابت کرد هیچ شش‌تایی دیوفانتی وجود ندارد.

۳.۱ طیف مارکوف

معادلهٔ مارکوف اصلی (۱۸۷۹) عبارت است از $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ (به [Ca 1957] فصل ۲، [CuFl 1989] فصل ۲، [Guy 1994]، D۱۲ و [Ri 2000] بخش ۱۰.۵.B نگاه کنید). حال الگوریتمی ارائه می‌دهیم که همهٔ جوابهای صحیح مثبت را ایجاد می‌کند. فرض کنید $(x, y, z) = (m, m_1, m_2)$ یک جواب باشد. دو مختصهٔ جواب را ثابت

1. Bouniakovsky 2. Schinzel 3. Bateman-Horn 4. Darmon
5. Granville 6. Beal

نگه می‌داریم و در نتیجه معادله‌ای درجهٔ ۲ برحسب مختصهٔ سوم به‌دست می‌آوریم که یک جواب آن را از قبل می‌شناسیم. با روش معمولی قطع‌دادن با یک خط گویا یک جواب دیگر به‌دست می‌آوریم. بدین ترتیب از یک جواب (m, m_1, m_2) سه جواب دیگر به‌دست می‌آوریم:

$$(m', m_1, m_2), \qquad (m, m_1', m_2), \qquad (m, m_1, m_2')$$

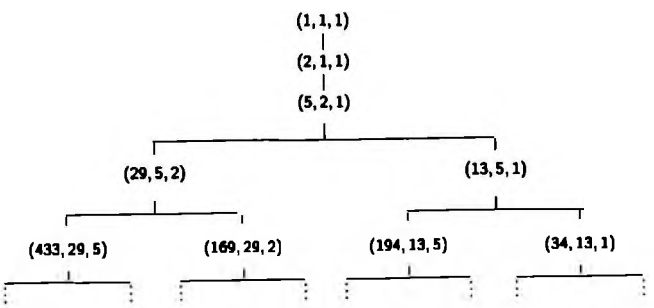
که در آن

$$m' = 3m_1m_2 - m \quad \text{و} \quad m_1' = 3mm_2 - m_1 \quad \text{و} \quad m_2' = 3mm_1 - m_2.$$

این سه جواب، همسایه‌های جواب اولیه نامیده می‌شوند. بجز دو جوابِ به‌اصطلاح منفرد $(1,1,1)$ و $(2,1,1)$، سه مؤلفهٔ (m, m_1, m_2) دوبه‌دو متمایز هستند و سه همسایهٔ (m, m_1, m_2) نیز دوبه‌دو متمایزند. با فرض $m > m_1 > m_2$ می‌توان نشان داد که

$$m_1' > m_2' > m > m'.$$

بنابراین یک همسایهٔ (m, m_1, m_2) وجود دارد که بزرگترین مؤلفه‌اش از m کوچکتر است و دو همسایه وجود دارند که بزرگترین مؤلفه‌شان از m بزرگتر است، که عبارت‌اند از (m_1', m, m_2) و (m_2', m, m_1). به‌راحتی نتیجه می‌شود که با شروع از $(1,1,1)$ و اختیار متوالی همسایه‌های هر جواب به‌دست آمده، همهٔ جوابها به‌دست می‌آید. در زیر، درخت مارکوف با نمادگذاری هاروی کُن [Coh 1993]، ارائه می‌شود که در آن (m_1', m, m_2) در سمت راست و (m_2', m, m_1) در سمت چپ نوشته شده است.



مسألهٔ اصلی حل‌نشده درین مبحث ([Ca 1957] صفحهٔ ۳۳، [CuFl 1989] صفحهٔ ۱۱ و [Guy 1994]، D۱۲) اثبات این مطلب است که هر بزرگترین مؤلفه، فقط در یک سه‌تایی از این درخت ظاهر می‌شود:

حدس ۵.۱. اگر به‌ازای عدد صحیح مثبت و ثابت mای معادلهٔ

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$$

دارای جوابی صحیح چون (m_1, m_2) با ضابطهٔ $0 < m_1 \le m_2 \le m$ باشد آنگاه چنین زوج (m_1, m_2) ای یکتاست.

درستی این حدس به‌ازای $m \le 10^{105}$ تحقیق شده است.

دنبالهٔ

$$1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, 233, 433,$$
$$610, 985, 1325, 1597, \ldots$$

از اعداد صحیح m صادق در فرضیات حدس ۵.۱، با مسألهٔ بهترین تقریب گویا برای اعداد گنگ درجهٔ دوم ارتباط نزدیکی دارد: برای هر m درین دنباله یک فرم درجهٔ دوم صریح $f_m(x,y)$ وجود دارد به‌طوری که معادلهٔ $f_m(x,1) = 0$ یک ریشهٔ α_m دارد که به‌ازای آن

$$\limsup_{q\to\infty} |q(q\alpha_m - p)| = \frac{m}{\sqrt{9m^2 - 4}}. \qquad (6.1)$$

دنبالهٔ $(m, f_m, \alpha_m, \mu_m)$ که در آن $\mu_m = \frac{\sqrt{9m^2-4}}{m}$، چنین آغاز می‌شود:

m	1	2	5	13
$f_m(x,1)$	x^2+x-1	x^2+2x-1	$5x^2+11x-5$	$13x^2+29x-13$
α_m	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{2211}$	$\overline{221111}$
μ_m	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{221}/5$	$\sqrt{1517}/13$

سطر سوم، بسط کسر مسلسل α_m را می‌دهد، که در آن مثلاً $\overline{2211}$ نشان‌دهندهٔ $[2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, \ldots]$ است. حدس ۵.۱ معادل با این ادعاست که در نماد f_m هیچ شبهه‌ای وجود ندارد: به‌ازای mای داده‌شده، دو عدد درجهٔ دوم α_m که در (۶.۱) صدق می‌کنند باید ریشهٔ فرمهای درجهٔ دوم معادلی باشند.

بنابراین طیف مارکوف ارتباط نزدیکی با تقریب گویای یک عدد حقیقی دارد. تعمیمی از این مطلب به تقریب همزمان در بخش ۲.۲ بررسی می‌شود.

۲. تقریبات دیوفانتی

درین بخش، بحث خود را به مسائلی در تقریبات دیوفانتی محدود می‌کنیم که نیازی به معرفی مفهوم ارتفاعِ اعداد جبری ندارند.

۱.۲ حدس abc

برای هر عدد صحیح مثبت n قرار می‌دهیم

$$R(n) = \prod_{p|n} p.$$

$R(n)$ ریشه یا بخش خالی از مربع n نامیده می‌شود.

حدس abc زاییدهٔ گفت‌وگویی بین مسر و استراله است ([Œ1988] صفحهٔ ۱۶۹؛ همچنین به [Ma 1990]، [La 1990]، [La 1991] فصل ۲، بخش ۱؛ [La 1993] فصل ۴، بخش ۷؛ [Guy 1994]، B۱۹؛ [Br 1999]؛ [Ri 2000] بخش ۹.۴.E؛ [V 2000]؛ [Maz 2000] و [2] نیز نگاه کنید).

حدس ۱.۲ (حدس abc). به‌ازای هر $\epsilon > 0$، عدد مثبت $\kappa(\epsilon)$ با خاصیت زیر وجود دارد: اگر a، b، c سه عدد صحیح گویای مثبت و نسبت به هم اول

باشند که در $a+b=c$ صدق کنند، آنگاه

$$c < \kappa(\epsilon)R(abc)^{1+\epsilon}.$$

حدس ۱.۲ یک حدس پیشین سپیرو[1] در مورد هادی خمهای بیضوی را نتیجه می‌دهد: به‌ازای هر $\epsilon > 0$، ثابتی چون $C > 0$ وجود دارد به‌طوری که برای هر خم بیضوی با مبین مینیمال Δ و هادی N، داریم $|\Delta| < CN^{6+\epsilon}$.

اگر a و b و c صحیح مثبت و نسبت به هم اول باشند و $a+b=c$، تعریف می‌کنیم

$$\lambda(a,b,c) = \frac{\log c}{\log R(abc)}$$

و

$$\varrho(a,b,c) = \frac{\log abc}{\log R(abc)}.$$

در جدول زیر شش مقدار بزرگتر در میان مقادیر شناخته‌شدهٔ $\lambda(a,b,c)$ آورده شده است (در [Br 1999] صفحات ۱۰۲ـ۱۰۵ و نیز در [۲]، همهٔ ۱۴۰ مقدار شناخته‌شدهٔ $\lambda(a,b,c)$ را که بزرگتر یا مساوی با ۱٫۴ هستند می‌توان یافت).

	$a+b=c$	$\lambda(a,b,c)$	کاشف(ها)
1	$2+3^{10}\cdot 109=23^5$	1.629912...	É. Reyssat
2	$11^2+3^2 5^6 7^3=2^{21}\cdot 23$	1.625991...	B. de Weger
3	$19\cdot 1307+7\cdot 29^2\cdot 31^8=2^8\cdot 3^{22}\cdot 5^4$	1.623490...	J. Browkin – J. Brzezinski
4	$283+5^{11}\cdot 13^2=2^8\cdot 3^8\cdot 17^3$	1.580756...	J. Browkin – J. Brzezinski, A. Nitaj
5	$1+2\cdot 3^7=5^4\cdot 7$	1.567887...	B. de Weger
6	$7^3+3^{10}=2^{11}\cdot 29$	1.547075...	B. de Weger

در جدول زیر شش مقدار بزرگتر در میان مقادیر شناخته‌شدهٔ $\rho(a,b,c)$ آورده شده است. منبع ما [۲] است که در آن فهرست کامل ۴۶ سه‌تایی شناخته‌شدهٔ (a,b,c) با $0 < a < b < c$ و $a+b=c$ و $\gcd(a,b)=1$ با شرط $\rho(a,b,c) > 4$ آمده است.

	$a+b=c$	$\varrho(a,b,c)$	کاشف(ها)
1	$13\cdot 19^6+2^{30}\cdot 5=3^{13}\cdot 11^2\cdot 31$	4.41901...	A. Nitaj
2	$2^5\cdot 11^2\cdot 19^9+5^{15}\cdot 37^2\cdot 47=3^7\cdot 7^{11}\cdot 743$	4.26801...	A. Nitaj
3	$2^{19}\cdot 13\cdot 103+7^{11}=3^{11}\cdot 5^3\cdot 11^2$	4.24789...	B. de Weger
4	$2^{35}\cdot 7^2\cdot 17^2\cdot 19+3^{27}\cdot 107^2=5^{15}\cdot 37^2\cdot 2311$	4.23069...	A. Nitaj
5	$3^{18}\cdot 23\cdot 2269+17^3\cdot 29\cdot 31^8=2^{10}\cdot 5^2\cdot 7^{15}$	4.22979...	A. Nitaj
6	$17^4\cdot 79^3\cdot 211+2^{29}\cdot 23\cdot 29^2=5^{19}$	4.22960...	A. Nitaj

همان‌طور که لانژون [Lan 1992] پی برده است، مسألهٔ حل‌نشدهٔ زیر [E 1980] از نتایج حدس abc ۱.۲ است:

حدس ۲.۲ (اردوش-وودز)[2]. عدد صحیح مثبت kای وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر دو عدد صحیح مثبت m و n، شرایط

$$R(m+i) = R(n+i) \qquad (i = 0, \cdots, k-1)$$

نتیجه می‌دهند $m=n$.

حدس ۲.۲ با سؤال زیر از رابینسن معادل است: آیا حساب مرتبهٔ اول، تنها با استفاده از تابع تالی $S: x \mapsto x+1$ و نسبت به هم اول‌بودن $x \perp y \iff \gcd(x,y)=1$ قابل تعریف است؟ برای پاسخ‌دادن به این سؤال کافی است بدانیم که آیا تابع $x \mapsto 5^x$ را می‌توان در زبان $(S, \perp)$ تعریف کرد ([Wo 1981]، [Guy 1994] B۲۹ و B۳۵، [BaLSW 1996]).

از حدس ۱.۲ نتیجه می‌شود که بجز احیاناً تعدادی متناهی استثناء (m,n)، $k=3$ یک مقدارِ قابل‌قبول است. فرض کنید $m > n$. با استفاده از حدس ۱.۲ با $a = m(m+2)$، $b=1$، $c=(m+1)^2$ به‌دست می‌آوریم

$$m^2 \le \kappa(\epsilon)R(m(m+1)(m+2))^{1+\epsilon}.$$

حال اگر $R(m+i)=R(n+i)$ به‌ازای $i=0,1,2$، آنگاه $R(m+i)$، $m-n$ را می‌شمارد. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هر دو عدد از سه عدد $R(m)$، $R(m+1)$ و $R(m+2)$، ۱ یا ۲ است. بنابراین $\frac{1}{2}R(m(m+1)(m+2))$، $m-n$ را می‌شمارد و در نتیجه $m^2 \le \kappa(\epsilon)(2m)^{1+\epsilon}$. این نشان می‌دهد m کرانی (مثلاً $8\kappa(\frac{1}{2})^2$) دارد.

گمان می‌رود که هیچ استثنایی با $k=3$ وجود نداشته باشد. یعنی اگر m و n شمارنده‌های اول یکسانی داشته باشند و همین‌طور $m+1$ و $n+1$ شمارنده‌های اول یکسان و نیز $m+2$ و $n+2$ شمارنده‌های اول یکسان داشته باشند، آنگاه $m=n$.

به‌سادگی دیده می‌شود $k=2$ مقدار قابل‌قبولی نیست: ۷۵ و ۱۲۱۵ شمارنده‌های اول یکسان دارند و همین‌طور ۷۶ و ۱۲۱۶.

$$R(75) = 15 = R(1215) \quad \text{و} \quad R(76) = 2\times 19 = R(1216).$$

گذشته از این مثال منفرد، دنباله‌ای از مثالها نیز وجود دارد: به‌ازای $m = 2^h - 2$ و $n = 2^h m$ داریم

$$R(m+1) = R(n+1) \qquad \text{و} \qquad R(m) = R(n)$$

زیرا $n+1 = (m+1)^2$.

شوری تعمیمی از حدس اردوش-وودز به تصاعدهای حسابی را مطرح کرده است:

آیا عدد صحیح مثبت k وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر m، n، d و d' عدد صحیح مثبت با ضابطهٔ $\gcd(m,d)=\gcd(n,d')=1$، از شرایط

$$R(m+id) = R(n+id') \qquad (i = 0, \cdots, k-1)$$

نتیجه شود $m=n$ و $d=d'$؟

1. L. Szpiro 2. Erdös-Woods

اگر جواب مثبت باشد عدد صحیح k بزرگتر از ۳ است. این مطلب از مثالهایی از چهارتایی‌های (m,n,d,d') مانند $(۲,۲,۱,۷)$، $(۲,۸,۷۹,۱)$ یا $(۴,۸,۲۳,۱)$ نتیجه می‌شود:

$$R(۲)=R(۲), R(۳)=R(۲+۷), R(۴)=R(۲+۲\times ۷),$$
$$R(۲)=R(۴)=R(۸), R(۲+۷۹)=R(۴+۲۳)=R(۹),$$
$$R(۲+۲\times ۷۹)=R(۴+۲\times ۲۳)=R(۱۰).$$

مسأله‌ای دیگر مرتبط با این موضوع از موتسکین[1] و اشتراوس[2] (B۱۹ [Guy 1994])، تعیین همهٔ زوجهای m و n از اعداد صحیح است به‌طوری که m و $n+۱$ شمارنده‌های اول یکسان و نیز n و $m+۱$ شمارنده‌های اول یکسان داشته باشند. مثالهای شناخته‌شده عبارت‌اند از

$$m=۲^k+۱, \quad n=m^۲-۱ \quad (k\geq ۰)$$

و مثال منفرد $m=۳۵=۵\times ۷$، $n=۴۳۷۴=۲\times ۳^۷$، که به‌دست می‌دهد: $m+۱=۲^۲\times ۳^۲$ و $n+۱=۵^۴\times ۷$.

همچنین حدسی دیگر منسوب به پال اردوش در [Lan 1992] و درسلر[3] در [۲] را نقل می‌کنیم.

حدس ۳.۲ (اردوش-درسلر). اگر a و b دو عدد صحیح مثبت با ضوابط $a<b$ و $R(a)=R(b)$ باشند، آنگاه عددی اول چون p با ضابطهٔ $a<p<b$ وجود دارد.

اولین تخمینها در جهت حدس abc (۱.۲) توسط استوارت و تایدمن به‌دست آمده‌اند و سپس توسط استوارت و یو کون‌روی بهتر شده‌اند (به [StY 1991] نگاه کنید). روش آنها استفاده از کرانهای پایین (p-آدیک) برای فرمهای خطی از لگاریتمهاست: اگر a و b و c اعداد صحیح مثبت نسبت به هم اول با $a+b=c$ باشند، آنگاه

$$\log c\leq \kappa\, R^{\frac{۱}{۲}}(\log R)^۳$$

که $R=R(abc)$.

یک صورت عددی توسط وُنگ چی هو[4] در سال ۱۹۹۹ به‌دست آمده است: به‌ازای $c>۲$ تخمین

$$\log c\leq R^{\frac{۱}{۲}+\frac{۱۵}{\log\log R}}$$

صادق است.

بیکر [B 1998] و فیلیپون [P 1999a] به ارتباطهای دیگری بین حدس abc و میزان استقلال خطی لگاریتم اعداد جبری اشاره کرده‌اند (همچنین به [W 2000b] تمرین ۱۱.۱ نگاه کنید). ما در اینجا حدس اصلی از ضمیمهٔ [P 1999a] را ذکر می‌کنیم. به‌ازای هر عدد گویای $\frac{a}{b}$ که a و b اعداد صحیح نسبت به هم اول باشند، مقدار $\log\max\{|a|,|b|\}$ را با $h(\frac{a}{b})$ نشان می‌دهیم.

حدس ۴.۲ (فیلیپون). اعداد حقیقی ϵ، α و β با شرایط $۰<\epsilon<\frac{۱}{۲}$، $\alpha\geq ۱$ و $\beta\geq ۰$ و عدد صحیح مثبت B وجود دارند به‌طوری که به‌ازای هر دو عدد گویای ناصفر x، y با شرط $xy^B\neq ۱$، اگر S مجموعهٔ اعداد اولی باشد که به‌ازای آنها $|xy^B+۱|_p<۱$، آنگاه

$$-\sum_{p\in S}\log|xy^B+۱|_p$$
$$\leq B\Big(\alpha h(x)+\epsilon h(y)+(\alpha B+\epsilon)(B+\sum_{p\in S}\log p)\Big).$$

نتیجهٔ این حدس یک کران پایین برای فاصلهٔ p-آدیک بین $-xy^B$ و ۱ است؛ نکتهٔ اصلی این است که چندین p دخیل هستند.

حدسهای لنگ-والدشمیت، در [La 1978b] (مقدمهٔ فصلهای ۱۰ و ۱۱، صفحات ۲۱۲-۲۱۷) مثالهایی از تخمینهای ارشمیدسی خوش‌بینانه مربوط به میزان استقلال خطی لگاریتم اعداد جبری هستند. یک مثال ساده این است:

حدس ۵.۲ (لنگ-والدشمیت) به‌ازای هر $\epsilon>۰$، ثابت $C(\epsilon)>۰$ وجود دارد به‌طوری که اگر $a_۱$، ...، a_m، $b_۱$، ...، b_m اعداد صحیح گویای ناصفری با شرط $a_۱^{b_۱}\cdots a_m^{b_m}\neq ۱$ باشند، آنگاه

$$|a_۱^{b_۱}\cdots a_m^{b_m}-۱|\geq \frac{C(\epsilon)^m B}{(|b_۱|\cdots|b_m|\cdot|a_۱|\cdots|a_m|)^{۱+\epsilon}}$$

که در آن $B=\max_{۱\leq i\leq m}|b_i|$.

مسائل مشابهی مربوط به تقریبهای دیوفانتی روی چنبره‌ها در [La 1991] فصل ۹، بخش ۷ مورد بحث قرار گرفته است.

ساندا و در [So 2002] نشان داده است که یک کران پایینِ دقیقِ حدسی برای تعدادی نامتناهی عدد به شکل

$$|e^{b_۰}a_۱^{b_۱}\cdots a_m^{b_m}-۱|$$

که در آن $b_۰$ دلخواه و همهٔ نماهای b_i دارای علامت یکسانی هستند، گنگ‌بودن ثابت اویلر را نتیجه می‌دهد.

از هر یک از حدسهای ۱.۲ و ۵.۲ یک نتیجهٔ کمّی در جهت بهسازی حدس پیلایی (حدس ۳.۱) حاصل می‌شود:

حدس ۶.۲. به‌ازای هر $\epsilon>۰$، ثابت $C(\epsilon)>۰$ وجود دارد به‌طوری که اگر x، y، p، q اعداد صحیح مثبتی با شرط $x^p\neq y^q$ باشند، آنگاه داریم

$$|x^p-y^q|\geq C(\epsilon)\max\{x^p,y^q\}^{۱-\frac{۱}{p}-\frac{۱}{q}-\epsilon}.$$

دو حالت خاص از حدس ۶.۲ را بررسی می‌کنیم: اول حالتِ $(p,q)=(۲,۳)$، که منجر به حدس هال [H 1971] (و نیز [La 1991] فصل ۲، بخش ۱) می‌شود:

حدس ۷.۲ (هال). اگر x و y اعداد صحیح مثبتی با شرط $y^۲\neq x^۳$ باشند، آنگاه

$$|y^۲-x^۳|\geq C\max\{y^۲,x^۳\}^{۱/۶}.$$

در این حکم ϵای وجود ندارد — ممکن است حدس ۷.۲ به نوعی، تصادفاً درست باشد، اما انتظار هم می‌توان داشت که این تخمین قویتر از آن

1. T. S. Motzkin 2. E. G. Straus 3. R. E. Dressler
4. Wong Chi Ho

باشد که بتواند درست باشد. نمای ۱/۶ بهینه است؛ این مطلب را دانیلوف[1] و شینتسل با استفاده از اتحاد کلاین برای بیست‌وجهی

$$(X^2-6X+4)^3-(X^2+1)(X^2-9X+19)^2=27(2X-11)$$

نشان داده‌اند ([Lan 2001] قضیهٔ ۶).

کوچکترین مقدار شناخته‌شده برای $|y^2-x^3|/\sqrt{x}$ (الکیز[2]، ۱۹۹۸) عبارت است از ۰٫۰۲۱۴۰۰۰ با

$$x = 3\times 7211\times 38791\times 6975841,$$
$$y = 2\times 3^2\times 15228748819\times 16339159782229,$$
$$x^3-y^2 = 3^3\times 7^2\times 17\times 730.$$

دومین حالت خاص $(x,y)=(3,2)$ است. این مسأله که 3^n-2^m در مقایسه با 2^m چقدر کوچک می‌تواند باشد، توسط ایتلوود ([Guy 1994]، F۲۳) مطرح شده است. مثالِ

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1+\frac{7153}{524288} = 1.013\ldots$$

با گامهای موسیقی ارتباط دارد.

برای مسائل دیگری مربوط به معادلات دیوفانتی نمایی، خواننده را ارجاع می‌دهیم به فصل ۱۲ کتاب شوری و تایدمن [ShT 1986] و نیز به مقالات توصیفی جدیدتر [Ti 1998] و [Sh 1999].

۲.۲ توـزیگلـروثـاشمیت

یکی از مسائل حل‌نشدهٔ اصلی در تقریبهای دیوفانتی یافتن صورت کارآمدی از قضیهٔ توـزیگلـروث[3] است: به‌ازای هر $\epsilon>0$ و هر عدد جبری گنگ α، ثابت مثبت $C(\alpha,\epsilon)$ وجود دارد به‌طوری که برای هر عدد گویای p/q،

$$|\alpha-\frac{p}{q}|>C(\epsilon)q^{-2-\epsilon}. \qquad (8.2)$$

از آنجا که به مسألهٔ دهم هیلبرت توسط ماتیاسویچ پاسخ منفی داده شده است، مینیوت اظهار کرده است که شاید ارائهٔ صورت کارآمدی از قضیهٔ زیرفضای اشمیت[4] (که قضیهٔ توـزیگلـروث را به تقریبهای دیوفانتی همزمان تعمیم می‌دهد) ناممکن باشد. اگر معلوم شود که برای حالت خاص قضیهٔ توـزیگلـروث نیز چنین است، آنگاه بنابر قول بومبیری[5] ([2] را ببینید)، صورت کارآمد حدس abc نیز غیرقابل حصول خواهد بود. میشل لانژون متوجه شد که حدس abc یک، نابرابریِ قویتر از نابرابری روث را نتیجه می‌دهد:

$$|\alpha-\frac{p}{q}|>\frac{C(\epsilon)}{R(pq)q^{\epsilon}}.$$

فعلاً بهبودهای کارآمد تنها برای کران پایین لیوویل شناخته شده‌اند و بهترکردن آنها هم خودْچالش بزرگی است.

یک هدف دیگر می‌تواند بهسازی تخمین در قضیهٔ روث باشد: در کران پایین (۸.۲) مطلوب است که $q^{-2-\epsilon}$ با مثلاً $q^{-2}(\log q)^{-1-\epsilon}$ جایگزین شود. انتظار می‌رود به‌ازای هر عدد حقیقی گنگ α از درجهٔ بزرگتر یا مساوی با ۳، در نابرابری (۸.۲) عبارت $q^{-2-\epsilon}$ را نتوان با q^{-2} جایگزین کرد، اما مجموعهٔ αهایی که به‌ازای آنها جواب را می‌دانیم تهی است! اغلب این مسأله برای حالت خاص عدد $\sqrt[3]{2}$ مطرح می‌شود، اما مثالی دیگر (منسوب به اُلام[1] ــ مثلاً [Guy 1994]، F۲۲ را ببینید) عدد جبری حقیقی ξ است که با

$$\xi=\frac{1}{\xi+y},\qquad y=\frac{1}{1+y}$$

تعریف می‌شود.

اساساً چیزی دربارهٔ بسط کسر مسلسل عددی جبری با درجهٔ بزرگتر یا مساوی با ۳ نمی‌دانیم؛ جواب هیچ‌یک از دو سؤال زیر معلوم نیست:

(۹.۲) آیا بسطی با خارج‌قسمتهای جزئی کراندار وجود دارد؟

(۱۰.۲) آیا بسطی با خارج‌قسمتهای جزئی بیکران وجود دارد؟

معمولاً انتظار می‌رود بسط کسر مسلسل یک عدد جبری حقیقی از درجهٔ حداقل ۳ همیشه خارج‌قسمتهای جزئی بیکران داشته باشد. به بیان دقیقتر انتظار می‌رود اعداد جبری حقیقی از درجهٔ بزرگتر یا مساوی با ۳ مانند «تقریباً همهٔ» اعداد حقیقی رفتار کنند.

فرض کنید $\psi(q)$ تابعی پیوسته با مقادیر حقیقی مثبت باشد. همچنین فرض کنید تابع $q\psi(q)$ غیرصعودی باشد. نابرابری

$$|\theta-\frac{p}{q}|<\frac{\psi(q)}{q} \qquad (11.2)$$

را در نظر بگیرید:

حدس ۱۲.۲. فرض کنید θ یک عدد جبری حقیقی از درجهٔ حداقل ۳ باشد. آنگاه نابرابری (۱۱.۲) بینهایت جواب صحیح p و q با ضابطهٔ $q>0$ دارد اگر و تنها اگر انتگرال

$$\int_1^\infty \psi(x)dx$$

واگرا باشد.

قضیهٔ زیرفضای اشمیت تعمیمی گسترده از قضیهٔ روث به تقریبهای همزمان است. دو حالت خاص عبارت‌اند از

- اگر اعداد جبری حقیقی $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ طوری باشند که $1,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ روی $\mathbb{Q}$ به‌طور خطی مستقل باشند، آنگاه به‌ازای هر $\epsilon>0$ نابرابری

$$\max_{1\le i\le n}\left|\alpha_i-\frac{p_i}{q}\right|<\frac{1}{q^{1+\frac{1}{n}+\epsilon}}$$

تنها تعدادی متناهی جواب $(p_1,\ldots,p_n,q)$ در $\mathbb{Z}^{n+1}$ با $q>0$ دارد.

1. L. V. Danilov 2. N. Elkies 3. Roth 4. W. M. Schmidt
5. E. Bombieri

1. Ulam

• اگر اعداد جبری حقیقی $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ طوری باشند که $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ روی $\mathbb{Q}$ به‌طور خطی مستقل باشند، آنگاه به‌ازای هر $\epsilon > 0$ نابرابری

$$|q_1\alpha_1 + \cdots + q_n\alpha_n - p| < \frac{1}{q^{n+\epsilon}}$$

تنها تعدادی متناهی جواب $(q_1, \ldots, q_n, p)$ در $\mathbb{Z}^{n+1}$ با $q = \max\{|q_1|, \ldots, |q_n|\} > 0$ دارد.

این دو نوع حکم دیوفانتی موازی با دو نوع از تقریبهای پاده[1] هستند. جالب خواهد بود مشابه قضیهٔ زیرفضای اشمیت در حالت تقریبهای پاده در نظر گرفته شود و همین‌طور تحقیق در مورد مشابه متناظر برای اصل انتقال خین‌چین[2] جالب است [Ca 1957].

یکی از مهمترین نتایج قضیهٔ زیرفضای اشمیت، متناهی‌بودن جوابهای ناتبهگون معادلهٔ

$$x_1 + \cdots + x_n = 1$$

است که در آن مجهولات عناصر صحیح (یا Sـصحیح) در یک میدان عددی هستند. در اینجا ناتبهگون به این معنی است که هیچ زیرمجموع سره صفر نمی‌شود. یک مسألهٔ حل‌نشدهٔ اصلی، اثبات یک صورت کارآمد این نتیجه است. قضیهٔ اشمیت، که تعمیمی از قضیهٔ روث است، کارآمد نیست. تنها به‌ازای $n = 2$، کرانهایی برای جوابهای Sـیکهٔ معادلهٔ $x_1 + x_2 = 1$، به یمن روش بیکر وجود دارد ([B 1975] فصل ۵؛ [La 1978b] فصل ۶؛ [ShT 1986] فصل ۱؛ [Se 1989] و [La 1991] را ببینید). مطلوب خواهد بود که روش بیکر (یا هر روش کارآمد دیگری) به حالت ابعاد بالاتر گسترش یابد.

تعمیمی از طیف مارکوف به تقریبهای همزمان هنوز در دسترس نیست: حتی اولین گام نیز ناشناخته است. اگر عدد صحیح مثبت n و اعداد حقیقی $\xi_1, \ldots, \xi_n$ که لااقل یکی از آنها گنگ است داده شده باشند، $c_n = c_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ را اینقیمم همهٔ cهایی در دامنهٔ $0 < c \leq 1$ که به‌ازای آنها نابرابری

$$q|q\xi_i - p_i|^n < c$$

تعدادی نامتناهی جواب دارد تعریف می‌کنیم. سپس ثابت تقریب دیوفانتی همزمان nبعدی γ_n را سوپریمم c_nها روی nتایی‌های $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ مانند بالا تعریف می‌کنیم. به پیروی از [۱] در زیرخلاصه‌ای از آنچه در مورد اولین مقادیر ثابتهای تقریب شناخته شده است می‌آوریم:

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.4472135955\ldots \quad \text{(Hurwitz)}$$

$$0.2857142857 = \frac{2}{7} \leq \gamma_2 \leq \frac{64}{169} = 0.3786982249\ldots \quad \text{(Cassels و Nowak)}$$

$$0.1206045378 = \frac{2}{5\sqrt{11}} \leq \gamma_3 \leq \frac{1}{2(\pi - 2)} = 0.4379845985\ldots \quad \text{(Cusick و Spohn)}$$

حال با مطرح‌کردن مسألهٔ وارینگ اهمیت اثبات نابرابریهای روث‌ـگونهٔ کارآمد برای اعداد جبری گنگ را نشان می‌دهیم.

1. Padé 2. Khinchine transference principle

در سال ۱۷۷۰، چند ماهی قبل از آنکه لاگرانژ اثبات کند هر عدد صحیح مثبت، مجموع حداکثر چهار مربع‌کامل است، وارینگ ([Wa 1770] فصل ۵، قضیهٔ (۹)۴۷) نوشت:

«هر عدد صحیح، مکعب یا مجموع دو، سه، ... یا نُه مکعب است؛ هر عدد صحیح همچنین مربع یک مربع یا مجموع حداکثر نوزده مربع یک مربع است و غیره. قوانین مشابهی را می‌توان برای تعداد متناظراً تعریف‌شده‌ای از کمیتهای از توان مشابه تأیید کرد.»

همچنین یادداشت ۱۵ مترجم در [Wa 1770] را ببینید.

به‌ازای $k \geq 2$، $g(k)$ را کوچکترین عدد صحیح مثبتی تعریف می‌کنیم به‌طوری که هر عدد صحیح مثبت، مجموع g عنصر به شکل x^k با $x \geq 0$ باشد. به عبارت دیگر به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، معادلهٔ

$$n = x_1^k + \cdots + x_m^k$$

در صورتی که $m = g(k)$ جواب داشته باشد، در حالی‌که nای موجود باشد که مجموع $g(k) - 1$ توان kام نباشد. قضیهٔ لاگرانژ که یک حدس باشه و فرما را حل و فصل کرد آن است که $g(2) = 4$. به پیروی از فصل ۴ در [N 1986]، در زیر مقادیر $g(k)$ را برای اولین kهای صحیح همراه با اسم کاشفان و تاریخ کشف می‌آوریم:

$k =$ 2	3	4	5	6	7
$g(k) =$ 4	9	19	37	73	143
J.L. Lagrange	A. Wieferich	R. Balasubramanian J-M. Deshouillers F. Dress	J. Chen	S.S. Pillai	L.E. Dickson
1770	1909	1986	1964	1940	1936

به‌ازای هر عدد صحیح $k \geq 2$، تعریف می‌کنیم

$$I(k) = 2^k + [(\frac{3}{2})^k] - 2$$

به‌راحتی می‌توان تحقیق کرد که $g(k) \geq I(k)$: می‌نویسیم

$$3^k = 2^k q + r, \qquad 0 < r < 2^k, \qquad q = [(\frac{3}{2})^k]$$

و عدد صحیح

$$N = 2^k q - 1 = (q-1)2^k + (2^k - 1)1^k$$

را در نظر می‌گیریم. از آنجا که $N < 3^k$، در نوشتن N به شکل مجموع توانهای kام هیچ جملهٔ 3^k ظاهر نمی‌شود و از آنجا که $N < 2^k q$، حداکثر $(q-1)$ جملهٔ 2^k داریم و بقیهٔ جملات 1^k هستند؛ بنابراین حداقل $(q-1) + (2^k - 1) = I(k)$ تا جمله لازم است.

به‌ازای $2 \leq k \leq 471600000$ تحقیق شده است که $g(k) = I(k)$، و مالر ثابت کرد که به‌ازای kهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ، $g(k) = I(k)$. مشکل آنجاست که اثبات مالر بر صورتی pـآدیک از قضیهٔ تو-زیگل-روث مبتنی است

و در نتیجه کارآمد نیست. بنابراین شکافی که حتی اندازه‌اش را نمی‌دانیم وجود دارد. حدس آن است که به‌ازای هر $k \geq ۲$، $g(k) = I(k)$. این حدس که پیشینه‌اش به ۱۸۵۳ برمی‌گردد از تخمین ([N 1986] صفحهٔ ۲۲۶ را ببینید):

$$\left\|\left(\frac{۳}{۲}\right)^k\right\| \geq ۲ \times \left(\frac{۳}{۴}\right)^k,$$

نتیجه می‌شود، که در آن $\|\cdot\|$ فاصله تا نزدیکترین عدد صحیح را نشان می‌دهد. همان‌طور که سینو دیوید[1] اشاره کرده است، چنین تخمینی (برای kهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ) از حدس abc نیز نتیجه می‌شود!

مالر در [M 1968]، Zـعدد را یک عدد حقیقی ناصفر α تعریف کرد به‌طوری که برای هر عدد صحیح مثبت n داشته باشیم $۰ \leq r_n < \frac{۱}{۲}$ که در آن r_n جزء کسری $\alpha(\frac{۳}{۲})^n$ است. معلوم نیست که آیا Zـعددی وجود دارد یا نه ([FlLP 1995] را ببینید). نکتهٔ دیگری را لیتلوود ([E۱۸ [Guy 1994) در ارتباط با این موضوع مطرح کرده است و آن اینکه ما هنوز نمی‌توانیم ثابت کنیم که وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند، جزء کسری e^n به سمت ۰ میل نمی‌کند.

بنا به حدس مشهوری از لیتلوود ([B 1975] فصل ۱۰، بخش ۱ و [PoV 2000])، به‌ازای هر زوج (x, y) از اعداد حقیقی و هر $\epsilon > ۰$، عدد صحیح مثبت q وجود دارد به‌طوری که

$$q\|qx\| \cdot \|qy\| < \epsilon.$$

بنابر قول مارگولیس[2] (نقل از لاشو[3])، اثباتهای موجود در مقاله‌ای به سال ۱۹۸۸ از اسکوبنکو[4] (M. R. 94d:11047 را ببینید)، درست نیستند و قابل اصلاح نمی‌باشند.

چندین مسألهٔ حل‌نشده مشهور به «مسألهٔ سدِّ دید» وجود دارد. یکی از آنها بدین قرار است: اگر $k_۱$، ...، k_n، n عدد صحیح مثبت باشند، عدد حقیقی x وجود دارد به‌طوری که

$$\|k_i x\| \geq \frac{۱}{n+۱} \qquad (۱ \leq i \leq n).$$

معلوم شده است که به‌جای $\frac{۱}{n+۱}$ نمی‌توان عدد بزرگتری قرار داد [CuP 1984].

مراجع

[B 1975] Baker, A. – *Transcendental number theory.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press. Cambridge, 1975, Second edition, 1990.

[B 1998] Baker, A. – Logarithmic forms and the *abc*-conjecture. Györy, Kalman (ed.) et al., *Number theory. Diophantine, computational and algebraic aspects.* Proceedings of the international conference, Eger. Hungary, July 29-August 2, 1996 Berlin: de Gruyter (1998), 37-44.

1. Sinnou David 2. G. Margulis 3. G. Lachud
4. B. F. Skubenko

[BaLSW 1996] Balasubramanian, R.; Langevin, M.; Shorey, T. N.; Waldschmidt, M. – On the maximal length of two sequences of integers in arithmetic progressions with the same prime divisors. Monatsh. Math. **121** N° (1996), 295-307.

[Br 1999] Browkin, J. – The *abc*-conjecture. *Number theory*, R.P. Bambah, V.C. Dumir and R.J. Hans Gill (éds), Hindustan Book Agency, New-Delhi, Indian National Science Academy and Birkhäuser-Verlag, (1999), 75-105.

[BuM 1999] Bugeaud, Y.; Mignotte, M. – Sur l'quation diophantienne $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$. II. C. R. Acad. Sci., Paris, Sr. I, Math. **328**, N° 9 (1999), 741-744.

[BuSh 2001] Bugeaud, Y.; Shorey, T. N. – On the number of solutions of the generalized Ramanujan-Nagell equation. J. Reine Angew. Math. **539** (2001), 55-74.

[Ca 1957] Cassels, J. W. S. – *An introduction to Diophantine approximation.* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, N° **45**. Cambridge University Press, New York, 1957.

[Cat 1844] Catalan, E. – Note extraite d'une lettre adressée à l'éditeur. J. reine Angew. Math., **27** (1844), 192.

[Coh 1993] Cohn, H. – Markoff geodesics in matrix theory. *Number theory with an emphasis on the Markoff spectrum (Provo, UT, 1991)*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **147**, Dekker, New York, (1993) 69-82.

[CuFl 1989] Cusick, T.W.; Flahive, M.E. – *The Markoff and Lagrange Spectra.* Mathematical Surveys and Monographs N° **30** American Mathematical Society, Providence, RI. 1989.

[CuP 1984] Cusick. T.W.; Pomerance. C. – View-obstruction problems. III. J. Number Theory **19** N° 2 (1984), 131-139.

[DaMR 1976] Davis, M.; Matiyasevich, Y.; Robinson, J. – Diophantine equations: a positive aspect of a negative solution. *Mathematical developments arising from Hilbert problems.* (Proc. Sympos. Pure Math., **28**, Part 2, Northern Illinois Univ., De Kalb, Ill., 1974). Amer. Math. Soc., Providence, R. I., (1979), 323-378.

[Du 2001] Dujella, A. – There are only finitely many Diophantine quintuples. J. Reine Angew. Math., to appear. (28pp).

[E 1980] Erdös, P. – How many pairs of products of consecutive integers have the same prime factors? Amer. Math. Monthly **87** (1980), 391-392.

[FlLP 1995] Flatto. L.; Lagarias, J. C.; Pollington, A. D. – On the range of fractional parts $\{\xi(p/q)^n\}$. Acta Arith., **70** N° 2 (1995), 125-147.

[Gu 2000] Guiness, I. G. – A sideways look at Hilbert's twenty-three problems. Notices Amer. Math. Soc. **47** N° 7 (2000), 752-757.

[Ma 1990] Masser, D. W. – Note on a conjecture of Szpiro. *Séminaire sur les Pinceaux de Courbes Elliptiques ("à la recherche de Mordell effectif")*; Paris, 1988. Soc. Math. France, Astérisque, **183** (1990), 19-23.

[Mat 1999] Matiyasevich, Yu. – Le dixième problème de Hilbert: que peut-on faire avec les équations diophantiennes? *La Recherche de la Vérité*, coll. L'écriture des Mathématiques. ACL-Les Éditions du Kangourou (1999), 281-305.

`http://logic.pdmi.ras.ru/Hilbert10`

[Mau 1997] Mauldin, R.D. – Ageneralization of Fermat's last theorem: the Beal conjecture and prize problem. Notices Amer, Math. Soc. **44** N° 11(1997). 1436-1437.

[Maz 1992] Mazur, B. – The topology of rational points. Experiment. Math. **1** N° 1 (1992), 35-45.

[Maz 2000] Mazur, B. – Questions about powers of numbers. Notices Amer. Math. Soc. **47** N° 2 (2000), 195-202.

[N 1986] Narkiewicz, W. – *Classical problems in number theory.* Polish Scientific Publ. **62** (1986).

[Œ1988] Œsterlé, J. – Nouvelles approches du "théorème" de Fermat. *Sém. Bourbki*, 1987/88, N° 694; Soc. Math. France, Astérisque, **161-162** (1988), 165-186.

[P 1999a] Philippon, P. – Quelques remarques sur des questions d'approximation diophantienne. Bull. Austral. Math. Soc., **59** (1999), 323-334. Addendum, Ibid., **61** (2000), 167-169.

[Pi 1945] Pillai, S. S. – On the equation $2^x - 3^y = 2^X + 3^Y$. Bull Calcutta Math. Soc. **37** (1945), 15-20.

[PoV 2000] Pollington, A. D.; Velani, S. L. – On a problem in simultaneous Diophantine approximation: Littlewood's conjecture. Acta Math. **185** N° 2 (2000), 287-306.

[Re 2000] Rémond, G. – Inégalité de Vojta en dimension supérieure. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa CI. Sci. (4) **29** (2000), 101-151.

[Ri 1994] Ribenboim, P. – *Catalan's conjecture. Are* 8 *and* 9 *the only consecutive powers?* Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.

[Ri 2000] Ribenbiom, P. – *My numbers, my friends.* Popular Lectures on Number Theory. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2000.

[Se 1989] Serre, J-P. – *Lectures on the Mordell-Weil theorem.* Aspects of Mathematics, **E15**. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989.

[Sh 1999] Shorey, T. N. – Exponential Diophantine equations involving products of consecutive integers. *Number Theory*, R.P. Bambah. V.C. Dumir and R.J. Hans Gill (éds), Hindustan Book

[Guy 1994] Guy, R. – *Unsolved problems in number theory.* Springer 1981. Second edition. Problem Books in Mathematics. Unsolved Problems in Intuitive Mathematics, **1**. Springer-Verlag, New York, 1994.

[Gy 2001] Gyarmati, K. – On a problem of Diophantus. Acta Arith., **97** N° 1 (2001), 53-65.

[H 1971] Hall, M. Jr. – The Diophantine equation $x^3 - y^2 = k$. *Computers in number theroy*, Proc. Sci. Res. Council Atlas Sympos. N° 2, Oxford, 1969. Academic Press, London, (1971), 173-198.

[Hi 1900] Hilbert, D. – Mathematical Promblems. Bull. Amer. Math. Soc. **37** N° 4 (2000), 407-436. Reprinted from Bull. Amer. Math. Soc. **8** (1902), 437-479.

[J 2000] Jackson, A. – Million-dollar Mathematics Prizes Announced. Notices Amer. Math. Soc. **47** N° 8 (2000), 877-879.

`http://www.claymath.org/`

[Kr 1999] Kraus, A. – On the equation $x^p + y^q = z^r$. The Ramanujan Journal, **3** *N°* 3 (1999), 315-333.

[La 1974] Lang, S. – Higher dimensional Diophantine problems. Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 779-787. Collected Papers, vol. II, Springer (2000), 102-110.

[La 1978b] Lang, S. – *Elliptic curves: Diophantine analysis.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **231**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[La 1990] Lang, S. – Old and new conjectured Diophantine inequalities. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **23** (1990), N° 1, 37-75. Collected Papers, vol. III, Springer (2000), 355-393

[La 1991] Lang, S. – *Number theory. III. Diophantine geometry.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 60. Springer-Verlag. Berlin, 1991. Corrected second printing: *Survey of Diophantine geometry.* 1997.

[La 1993] Lang, S. – *Algebra.* Third edition. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1993.

[La 1996] Lang, S. – La Conjecture de Bateman-Horn. Gazette des Mathématiciens. **67** (1996), 214-216. Collected Papers, vol. IV, Springer (2000), 213-216.

[Lan 1992] Langevin, M. – Partie sans facteur carré d'un produit d'entiers voisins. *Approximations diophantiennes et nombres transcendants* (Luminy, 1990), de Gruyter. Berlin (1992), 203-214.

[Lan 2001] Langevin, M. – Équations diophantiennes polynomiales à hautes multiplicités. J. Thor. Nombres Bordeaux **13** (2001). N° 1, 211-226.

[M 1968] Mahler, K. – An unsolved problem on the powers of 3/2. J. Austral. Math. Soc. **8** (1968), 313-321.

Agency, New-Delhi and Indian National Science Academy (1999), 463-495.

[Sh 2000] Shorey, T. N. – Some conjectures in the theory of exponential Diophantine equations. Publ. Math. Debrecen **56** (2000), N° 3-4, 631-641.

[ShT 1986] Shorey, T. N.; Tijdeman, R. – *Exponential Diophantine equations.* Cambridge Tracts in Mathematics, **87**. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1986.

[Si 1929] Siegel, C. L. – Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. Abh. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math., **1** (1929), 1-70. *Gesammelte Abhandlungen.* Springer-Verlag, Berlin-New York 1966 Band **I**, 209-266.

[Sie 1964] Sierpiński, W. – *A selection of problems in the theory of numbers.* Translated from the Polish by A. Sharma. Popular lectures in mathematics. **11**. A Pergamon Press Book The Macmillan Co., New York 1964.

[Sie 1970] Sierpiński, W. – *250 problems in elementary number theory.* Elsevier, 1970. Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics, N° **26** American Elsevier Publishing Co., Inc., New York; PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw 1970. *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres.* Translated from the English. Reprint of the 1972 French translation. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1992.

[So 2002] Sondow, J. – Criteria for Irrationality of Euler's Constant. Submitted

`http://arXiv.org/abs/math/0008051`

[StY 1991] Stewart, C. L.; Yu, Kun Rui – On the *abc* conjecture. Math. Ann. **291** N° 2 (1991), 225-230. II, Duke Math. J., **108** (2001), 169-181.

[Ti 1976b] Tijdeman, R. – On the equation of Catalan. Acta Arith. **29** N° 2 (1976), 197-209.

[Ti 1998] Tijdeman, R. – Exponential Diophantine equations 1986-1996. *Number theory*, Eger, 1996, de Gruyter, Berlin, (1998), 523-539.

[V 2000] Vojta, P. – On the ABC conjecture and Diophantine approximation by rational points. Amer. J. Math. **122** N° 4 (2000), 843-872.

[W 2000b] Waldschmidt, M. – *Diophantine Approximation on linear algebraic groups. Transcendence Properties of the Exponential Function in Several Variables.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **326**. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2000.

[Wa 1770] Waring, E. – *Meditationes algebraicæ.* Cambridge, 1770. English Translation, Amer. Math. Soc. 1991.

[Wo 1981] Woods. A. – *Some problems in logic and number theory. Thesis*, Manchester, 1981.

مراجعی دیگر در اینترنت

[1] `http://pauillac.inria.fr/algo/bsolve/constant/dioph/dioph.html`

[2] `http://www.math.unicaen.fr/~nitaj/bac.html`

صورت مشروح این مقاله در وب‌گاه مؤلف موجود است:

`http://www.math.jussieu.fr/~miw/articles/ps/odp.ps`

******

• این مقاله را نویسنده برای چاپ در نشر ریاضی نوشته است.

* میشل والدشمیت، دانشگاه پاریس ۶، فرانسه

`miw@math.Jussieu.fr`

ممکن است معماگونه به نظر برسد که ایدهٔ تقریب بر همهٔ علوم دقیق غالب است.

برتراند راسل

او بسیار هوشمند است ولی از ریاضیات بهره‌ای ندارد. همان‌طور که می‌دانید، این نقص بزرگی است.

از نامهٔ پاسکال به فرما

نشر ریاضی، سال ۱۴، شمارهٔ ۲، صص ۱۷-۲۴

گروههای کاکستر

محمد جلوداری‌ممقانی*

۱. مقدمه

مطالعهٔ گروههای کاکستر در اصل به بررسی انتظام و تقارنهای شکلهای هندسی از جمله پنج جسم افلاطونی مربوط است. برخی بر این عقیده‌اند که هدف اقلیدس از نگارش اصول تدوین کتابی در مورد اجسام افلاطونی برای مبتدیان بوده است [۱]. از این منظر می‌توان گفت که مطالعهٔ ویژگیهای عمل گروههای کاکستر (به‌عنوان کلیترین حالت گروههای انعکاسی) بر فضای کروی، اقلیدسی و یا هذلولوی، هدف اقلیدس را برآورده می‌کند و به‌علاوه، این گروهها کاربردهای وسیعی در ترکیبیات و نظریهٔ گروههای لی یافته‌اند. هدف این مقاله آشنا نمودن خواننده با مبحث گستردهٔ گروههای کاکستر است.

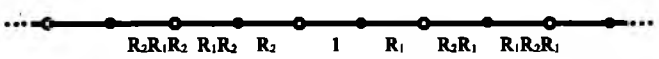
۲. کلایدسکوپ

در این بخش با روش داناد کاکستر برای ساختن گروههای تقارن آشنا می‌شویم.

وقتی جسمی را در جلو آیینه‌ای قرار می‌دهیم دو شیء دیده می‌شوند: جسم و تصویرش. اگر بتوانیم به داخل آیینه برویم باز هم همان دو شیء را می‌بینیم، زیرا تصویر تصویر همان جسم اولیه است. به بیان دیگر یک انعکاس تنهای R، گروهی مرتبهٔ ۲ با اعضای I و R تولید می‌کند. این گروه عضو دیگری ندارد زیرا $R^2 = I$ و بنابراین $R^{-1} = R$. می‌توان به‌جای یک آیینهٔ مسطح در فضا یک آیینهٔ خطی در صفحه یا یک آیینهٔ نقطه‌ای در خط به‌کار برد. نقطه خط را به دو نیم‌خط یا به دو شعاع تقسیم می‌کند و به‌عنوان آیینه‌ای که شعاعی را به شعاع دیگر تبدیل می‌کند عمل می‌نماید.

اما وقتی شیء بین دو آیینهٔ موازی قرار داده شود به لحاظ نظری تعداد تصاویر بینهایت می‌شود، زیرا تصویر هر تصویر، تصویر دیگری از جسم است و الی آخر. آیینه‌ها خود بینهایت تصویر دارند: آیینه‌های مجازی که مانند آیینه‌های واقعی عمل می‌کنند. به بیان دیگر دو انعکاس موازی R_1 و R_2 گروهی را تولید می‌کنند که اعضای آن عبارت‌اند از

$$I, R_1, R_2, R_1R_2, R_2R_1, R_1R_2R_1, R_2R_1R_2, \cdots$$



شکل ۱

در این گروه که به حاصلضرب آزاد دو گروه مرتبهٔ ۲ موسوم است روابط زیر برقرارند

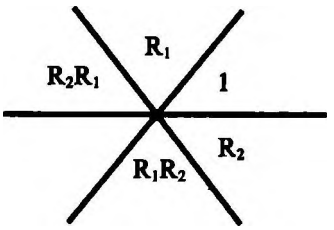
$$R_1^2 = R_2^2 = 1$$

همچنین می‌توان R_1 و R_2 را انعکاسهایی نسبت به دوخط موازی در صفحه یا نسبت به دو نقطه بر خط تلقی کرد. این دو نقطه و تصویرهای آنها (در آیینه‌های مجازی) خط را به بینهایت پاره‌خط مساوی تقسیم می‌کنند که به‌صورت زیر با اعضای گروه در ارتباط‌اند. پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ داده شده (ناحیهٔ اشیاء ممکن) را به عضو همانی گروه یعنی ۱ نسبت می‌دهیم و هر پاره‌خط دیگر را به عضوی از گروه نسبت می‌دهیم که پاره‌خط ۱ را به این پاره‌خط تصویر می‌کند (شکل ۱).

بنا به تعریف، نقطه را با تمام تصویرهای آن هم‌ارز می‌نامیم. بنابراین هر نقطه بر خط (ازجمله، نقاط انتهایی پاره‌خط‌ها) هم‌ارز است با نقطه‌ای در ۱ اما هیچ دو نقطهٔ داخلی پاره‌خط هم‌ارز نیستند. بنابراین پاره‌خط ۱ ناحیه‌ای بنیادی برای گروهی است که توسط R_1 و R_2 تولید می‌شود. در نتیجه هیچ دو نقطه‌ای از ۱ بجز نقاط انتهایی آن هم‌ارز نیستند.

دو آیینهٔ متقاطع یک کلایدسکوپ[1] (شکل‌نما، شهرفرنگ) معمولی تشکیل می‌دهند. این کلایدسکوپ را می‌توان به‌راحتی با استفاده از دو آیینهٔ مربعی هم‌اندازهٔ بدون قاب و یک قطعه نوار چسب به‌طوری که زاویهٔ بین دو آیینه قابل تغییر باشد و روی میز به‌صورت ایستاده قرار گیرند ساخت. هر برش افقی از این کلایدسکوپ را یک کلایدسکوپ دوبعدی می‌نامیم. روشن است که در این کلایدسکوپ، انعکاس نسبت به دو خط صورت می‌پذیرد. چون

1. kaleidoscope



شکل۲

تصویرهای هر نقطه (بجز نقطهٔ تلاقی دو آیینه) روی یک دایره قرار می‌گیرند، گروه گسسته است اگر و تنها اگر زاویهٔ بین دو آیینه مضرب گویایی از π باشد. در این حالت نیز کافی است این زاویه را $\frac{\pi}{p}$ انتخاب کنیم که در آن $p \geq ۲$ عددی صحیح و مثبت است. در واقع اگر به‌جای $\frac{۱}{p}$ کسر گویای $\frac{j}{p}$ با $j \geq ۲$ به‌عنوان ضریب π انتخاب شود آنگاه عددهای صحیح m و n وجود دارند که $m\frac{j}{p} + n = \frac{۱}{p}$. بنابراین زاویهٔ یکی از آیینه‌های مجازی با یکی از آیینه‌های واقعی $\frac{\pi}{p}$ است. در نتیجه شیء را بین دو آیینه که زاویهٔ آنها $\frac{\pi}{p}$ است قرار می‌دهیم و $۲p$ تصویر آن را که هر یک بین دو آیینهٔ مجاور قرار دارد مشاهده می‌کنیم. در شکل ۲ این وضع به‌ازای $p = ۳$ و بنابراین برای حالتی که زاویهٔ بین دو آیینهٔ واقعی $\frac{\pi}{۳}$ است نشان داده شده است.

در اینجا گروه حاصل از مرتبهٔ $۲p$ است و ناحیهٔ بنیادی آن ناحیهٔ بین دو شعاع حاصل از دو آیینهٔ واقعی است. عضوی از گروه که در شکل ذکر نشده است دو نمایش دارد: $R_۱R_۲R_۱$ و $R_۲R_۱R_۲$ به‌ترتیب بسته به اینکه از بالا به آن برسیم یا از پایین. اما این نمایشها بنابر روابط موجود در گروه یعنی

$$R_۱^۲ = R_۲^۲ = (R_۱R_۲)^p = ۱$$

برابرند. این گروه را با $[p]$ نشان می‌دهیم. حالت $[\infty]$ را می‌توان با در نظر گرفتن pای دلخواه و کمان مناسبی از دایره به‌عنوان ناحیهٔ بنیادی گروه حاصل و میل دادن p به بینهایت توجیه کرد. بنابراین به‌ازای $p = \infty$ شکل ۱ را به‌دست می‌آوریم. به همین ترتیب کلایدسکوپ‌های nبعدی و بنابراین گروههای تولیدشده توسط آنها را می‌توان تعریف کرد. برای اطلاع بیشتر به [۱] مراجعه کنید. گروههایی که کاکستر به این ترتیب به‌دست آورده است بخشی از خانوادهٔ وسیعی از گروهها هستند که ژاک تیتز آنها را در دههٔ هفتم قرن بیستم به افتخار کاکستر گروههای کاکستر نامیده است [۲]. در این دهه تیتز مطالعات گسترده‌ای در مورد گروههای مذکور انجام داد که بخشی از آن در [۳] آمده است.

۳. گروههای کاکستر

در این بخش مفاهیم اولیهٔ وابسته به گروههای کاکستر را می‌آوریم.

تعریف ۱. فرض کنید S مجموعه‌ای ناتهی و W گروهی با عضو خنثای ۱ و نمایش

$$W = \langle S | (ss')^{m(s,s')} = ۱; s, s' \in S \rangle$$

باشد، که در آن تابع $m : S \times S \to \mathbb{N} \cup \infty$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) به‌ازای هر $s \in S$، $m(s,s) = ۱$

۲) به‌ازای هر جفت s و s' از اعضای S، $m(s,s') = m(s',s)$.

در این‌صورت (W,S)، W، و S را به ترتیب یک دستگاه کاکستر، یک گروه کاکستر، و مولد کاکستر W می‌نامیم.

توجه می‌کنیم که بنابراین تعریف، مرتبهٔ عضو S در W برابر ۲ است و هنگامی که رابطه‌ای بین s و s' وجود ندارد، قرار می‌دهیم $m(s,s') = \infty$.

به هر دستگاه کاکستر یک گراف برچسب‌دار به نام گراف کاکستر وابسته است که رأسهای آن اعضای S هستند و رأس s به‌وسیلهٔ یالی به رأس s' وصل می‌شود اگر $m(s,s') \geq ۳$. بنابراین در یک گراف کاکستر

۱) هیچ رأسی توسط یالی به خودش وصل نمی‌شود؛

۲) اگر $m(s,s') = ۲$ آنگاه بین s و s' یالی وجود ندارد.

$m(s,s') \geq ۳$ را برچسب یال واصل بین رأسهای s و s' قرار می‌دهیم و معمولاً ۳ را روی یالی که برچسب ۳ دارد نمی‌نویسیم.

اگر گراف کاکستر یک گروه کاکستر همبند باشد، این گروه را تحویل‌ناپذیر می‌نامیم. لازم است قید کنیم که در این نوشته، گروههای کاکستر با مولد متناهی S مورد نظرند و بنابراین فرض می‌کنیم $S = \{s_۱, s_۲, \ldots, s_n\}$. هر ترتیب روی S دو ماتریس $n \times n$ متقارن M و A را به‌دست می‌دهد. درآیه‌های ماتریس اول که درواقع ماتریس مجاورت گراف کاکستر و موسوم به یک ماتریس کاکستر دستگاه (W,S) است برچسب‌های یالهای گراف کاکسترند و هر جا که بین دو رأس متفاوت یالی وجود ندارد ۲ و در غیر این‌صورت (درآیه‌های روی قطر اصلی) ۱اند. درآیه‌های ماتریس $A = (a_{ij})$ که به ماتریس کسینوسی کاکستر متناظر با M، موسوم است نسبت به‌ترتیب مذکور به‌صورت

$$a_{ij} = \begin{cases} -\cos\frac{\pi}{m_{ij}} & m_{ij} \neq \infty \\ ۱ & m_{ij} = \infty \end{cases}$$

تعریف می‌شوند، که در آن m_{ij} درآیه‌ای در M است. این ماتریسهای متقارن نقش ویژه‌ای در طبقه‌بندی گروههای کاکستر ایفا می‌کنند.

برای مثال، در اثبات قضیهٔ زیر که به طبقه‌بندی گروههای متناهی و تحویل‌ناپذیر کاکستر اختصاص دارد از این ماتریسها استفاده می‌شود.

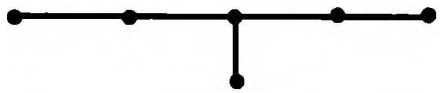
قضیهٔ ۱. هر گراف همبند کاکستر که گروه کاکستر وابسته به آن متناهی باشد متعلق به یکی از گرافهای زیر است:

۱) A_n؛ گروه جایگشتهای $n + ۱ \geq ۱$ حرف، $n \geq ۱$؛

۲) B_n؛ گروه $C_۲^n \rtimes \sigma_n$ از مرتبهٔ $۲^n n!$، $n \geq ۲$؛

۳) D_n؛ گروه $C_۲^{n-۱} \rtimes \sigma_n$ از مرتبهٔ $۲^{n-۱} n!$، $n \geq ۴$؛

۴) E_6؛ گروه از مرتبهٔ $۲^{۷} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵ = ۵۱۸۴۰$؛

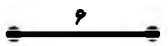


۵) E_7؛ گروه از مرتبهٔ $۲^{۱۰} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵ \cdot ۷ = ۲۹۰۳۰۴۰$؛

۶) F_8؛ مرتبهٔ این گروه $۲^{۱۴} \cdot ۳^{۵} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ = ۶۹۶۷۲۹۶۰۰$؛

۷) F_4؛ گروه حل‌پذیر مرتبهٔ $۲^{۷} \cdot ۳^{۲} = ۱۱۵۲$؛

۸) C_2؛ گروه دووجهی $C_4 \rtimes C_2$ از مرتبهٔ ۱۲؛



۹) H_3؛ گروه $A_5 \rtimes C_2$ از مرتبهٔ ۱۲۰؛

۱۰) H_4؛ گروه از مرتبهٔ ۱۴۴۰۰؛

۱۱) $I_2(p)$؛ گروه دووجهی $C_p \rtimes C_2$ از مرتبهٔ $2p$.

اثبات. با به‌کار بردن روش حالت به حالت ثابت می‌کنند که ماتریس کسینوسی کاکستر معین مثبت است اگر و تنها اگر گراف کاکستر متناظر با آن متعلق به یکی از گرافهای فوق باشد [۵]. ■

بنابراین تا جایی که به گروههای متناهی که توسط مجموعه‌ای متناهی از انعکاسها تولید می‌شوند مربوط می‌شود ماتریس کاکستر متناظر است با یک گروه کاکستر اگر ماتریس کسینوسی متناظر با آن معین مثبت باشد. پس سؤال طبیعی این است که آیا سایر ماتریسهای کاکستر نیز متناظر با گروههای کاکسترند؟ به‌طوری که در [۲] و [۳] ثابت شده است پاسخ این سؤال مثبت است، یعنی به‌ازای هر ماتریس کاکستر یک گروه کاکستر وجود دارد که ممکن است نامتناهی باشد و یک ماتریس کاکستر آن همان ماتریس داده شده است.

متذکر می‌شویم که به‌طور کلی قضیه‌ای در مورد طبقه‌بندی گروههای کاکستر اثبات نشده است، اما دسته‌های وسیعی از این گروهها از جنبه‌های گوناگونی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. دستهٔ معروفی از این گروهها گروههای هندسی‌اند که توسط کلایدسکوپ‌ها تولید می‌شوند. این گروهها که به گروههای انعکاسی نیز موسوم‌اند بر سه دسته‌اند: گروههای انعکاسی کروی که روی یک کره عمل می‌کنند و بنابراین ناحیهٔ بنیادی آنها بخش محدبی از یک کرهٔ دوبعدی است، گروههای مذکور در قضیهٔ ۱ از نوع گروههای کروی‌اند؛ گروههای انعکاسی اقلیدسی که روی فضاهای اقلیدسی عمل می‌کنند و بنابراین ناحیهٔ بنیادی آنها بخش محدبی از فضای اقلیدسی مربوط است، و سرانجام گروههای انعکاسی هذلولوی که روی فضاهای هذلولوی عمل می‌کنند. برای اطلاعات بیشتر به [۶] مراجعه کنید.

گروههای

$$W = \langle a, b, c | a^۲ = b^۲ = c^۲ = (ac)^p = (bc)^q = (ca)^r = ۱ \rangle$$

که در آن p، q، r اعداد صحیح و مثبت‌اند، کروی، اقلیدسی، یا هذلولوی‌اند هرگاه

$$\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} + \frac{۱}{r}$$

به‌ترتیب بزرگتر از، مساوی با، یا کوچکتر از ۱ باشد ([۴] و [۵]).

در حالت کلی، این گزاره که به‌ازای هر فضای هذلولوی H^n گروه کاکستری هست که روی آن با ایزومتری عمل می‌کند نادرست است ([۴] و [۶]). گروههای کاکستر جبری بسیاری وجود دارند که به هیچ‌یک از این دسته‌ها تعلق ندارند.

هرگروه‌کاکستر (W, S) دارای زیرگروههای خاصی موسوم به زیرگروههای سهموی است که در مطالعهٔ هندسی گروههای کاکستر اهمیت بسزایی دارند. به‌طور مشخص، هرگاه $S' \subset S$ و W' توسط S' تولید شود می‌گوییم W' یک زیرگروه سهموی W است. بین دستگاههای کاکستر و زیرگروههای سهموی رابطهٔ نزدیکی وجود دارد:

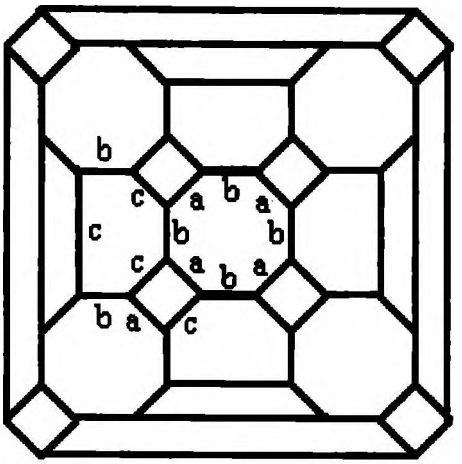
گزارهٔ ۱ فرض کنید (W, S) یک دستگاه کاکستر باشد، $S' \subset S$، و W' توسط S' تولید شود. در این‌صورت (W', S') یک دستگاه کاکستر است.

اثبات. به [۷] مراجعه کنید. ■

۴. تابع رشد، سری رشد و مشخصهٔ اویلر

یکی از مسأله‌های مهم نظریهٔ ترکیبیاتی گروهها «مسألهٔ واژه» است. صورتی از این مسأله در مورد گروههای کاکستر از این قرار است: به‌ازای دستگاه کاکستر (W, S) آیا الگوریتمی وجود دارد که به‌ازای هر واژهٔ $w \in S^*$ تعیین کند که این واژه معرف عضو خنثای گروه W هست یا نیست؟ البته این مسأله در حالت کلی حل‌پذیر نیست (برای اطلاعات بیشتر رجوع کنید به [۹]). اما در مورد گروههای کاکستر حل‌پذیر است [۱]. راه‌حلهای عملی این مسأله موجب شده‌اند مفاهیمی چون رشد[1] و همرشد[2] گروه نه تنها در نظریهٔ مذکور که در نظریه‌های احتمالاتی گروهها و نظریهٔ گامهای تصادفی روی گروهها و گرافها، اعتبار فراوانی کسب کنند (رجوع کنید به [۱۹] و مرجعهای آن). در این بخش به مفهوم رشد گروههای کاکستر و سری رشد این گروهها با استفاده از مفهوم گراف کیلی می‌پردازیم و رابطهٔ آن را با مشخصهٔ اویلر گروه داده‌شده بیان می‌کنیم. از آنجا که رشد رابطهٔ نزدیکی با حجم و این یکی قرابت ویژه‌ای با مفهوم فاصله دارد نخست به مفهوم فاصله روی گروه می‌پردازیم [۲۱].

1. growth 2. cogrowth



شکل۳

تعریف ۲. فرض کنید (W,S) یک دستگاه کاکستر باشد که در آن S مجموعه‌ای متناهی است و شامل عضو خنثای گروه نیست. منظور از گراف کیلی W نسبت به S گرافی است که رأسهای آن اعضای Wاند و بین دو عضو g و h یالی رسم می‌شود اگر و تنها اگر $g^{-1}h \in S$.

روشن است که گراف کیلی متناهی است اگر و فقط اگر گروه W متناهی باشد.

مثال ۱. در شکل ۳ گراف کیلی گروه متناهی

$$W = \langle a,b,c | a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^4 = (bc)^3 = (ca)^2 = 1 \rangle$$

را که به ردهٔ B_3 تعلق دارد رسم کرده‌ایم.

برای تبدیل W به یک فضای متری ابتدا لازم است مفهوم فاصلهٔ دو عضو دلخواه از آن را تعریف کنیم.

تعریف ۳. به‌ازای هر عضو $w \neq 1$ از گروه کاکستر W با مولد متناهی کاکستر S، طول w نسبت به S را با $|w|_S$ و یا اگر ابهامی در میان نباشد با $|w|$ نشان می‌دهیم و آن را به‌صورت

$$|w| = \inf \{l | w = s_1 s_2 \cdots s_l,\ s_i \in S,\ 1 \leq i \leq l\}$$

تعریف می‌کنیم.

طول عضو خنثای W را برابر با صفر تعریف می‌کنیم. اگر g و h دو عضو از W باشند فاصلهٔ آنها نسبت به S را با $d_S(g \cdot h)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d_S(g \cdot h) = |g^{-1}h|$$

به‌آسانی دیده می‌شود که اگر W، S و d طبق تعریف فوق داده شده باشند آنگاه d یک متریک بر W است و تحت ضرب از طرف چپ ناوردا‌ست.

از مفهومهای مهم در هر فضای متری مفاهیم کره و گوی‌اند. بنابه تعریف، کرهٔ به مرکز ۱ و شعاع n مجموعهٔ تمام اعضای گروه است که طول آنها n است. تعداد اعضای این مجموعه را با a_n نشان می‌دهیم. مجموعهٔ نقاط داخل و روی کرهٔ به مرکز ۱ و شعاع n را گوی بسته به مرکز ۱ و شعاع n می‌نامیم. تعداد اعضای این مجموعه را که تابعی از $\mathbb{N} \cup \{0\}$ به $\mathbb{N}$ است تابع رشد W نسبت به S می‌نامیم و با $\gamma(n)$ نشان می‌دهیم. اگر تعداد اعضایی از گروه را که روی کرهٔ به مرکز ۱ و شعاع n قرار دارند با a_n نشان دهیم آنگاه $a_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$.

ملاحظه می‌کنیم که تعریف γ_n و a_n به مجموعهٔ مولد گروه بستگی دارد. در زیر پس از آوردن یک تعریف ثابت می‌کنیم که این وابستگی تا حدی قابل اغماض است.

تعریف ۴. دو فضای متری (M,d) و (M',d') را شبه‌ایزومتریک می‌نامیم هرگاه توابع $f: M \to M'$ و $g: M' \to M$ و اعداد ثابت $a > 0$ و $b \geq 0$ یافت شوند به‌طوری که

۱) $d'(f(x), f(y)) \leq ad(x,y) + b$ به‌ازای هر دو عضو x و y از M؛

۲) $d(g(x'), g(y')) \leq ad'(x',y') + b$ به‌ازای هر دو عضو x' و y' از M'؛

۳) $d'(fg(x'), x') \leq b$ به‌ازای هر عضو x' از M'؛

۴) $d(gf(x), x) \leq b$ به‌ازای هر عضو x از M.

توجه می‌کنیم که در شرایط ۱)ـ۴) برابری aها و برابری bها ضرورتی ندارد و می‌توان این تعریف را به‌جای دو عدد با شش عدد بیان کرد.

قضیهٔ ۲. فرض کنید $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ و $S' = \{t_1, \ldots, t_l\}$ دو مولد متناهی برای گروه کاکستر W باشند. اگر d و d' به‌ترتیب متریکهای حاصل از S و S' بر W باشند آنگاه (W,d) و (W,d') شبه ایزومتریک‌اند.

اثبات. در اینجا به‌جای توابع f و g در تعریف فوق تابع همانی را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $b = 0$. فرض کنید طول عضو w نسبت به S برابر با n است و لذا اعضای $s_1, \ldots, s_n$ متعلق به S وجود دارند به‌طوری‌که

$$w = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$$

فرض می‌کنیم $a = \max\{\alpha, \beta\}$ که در آن α و β به‌ترتیب ماکسیمم طولهای اعضای S نسبت به S' و برعکس هستند. ملاحظه می‌کنیم که $|w|_{S'} \leq a\,|w|_S$ و $|w|_S \leq a\,|w|_{S'}$، و برهان تمام است. ■

تعریف ۵. می‌گوییم رشد تابع $\gamma_1(n)$ از رشد تابع $\gamma_2(n)$ سریعتر نیست و می‌نویسیم

$$\gamma_1(n) \preccurlyeq \gamma_2(n)$$

هرگاه $c \geq 1$ یافت شود به‌طوری که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$$\gamma_1(n) \leq c\gamma_2(n)$$

هرگاه $\gamma_1(n) \preccurlyeq \gamma_2(n)$ و $\gamma_2(n) \preccurlyeq \gamma_1(n)$ می‌گوییم این دو تابع هم‌ارزند و می‌نویسیم $\gamma_1(n) \sim \gamma_2(n)$.

نشر ریاضی، سال ۱۴، شمارهٔ ۲، صص ۱۷-۲۴

گروههای کاکستر

محمد جلوداری‌ممقانی *

۱. مقدمه

مطالعهٔ گروههای کاکستر در اصل به بررسی انتظام و تقارنهای شکلهای هندسی از جمله پنج جسم افلاطونی مربوط است. برخی بر این عقیده‌اند که هدف اقلیدس از نگارش اصول تدوین کتابی در مورد اجسام افلاطونی برای مبتدیان بوده است [۱]. از این منظر می‌توان گفت که مطالعهٔ ویژگیهای عمل گروههای کاکستر (به‌عنوان کلیترین حالت گروههای انعکاسی) بر فضای کروی، اقلیدسی و یا هذلولوی، هدف اقلیدس را برآورده می‌کند و به‌علاوه، این گروهها کاربردهای وسیعی در ترکیبیات و نظریهٔ گروههای لی یافته‌اند. هدف این مقاله آشنا نمودن خواننده با مبحث گستردهٔ گروههای کاکستر است.

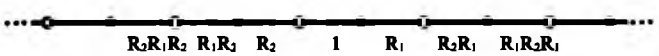
۲. کلایدسکوپ

در این بخش با روش دانلد کاکستر برای ساختن گروههای تقارن آشنا می‌شویم.

وقتی جسمی را در جلو آیینه‌ای قرار می‌دهیم دو شیء دیده می‌شوند: جسم و تصویرش. اگر بتوانیم به داخل آیینه برویم باز هم همان دو شیء را می‌بینیم، زیرا تصویر تصویر همان جسم اولیه است. به بیان دیگر یک انعکاس تنهای R، گروهی مرتبهٔ ۲ با اعضای I و R تولید می‌کند. این گروه عضو دیگری ندارد زیرا $R^2 = I$ و بنابراین $R^{-1} = R$. می‌توان به‌جای یک آیینهٔ مسطح در فضا یک آیینهٔ خطی در صفحه یا یک آیینهٔ نقطه‌ای در خط به‌کار برد. نقطه خط را به دو نیم‌خط یا به دو شعاع تقسیم می‌کند و به‌عنوان آیینه‌ای که شعاعی را به شعاع دیگر تبدیل می‌کند عمل می‌نماید.

اما وقتی شیء بین دو آیینهٔ موازی قرار داده شود به لحاظ نظری تعداد تصاویر بینهایت می‌شود، زیرا تصویر هر تصویر، تصویر دیگری از جسم است و الی آخر. آیینه‌ها خود بینهایت تصویر دارند: آیینه‌های مجازی که مانند آیینه‌های واقعی عمل می‌کنند. به بیان دیگر دو انعکاس موازی R_1 و R_2 گروهی را تولید می‌کنند که اعضای آن عبارت‌اند از

$$I, R_1, R_2, R_1R_2, R_2R_1, R_1R_2R_1, R_2R_1R_2, \cdots$$



شکل ۱

در این گروه که به حاصلضرب آزاد دو گروه مرتبهٔ ۲ موسوم است روابط زیر برقرارند

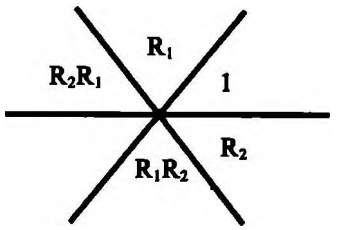
$$R_1^2 = R_2^2 = 1$$

همچنین می‌توان R_1 و R_2 را انعکاسهایی نسبت به دوخط موازی در صفحه یا نسبت به دو نقطه بر خط تلقی کرد. این دو نقطه و تصویرهای آنها (در آیینه‌های مجازی) خط را به بینهایت پاره‌خط مساوی تقسیم می‌کنند که به‌صورت زیر با اعضای گروه در ارتباط‌اند. پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ داده شده (ناحیهٔ اشیاء ممکن) را به عضو همانی گروه یعنی ۱ نسبت می‌دهیم و هر پاره‌خط دیگر را به عضوی از گروه نسبت می‌دهیم که پاره‌خط ۱ را به این پاره‌خط تصویر می‌کند (شکل ۱).

بنا به تعریف، نقطه را با تمام تصویرهای آن هم‌ارز می‌نامیم. بنابراین هر نقطه بر خط (ازجمله، نقاط انتهایی پاره‌خط‌ها) هم‌ارز است با نقطه‌ای در ۱ اما هیچ دو نقطهٔ داخلی پاره‌خط هم‌ارز نیستند. بنابراین پاره‌خط ۱ ناحیه‌ای بنیادی برای گروهی است که توسط R_1 و R_2 تولید می‌شود. در نتیجه هیچ دو نقطه‌ای از ۱ بجز نقاط انتهایی آن هم‌ارز نیستند.

دو آیینهٔ متقاطع یک کلایدسکوپ[1] (شکل‌نما، شهرفرنگ) معمولی تشکیل می‌دهند. این کلایدسکوپ را می‌توان به‌راحتی با استفاده از دو آیینهٔ مربعی هم‌اندازهٔ بدون قاب و یک قطعه نوار چسب به‌طوری که زاویهٔ بین دو آیینه قابل تغییر باشد و روی میز به‌صورت ایستاده قرار گیرند ساخت. هر برش افقی از این کلایدسکوپ را یک کلایدسکوپ دوبعدی می‌نامیم. روشن است که در این کلایدسکوپ، انعکاس نسبت به دو خط صورت می‌پذیرد. چون

1. kaleidoscope



شکل۲

تصویرهای هر نقطه (بجز نقطهٔ تلاقی دو آیینه) روی یک دایره قرار می‌گیرند، گروه گسسته است اگر و تنها اگر زاویهٔ بین دو آیینه مضرب گویایی از π باشد. در این حالت نیز کافی است این زاویه را $\frac{\pi}{p}$ انتخاب کنیم که در آن $p \geq ۲$ عددی صحیح و مثبت است. در واقع اگر به‌جای $\frac{۱}{p}$ کسر گویای $\frac{j}{p}$ با $j \geq ۲$ به‌عنوان ضریب π انتخاب شود آنگاه عددهای صحیح m و n وجود دارند که $m\frac{j}{p} + n = \frac{۱}{p}$. بنابراین زاویهٔ یکی از آیینه‌های مجازی با یکی از آیینه‌های واقعی $\frac{\pi}{p}$ است. در نتیجه شیء را بین دو آیینه که زاویهٔ آنها $\frac{\pi}{p}$ است قرار می‌دهیم و $۲p$ تصویر آن را که هر یک بین دو آیینهٔ مجاور قرار دارد مشاهده می‌کنیم. در شکل ۲ این وضع به‌ازای $p = ۳$ و بنابراین برای حالتی که زاویهٔ بین دو آیینهٔ واقعی $\frac{\pi}{۳}$ است نشان داده شده است.

در اینجا گروه حاصل از مرتبهٔ $۲p$ است و ناحیهٔ بنیادی آن ناحیهٔ بین دو شعاع حاصل از دو آیینهٔ واقعی است. عضوی از گروه که در شکل ذکر نشده است دو نمایش دارد: $R_۱R_۲R_۱$ و $R_۲R_۱R_۲$ به‌ترتیب بسته به اینکه از بالا به آن برسیم یا از پایین. اما این نمایشها بنابر روابط موجود در گروه یعنی

$$R_۱^۲ = R_۲^۲ = (R_۱R_۲)^p = ۱$$

برابرند. این گروه را با $[p]$ نشان می‌دهیم. حالت $[\infty]$ را می‌توان با در نظر گرفتن pای دلخواه و کمان مناسبی از دایره به‌عنوان ناحیهٔ بنیادی گروه حاصل و میل دادن p به بینهایت توجیه کرد. بنابراین به‌ازای $p = \infty$ شکل ۱ را به‌دست می‌آوریم. به همین ترتیب کلایدسکوپ‌های nبعدی و بنابراین گروههای تولیدشده توسط آنها را می‌توان تعریف کرد. برای اطلاع بیشتر به [۱] مراجعه کنید. گروههایی که کاکستر به این ترتیب به‌دست آورده است بخشی از خانوادهٔ وسیعی از گروهها هستند که ژاک تیتز آنها را در دههٔ هفتم قرن بیستم به افتخار کاکستر گروههای کاکستر نامیده است [۲]. در این دهه تیتز مطالعات گسترده‌ای در مورد گروههای مذکور انجام داد که بخشی از آن در [۳] آمده است.

۳. گروههای کاکستر

در این بخش مفاهیم اولیهٔ وابسته به گروههای کاکستر را می‌آوریم.

تعریف ۱. فرض کنید S مجموعه‌ای ناتهی و W گروهی با عضو خنثای ۱ و نمایش

$$W = \langle S | (ss')^{m(s,s')} = ۱; s, s' \in S \rangle$$

باشد، که در آن تابع $m : S \times S \to \mathbf{N} \cup \infty$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) به‌ازای هر $s \in S$، $m(s,s) = ۱$

۲) به‌ازای هر جفت s و s' از اعضای S، $m(s,s') = m(s',s)$.

در این‌صورت (W,S)، W، و S را به ترتیب یک دستگاه کاکستر، یک گروه کاکستر، و مولد کاکستر W می‌نامیم.

توجه می‌کنیم که بنابراین تعریف، مرتبهٔ عضو S در W برابر ۲ است و هنگامی که رابطه‌ای بین s و s' وجود ندارد، قرار می‌دهیم $m(s,s') = \infty$.

به هر دستگاه کاکستر یک گراف برچسب‌دار به نام گراف کاکستر وابسته است که رأسهای آن اعضای S هستند و رأس s به‌وسیلهٔ یالی به رأس s' وصل می‌شود اگر $m(s,s') \geq ۳$. بنابراین در یک گراف کاکستر

۱) هیچ رأسی توسط یالی به خودش وصل نمی‌شود؛

۲) اگر $m(s,s') = ۲$ آنگاه بین s و s' یالی وجود ندارد.

$m(s,s') \geq ۳$ را برچسب یال واصل بین رأسهای s و s' قرار می‌دهیم و معمولاً ۳ را روی یالی که برچسب ۳ دارد نمی‌نویسیم.

اگر گراف کاکستر یک گروه کاکستر همبند باشد، این گروه را تحویل‌ناپذیر می‌نامیم. لازم است قید کنیم که در این نوشته، گروههای کاکستر با مولد متناهی S مورد نظرند و بنابراین فرض می‌کنیم $S = \{s_۱, s_۲, \ldots, s_n\}$. هر ترتیب روی S دو ماتریس $n \times n$ متقارن M و A را به‌دست می‌دهد. درآیه‌های ماتریس اول که در واقع ماتریس مجاورت گراف کاکستر و موسوم به یک ماتریس کاکستر دستگاه (W,S) است برچسب‌های یالهای گراف کاکسترند و هر جا که بین دو رأس متفاوت یالی وجود ندارد ۲ و در غیر این‌صورت (درآیه‌های روی قطر اصلی) ۱اند. درآیه‌های ماتریس $A = (a_{ij})$ که به ماتریس کسینوسی کاکستر متناظر با M، موسوم است نسبت به‌ترتیب مذکور به‌صورت

$$a_{ij} = \begin{cases} -\cos\frac{\pi}{m_{ij}} & m_{ij} \neq \infty \\ ۱ & m_{ij} = \infty \end{cases}$$

تعریف می‌شوند، که در آن m_{ij} درآیه‌ای در M است. این ماتریسهای متقارن نقش ویژه‌ای در طبقه‌بندی گروههای کاکستر ایفا می‌کنند.

برای مثال، در اثبات قضیهٔ زیر که به طبقه‌بندی گروههای متناهی و تحویل‌ناپذیر کاکستر اختصاص دارد از این ماتریسها استفاده می‌شود.

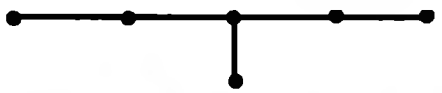
قضیهٔ ۱. هر گراف همبند کاکستر که گروه کاکستر وابسته به آن متناهی باشد متعلق به یکی از گرافهای زیر است:

۱) A_n؛ گروه جایگشتهای $n + ۱ \geq ۱$ حرف، $n \geq ۱$؛

۲) B_n؛ گروه $C_۲^n \rtimes \sigma_n$ از مرتبهٔ $۲^n n!$، $n \geq ۲$؛

۳) D_n؛ گروه $C_۲^{n-۱} \rtimes \sigma_n$ از مرتبهٔ $۲^{n-۱} n!$، $n \geq ۴$؛

۴) E_6؛ گروه از مرتبهٔ $۲^{۷} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵ = ۵۱۸۴۰$؛



۵) E_7؛ گروه از مرتبهٔ $۲^{۱۰} \cdot ۳^{۴} \cdot ۵ \cdot ۷ = ۲۹۰۳۰۴۰$؛

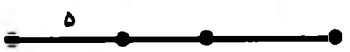
۶) F_8؛ مرتبهٔ این گروه $۲^{۱۴} \cdot ۳^{۵} \cdot ۵^{۲} \cdot ۷ = ۶۹۶۷۲۹۶۰۰$؛

۷) F_4؛ گروه حل‌پذیر مرتبهٔ $۲^{۷} \cdot ۳^{۲} = ۱۱۵۲$؛

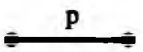
۸) C_2؛ گروه دووجهی $C_4 \rtimes C_2$ از مرتبهٔ ۱۲؛

۹) H_3؛ گروه $A_5 \rtimes C_2$ از مرتبهٔ ۱۲۰؛

۱۰) H_4؛ گروه از مرتبهٔ ۱۴۴۰۰؛



۱۱) $I_2(p)$؛ گروه دووجهی $C_p \rtimes C_2$ از مرتبهٔ $2p$.



اثبات. با به‌کار بردن روش حالت به حالت ثابت می‌کنند که ماتریس کسینوسی کاکستر معین مثبت است اگر و تنها اگر گراف کاکستر متناظر با آن متعلق به یکی از گرافهای فوق باشد [۵]. ■

بنابراین تا جایی که به گروههای متناهی که توسط مجموعه‌ای متناهی از انعکاسها تولید می‌شوند مربوط می‌شود ماتریس کاکستر متناظر است با یک گروه کاکستر اگر ماتریس کسینوسی متناظر با آن معین مثبت باشد. پس سؤال طبیعی این است که آیا سایر ماتریسهای کاکستر نیز متناظر با گروههای کاکسترند؟ به‌طوری که در [۲] و [۳] ثابت شده است پاسخ این سؤال مثبت است، یعنی به‌ازای هر ماتریس کاکستر یک گروه کاکستر وجود دارد که ممکن است نامتناهی باشد و یک ماتریس کاکستر آن همان ماتریس داده شده است.

متذکر می‌شویم که به‌طور کلی قضیه‌ای در مورد طبقه‌بندی گروههای کاکستر اثبات نشده است، اما دسته‌های وسیعی از این گروهها از جنبه‌های گوناگونی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. دستهٔ معروفی از این گروهها گروههای هندسی‌اند که توسط کلایدسکوپ‌ها تولید می‌شوند. این گروهها که به گروههای انعکاسی نیز موسوم‌اند بر سه دسته‌اند: گروههای انعکاسی کروی که روی یک کره عمل می‌کنند و بنابراین ناحیهٔ بنیادی آنها بخش محدبی از یک کرهٔ دوبعدی است، گروههای مذکور در قضیهٔ ۱ از نوع گروههای کروی‌اند؛ گروههای انعکاسی اقلیدسی که روی فضاهای اقلیدسی عمل می‌کنند و بنابراین ناحیهٔ بنیادی آنها بخش محدبی از فضای اقلیدسی مربوط است، و سرانجام گروههای انعکاسی هذلولوی که روی فضاهای هذلولوی عمل می‌کنند. برای اطلاعات بیشتر به [۶] مراجعه کنید.

گروههای

$$W = \langle a, b, c | a^{۲} = b^{۲} = c^{۲} = (ac)^{p} = (bc)^{q} = (ca)^{r} = ۱ \rangle$$

که در آن p، q، r اعداد صحیح و مثبت‌اند، کروی، اقلیدسی، یا هذلولوی‌اند هرگاه

$$\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} + \frac{۱}{r}$$

به‌ترتیب بزرگتر از، مساوی با، یا کوچکتر از ۱ باشد ([۴] و [۵]).

در حالت کلی، این گزاره که به‌ازای هر فضای هذلولوی H^n گروه کاکستری هست که روی آن با ایزومتری عمل می‌کند نادرست است ([۴] و [۶]). گروههای کاکستر جبری بسیاری وجود دارند که به هیچ‌یک، از این دسته‌ها تعلق ندارند.

هرگروه‌کاکستر (W, S) دارای زیرگروههای خاصی موسوم به زیرگروههای سهموی است که در مطالعهٔ هندسی گروههای کاکستر اهمیت بسزایی دارند. به‌طور مشخص، هرگاه $S' \subset S$ و W' توسط S' تولید شود می‌گوییم W' یک زیرگروه سهموی W است. بین دستگاههای کاکستر و زیرگروههای سهموی رابطهٔ نزدیکی وجود دارد:

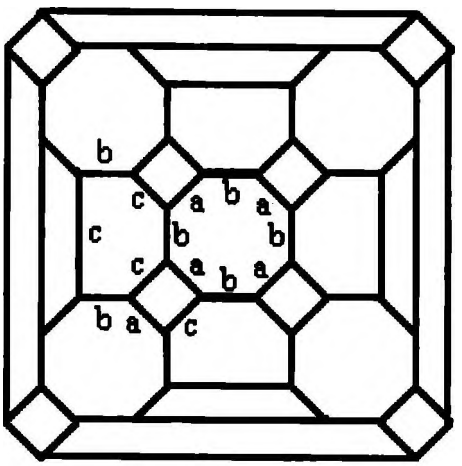
گزارهٔ ۱ فرض کنید (W, S) یک دستگاه کاکستر باشد، $S' \subset S$، و W' توسط S' تولید شود. در این‌صورت (W', S') یک دستگاه کاکستر است.

اثبات. به [۷] مراجعه کنید. ■

۴. تابع رشد، سری رشد و مشخصهٔ اویلر

یکی از مسأله‌های مهم نظریهٔ ترکیبیاتی گروهها «مسألهٔ واژه» است. صورتی از این مسأله در مورد گروههای کاکستر از این قرار است: به‌ازای دستگاه کاکستر (W, S) آیا الگوریتمی وجود دارد که به‌ازای هر واژهٔ $w \in S^*$ تعیین کند که این واژه معرف عضو خنثای گروه W هست یا نیست؟ البته این مسأله در حالت کلی حل‌پذیر نیست (برای اطلاعات بیشتر رجوع کنید به [۹]). اما در مورد گروههای کاکستر حل‌پذیر است [۱]. راه‌حلهای عملی این مسأله موجب شده‌اند مفاهیمی چون رشد[1] و همرشد[2] گروه نه تنها در نظریهٔ مذکور که در نظریه‌های احتمالاتی گروهها و نظریهٔ گامهای تصادفی روی گروهها و گرافها، اعتبار فراوانی کسب کنند (رجوع کنید به [۱۹] و مرجعهای آن). در این بخش به مفهوم رشد گروههای کاکستر و سری رشد این گروهها با استفاده از مفهوم گراف کیلی می‌پردازیم و رابطهٔ آن را با مشخصهٔ اویلر گروه داده‌شده بیان می‌کنیم. از آنجا که رشد رابطهٔ نزدیکی با حجم و این یکی قرابت ویژه‌ای با مفهوم فاصله دارد نخست به مفهوم فاصله روی گروه می‌پردازیم [۲۱].

1. growth 2. cogrowth



شکل۳

تعریف ۲. فرض کنید (W,S) یک دستگاه کاکستر باشد که در آن S مجموعه‌ای متناهی است و شامل عضو خنثای گروه نیست. منظور از گراف کیلی W نسبت به S گرافی است که رأسهای آن اعضای Wاند و بین دو عضو g و h یالی رسم می‌شود اگر و تنها اگر $g^{-1}h \in S$.

روشن است که گراف کیلی متناهی است اگر و فقط اگر گروه W متناهی باشد.

مثال ۱. در شکل ۳ گراف کیلی گروه متناهی

$$W = \langle a,b,c | a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^4 = (bc)^3 = (ca)^2 = 1 \rangle$$

را که به ردهٔ B_3 تعلق دارد رسم کرده‌ایم.

برای تبدیل W به یک فضای متری ابتدا لازم است مفهوم فاصلهٔ دو عضو دلخواه از آن را تعریف کنیم.

تعریف ۳. به‌ازای هر عضو $w \neq 1$ از گروه کاکستر W با مولد متناهی کاکستر S، طول w نسبت به S را با $|w|_S$ و یا اگر ابهامی در میان نباشد با $|w|$ نشان می‌دهیم و آن را به‌صورت

$$|w| = \inf \{l | w = s_1 s_2 \cdots s_l,\ s_i \in S,\ 1 \leq i \leq l\}$$

تعریف می‌کنیم.

طول عضو خنثای W را برابر با صفر تعریف می‌کنیم. اگر g و h دو عضو از W باشند فاصلهٔ آنها نسبت به S را با $d_S(g \cdot h)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d_S(g \cdot h) = |g^{-1}h|$$

به‌آسانی دیده می‌شود که اگر W، S و d طبق تعریف فوق داده شده باشند آنگاه d یک متریک بر W است و تحت ضرب از طرف چپ ناوردا‌ست.

از مفهومهای مهم در هر فضای متری مفاهیم کره و گوی‌اند. بنابه تعریف، کرهٔ به مرکز ۱ و شعاع n مجموعهٔ تمام اعضای گروه است که طول آنها n است. تعداد اعضای این مجموعه را با a_n نشان می‌دهیم. مجموعهٔ نقاط داخل و روی کرهٔ به مرکز ۱ و شعاع n را گوی بسته به مرکز ۱ و شعاع n می‌نامیم. تعداد اعضای این مجموعه را که تابعی از $\mathbb{N} \cup \{0\}$ به $\mathbb{N}$ است تابع رشد W نسبت به S می‌نامیم و با $\gamma(n)$ نشان می‌دهیم. اگر تعداد اعضایی از گروه را که روی کرهٔ به مرکز ۱ و شعاع n قرار دارند با a_n نشان دهیم آنگاه $a_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$.

ملاحظه می‌کنیم که تعریف γ_n و a_n به مجموعهٔ مولد گروه بستگی دارد. در زیر پس از آوردن یک تعریف ثابت می‌کنیم که این وابستگی تا حدی قابل اغماض است.

تعریف ۴. دو فضای متری (M,d) و (M',d') را شبه‌ایزومتریک می‌نامیم هرگاه توابع $f: M \to M'$ و $g: M' \to M$ و اعداد ثابت $a > 0$ و $b \geq 0$ یافت شوند به‌طوری که

۱) $d'(f(x), f(y)) \leq ad(x,y) + b$ به‌ازای هر دو عضو x و y از M؛

۲) $d(g(x'), g(y')) \leq ad'(x',y') + b$ به‌ازای هر دو عضو x' و y' از M'؛

۳) $d'(fg(x'), x') \leq b$ به‌ازای هر عضو x' از M'؛

۴) $d(gf(x), x) \leq b$ به‌ازای هر عضو x از M.

توجه می‌کنیم که در شرایط ۱)ـ۴) برابری aها و برابری bها ضرورتی ندارد و می‌توان این تعریف را به‌جای دو عدد با شش عدد بیان کرد.

قضیهٔ ۲. فرض کنید $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ و $S' = \{t_1, \ldots, t_l\}$ دو مولد متناهی برای گروه کاکستر W باشند. اگر d و d' به‌ترتیب متریکهای حاصل از S و S' بر W باشند آنگاه (W,d) و (W,d') شبه ایزومتریک‌اند.

اثبات. در اینجا به‌جای توابع f و g در تعریف فوق تابع همانی را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $b = 0$. فرض کنید طول عضو w نسبت به S برابر با n است و لذا اعضای $s_1, \ldots, s_n$ متعلق به S وجود دارند به‌طوری‌که

$$w = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$$

فرض می‌کنیم $a = \max\{\alpha, \beta\}$ که در آن α و β به‌ترتیب ماکسیمم طولهای اعضای S نسبت به S' و برعکس هستند. ملاحظه می‌کنیم که $|w|_{S'} \leq a\,|w|_S$ و $|w|_S \leq a\,|w|_{S'}$، و برهان تمام است. ■

تعریف ۵. می‌گوییم رشد تابع $\gamma_1(n)$ از رشد تابع $\gamma_2(n)$ سریعتر نیست و می‌نویسیم

$$\gamma_1(n) \preccurlyeq \gamma_2(n)$$

هرگاه $c \geq 1$ یافت شود به‌طوری که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$$\gamma_1(n) \leq c\gamma_2(n)$$

هرگاه $\gamma_1(n) \preccurlyeq \gamma_2(n)$ و $\gamma_2(n) \preccurlyeq \gamma_1(n)$ می‌گوییم این دو تابع هم‌ارزند و می‌نویسیم $\gamma_1(n) \sim \gamma_2(n)$.

به‌آسانی ثابت می‌شود که تابعهای رشد یک گروه نسبت به دو مجموعهٔ مولد متناهی هم‌ارزند. بنابراین گروه G را با رشد چندجمله‌ای (به‌ترتیب نمایی) می‌خوانیم هرگاه $\gamma(n) \sim n^d$ به‌ازای یک عدد طبیعی d (به‌ترتیب $\gamma(n) \sim e^n$). گروهی که با رشد چندجمله‌ای یا نمایی نباشد گروه با رشد متوسط نامیده می‌شود.

از آنجا که هر گروه کاکستر خطی است یعنی با زیرگروهی از یک گروه ماتریسی یکریخت است ([۲]، [۱۰]) از قضیهٔ بدیل تیتز[1] [۸] نتیجه می‌شود که یک گروه کاکستر یا حل‌پذیر است یا شامل زیرگروهی یکریخت با گروه آزاد تولید شده توسط دو مولد است. بنابراین هر گروه کاکستر که حل‌پذیر نباشد «میانگین‌پذیر» هم نیست. برای تعریفی از میانگین‌پذیری به [۲۱] مراجعه کنید.

تعریف ۶. به‌ازای دستگاه کاکستر (W, S)، S متناهی، سری

$$W(t) = \sum_{|w|=0}^{\infty} t^{|w|} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

را سری رشد گروه W نسبت به S می‌نامیم.

سری رشد برای گروههای متناهی، یک چندجمله‌ای است و برای گروههای نامتناهی ممکن است تابعی گویا یا ناگویا نسبت به t باشد. در مورد گروههای کاکستر، نویسندگان بسیاری با استفاده از روشهای جبری مختلف ثابت کرده‌اند که $W(t)$ تابعی گویاست ([۷]، [۱۲]). در واقع اگر W متناهی باشد آنگاه

$$W(t) = \prod_{i=1}^{l}(1 + t + t^2 + \cdots + t^{m_i})$$

که در آن m_iها نماهای W هستند، و اگر W نامتناهی باشد آنگاه رابطهٔ بازگشتی

$$\frac{(-1)^{|S|+1}}{W(t)} = \sum_{X \subset S} \frac{(-1)^{|X|}}{W_X}(t)$$

برقرار است، که در آن W_X زیرگروه سهموی تولید شده توسط X است. این روابط به‌آسانی نشان می‌دهند که $W(t)$ گویاست.

به‌علاوه اگر $\chi(W)$ مشخصهٔ اویلر W (برای تعریف به [۱۲] مراجعه کنید.) باشد آنگاه

$$W(1) = \frac{1}{\chi(W)}$$

چند تا از دیگر ویژگیهای $W(t)$ عبارت‌اند از

۱) صفرهای $W(t)$ ریشه‌های واحدند.

۲) $\frac{1}{W(+\infty)}$ عددی صحیح است.

۳) $\frac{1}{W(t^{-1})}$ یک سری با ضرایب صحیح است.

1. Tits alternative theorem

۵. دستگاههای بازنویسی و سری رشد کامل

یکی از روشهای محاسباتی در نظریهٔ ترکیبیاتی گروهها، روش واژه‌های ممنوعه است که مؤلف در [۱۳] و گریگورچوک در [۱۴] به آن پرداخته‌اند. در این بخش، با به‌کار بردن این روش، سریهای رشد کامل گروههای کاکستر مثلثی را به‌دست می‌آوریم. از ابزارهای ضروری برای اجرای روش مذکور، یک دستگاه بازنویسی متناهی و کامل به‌ازای هر گروه است؛ بنابراین، نخست باید برای گروههای مورد مطالعه دستگاههای بازنویسی ارائه دهیم. البته، این کار برای هر گروهی امکان‌پذیر نیست؛ اما در مورد تمام گروههای کاکستر مثلثی این کار را انجام داده‌ایم. در تعریف سری رشد ملاحظه می‌کنیم که $a_n \in Z$ و $W(t)$ به حلقهٔ سریهای توانی صوری $Z[[t]]$ تعلق دارد. مفاهیم تابع و سری رشد را می‌توان با تعریفهای زیر به گروه حلقه‌ها و گروه جبرها توسعه داد. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای یکدار، G گروهی دلخواه و $R[G]$ گروه‌حلقه با ضرایب در R باشد. یادآور می‌شویم که هر عضو $R[G]$ به‌صورت مجموعی متناهی مثل $\sum_1^k a_i g_i$ است که در آن $a_i R$ و $g_i \in G$ اعضایی دلخواه هستند.

تعریف ۷. تابع

$$\gamma^c : N \cup \{0\} \to R[G]$$

با تعریف

$$\gamma^c(n) = \sum_{\substack{g \in G \\ |g|=n}} g \qquad (1)$$

را تابع رشد کامل و سری

$$F^c(z) = \sum_{g \in G} g z^{|g|} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{|g|=n} \right) z^n \qquad (2)$$

را که عضوی از $R[G][[z]]$ است سری رشد کامل G نسبت به S و R می‌نامیم.

ملاحظه می‌کنیم که اگر در این تعریف حلقهٔ Z را به‌جای R قرار دهیم سری رشد کامل تعریف شده در [۱۵] را به‌دست می‌آوریم. سری رشد نیز حالت خاصی از سری رشد کامل است: کافی است در (۲)، به هر g عدد ۱ را نسبت دهیم. فرض می‌کنیم که (W, S) یک دستگاه کاکستر است. با استفاده از روابط $(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1$ می‌توانیم به هر جفت s_i و s_j در S، قانون بازنویسی‌ای به‌صورت

$$s_i s_j \cdots s_i \to s_j s_i \cdots s_j$$

به‌نحو مناسبی نسبت دهیم. ملاحظه می‌کنیم که طول هر یک از واژه‌های دو طرف این قانون برابر m_{ij} است. اگر با استفاده از لم کنوت‌بندیکس[1] [۱۱] بتوانیم مجموعهٔ این قوانین را به‌صورت یک مجموعهٔ کامل و متناهی از قوانین بازنویسی برای W درآوریم آنگاه مجموعهٔ تکمیل‌شده را دستگاه بازنویسی متعارف برای W می‌نامیم. هر یک از واژه‌های واقع در طرف چپ هر یک از این قوانین را یک واژهٔ ممنوعه می‌نامیم.

1. Knuth-Bendix

تعریف ۸. یک زنجیر مختلط نسبت به یک دستگاه بازنویسی متعارف برای W زنجیری است دقیق که تمام حرفهای متعلق به S را در بر دارد. زنجیر دقیقی که مختلط نباشد ساده نامیده می‌شود.

خواننده می‌تواند برای تعریفهای مفاهیم این بخش به [۱۳] مراجعه کند.

قضیهٔ ۳. هر گروه مثلثی

$$W = \langle a, b, c | a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^p = (bc)^q = (ca)^r = 1 \rangle$$

یک دستگاه بازنویسی متعارف، متناهی و کامل می‌پذیرد.

برای اثباتی از این قضیه و قضیه‌های زیر به [۱۶] مراجعه کنید.

قضیهٔ ۴. فرض می‌کنیم گروه کاکستر W یک دستگاه بازنویسی متعارف، کامل و متناهی بپذیرد. در این‌صورت مجموع متناوب $\sum_{i\leq m}(-1)^{i+1}Q_m^{(i)}$ روی تعداد زنجیرهای مختلط به طول m برابر صفر است.

قضیهٔ ۵. فرض می‌کنیم $F^c(z)$ سری رشد کامل گروه مثلثی W با مجموعهٔ مولد $S = \{a, b, c\}$ باشد. در این‌صورت اگر $f^c_{(x,y)}$ سری رشد کامل زیرگروه سهموی‌ای از W باشد که توسط عضوهای x، y متعلق به S تولید می‌شود آنگاه داریم

$$\frac{1}{F^c(z)} = 1 + \frac{1}{f^c_{(a,b)}} + \frac{1}{f^c_{(b,c)}} + \frac{1}{f^c_{(c,a)}} - \frac{3-(a+b+c)z}{1-z^2}$$

سریهای رشد کامل را می‌توان در مورد رده‌هایی دیگر از گروههای کاکستر محاسبه کرد [۱۷]. سریهای رشد کامل، حلقهٔ رابط نظریهٔ ترکیبیاتی گروهها و C^*ـجبرها محسوب می‌شوند و از این رو جا دارد تحقیقات و محاسبات بیشتری دربارهٔ آنها صورت پذیرد.

۶. آجرفرش‌های صفحه‌های اقلیدسی و هذلولوی

در این بخش منظور از صفحهٔ $\mathbb{P}$ یکی از صفحه‌های اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ یا هذلولوی $\mathbb{H}^2$ است. در این بخش پس از تعریف آجرفرش‌های نرمال و شبه‌نرمال صفحهٔ $\mathbb{P}$، آجرفرش‌های ناشی از گروههای کاکستر را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۹. یک آجرفرش صفحه عبارت از خانواده‌ای چون $\mathfrak{J}$ از قرصهای بستهٔ توپولوژیک T (آجر) است که در شرایط زیر صدق کند

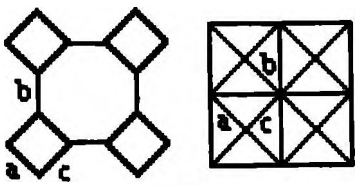
۱) $\mathbb{P} = \cup_{T\in\mathfrak{J}} T$

۲) اشتراک درون هر دو عضو $\mathfrak{J}$ تهی باشد.

هر مؤلفهٔ همبندیِ اشتراک دو یا چند آجر، بسته به اینکه یک نقطه یا یک منحنی باشد یک رأس یا یک یال آجرفرش نامیده می‌شود. اگر این رأسها و یالها را به‌ترتیب با V و E نشان دهیم گراف $\Gamma = (V, E)$ را گراف یالی آجرفرش مربوط می‌نامیم.

مثال ۲

۱) آجر فرش صفحهٔ اقلیدسی با آجرهای مربعی یکسان از معمولیترین آجرفرش‌هاست. گراف یالی این آجرفرش یکی از گرافهای مورد مطالعهٔ پولیا



شکل۴

در بحث گامهای تصادفی بوده است. توجه می‌کنیم که این آجرفرش را می‌توان با استفاده از آجرفرشی که توسط گروه کاکستر

$$W = \langle a, b, c | a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^4 = (bc)^4 = (ac)^2 = 1 \rangle$$

در صفحهٔ اقلیدسی ایجاد می‌شود به‌دست آورد [۲۰]. (شکل ۴).

۲) صفحهٔ هذلولوی را به دلیل داشتن امکانات بیشتر می‌توان با آجرهای متنوعتری فرش کرد. شکل ۵ این صفحه را با آجرفرشی مثلثی که در آن مساحت هر مثلث π و لذا اندازهٔ هر یک از زاویه‌های آن صفر است نشان می‌دهد.

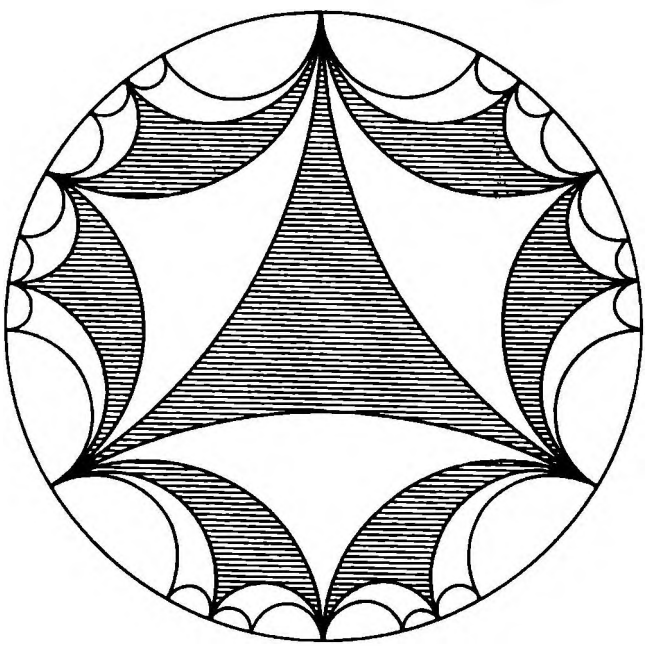
مسلماً صفحه را می‌توان به بینهایت روش آجرفرش نمود. بنابراین آجرفرش‌هایی حائز اهمیت‌اند که از ویژگیهای خاصی برخوردار باشند. فرض کنید به‌ازای هر آجر T از آجرفرش $\mathfrak{J}$ اعداد M_T و m_T چنان وجود داشته باشند که آجر T شامل دایره‌ای به شعاع m_T و داخل دایره‌ای به شعاع M_T باشد.

اگر بتوان توابع M_T و m_T را ثابت و بنابراین مستقل از T اختیار کرد و به‌علاوه اشتراک هر دو آجر تهی یا مجموعه‌ای همبند باشد می‌گوییم این آجرفرش نرمال است.

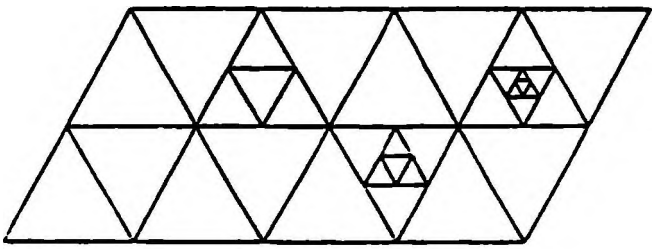
در صورتی که عددهای ثابت K و δ وجود داشته باشند به‌طوری که

۱) $M_T \leq K m_T$ به‌ازای هر T و

۲) $M_T \leq \delta$ به‌ازای هر T



شکل۵



شکل۶

و به‌علاوه اشتراک هر دو آجر تهی یا مجموعه‌ای همبند باشد آجرفرش را شبه‌نرمال می‌نامیم. در شکل ۶ قسمتی از یک آجرفرش شبه‌نرمال از صفحهٔ اقلیدسی را مشاهده می‌کنید. برای به‌دست آوردن این آجرفرش، دنبالهٔ $\{T_n\}$ از آجرهای آجرفرش صفحهٔ اقلیدسی را که توسط گروه کاکستر

$$W = \langle a, b, c | a^۲ = b^۲ = c^۲ = (ab)^۳ = (bc)^۳ = (ac)^۳ = ۱\rangle$$

ایجاد می‌شود در نظر می‌گیریم. هر یک از آجرهای T_n را با وصل کردن نقاط وسط اضلاع آن به چهار آجر کوچکتر $T_{n,۱}$، $T_{n,۲}$، $T_{n,۳}$، $T_{n,۴}$ تجزیه می‌کنیم. فرض کنید $T_{n,۱}$ آجر میانی باشد. در مرحلهٔ دوم این عمل را با دنبالهٔ آجرهای میانی $\{T_{n,۱}\}_{n\geq ۲}$ تکرار می‌کنیم. دنبالهٔ مثلثهای میانی حاصل این مرحله را با $T_{n,۱,۱}$ نشان می‌دهیم. اکنون فرایند فوق را در مورد دنبالهٔ $\{T_{n,۱,۱}\}_{n\geq ۳}$ تکرار می‌کنیم. با این کار مثلث nام دنبالهٔ اصلی به $۳n+۱$ مثلث متساوی‌الاضلاع تجزیه می‌شود. روشن است که این آجرفرش شبه‌نرمال است اما نرمال نیست.

توجه می‌کنیم که این تعریف شامل مثلث‌بندی صفحهٔ هذلولوی توسط مثلثهایی که دایرهٔ محیطی ندارند نمی‌شود.

اکنون رابطهٔ آجرفرشها و گروههای کاکستر سه‌مولدی را بررسی می‌کنیم. برای این منظور گروه کاکستر

$$W = \langle a, b, c | a^۲ = b^۲ = c^۲ = (ab)^p = (bc)^q = (ac)^r = ۱\rangle$$

را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $۱/p + ۱/q + ۱/r = ۱$. در این‌صورت $\pi(۱/p + ۱/q + ۱/r) = \pi$، و لذا π/p، π/q و π/r زاویه‌های مثلثی در صفحهٔ اقلیدسی‌اند. ناحیهٔ بسته‌ای را که محدود به این مثلث است R می‌نامیم و آن را به‌صورت $R = [x, y, z]$ ۲ـسادک با زاویه‌های $\frac{\pi}{p}$، $\frac{\pi}{q}$ و $\frac{\pi}{r}$ نشان می‌دهیم. اکنون روی حاصلضرب دکارتی $W \times R$ ساختاری قرار می‌دهیم که آجرفرش مثلثی صفحهٔ اقلیدسی بخشی از این ساختار است.

به هر زیرسادک R زیرگروهی از W را به‌صورت زیر نسبت می‌دهیم:

$$W_x = \langle a, b | a^۲ = b^۲ = (ab)^p = ۱\rangle$$

و

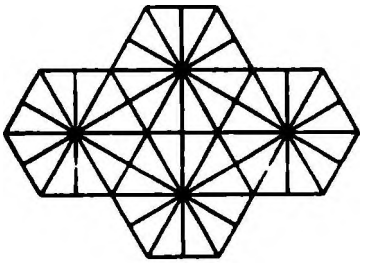
$$W_y = \langle b, c | b^۲ = c^۲ = (bc)^q = ۱\rangle$$

و

$$W_z = \langle a, c | a^۲ = c^۲ = (ac)^q = ۱\rangle$$

و

$$W_{[s,t]} = W_s \cap W_t$$



شکل۷

و

$$W_R = ۱$$

که در آن $[s, t]$ یک ۱ـسادک در R است. رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ روی $W \times R$ را به‌صورت

$$(g, s) \sim (h, t) \Longleftrightarrow s = t \quad \text{و} \quad g^{-۱}h \in W_s$$

تعریف می‌کنیم. اگر $[g, s]$ ردهٔ هم‌ارزی عضو (g, s) باشد و مجموعهٔ این رده‌ها را با $W \times R/\sim$ نشان دهیم، آنگاه عمل گروه W روی آن با تعریف $g[h, x] = [gh, x]$ ناپیوستهٔ سره است، یعنی به‌ازای هر X از این مجموعه، همسایگی O از آن وجود دارد به‌طوری که $O \cap g(O) = \emptyset$ به‌ازای هر $g \in W\backslash\{۱\}$، و R برای این عمل یک ناحیهٔ بنیادی است و لذا $W \times R/\sim$ یک آجرفرش مثلثی صفحهٔ اقلیدسی است. با این تعریف و با یکی گرفتن $(۱, x) \in W \times R$ با $x \in R$ ملاحظه می‌کنیم که پایدارساز[1] هر زیرسادک R، زیرگروهی است که به آن نسبت داده‌ایم. در شکل ۷ این مثلث‌بندی را به‌ازای $r = ۶$، $q = ۳$، $p = ۲$ مشاهده می‌کنید.

در ترسیم این شکل، رأسهای x، y و z را به‌ترتیب متناظر با رأسهای زاویه‌های $\frac{\pi}{۳}$، $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۶}$ گرفته‌ایم. این کار موجب می‌شود که چیده شدن مثلثها در کنار هم چنان انجام پذیرد که هیچ دو مثلثی بخشهای منطبق برهم پیدا نکنند و مجموع زاویه‌های تشکیل‌شده دور هر رأس، درست ۲π باشد. به‌علاوه، ملاحظه می‌کنیم که در این مثلث‌بندی رأسهای هر مثلثی به روشی طبیعی برچسب‌دار شده است. این مثلث‌بندی را بنا[2] یا مجتمع کاکستر[3] وابسته به گروه سه‌مولدی کاکستر فوق می‌نامیم. اگر این مجتمع را یک گراف برچسب‌دار با رأسها و یالهای معلوم فرض کنیم، دوگان آن که گراف کیلی گروه نسبت به مولد $\{a, b, c\}$ است به‌دست می‌آید ــ یعنی گرافی که هر یک از رأسهای آن نقطه‌ای در داخل یکی از مثلثهاست و هیچ دو رأسی در داخل یک مثلث قرار ندارند و دو رأس بر یک یال واقع‌اند اگر از دو مثلث مجاور انتخاب شوند.

به‌آسانی می‌توان دید که سه‌تایی‌هایی که می‌توان با آنها آجرفرش‌های مثلثی متفاوت برای صفحهٔ اقلیدسی ساخت عبارت‌اند از

$$p=۶, q=۲, r=۳;\ p=۳, q=۳, r=۳;\ p=۲, q=۴, r=۴$$

با این حال با استفاده از این آجرفرش‌ها می‌توان آجرفرش‌های دیگری به‌دست آورد.

1. stabilizer 2. building 3. Coxeter building

با همان روش فوق، در صفحهٔ هذلولوی نیز می‌توان با استفاده از گروههای کاکستر سه‌مولدی آجرفرش‌های مثلثی ایجاد کرد، با این تفاوت که در اینجا به‌جای برابری $1/p+1/q+1/r = 1$ از نابرابری $1/p+1/q+1/r < 1$ استفاده می‌کنیم، و این از آنجا ناشی می‌شود که در هندسهٔ هذلولوی مجموع زاویه‌های هر مثلث کمتر از π رادیان است. بنابراین صفحهٔ هذلولوی را می‌توان با مثلثهای هم‌اندازه که مجموع زاویه‌های هر یک از آنها برابر عدد ثابتی چون α است پوشاند. اگر $r = 0$، یکی از زاویه‌های هر یک از این مثلثها برابر با صفر است، و به همین ترتیب اگر $r = q = 0$ یا $p = q = r = 0$، آنگاه هر مثلث دو یا سه زاویه با اندازه‌های صفر خواهد داشت. مجدداً با استفاده از این آجرفرش‌ها می‌توانیم آجرفرش‌هایی تا حدودی دلخواه به‌دست آوریم.

در واقع قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

گزارهٔ ۲. فرض کنید $r \geq 6$ و $q \geq 3$ دو عدد صحیح باشند. در این‌صورت آجرفرشی وجود دارد که هر آجر آن یک r ضلعی منتظم است و در هر رأس آن تعداد q چندضلعی مشترک‌اند.

اثبات. در روش کلی مثلث‌بندی که در بالا بیان شد p را برابر با ۲ انتخاب می‌کنیم. بنابه فرض داریم $1/p + 1/q + 1/r \leq 1$. اگر $1/p + 1/q + 1/r \leq 1$ آنگاه آجرفرشی از مثلثها در صفحهٔ هذلولوی به‌دست می‌آید. زاویه‌های هر یک از این مثلثها عبارت‌اند از π/r، π/q و $\pi/2$. در واقع این آجرفرش تجزیهٔ گرانیگاهی[1] آجرفرش مورد نظر است. اکنون این تجزیه را نادیده گرفته آجرفرش مورد نظر را به‌دست می‌آوریم.

در حالتی‌که $1/p + 1/q + 1/r = 1$، آجرفرشی از شش‌ضلعی‌های منتظم در صفحهٔ اقلیدسی حاصل می‌شود. ■

مراجع

1. H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*, Dover (1973).
2. K. S. Brown, *Buildings*, Springer-Verlag, New-York (1989).
3. N. Bourbaki, *Groups et Algebres de Lie*, Chapitres 4,5, et 6, Hermann, Paris (1968).
4. Pierre de la Harpe, "An invitation to Coxeter groups", in *Group Theory from Geometrical Viewpoint*, E. Ghys, A. Haelfliger and A. Verjovsky (eds.), World Scientific, Singapore (1991).
5. J. E. Humphreys, *Refletion Groups and Gozeter Groups*, Cambridge University press, Cambridge (1992).
6. E. B. Vinberg, "Hyperbolic reflection groups", *Russian Math. Survey*, (1) **40** (1985).
7. Luis, Paris, "Growth series of Coxeter groups", In *Croup Theory from Geometrical Viewpoint*, E. Ghys, A. Haelfliger and A. Verjovsky (eds.), World Scientific, Singapore (1991).
8. Pierre de la Harpe, "Free groups in linear groups", *L'Enseignement Mathematique*, **20** (1983) 129-144.

1. barycentric subdivision

9. J. E. Rotmann, *An Introduction to the Theory of Groups*, Allyn and Bacon, Inc. Boston (1984).
10. J. Tits, "Le problém des mots dans les groupes de Coxeter", *Symp. Math*, **1**, Acad. Press (1968) 175-185.
11. D. Epstein et. al., *Word Processing in Groups*, Jones and Bartlett, Boston (1992).
12. J. P. Serre, "Cohomologie des groupes discrets", in *Prospects in Mathematics*," Ann. Math. Studies, **70**, Princeton University Press, Princeton (1971) 77-169.
13. M. J. Mamaghani, "The growth series of surface groups", *Mat. Zametki*, (5) **58** (1995). 681-693.
14. R. I. Grigorchuk, "Growth functions, rewriting systems and the Euler characteristic" *Mat. Zametki*, (5) **58** (1995). 653-668.
15. R. I. Grigorchuk and T. Nagnibeda, "Operator growth functions of discrete groups", preprint (1997).
16. M. J. Mamaghani, "Rewriting systems and complete growth series of triangle Coxeter groups", *Mat. Zametki* (3) **71** (2002).
17. M. J. Mamaghani, "Complete growth series of Coxeter groups with more than three generators", *Bulletin of the IMS*, Vol. (1) **29** (2003).
18. B. Grunbaum and G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*, Freeman and Company, New York (1987).
19. W. *Woess, Random Walks on Infinite Graphs and Groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, cambridge Univ. Press (2000).
20. H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer (1984).
۲۱. محمد جلوداری ممقانی، «مفهوم رشد در گروهها»، نشر ریاضی، سال ۸، شمارهٔ ۱ (۱۳۷۵) صص ۶ـ۱۷.
۲۲. محمد جلوداری ممقانی، «گروههای کاکستر و سری رشد کامل آنها»، گزارش علمی، شورای پژوهشهای علمی کشور (۱۳۷۹).

* * * * * *

* محمد جلوداری‌ممقانی، دانشگاه علامه‌طباطبایی

j_mamaghani@atu.ac.ir

به سوی حدس پوانکاره و رده‌بندی ۳ـخمینه‌ها*

جان میلنر*

پدرام صفری

حدس پوانکاره نود و نه سال قبل مطرح شد و شاید در چند ماه اخیر ثابت شده باشد. این یادداشت روایتی است از برخی از نتایج عمدهٔ صد سال گذشته که راه را برای اثبات این حدس و حتی برای برنامهٔ بلندپروازانه‌تر رده‌بندی تمام خمینه‌های ۳بعدی فشرده هموار کرده‌اند. در بند آخر مقاله وصف مختصری از تحولات اخیر، که مرهون گریگوری پرلمان است، می‌آید. بحث جدیتری از کار پرلمان در یادداشتی به قلم مایکل اندرسن ارائه خواهد شد.

سؤال پوانکاره

در همان ابتدای قرن بیستم، هانری پوانکاره (۱۸۵۴ـ۱۹۱۲) ادعای نابخردانه‌ای را مطرح کرد که به زبان امروزی به این صورت قابل بیان است:

> اگر خمینهٔ ۳بعدی بسته‌ای همان هومولوژی کرهٔ S^3 را داشته باشد، الزاماً با S^3 همسانریخت است.

([Poincaré, 1900] را ببینید*.) ولی مفهوم «گروه بنیادی»، که خود او چندی قبل در ۱۸۹۵ معرفی کرده بود، ابزار لازم را برای نفی این گزاره فراهم می‌آورد. وی در [Poincaré, 1904] مثال ناقضی را مطرح کرد که به‌صورت فضای همدسته‌ای[1] $SO(3)/I_{60}$ قابل توصیف است. در اینجا $SO(3)$ گروه دورانهای فضای ۳بعدی اقلیدسی و I_{60} زیرگروه متشکل از دورانهایی است که یک دوازده‌وجهی یا بیست‌وجهی منتظم را به خودش می‌برند (گروه سادهٔ یکتای از مرتبهٔ ۶۰). این خمینه هومولوژیِ کرهٔ ۳بعدی را دارد ولی گروه بنیادی‌اش $\pi_1(SO(3)/I_{60})$ گروهی تام از مرتبهٔ ۱۲۰ است. وی بحث را با سؤال زیر (مجدداً با ترجمه به زبان امروزی) ختم می‌کند:

> اگر خمینهٔ ۳بعدی بسته‌ای گروه بنیادی بدیهی داشته باشد آیا باید با کرهٔ ۳بعدی همسانریخت باشد؟

این حدس که این امر به واقع محقّق می‌شود به‌عنوان حدس پوانکاره معروف شده است. این سؤال فوق‌العاده دشوار از آب درآمد، بسیار مشکلتر از سؤال متناظر در بعد پنج یا بالاتر*، و روشن نبودن پاسخ آن مانعی اساسی بر سر راه تلاشها برای رده‌بندی خمینه‌های ۳بعدی محسوب می‌شود.

در عرض پنجاه سال بعد، رشتهٔ توپولوژی از ایده‌ای مبهم به نظامی توسعه‌یافته تبدیل شد. اما من تنها به تحولاتی چند که نقش مهمی در مسألهٔ رده‌بندی خمینه‌های ۳بعدی ایفا کرده‌اند خواهم پرداخت. (برای اطلاعات بیشتر مراجع زیر را ببینید: [Gordon] برای تاریخچه‌ای از نظریهٔ خمینه‌های ۳بعدی تا ۱۹۶۰؛ [Hempel] برای شرحی از این نظریه تا ۱۹۷۶؛ [Bing] برای توصیفی از برخی دشواریهای وابسته به توپولوژی ۳بعدی؛ [James] برای تاریخچه‌ای کلی از توپولوژی؛ [Whitehead] برای نظریهٔ هوموتوپی؛ و [Devlin] برای حدس پوانکاره به‌عنوان مسألهٔ جایزه‌دار هزاره.)

نتایجی براساس روشهای قطعه‌قطعه‌خطی

از آنجایی که مسألهٔ شناسایی کرهٔ ۳بعدی بسیار مشکل به نظر می‌رسید، ماکس دن (۱۸۷۸ـ۱۹۵۲) به مسألهٔ ساده‌تر شناسایی ناگره[1] درون S^3 پرداخت [Dehn].

قضیهٔ مورد ادعای دن (۱۹۱۰). دایرهٔ قطعه‌قطعه‌خطی نشانده‌شدهٔ $K \subset S^3$ گره‌نخورده است اگر و تنها اگر گروه بنیادی $\pi_1(S^3 \setminus K)$ دوری آزاد باشد.

این گزاره درست است. اما کِنِیر، نوزده سال بعد، نقصی جدی در اثبات دن

---

* شاید اصطلاحات پوانکاره خوانندگان امروزی را ــ که از عبارت «ساده‌ـهمبند» برای فضایی با گروه بنیادی بدیهی استفاده می‌کنند ــ به اشتباه بیندازد. درواقع منظور او از «ساده‌ـهمبند»، همسانریخت با ساده‌ترین مدل ممکن بود، یعنی کرهٔ ۳بعدی.

1. coset space

* [Smale, 1960]، [Stallings]، [Zeeman] و [Wallace] را برای بعد پنج یا بیشتر، و [Freedman] را برای بعد چهار ببینید.

1. unknot

یافت. سؤال به مدت تقریباً پنجاه سال، تا هنگام کارِ پاپاکی‌ریاکوپولوس حل نشده باقی ماند.

چندین گام اساسی توسط جیمز وَدل الکساندر (۱۸۸۸ـ۱۹۷۱) برداشته شد [Alexander]. در ۱۹۱۹ وی نشان داد که هومولوژی و گروه بنیادی به تنهایی برای شناسایی یک خمینهٔ ۳بعدی کافی نیستند. او درواقع دو فضای لنز را توصیف کرد که فقط با ناورداهای پیوند[1]شان قابل تمیز هستند. وی در ۱۹۲۴ مطلب زیر را ثابت کرد.

قضیهٔ الکساندر. کره‌ای ۲بعدی که در S^3 به‌صورت قطعه‌قطعه‌خطی نشانده شده است کرهٔ ۳بعدی را به دو ۳ـسلول بستهٔ قطعه‌قطعه‌خطی تقسیم می‌کند.

الکساندر همچنین نشان داد که چنبره‌ای قطعه‌قطعه‌خطی نشانده شده حداقل در یکی از دو طرف خود باید چنبره‌ای توپر را احاطه کند.

هلموت کنسر (۱۸۹۸ـ۱۹۷۳) گام دیگری برداشت [Kneser] که در تحولات بعدی نقش بسیار مهمی ایفا کرد*. او یک ۳ـخمینهٔ بستهٔ قطعه‌قطعه‌خطی را تحویل‌ناپذیر نامید هرگاه هر ۲ـکرهٔ قطعه‌قطعه‌خطی نشانده شده، ۳ـسلولی را احاطه کند، و تحویل‌پذیر خواند هرگاه چنین نباشد. فرض کنید با چنین خمینهٔ M^3ای که همبند و تحویل‌پذیر است آغاز کرده باشیم. آنگاه، با بریدن M^3 در طول ۲ـکرهٔ نشانده شده‌ای که ۳ـسلولی را احاطه نمی‌کند، خمینهٔ جدیدی (نه الزاماً همبند) با دو ۲ـکرهٔ مرزی به‌دست می‌آوریم. می‌توان مجدداً با نصب مخروطی روی هریک از این ۲ـکرهٔ مرزی، ۳ـخمینهٔ بسته‌ای (احیاناً ناهمبند) به‌دست آورد. حال یا هر مؤلفهٔ خمینهٔ حاصل تحویل‌ناپذیر است یا می‌توان این عملیات را تکرار کرد.

قضیهٔ کنسر (۱۹۲۹). این عملیات همواره پس از تعداد متناهی مرحله متوقف می‌شود و حاصل آن خمینه‌ای $\widehat{M^3}$ است به‌طوری که هر مؤلفهٔ همبند $\widehat{M^3}$ تحویل‌ناپذیر است.

درواقع، در حالت جهت‌پذیر، اگر جهتها و تعداد برشهای جداکننده (n) را به‌دقت ردیابی کنیم، آنگاه خمینهٔ همبند اصلی M^3 به‌صورت مجموع همبند مؤلفه‌های $\widehat{M^3}$ به همراه n «دستهٔ» $S^1 \times S^2$ قابل بازیافت است. (رجوع کنید به [Seifert, 1931]، [Milnor, 1962].)

در ۱۹۳۳ هربرت سایفرت (۱۹۰۷ـ۱۹۶۶) دسته‌ای از تاربندیها را معرفی کرد [Seifert] که نقشی مهم در تحولات آتی ایفا کرد. برای مقاصد ما در این بحث می‌توان تاربندی سایفرتِ یک ۳ـخمینه را به‌صورت یک عمل دایره تعریف کرد، که آزاد است مگر حداکثر در تعداد متناهی تار «کوتاه»، آن‌گونه که در زیر وصف می‌شود. چنین عملی با یک نگاشت $(x,t) \to x^t$ از $M^3 \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ به M^3 با شرطهای معمول $x^0 = x$ و $x^{s+t} = (x^s)^t$ مشخص می‌شود. ما شرط می‌کنیم که هر تار $x^{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ یک دایره باشد و عمل $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ آزاد باشد مگر در حداکثر تعداد متناهی از این تارها. مدل متعارفی برای یک تاربندی سایفرت در همسایگی تاری کوتاه چنین است: فرض کنید α ریشهٔ nام اولیه‌ای از واحد باشد و $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ قرص واحد باز. حاصلضرب $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ را تشکیل داده سپس هر (z,t) را با $(\alpha z, t+1/n)$ یکی بگیرید. خمینهٔ خارج‌قسمتی حاصل با حاصلضرب $\mathbb{D} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ وابرریخت است، ولی تار مرکزی تحت عمل دایره $(z,t)^s = (z, t+s)$ کوتاهتر از تارهای مجاور است که n بار دور آن می‌پیچند، چون $(0,t)^{1/n} \equiv (0,t)$.

در اواخر دههٔ ۱۹۵۰ تحولات چشمگیری در نظریهٔ ۳ـخمینه‌ها رخ داد که با مقاله‌ای از کریستوس پاپاکی‌ریاکوپولوس (۱۹۱۴ـ۱۹۷۶) آغاز شد [Papakyriakopoulos]. او شخص بی‌سروصدایی بود که سالها به تنهایی در پرینستن تحت حمایت رالف فاکس[1] کارکرده بود. (من هم در آن زمان با فاکس کار می‌کردم، ولی هیچ فکر نمی‌کردم که پاپاکی‌ریاکوپولوس در چنین پروژهٔ مهمی مشغول پیشروی است.) اثبات او از «لم دن» ــ که از زمانی که کنسر برای اولین بار نقص استدلال دن را خاطرنشان کرد به‌عنوان مشکلی حل‌نشده باقی مانده بود ــ کاری بود کارستان. بیان آن چنین است:

لم دن (پاپاکی‌ریاکوپولوس ۱۹۵۷). نگاشت قطعه‌قطعه‌خطی f از قرصی ۲بعدی را به توی یک ۳ـخمینه در نظر بگیرید، که تصویر آن ممکن است خودتقاطع[2]های زیادی در درون داشته باشد ولی مجاز نیست نزدیک مرز هیچ خودتقاطعی داشته باشد. در این صورت نشانندهٔ ناتکینی از قرص وجود دارد که در یک همسایگی مرز بر f منطبق است.

او این مطلب را با ساختن برجی از فضاهای پوششی ثابت کرد، [یعنی] ابتدا با ساده‌کردن تکینگی‌های قرص، که به فضای پوششی اکمل[3] یک همسایگی ترفیع داده شده است، سپس با گذر به پوشش اکمل یک همسایگی قرصِ ساده‌شده و تکرار این فرایند، تا پس از تعداد متناهی مرحله قرصی ناتکین به‌دست آید. وی با استفاده از روشهای مشابه نتیجه‌ای به‌دست آورد که بعداً به‌صورت زیر تقویت شد.

قضیهٔ کره. اگر گروه هوموتوپی دوم $\pi_2(M^3)$ یک ۳ـخمینهٔ جهت‌پذیر نابدیهی باشد، ۲ـکرهٔ قطعه‌قطعه‌خطی نشانده شده‌ای وجود دارد که نمایندهٔ عضوی نابدیهی از این گروه است.

یکی از پیامدهای فوری قضیه این است که برای گره کاملاً دلخواه $K \subset S^3$، $\pi_2(S^3 \setminus K) = 0$. به‌طور کلیتر، $\pi_2(M^3)$ برای هر ۳ـخمینهٔ جهت‌پذیری که به معنی مورد نظر کنسر تحویل‌ناپذیر باشد بدیهی است.

در عرض چندسال پس از توفیق پاپاکی‌ریاکوپولوس، ولفگانگ هاکن [Haken] به پیشرفتی اساسی در شناخت ۳ـخمینه‌های کاملاً کلی نائل شد. هاکن در ۱۹۶۱ مسألهٔ بداهت را برای گرهها حل کرد؛ یعنی روشی کارا برای تصمیم‌گیری دربارهٔ اینکه آیا دایرهٔ قطعه‌قطعه‌خطی نشانده‌شده‌ای در ۳ـکره به‌واقع گره‌خورده است [یا نه] تشریح کرد. (برای ملاحظهٔ نتایج بیشتری در این راستا و شرحی روشنتر، [Schubert, 1961] را ببینید.)

فریدهلم والدهاوزن [Waldhausen] به پیشرفتهای زیاد دیگری براساس ایده‌های هاکن نائل شد. او در ۱۹۶۷a نشان داد که رابطهٔ نزدیکی بین فضاهای تاری سایفرت و خمینه‌هایی که گروه بنیادیشان مرکز نابدیهی دارد موجود است. وی در ۱۹۶۷b ردهٔ خمینه‌های گراف را معرفی و تحلیل کرد.

1. linking invariants

* بخشهایی از مقالهٔ کنسر برپایهٔ کار دن بود. وی در یادداشتی بعد از تحریر اشاره می‌کند که استدلال دن نادرست بوده و بنابراین آن بخشها از مقالهٔ خود او ثابت نشده‌اند. ولی نتیجهٔ وصف‌شده در مقالهٔ حاضر تحت‌تأثیر [این نقص] واقع نشده است.

1. Ralph Fox 2. self-intersection 3. universal covering

طبق تعریف، اینها خمینه‌هایی هستند که توسط چنبره‌هایی نشانده‌شده و مجزا به قطعاتی تقسیم می‌شوند که هریک کلافی دایره‌ای روی یک رویه هستند. دو ایدهٔ اساسی در رهیافت هاکن‌ـوالدهاوزن هستند که بسیار بی‌ضرر به نظر می‌رسند در حالی‌که به واقع بسیار قدرتمندند:

تعاریف. برای مقاصد من در این مقاله، رویهٔ بستهٔ دوطرفهٔ قطعه‌قطعه‌خطی نشانده‌شدهٔ F در خمینهٔ بستهٔ M^3 تراکم‌ناپذیر[1] خوانده می‌شود هرگاه گروه بنیادی $\pi_1(F)$ نامتناهی باشد و به‌صورت یک به یک در $\pi_1(M^3)$ نگاشته شود. خمینهٔ M^3 به‌اندازهٔ کافی بزرگ است اگر حاوی رویهٔ تراکم‌ناپذیری باشد.

به‌عنوان مثالی از قدرت این ایده‌ها، والدهاوزن در ۱۹۶۸ نشان داد که اگر دو ۳ـخمینهٔ بستهٔ جهت‌پذیر، تحویل‌ناپذیر و به اندازهٔ کافی بزرگ و دارای یک گروه بنیادی باشند، آنگاه درواقع همسانریخت‌اند. گزارهٔ مشابهی برای خمینه‌های لبه‌دار وجود دارد. این ایده‌ها در ۱۹۷۹ توسط جیکو [Jaco] و شلن [Shalen] و نیز یوهانسون [Johannson]، که بر اهمیت تجزیهٔ یک فضا با چنبره‌های تراکم‌ناپذیر صحه گذاشتند، توسعهٔ بیشتری یافت.

پیشرفت مهم دیگر در طول این سالها اثبات این بود که هر ۳ـخمینهٔ توپولوژیک، ساختار قطعه‌قطعه‌خطیِ اصولاً یکتایی دارد ([Moise] را ببینید) و نیز ساختار هموار اصولاً یکتایی ([Munkres] یا [Hirsch] را ببینید، همچنین [Smale, 1959] را). این خیلی با وضعیت در بعدهای بالا متفاوت است که در آن لازم است روشن کرد آیا خمینه‌های موردبحث هموارند یا قطعه‌قطعه‌خطی یا توپولوژیک.*

خمینه‌های با انحنای ثابت

اولین خانوادهٔ جالب‌توجه از ۳ـخمینه‌ها که رده‌بندی شدند خمینه‌های ریمانی مسطح[2] بودند ــ آنهایی که موضعاً با فضای اقلیدسی ایزومتریک هستند. داوید هیلبرت در هجدهمین مسأله از مسائل معروفش پرسیده بود آیا فقط تعداد متناهی از گروههای گسسته از حرکات صلب فضای nـبعدی اقلیدسی وجود دارند که دامنهٔ بنیادی[3] فشرده داشته باشند. لودویگ بیبرباخ [Bieberbach] (۱۸۸۶ـ۱۹۸۲) این گزاره را در ۱۹۱۰ ثابت کرد و درواقع رده‌بندی کاملی از این گروهها ارائه کرد. این کاربردی مستقیم در خمینه‌های ریمانی مسطح داشت. این هم صورتی مدرن از قضیهٔ او.

قضیه (اقتباس شده از بیبرباخ). یک خمینهٔ ریمانی فشردهٔ مسطح M^n، با تقریب وابرریختی‌های مستوی، با گروه بنیادی‌اش مشخص می‌شود. گروه داده شدهٔ Γ محقق می‌شود اگر و تنها اگر متناهی‌مولد و بی‌تاب[4] باشد و زیرگروهی جابجایی با شاخص متناهی داشته باشد. هر چنین Γای حاویِ زیرگروه جابجاییِ متناهی‌ـشاخصِ بیشین یکتایی است.

به سادگی نتیجه می‌شود که این زیرگروه جابجاییِ بیشین [ماکسیمال] N، نرمال است وگروه خارج‌قسمتی $\Phi = \Gamma/N$ روی N با تزویجْ وفادارانه[1] عمل می‌کند. به‌علاوه $N \cong \mathbb{Z}^n$ که n بُعد است. لذا گروه متناهی Φ به‌طور طبیعی در گروه $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ از خودریختی‌های N می‌نشیند. بالاخص نتیجه می‌شود که هر چنین خمینهٔ M^nای را می‌توان به‌صورت خمینهٔ خارج‌قسمتی T^n/Φ توصیف کرد، که در آن T^n چنبره‌ای مسطح و Φ گروهی متناهی از ایزومتری‌هاست که به‌طور آزاد روی T^n عمل می‌کند، وگروه بنیادی $\pi_1(T^n)$ را می‌توان با زیرگروه جابجایی بیشین $N \subset \pi_1(M^n)$ منطبق[2] کرد. در حالت جهت‌پذیر سه بعدی فقط شش خمینهٔ این چنینی وجود دارند. گروه $\Phi \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ یا دوری از مرتبهٔ ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۶ است، یا یکریخت با $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$. (برای اطلاعات بیشتر [Charlap] و نیز [Zassenhaus]، [Milnor, 1976a] یا [Thurston, 1997] را ببینید.)

۳ـخمینه‌های فشرده با انحنای ثابت مثبت در ۱۹۲۵ توسط هاینتس‌هُف (۱۸۹۴ـ۱۹۷۱) رده‌بندی شدند [Hopf]. (مراجعه کنید به [Seifert, 1933]، [Milnor, 1957].) اینها شامل مثلاً خمینهٔ بیست‌وجهی پوانکاره که قبلاً ذکرش رفت می‌شد. بیست‌وپنج سال بعد ژرژ دُرام (۱۹۰۳ـ۱۹۹۰) نشان داد که رده‌بندی هُف، با تقریب ایزومتری، درواقع با رده‌بندیِ با تقریب وابرریختی تطابق دارد [de Rham].

فضاهای لنز، با گروه بنیادی دوری متناهی، زیر خانواده‌ای را تشکیل می‌دهند که جاذبهٔ ویژه‌ای دارند. فضاهای لنز با گروه از مرتبهٔ ۵ قبلاً هم توسط الکساندر در ۱۹۱۹ به‌عنوان مثالهایی از ۳ـخمینه‌هایی که با هومولوژی و گروه بنیادی به تنهایی قابل تمیز نیستند معرفی شده بودند [Alexander]. فضاهای لنز با تقریب همسانریختی‌های قطعه‌قطعه‌خطی در ۱۹۳۵ توسط رایدمایستر[3]، فرانتس[4] و دُرام، با استفاده از ناوردایی که تاب[5] نامیدند، رده‌بندی شدند. (برای شرحی از این ایده‌ها [Milnor, 1966] و نیز [Milnor & Burlet 1970] را ببینید.) ناوردایی توپولوژیک تاب برای همبافت‌های سادکی[6] دلخواه خیلی بعدتر توسط چپمن [Chapman] ثابت شد. یکی از پیامدهای شگفت‌آور این رده‌بندی، رده‌بندی هورست شوبرت [Schubert, 1956] از گرههای «دوپُله[7]» بود، یعنی گرههایی که می‌توانند چنان در $\mathbb{R}^3$ قرار داده شوند که تابع ارتفاع فقط دو بیشینه و دو کمینه داشته باشد. او نشان داد که چنین گرهی به‌طور یکتا با پوشش شاخه‌ای[8] دولایه‌ای وابسته‌اش، که یک فضای لنز است، مشخص می‌شود.

گرچه ۳ـخمینه‌های با انحنای ثابتِ منفی درواقع بسیار متنوع‌اند، ولی تا زمان کارِ ترستُن در اواخر دههٔ ۱۹۷۰ مثالهای چندانی از آنها شناخته نشده بود. یک مثال جالب در ۱۹۱۲ توسط گیزکینگ [Gieseking] کشف شد. او با شروع از ۳ـسادکی منظم با طول یال نامتناهی در ۳ـفضای هذلولوی، وجوه را دوبه‌دو منطبق کرد تا خمینه‌ای هذلولوی، تمام[9] و جهت‌ناپذیر با حجم متناهی به‌دست آورد. سایفرت و وبر [Seifert & Weber] در ۱۹۳۳ مثالی فشرده عرضه کردند: آنان با شروع از یک دوازده‌وجهی منتظم با

1. incompressible

* این مطلب که هر خمینهٔ قطعه‌قطعه‌خطی ساختارِ هموار اصولاً یکتایی دارد تا بعد ۶ همچنان صحیح است. (رجوع کنید به [Cerf].) اما کربی و زیبن‌من [Kirby & Siebenmann] نشان دادند که یک خمینهٔ توپولوژیک از بعد چهار یا بیشتر کاملاً ممکن است چندین ساختار قطعه‌قطعه‌خطی ناسازگار داشته باشد. حالت چهاربعدی خصوصاً مخاطره‌آمیز است: فریدمن، با استفاده از کار دانلدسن، نشان داد که خمینهٔ توپولوژیک $\mathbb{R}^4$ تعداد ناشمارایی ساختار هموار یا قطعه‌قطعه‌خطیِ غیرهم‌ارز می‌پذیرد. ([Gompf] را ببینید.)

2. flat 3. fundamental domain 4. torsionfree

1. faithfully 2. identify 3. Reidemeister 4. Franz
5. torsion 6. simplicial 7. two bridges
8. branched covering 9. complete

اندازه‌های به دقت انتخاب شده در فضای هذلولوی، وجوه روبه‌رو را با یک انتقال و سپس یک دوران به اندازهٔ ۳/۱۰ دورکامل منطبق کردند تا خمینه‌ای هذلولوی، فشرده و جهت‌پذیر به‌دست آورند. (روشی مشابه با استفاده از ۱/۱۰ دور کامل، ۳ـخمینهٔ پوانکاره را به‌دست می‌دهد، که ۳ـکره فضای پوششی ۱۲۰ لایه‌ای آن است.)

یکی از خاصیتهای مهم خمینه‌های با انحنای منفی را الکساندر پرایسمن (۱۹۱۶ـ۱۹۹۰) به‌دست آورد [Preissmann]. (پرایسمن که دانشجوی هاینتس هُف بود، بعداً تغییر رشته داد و متخصص هیدرودینامیک جریان رودخانه شد.)

قضیهٔ پرایسمن (۱۹۴۲). اگر M^n خمینهٔ ریمانی بسته‌ای با انحنای اکیداً منفی باشد، هر زیرگروه جابجایی نابدیهی $\pi_1(M^n)$ آزاد دوری است.

نظریهٔ [۳ـخمینه‌ها] در ۱۹۷۵، زمانی‌که رابرت رایلی (۱۹۳۵ـ۲۰۰۰) مطالعه‌ای روی نمایشهای گروه کره $\pi_1(S^3 \setminus K)$ در $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ انجام داد [Riley]، محرکی شگرف یافت. توجه کنید که می‌توان $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ را هم به‌عنوان گروه ایزومتری‌های جهت‌نگهدار ۳ـفضای هذلولوی و هم به‌عنوان گروه خودریختی‌های همدیس کرهٔ در بینهایت[1]اش در نظر گرفت. رایلی توانست با استفاده از چنین نمایشهایی نمونه‌های چندی از گره‌هایی تولید کند که می‌توان به مکملشان ساختار یک خمینهٔ هذلولویِ تمام با حجم متناهی داد.

ترستن با الهام از این مثالها نظریه‌ای غنی برای خمینه‌های هذلولوی پروراند. بحث بخش بعد و نیز [Kapovich, 2001] یا [Milnor, 1982] را ببینید.

حدس هندسی‌سازی ترستن

تصویر حدسیِ معین از خمینه‌های ۳بعدی را ویلیام ترستن در ۱۹۸۲ ارائه کرد، که حاکی است:

> درون هر ۳ـخمینهٔ فشرده را می‌توان به‌صورتی اصولاً یکتا توسط ۲ـکره‌ها و چنبره‌های نشانده‌شدهٔ مجزا به قطعاتی تجزیه کرد که ساختاری هندسی دارند. ساده‌ترین تعریف* «ساختار هندسی» در اینجا، متریک ریمانیِ تمامی است که موضعاً با یکی از هشت الگوی ساختاری فهرست زیر ایزومتریک است.

برای سهولت فقط به ۳ـخمینه‌های بسته خواهم پرداخت. در این صورت ابتدا می‌توانیم خمینه را به‌صورت مجموع همبند خمینه‌هایی توصیف کنیم که اول هستند (یعنی دیگر به‌صورت نابدیهی به مجموعی همبند تجزیه نمی‌شوند). ادعا این است که به هر خمینهٔ اول یا می‌توان چنین ساختار هندسی‌ای داد یا آن را با چنبره‌های تراکم‌ناپذیری به قطعات بازی تقسیم کرد

1. sphere-at-infinity

* به بیان رسمی‌تر، الگوی متعارف چنین ساختار هندسی‌ای یکی از هشت زوج ممکن (X, G) است که X، ۳ـخمینه‌ای ساده‌همبند و G گروهی متعدی از وابرریختی‌هاست، به‌طوری که G عنصر حجمی از چپ و راست ناوردا بپذیرد که زیرگروه ثابت نگهدارندهٔ هر نقطهٔ دلخواهی از X فشرده باشد و به‌طوری که G به‌عنوان گروهی از وابرریختی‌ها با این خاصیت اخیر، بیشین باشد.

که بتوان به هریک از آنها چنین ساختاری بخشید. هشت ساختار هندسی مجاز با مثالهای زیر نمایش داده می‌شوند:

- کرهٔ S^3، با انحنای ثابت ۱+؛
- فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$، با انحنای ثابت ۰؛
- فضای هذلولوی H^3، با انحنای ثابت ۱−؛
- حاصلضرب $S^2 \times S^1$؛
- حاصلضرب $H^2 \times S^1$ از صفحهٔ هذلولوی و دایره؛
- متریک ریمانی ناوردای چپی* روی گروه خطی خاص $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$؛
- متریک ریمانی ناوردای چپی روی گروه حل‌پذیر پوانکاره‌ـلورنتس[1] $E(1,1)$، که متشکل است از حرکات صابِ فضازمانِ ۱ + ۱ بعدی مجهز به متریک مسطح $dt^2 - dx^2$؛
- متریک ناوردای چپی روی گروه پوچ‌توان هایزنبرگ، متشکل از ماتریسهای ۳ × ۳ به شکل

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در هریک از حالات، پوشش اکمل خمینهٔ مورد اشاره الگویی متعارف برای هندسهٔ متناظر ارائه می‌کند. مثالهایی از سه هندسهٔ اول در بخش انحنای ثابت مورد بحث قرار گرفتند. هر خمینهٔ بستهٔ جهت‌پذیرِ موضعاً ایزومتریک با $S^2 \times S^1$ الزاماً وابرریخت (ولی نه الزاماً ایزومتریک) با خودِ خمینهٔ $S^2 \times S^1$ است، ضمن اینکه هر حاصلضربِ رویه‌ای از گونهٔ دو یا بیشتر با یک دایره، هندسهٔ $H^2 \times S^1$ را ارائه می‌دهد. کلاف مماسِ واحدِ رویه‌ای با گونهٔ دو یا بیشتر نمایش دهندهٔ هندسهٔ $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ است. کلافی چنبره‌ای روی دایره نمایندهٔ هندسهٔ حل‌پذیر[2] پوانکاره‌ـلورنتس است، در صورتی‌که مونودرومی[3] آن با تبدیلی از چنبره با ماتریسی چون $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ نشان داده شود که ویژه‌مقداری بیشتر از یک دارد. بالاخره اینکه هر کلاف دایره‌ای نابدیهی روی چنبره نمایندهٔ هندسهٔ پوچ‌توان[4] است. شش عدد از این هشت هندسه، همگی بجز حالتهای هذلولوی و هندسهٔ حل‌پذیر، متناظرند با خمینه‌هایی با ساختار یک فضای تاریِ سایفرت.

دو حالت خاص، موردتوجه ویژه‌اند. حدس مزبور نتیجه می‌دهد که:

> یک ۳ـخمینهٔ بسته گروه بنیادی متناهی دارد اگر و تنها اگر متریکی با انحنای ثابت مثبت داشته باشد. بالاخص هر M^3 با گروه بنیادی بدیهی باید با S^3 همسانریخت باشد.

این صورتی بسیار قوی از حدس پوانکاره است. پیامد دیگر چنین است:

> خمینهٔ بستهٔ M^3 هذلولوی است اگر و تنها اگر اول باشد و دارای گروه بنیادی نامتناهی‌ای باشد که شامل $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ نباشد.

* [Milnor, 1976b §4] را برای فهرستی از متریکهای ناوردای چپ در بعد ۳ ببینید.

1. Poincaré-Lorentz 2. solvegeometry 3. monodromy
4. nilgeometry

خود ترستن، در حالت خاص خمینه‌ای که به اندازهٔ کافی بزرگ است، گزارهٔ اخیر و درواقع تمام حدس هندسی‌سازی را به اثبات رساند. ([Morgan]، [Thurston, 1986] و [McMullen, 1992] را ببینید.) نتیجهٔ مهم دیگر ترستن این است که یک کلافِ رویه‌ای روی دایرهٔ هذلولوی است اگر و فقط اگر (۱) مونودرومی آن با تقریب ایزوتوپی شبه‌انوسوف[1] باشد و (۲) تار آن شاخص اویلر منفی داشته باشد. [Sullivan]، [McMullen, 1996] یا [Otal] را ببینید.

حالتهای کروی و هذلولوی حدس هندسی‌سازی ترستن فوق‌العاده دشوارند. اما شش هندسهٔ باقی‌مانده به خوبی شناخته شده‌اند. نویسندگان بسیاری در این شناخت دخیل بوده‌اند (مثلاً [Gordon & Heil]، [Auslander & Johnson]، [Scott]، [Tukia]، [Gabai]، و [Casson & Jungreis] را ببینید). برای ملاحظهٔ شرحی عالی، [Thurston, 1997] و [Scott, 1983b] را ببینید.

شارش ریچی

روشی کاملاً متفاوت توسط ریچارد همیلتن ارائه شد [Hamilton, 1982]. خمینه‌ای ریمانی با مختصات موضعی u^1، ...، u^n، و متریک $ds^2 = \sum g_{ij}du^i du^j$ در نظر بگیرید. شارش ریچیِ[2] وابسته خانواده‌ای تک پارامتری از متریکهای ریمانی $g_{ij} = g_{ij}(t)$ است که در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\partial g_{ij}/\partial t = -2R_{ij}$$

صدق می‌کند، که در آن $R_{ij} = R_{ij}(\{g_{hk}\})$ تانسور ریچی وابسته است. این معادلهٔ دیفرانسیلِ خاص به همان دلیلی توسط همیلتن برگزیده شد که اینشتین تانسور ریچی را در نظریهٔ گرانش خود وارد کرده بود* ــ او تانسورِ دواندیسی متقارنی لازم داشت که به‌طور طبیعی از تانسور متریک و مشتقاتش $\partial g_{ij}/\partial u^h$ و $\partial^2 g_{ij}/\partial u^h \partial u^k$ برمی‌خیزد. تانسور ریچی اصولاً تنها امکان است. عامل ۲ در این معادله کم‌وبیش دلخواه است ولی علامت منفی ضروری است. دلیل آن این است که معادلهٔ شارش ریچی نوعی تعمیم غیرخطیِ معادلهٔ گرما

$$\partial \phi/\partial t = \Delta \phi$$

در فیزیک ریاضی است. برای مثال وقتی g_{ij} تحت شارش ریچی تغییر می‌کند، انحنای اسکالر وابسته $R = \sum g^{ij}R_{ij}$ طبق یک صورتِ غیرخطی معادلهٔ گرما

$$\partial R/\partial t = \Delta R + 2\sum R^{ij}R_{ij}$$

تغییر می‌کند. مانند معادلهٔ گرما، معادلهٔ شارش ریچی در زمان آینده[3] خوش‌رفتار است و مانند نوعی عملگر هموارکننده عمل می‌کند ولی حل آن در زمان گذشته[4] معمولاً غیرممکن است. اگر قسمتهایی از جسمی جامد

1. pseudo-Anosov 2. Ricci flow

* برای روابط مسألهٔ هندسی‌سازی و نسبیت عام، [Anderson] را ببینید.

3. forward 4. backward

داغ و مابقی سرد باشند، آنگاه، طبق معادلهٔ گرما، گرما از [قسمت] داغ به [قسمت] سرد جریان می‌یابد، به‌طوری که جسم به تدریج به دمایی یکنواخت می‌رسد. شارش ریچی تا حدودی، به نحو مشابهی عمل می‌کند، به‌طوری که انحنا «سعی می‌کند» یکنواخت‌تر شود، ولی پیچیدگیهای زیادی هست که گزیر ساده‌ای ندارند.

به‌عنوان مثال خیلی ساده‌ای از شارش ریچی، کرهٔ گردی به شعاع r در فضای $(n+1)$ بعدی اقلیدسی در نظر بگیرید. آنگاه تانسور متریک به‌صورت

$$g_{ij} = r^2 \hat{g}_{ij}$$

درمی‌آید که در آن $\hat{g}_{ij}$ متریک کرهٔ واحد است، در حالی‌که تانسور ریچی

$$R_{ij} = (n-1)\hat{g}_{ij}$$

مستقل از r است. معادلهٔ شارش ریچی به

$$dr^2/dt = -2(n-1)$$

ساده می‌شود، با جوابِ

$$r^2(t) = r^2(0) - 2(n-1)t$$

بنابراین کره در زمان متناهی فرو می‌ریزد[1] و به نقطه‌ای تبدیل می‌شود. همیلتن توانست حکم کلیتر زیر را ثابت کند.

قضیهٔ همیلتن. فرض کنید با خمینهٔ ۳بعدی فشرده‌ای شروع کنیم که تانسور ریچی آن همه‌جا مثبت معین است. آنگاه همان‌طور که خمینه تحت شارش ریچی به نقطه‌ای می‌کاهد[2]، گردتر و گردتر می‌شود. اگر مقیاس متریک را تغییر دهیم به‌طوری‌که حجم ثابت بماند، آنگاه خمینه به خمینه‌ای با انحنای ثابت مثبت میل می‌کند.

همیلتن سعی کرد این تکنیک را، با تحلیل تکینگی‌هایی که ممکن است ظاهر شوند، به ۳ـخمینه‌های کلیتری اعمال کند، ولی توانست حدس هندسی‌سازی را فقط تحت فرضیات اضافی خیلی قوی اثبات کند. (برای مروری بر چنین نتایجی، [Cao & Chow] را ببینید.)

گریگوری پرلمان در سه پیش‌چاپ شایان توجه، راه‌حلی برای این دشواریها اعلان کرد [Perelman] و اثباتی را از کل حدس ترستن براساس ایده‌های همیلتن وعده داد، که جزئیات بیشتر آن قرار است در پیش‌چاپ چهارمی ارائه شود. یک طریق که ممکن است تکینگی‌ها در طول شارش ریچی ظاهر شوند این است که شاید ۲ـکره‌ای در M^3 در زمان متناهی فرو بریزد و به نقطه‌ای تبدیل شود. پرلمان نشان می‌دهد که چنین فروریزشهایی را می‌توان با انجام نوعی «جراحی» روی خمینه، مشابه روش ساخت کنسر که قبلاً وصف شد، حذف کرد. او چنین اظهار می‌کند که پس از تعداد متناهی جراحیِ این چنینی، هر مؤلفه یا:

۱) به خمینه‌ای با انحنای ثابت مثبت میل می‌کند که در زمان متناهی به نقطه‌ای می‌کاهد، یا احیاناً

1. collapses 2. shrinks

۲) به $S^2 \times S^1$ میل می‌کند که در زمان متناهی به دایره‌ای می‌کاهد، یا

۳) یک تجزیهٔ «چاق-لاغر» از نوع ترستنی می‌پذیرد، که در آن قسمتهای چاق متناظرند با خمینه‌های هذلولوی و قسمتهای لاغر متناظرند با سایر هندسه‌های ترستن.

من قصد ندارم در مورد جزئیات استدلالهای پرلمان، که هوشمندانه و بسیار فنی هستند، نظر دهم. ولی روشن است که او روشهای جدیدی را معرفی کرده است که هم قدرتمندند و هم زیبا، و سهمی ارزشمند در شناخت ما از موضوع ایفا کرده است.

مراجع

[Alexander, 1919] J. W. ALEXANDER, Note on two three dimensional manifolds with the same group, *Trans. Amer. Math. Soc.* **20** (1919), 339-342.

[Alexander, 1924] ——, On the subdivision of 3-space by a polyhedron, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **10**(1924), 6-8.

[Anderson, 1997] M. T. ANDERSON, *Scalar Curvature and Geometrization Conjectures for 3-Manifolds*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 30, 1997.

[Anderson, 2001] ——, On long-time evolution in general relativity and geometrization of 3-manifolds, *Comm. Math. Phys.* **222** (2001), 533-567.

[Auslander & Johnson, 1976] L. AUSLANDER and F. E. A. JOHNSON, On a conjecture of C. T. C. Wall, *J. London. Math. Soc.* **14** (1976), 331-332.

[Bieberbach, 1910] L. BIEBERBACH, Über die Bewegungs gruppen des n-dimensionalen euklidischen Raumes mit einem endlichen Fundamentalbereich, *Gött. Nachr.* (1910), 75-84.

[Bieberbach, 1911/12] ——, Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume I, II, *Math. Ann.* **70** (1911), 297-336; **72** (1912), 400-412.

[Bing, 1964] R. H. BING, Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincaré conjecture, in *Lectures on Modern Mathematics II* (T. L. Saaty, ed.), Wiley, 1964.

[Cao & Chow, 1999] H.-D. CAO and B. CHOW, Recent developments on the Ricci flow, *Bull. Amer. Math. Soc.* (*N.S.*) **36** (1999), 59-74.

[Casson & Jungreis, 1994] A. CASSON and D. JUNGREIS, Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds, *Invent. Math.* **118** (1994), 441-456.

[Cerf, 1968] J. CERF, *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois* ($\Gamma_4=0$), Lecture Notes in Math., vol. 53, Springer-Verlag, 1968.

[Chapman, 1974] T. A. CHAPMAN, Topological invariance of Whitehead torsion, *Amer. J. Math.* **96** (1974), 488-497.

[Charlap, 1986] L. CHARLAP, *Bieberbach Groups and Flat Manifoldes*, Springer, 1986. (See also: Compact flat Riemannian manifolds. I, *Ann. of Math.* **81**(1965), 15-30.)

[Dehn, 1910] M. DEHN, Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes, *Math. Ann.* **69** (1910), 137-168.

[Devlin, 2002] K. DEVLIN, *The Millennium Problems*, Basic Books, 2002.

[Freedman, 1982] M. H. FREEDMAN, The topology of fourdimensional manifolds, *J. Differential Geom.* **17** (1982), 357-453.

[Gabai, 1992] D. GABAI, Convergence groups are Fuchsian groups, *Ann. of Math.* **136** (1992), 447-510.

[Gieseking, 1912] H. GIESEKING, Analytische Untersuchungen ueber topologische Gruppen, Thesis, Muenster, 1912.

[Gompf, 1993] R. GOMPF, An exotic menagerie, *J. Differential Geom.* **37** (1993), 199-223.

[Gordon, 1999] C. McA. GORDON, 3-dimensional topology up to 1960, pp. 449-490 in[James, 1999].

[Gordon & Heil, 1975] C. McA. GORDON and W. HEIL, Cyclic normal subgroups of fundamental groups of 3-manifolds, *Topology* **14** (1975), 305-309.

[Haken, 1961a] W. HAKEN, Ein Verfahren zur Aufspaltung einer 3-Mannigfaltigkeit in irreduzible 3-Mannig faltigkeiten, *Math. Z.* **76** (1961), 427-467.

[Haken, 1961b] ——, Theorie der Normalflächen, *Acta Math.* **105** (1961), 245-375.

[Haken, 1962] ——, Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten I, *Math. Z.* **80** (1962), 89-120.

[Hamilton, 1982] R. S. HAMILTON, Three-manifolds with positive Ricci curvature, *J. Differential Geom.* **17** (1982), 255-306.

[Hamilton, 1995] ——, The formation of singularities in the Ricci flow, *Surveys in Differential Geometry, Vol. II* (Cambridge, MA, 1993), International Press, Cambridge, MA, 1995), pp. 7-136.

[Hamilton, 1999] ——, Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds, *Comm. Anal. Geom.* **7** (1999), 695-729.

[Hempel, 1976] J. HEMPEL, 3-*Manifolds*, Ann. of Math. Studies, vol. 86, Princeton Univ. Press, 1976.

[Hirsch, 1963] M. HIRSCH, Obstruction theories for smoothing manifolds and maps, *Bull. Amer. Math. Soc.* **69** (1963), 352-356.

[Hopf, 1925] H. HOPF, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, *Math. Ann.* **95** (1925), 313-319.

[Jaco & Shalen, 1979] W. JACO and P. SHALEN, Seifert fibered spaces in 3-manifolds, *Mem. Amer. Math. Soc.* **21**, no. 220 (1979).

[McMullen, 1996] ——, *Renormalization and 3-Manifolds Which Fiber over the Circle*, Ann. of Math. Studies, vol. 142, Princeton Univ. Press, 1996.

[Moise, 1977] E. E.MOISE, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Springer, 1977.

[Morgan, 1984] J. MORGAN, On Thurston's uniformization theorem for three-dimensional manifolds, *The Smith Conjecture* (Bass and Morgan, eds.), Pure Appl. Math., vol. 112, Academic Press, 1984, pp. 37-125.

[Munkres, 1960] J. MUNKRES, Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms, *Ann. of Math.* **72** (1960), 521-554. (See also: Concordance is equivalent to smoothability), *Topology* **5** (1966), 371-389.

[Otal, 1996] J.-P. OTAL, Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3, *Astérisque* **235** (1996); translated in SMF/AMS Texts and Monographs, vol. 7, Amer. Math. Soc. and Soc. Math. France, Paris, 2001.

[Papakyriakopoulos, 1957] C. PAPAKYRIAKOPOULOS, On Dehn's lemma and ths asphericity of knots, *Ann. of Math.* **66** (1957), 1-26. (See also: *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **43** (1957), 169-172.)

[Papakyriakopoulos, 1960] ——, *The Theory of Three-Dimensional Manifolds since 1950*, Proc. Internat. Congr. Math. 1958, Cambridge Univ. Press, New York, 1960, pp. 433-440.

[Perelman, 2002] G. PERELMAN, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications (available on the Internet from: arXiv:math.DG/0211159 v1, 11 November 2002).

[Perelman, 2003] ——, Ricci flow with surgery on three-manifolds, arXiv:math.DG/0303109 v1, 10 March 2003; Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, arXiv:math.DG/0307245, 17 July 2003).

[Poincaré, 1895] H. POINCARÉ, Analysis situs, *J. de l'École Polytechnique* **1** (1895), 1-121. (See *Oeuvres*, Tome VI, Paris, 1953, pp. 193-288.)

[Poincaré, 1900] ——, Second complément à l'analysis situs, *Proc. London Math. Soc.* **32** (1900), 277-308. (See *Oeuvres*, Tome VI, Paris, 1953, p. 370.)

[Poincaré, 1904] ——, Cinquième complément à l'analysis situs, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **18** (1904), 45-110. (See *Oeuvres*, Tome VI, Paris, 1953, p. 498.)

[Preissmann, 1942] A. PREISSMANN, Quelques propriétés globales des espaces de Riemann, *Comment. Math. Helv.* **15** (1942), 175-216.

[de Rham, 1950] G. DE RHAM, Complexes à automorphismes et homéomorphie différentiables, *Ann. Inst. Fourier* **2** (1950), 51-67.

[James, 1999] I. M. JAMES (ed.), *History of Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[Johannson, 1979] K. JOHANNSON, *Homotopy Equivalence of 3-Manifolds with Boundaries*, Lecture Notes in Math., vol. 761, Springer, 1979.

[Kapovich, 2001] M. KAPOVICH, *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups*, Progress Math., vol. 183, Birkhäuser, 2001.

[Kirby & Siebenmann, 1969] R. KIRBY and L. SIEBENMANN, On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung, *Bull. Amer. Math. Soc.* **75** (1969), 742-749.

[Kneser, 1929] H. KNESER, Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.* **38** (1929), 248-260.

[Milnor, 1957] J. MILNOR, Groups which act on S^n without fixed points, *Amer. J. Math.* **79** (1957), 623-630; reprinted in [Milnor, 1995].

[Milnor, 1962] ——, A unique decomposition theorem for 3-manifolds, *Amer. J. Math.* **84** (1962), 1-7; reprinted in [Milnor, 1995].

[Milnor, 1966] ——, Whitehead torsion, *Bull. Amer. Math. Soc.* **72** (1966), 358-426; reprinted in [Milnor, 1995].

[Milnor, 1976a] ——, Hilbert's problem 18: on crystallographic groups, fundamental domains, and on sphere packing, *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 28, Part 2, Amer. Math. Soc., 1976, pp. 491-506; reprinted in [Milnor, 1994].

[Milnor, 1976b] ——, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, *Adv. Math.* **21** (1976), 293-329; reprinted in [Milnor, 1994].

[Milnor, 1982] ——, Hyperbolic geometry: The first 150 years, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6** (1982), 9-24; also in Proc. Sympos. Pure Math., vol. 39, Amer. Math. Soc., 1983; and in [Milnor, 1995]. (See also: "How to compute volume in hyperbolic space" in this last collection.)

[Milnor, 1994] ——, *Collected Papers 1, Geometry*, Publish or Perish, 1994.

[Milnor, 1995] ——, *Collected Papers 2, The Fundamental Group*, Publish or Perish, 1995.

[Milnor & Burlet, 1970] J. MILNOR and O. BURLET, Torsion et type simple d'homotopie, *Essays on Topology and Related Topics*, Springer, 1970, pp. 12-17; reprinted in [Milnor, 1995].

[McMullen, 1992] C. MCMULLEN, Riemann surfaces and geometrization of 3-manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S).* **27** (1992), 207-216.

fibrées sur le cercle, sém. Bourbaki **554**, Lecture Notes in Math., vol. 842, Springer, 1981].

[Thurston, 1982] W. P. THURSTON, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6** (1982), 357-381. (Also in *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 39, Part 1. Amer. Math. Soc., 1983.)

[Thurston, 1986] ——, Hyperbolic structures on 3-manifolds, I. Deformation of acyclic manifolds, *Ann. of Math.* **124** (1986), 203-246.

[Thurston, 1997] ——, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Vol. 1 (Silvio Levy, ed.), Princeton Math. Ser., vol. 35, Princeton Univ. Press, 1997.

[Tukia, 1988] P. TUKIA, Homeomorphic conjugates of Fuchsian groups, *J. Reine Angew. Math.* **391** (1988), 1-54.

[Waldhausen, 1967a] F. WALDHAUSEN, Gruppen mit Zentrum und 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten, *Topology* **6** (1967), 505-517.

[Waldhausen, 1967b] ——, Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. I, II, *Invent. Math.* **3** (1967), 308-333; ibid. **4** (1967), 87-117.

[Waldhausen, 1968] ——, On irreducible 3-manifolds Which are sufficiently large, *Ann. of Math.* **87** (1968), 56-88.

[Wallace, 1961] A. WALLACE, Modifications and cobounding manifolds. II, *J. Math. Mech.* **10** (1961), 773-809.

[Whitehead, 1983] G. W. WHITEHEAD, Fifty years of homotopy theory, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S).* **8** (1983), 1-29.

[Zassenhaus, 1948] H. ZASSENHAUS, Uber einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen, *Comment. Math. Helv.* **21** (1948), 117-141.

[Zeeman, 1962] E. C. ZEEMAN, The Poincaré conjecture for $n \geqslant 5$, *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*, Prentice-Hall, 1962, pp. 198-204. (See also: *Bull. Amer. Math. Soc.* **67** (1961), 270.)

* * * * * *

• John Milnor, "Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds", *Notices, Amer. Math. Soc.*, (10) **50** (2003) 1226-1233.

* جان میلنر، دانشگاه سانی در استونی‌بروک، آمریکا

jack@math.sunysb.edu

[Riley, 1975] R. RILEY, A quadratic parabolic group, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **77** (1975), 281-288.

[Riley, 1979] ——, An elliptical path from parabolic representations to hyperbolic structures, *Topology of Low-Dimensional Manifolds.* (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate), Lecture Notes in Math., vol. 722, Springer, Berlin, 1979, pp. 99-133.

[Riley, 1982] ——, Seven excellent knots, *Low-Dimensional Topology* (Bangor), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 48, Cambridge Univ. Press, Cambridge New York, 1982, pp. 81-151.

[Schubert, 1956] H. SCHUBERT, Knoten mit zwei Brücken, *Math. Z.* **65** (1956), 133-170.

[Schubert, 1961] ——, Bestimmung der Primfaktorzerlegung von Verkettungen, *Math. Z.* **76** (1961), 116-148.

[Scott, 1980] P. SCOTT, A new proof of the annulus and torus theorems, *Amer. J. Math.* **102** (1980), 241-277.

[Scott, 1983a] ——, There are no fake Seifert fibre spaces with infinite π_1, *Ann. of Math.* **117** (1983), 35-70.

[Scott, 1983b] ——, The geometries of 3-manifolds, *Bull, London Math. Soc.* **15** (1983), 401-487.

[Seifert, 1931] H. SEIFERT, Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig* **83** (1931), 26-66.

[Seifert, 1933] ——, Topologie dreidimensionales gefaserter Raum, *Acta Math.* **60** (1933), 147-288; translated in Pure Appl. Math., vol. 89, Academic Press, 1980.

[Seifert & Threlfall, 1934] H. SEIFERT and W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, 1934; translated in Pure Appl. Math., vol. 89, Academic Press, 1980.

[Seifert & Weber, 1933] H. SEIFERT and C. WEBER, Die beiden Dodekaederräume, *Math. Z.* **37** (1933), 237-253.

[Smale, 1959] S. SMALE, Diffeomorphisms of the 2-sphere, *Proc. Amer. Math. Soc.* **10** (1959), 621-626.

[Smale, 1960] ——, The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions, *Bull, Amer. Math. Soc.* **66** (1960), 373-375. (See also: Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, *Ann. of Math.* **74** (1961), 391-406; as well as: The story of the higher dimensional Poincaré conjecture (What actually happened on the beaches of Rio), *Math. Intelligencer* **12** (1990), 44-51.)

[Stallings, 1960] J. STALLINGS, Polyhedral homotopy spheres, *Bull. Amer. Math. Soc.* **66** (1960), 485-488.

[Sullivan, 1981] D. SULLIVAN, Travaux de Thurston sur les groupes quasi-fuchsiens et sur les variétés hyperboliques de dimension 3

آشنایی با الگوریتمهای کوانتومی•

پیتر شور*

ترجمهٔ الهام کاشفی

موضوع این مقاله، الگوریتمهای کوانتومیِ شناخته‌شده‌ای است که به‌طرز محسوسی سریعتر از الگوریتمهای کلاسیک مشابه عمل می‌کنند. تاکنون محققان تنها موفق به کشف تکنیکهای معدودی برای تسریع محاسبات در مقایسه با سرعت الگوریتمهای کلاسیک شده‌اند. هنوز مشخص نیست که آیا دلیل این امر آن است که بینش و شهود کافی برای کشف تکنیکهای دیگر نداریم و یا اینکه مسائلی که رایانه‌های کوانتومی قادر به تسریع حل آنها هستند معدود است.

در بخش اول مقاله، دلایل شگفت‌انگیز بودن نتایج اخیر دربارهٔ محاسبهٔ کوانتومی توضیح داده می‌شود. این بخش برگرفته از سخنرانیهای نویسنده در چند سال اخیر است و به بحث دربارهٔ تاریخ محاسبات کوانتومی و ارتباط آن با مبانی ریاضی علم رایانه‌ای می‌پردازد. موضوع بخشهای ۲ و ۳، مدل محاسبهٔ کوانتومی و ارتباط آن با فیزیک است. این دو بخش تا حد زیادی مبتنی بر مقاله‌های نویسنده (پیتر شور) در

SIAM J. Comp. **26** (1997) 1484-1509

و

Doc. Math. Extra Vol. ICM **I** (1998), 467-486

است. در بخشهای ۴ و ۵، روش کلی استفاده از تبدیلهای فوریهٔ کوانتومی برای یافتن دورهٔ (تناوب) تشریح می‌شود. بخش چهارم شامل الگوریتمی از دَن سایمن[1] است که نشان می‌دهد برای بعضی مسائل، رایانه‌های کوانتومی محتمل است به‌طور نمایی سریعتر از رایانه‌های کلاسیک عمل کنند. در بخش ۵، در بارهٔ الگوریتم تجزیهٔ پیتر شور که تا حدی از مقالهٔ دَن سایمن الهام گرفته، بحث می‌کنیم. بخش آخر به توصیف الگوریتم جستجوی لاوگُرور[2]، که تکنیکی متفاوت برای تسریع محاسبات است، اختصاص دارد. این دو تکنیک، تنها تکنیکهای مهمی هستند که به منظور طراحی الگوریتمهای سریعتر برای حل مسائل کلاسیک، به وسیلهٔ رایانه‌های کوانتومی کشف شده‌اند.

1. Dan Simon 2. Lov Grover

فهرست مطالب

۱. تاریخچه و مبانی

اولین نتایج ریاضی در علوم نظری رایانه‌ای پیش از شکل‌گیری علوم رایانه‌ای حاصل شده بود، در واقع حتی قبل از به‌وجود آمدن رایانه‌های الکترونیکی. مدت کوتاهی پس از آنکه گودل قضیهٔ معروف ناتمامیت را ثابت کرد، چند مقاله [۱۳، ۲۷، ۳۲، ۴۱] انتشار یافت که در آنها تفاوت توابع محاسبه‌پذیر و محاسبه‌ناپذیر مطرح شد. این مقاله‌ها نشان دادند که توابعی به‌طور ریاضی تعریف شده وجود دارند که قابل محاسبه با هیچ الگوریتمی نیستند. بدیهی است که اثبات چنین قضیه‌ای نیازمند تعریفِ ریاضیِ محاسبهٔ تابع است. این مقاله‌ها شامل تعریفهای متفاوتی از محاسبه بودند. اما دیده شد که علی‌رغم ظاهر کاملاً متفاوت این تعریفها، نتیجهٔ آنها ردهٔ یکسانی از توابع محاسبه‌پذیر است و این امر به مطرح‌شدن نظری انجامید که امروز به نام دو تن از مبلغان آن، تز چرچ-تورینگ نامیده می‌شود. براساس این تز هر تابع محاسبه‌پذیر با هر تعریفی قابل محاسبه با ماشین تورینگ است. از آنجایی که این تز یک تعریف جامع از محاسبه‌پذیری ارائه نمی‌دهد، یک قضیهٔ ریاضی نیست و در واقع حکمی است دربارهٔ دنیای واقعی. تعداد زیادی از این‌گونه قضیه‌هایِ ریاضی برای تعریفهای مختلفی از محاسبه‌پذیری ثابت شده است. ولی

نکته‌ای که خیلیها تا همین اواخر به آن توجه نداشتند، این بود که چون تز چرچ-تورینگ به‌طور ضمنی به دنیای فیزیکی اشاره دارد، در واقع گزاره‌ای دربارهٔ فیزیک است. در مدت ۶۰ سالی که از ارائه این تز می‌گذرد، هیچ مثال ناقضی کشف نشده است و اکنون عموماً آن را می‌پذیرند و به نظر می‌رسد که نظریه‌های جدید فیزیکی نیز مؤید این تز هستند، اگرچه قضاوت نهایی در مورد آن نیازمند نظریه‌ای جامع در بارهٔ قوانین فیزیکی است.

مدلهای ارائه‌شده برای محاسبه در این نخستین مقاله‌ها بر پایهٔ رایانه‌های دیجیتالی نبوده است زیرا چنین رایانه‌هایی هنوز به‌وجود نیامده بودند؛ به نظر می‌رسد این مدلها از سیاه‌مشق‌های ریاضیدانان روی صفحات کاغذ الهام گرفته باشند. کمتر از یک دهه بعد از ۱۹۳۶، اولین رایانه‌های دیجیتالی ساخته شدند. همان‌طور که در تز چرچ-تورینگ، ادعا شده بود، ردهٔ توابع محاسبه‌پذیر با ماشینهای دیجیتالی (با مقادیر به‌داخواه بزرگی از زمان و حافظه) درحقیقت همان ردهٔ توابع محاسبه‌پذیر با ماشین-تورینگ، است.

با ظهور رایانه‌های دیجیتالی کاربردی، روشن شد که تمایز بین توابع محاسبه‌پذیر و محاسبه‌ناپذیر در عمل کافی نیست، زیرا برای رایانه‌های واقعی، زمان و حافظه نمی‌توانند مقدارهای دلخواه داشته باشند. دانستن اینکه تابعی محاسبه‌پذیر است اما زمان محاسبهٔ آن توسط هرگونه رایانهٔ قابل تصوری طولانیتر از عمر خورشید است، چندان فایده‌ای ندارد. در نتیجه لازم آمد که توابع بر اساس پیچیدگی محاسباتی‌شان، به دو دستهٔ با محاسبه‌پذیریِ کارامد و ناکارآمد تقسیم شوند. در اواخر دههٔ ۶۰ و اوایل دههٔ ۷۰ متخصصان علوم نظری رایانه‌ای موفق به یک رده‌بندی مجانبی از توابع شدند که به‌خوبی این تمایز را در عمل نشان می‌دهد و برای مباحث نظری یعنی اثبات قضیه‌هایی دربارهٔ پیچیدگی محاسبه مفید است. دانشمندان رایانه یک الگوریتم را زمانْ‌چندجمله‌ای[1] می‌نامند اگر زمان اجرای آن به‌صورت تابعی چندجمله‌ای از اندازهٔ داده‌های ورودی رشد کند، و چنانچه برای حل یک مسأله، یک الگوریتمِ زمان‌چندجمله‌ای وجود داشته باشد، می‌گویند آن مسأله متعلق به ردهٔ پیچیدگی P است. اگرچه این تعریف مفهوم شهودی کارآمدی را کاملاً دربرنمی‌گیرد — کمتر کسی یک الگوریتم با زمان اجرای n^{30} را کارآمد محسوب می‌کند — اما این رده‌بندی در عمل مفید است. تجربه نشان می‌دهد که اغلب مسائل طبیعی در P دارای الگوریتمهایِ به نسبت کارآمد هستند ولی اکثر مسائل طبیعی خارج از P سریعتر از زمانی نمایی قابل حل نیستند. علاوه بر این، ردهٔ پیچیدگی P در اثبات قضایا بسیار مفید واقع شده است، مزیتی که به نظر نمی‌رسد هیچ تعریفی که بین الگوریتمهای $O(n^3)$ و $O(n^{30})$ تفاوت قائل شود، دارا باشد.

باید توجه کرد که تعریف ردهٔ P مستقل از نوع رایانه‌ای است که برای محاسبه از آن استفاده می‌شود و این موضوع منجر به حکمی شده است که آن‌را تز چندجمله‌ای چرچ می‌نامیم و هر چند در مقالات و متون بسیاری به این تز ارجاع داده‌اند، یافتن منشأ اولیهٔ آن غیرممکن به‌نظر می‌رسد. این تز می‌گوید که هر تابع به‌طور فیزیکی قابل محاسبه را می‌توان با حداکثر یک افزایش چندجمله‌ای در زمان محاسبه، توسط یک ماشین تورینگ محاسبه کرد. به بیان دیگر، اگر یک تابع در زمان T توسط یک رایانهٔ فیزیکی قابل محاسبه باشد، آنگاه این تابع در زمان $O(T^c)$ توسط یک ماشین تورینگ نیز قابل محاسبه است (ثابت c تنها به ردهٔ ماشین محاسبهٔ مورد استفاده وابسته است.)

1. polynomial-time

چرا این تز می‌تواند درست باشد؟ یک دلیل آن ممکن است این باشد که قوانین فیزیکیِ جهان اطراف ما به‌طورکارآمدی قابل شبیه‌سازی به‌وسیلهٔ رایانه هستند. توضیح مطلب از این قرار است: چنانچه ما دسترسی به یک ماشین فیزیکی داشته باشیم که مسأله‌ای را حل کند، آنگاه می‌توانیم قوانین فیزیکی حاکم بر کار این ماشین را شبیه‌سازی کنیم. بر اساس فرض اولیهٔ ما این شبیه‌سازی در زمان چندجمله‌ای اجرا می‌شود. برعکس، اگر در جستجوی مثال ناقضی برای تز چندجمله‌ای چرچ باشیم، باید سیستمهایِ فیزیکی‌ای در نظر بگیریم که شبیه‌سازی آنها با رایانه‌ای دیجیتالی بسیار دشوار باشد. اولین مثالهایی که فوراً به ذهن می‌رسد دو رده از سیستمهای فیزیکی هستند که در حال حاضر شبیه‌سازی آنها با رایانه، حتی برای مسائل بسیار ساده، فوق‌العاده وقتگیر است. اولین مثال، تلاطم[1] است، که من متأسفانه مطلب زیادی ندارم که دربارهٔ آن بگویم و دیگری فیزیک کوانتومی است.

در سال ۱۹۸۲، فاینمن [۱۹] استدلال کرد که شبیه‌سازی مکانیک کوانتومی ذاتاً نیازمند مقادیر نمایی بالاسری [از وقت و حافظهٔ رایانه] است و بنابراین هر قدر هوش و ابتکار (برای یافتن روشهای کارآمد) به‌خرج دهیم، باز وقت کلانی از رایانه می‌گیرد. یوری منین نیز در اتحاد شوروی مستقلاً و قدری زودتر (در ۱۹۸۰) به این موضوع پی برده بود [۳۰]. شبیه‌سازی همهٔ سیستمهای مکانیکی دشوار نیست. در بعضی از حالتها جوابهای دقیق وجود دارد و در مواردی هم میانبرهای هوشمندانهٔ رایانه‌ای؛ اما شبیه‌سازی یک سیستم عام مکانیک کوانتومی دشوار است. نکتهٔ دیگری که فاینمن در این مقاله مطرح کرد استفاده از رایانه‌های کوانتومی برای این شبیه‌سازی بود. به عبارت دیگر، از رایانه‌ای که اساساً بر پدیده‌های مکانیک کوانتومی مبتنی باشد، احتمالاً می‌توان برای شبیه‌سازی کارآمدتر مکانیک کوانتومی استفاده کرد. همین‌طور، می‌توان یک تونل بادی را به‌عنوان یک «رایانهٔ تلاطمی» در نظر گرفت. در سال ۱۹۸۰ بنیف [۵] نشان داده بود که چگونه فرایندهای مکانیک کوانتومی می‌تواند پایهٔ یک ماشین تورینگ باشد. فاینمن [۲۰] این ایده‌ها را در مقالهٔ بعدی‌اش پالایش کرد.

در سال ۱۹۸۵، داوید دویچ [۱۵] یک مدل انتزاعی برای محاسبهٔ کوانتومی ارائه کرد و همچنین این سؤال را مطرح کرد که آیا رایانه‌های کوانتومی واقعاً می‌توانند برای حل مسائل کلاسیک مفید باشند پس از آن، دویچ و چند تن دیگر [۱۶، ۸، ۳۹] مسائلی ساختگی ارائه کردند که در مورد آنها رایانه‌های کوانتومی بهتر از رایانه‌های کلاسیک، عمل می‌کردند. با مطالعهٔ این الگوریتمها، به‌خصوص الگوریتم سایمن [۳۹] بود که من موفق به طراحی الگوریتم تجزیه شدم.

۲. مدل مدارهای کوانتومی

در این بخش مدل مدارهای کوانتومی [۴۴] برای محاسبات کوانتومی را بررسی می‌کنیم که مدل ریاضی دقیقی برای رایانهٔ کوانتومی است، ولی تنها مدلی نیست که به این منظور پیشنهاد شده است. مدل کوانتومی ماشین تورینگ [۸، ۴۴] و مدل کوانتومی اتوماتونهای سلولی [۳۱، ۴۲] نیز وجود دارند. از همهٔ این مدلها ردهٔ یکسانی از توابع محاسبه‌پذیر کوانتومیِ زمانْ‌چندجمله‌ای نتیجه می‌شود. البته اینها، تنها مدلهای ممکن برای محاسبات کوانتومی نیستند و

1. turbulence

برخی از فرضهای این مدلها (شرط یکانی‌بودن تمامی دریچه‌ها و عدم وجود آمار ذرات فرمیون/بوزون از دید فیزیکی غیرواقعی‌اند، بدین معنی که به‌راحتی می‌توان ماشینهایی که این فرضیات را نقض می‌کنند، تصور کرد. اما به نظر نمی‌رسد که هیچ مدل فیزیکی واقعگرایانه‌ای که قدرت محاسباتی‌اش بیشتر از مدلهای مذکور باشد، وجود داشته باشد و کنارگذاشتن این فرضهای اولیه قدرت محاسباتی مدل ریاضی را به میزان قابل توجهی افزایش نمی‌دهد [۳، ۹]. توصیف مدل مدارهای کوانتومی احتمالاً ساده‌تر از بقیه است. همچنین این مدل ساده‌تر از مدل ماشین تورینگ با مدلهای فیزیکی ممکن برای رایانه‌های کوانتومی مرتبط می‌شود. یکی از معایب این مدل آن است که به‌طور طبیعی یکنواخت نیست. یکنواختی یکی از شرایط تکنیکی مورد نیاز برای نظریهٔ پیچیدگی محاسبه است. برای یکنواخت ساختن مدل مدارهای کوانتومی باید شرایط دیگری به مدل افزود. این نکته در ادامه توضیح داده خواهد شد.

در قیاس با «بیتِ» کلاسیک، یک سیستم دوحالتی کوانتومی «کوبیت[1]» (به‌معنی بیت کوانتومی) نامیده می‌شود. از دید ریاضی، یک کوبیت، برداری در فضای برداری $\mathbb{C}^2$ است. دو بردار متعامد پایه در این فضا را مشخص کرده آنها را V_0 و V_1 می‌نامیم. در نمادگذاری دیراک، که «براکت[2]» نیز نامیده می‌شود، این دو بردار را با $|0\rangle$ و $|1\rangle$ نمایش می‌دهیم (این نمادگذاری از فیزیک منشأ گرفته و در مبحث محاسبهٔ رایانه‌ای بسیار به‌کار می‌رود.) به بیان دقیقتر، حالتهای کوانتومی تحت ضرب در اسکالر ناوردا هستند و بنابراین یک کوبیت متعلق به فضای تصویری مختلط دوبعدی است. برای هماهنگی با کاربرد فیزیکی، کوبیت‌ها را بردارهای ستونی در نظر گرفته با ضرب‌کردن از چپ، بر آنها عمل می‌کنیم.

یکی از اصول اساسی مکانیک کوانتومی این است که فضای مشترک حالتهای کوانتومی دو سیستم مختلف عبارت است از حاصلضرب تانسوری فضاهای متناظر. بنابراین، فضای حالتهای کوانتومی n کوبیت، فضای $\mathbb{C}^{2^n}$ است. بردارهای پایه در این فضا توسط رشته‌های دودویی با طول n مشخص می‌شوند. از تجزیهٔ تانسوری این فضا ($\mathbb{C}^{2^n}$) به n نسخه از فضای $\mathbb{C}^2$ استفادهٔ بسیاری می‌شود. حالت پایهٔ V_b متناظر با رشتهٔ دودویی $b_1b_2\ldots b_n$ را به شکل زیر نمایش می‌دهیم

$$V_{b_1b_2\ldots b_n} = V_{b_1} \otimes V_{b_2} \otimes V_{b_n}$$

در نمادگذاری «براکت» این حالت به شکل $|b_1b_2\ldots b_n\rangle$ یا به شکل حاصلضرب تانسوری $|b_1\rangle|b_2\rangle\ldots|b_n\rangle$ نوشته می‌شود. به‌طور کلی، از مکان برای تمایز n کوبیت متفاوت استفاده می‌کنیم. در صورت نیاز، iامین کوبیت را با $V^{[i]}$ مشخص می‌کنیم. از آنجایی که حالتهای کوانتومی تحت ضرب در اسکالر ناوردا هستند، بدون کاستن از کلیت موضوع، می‌توان آنها را به‌صورت نرمال درآورد یعنی به بردارهای یکه (با طول یک) تبدیل کرد. در این مقاله، بجز در مواردی که تصریح می‌شود، حالتهای کوانتومی همگی نرمال فرض می‌شوند. محاسبات کوانتومی در فضای حالتهای کوانتومیِ مرکب از n کوبیت ($\mathbb{C}^{2^n}$) صورت می‌پذیرد و توان محاسباتی بیشتر از طریق نمایی‌شدن بعد این فضا حاصل می‌شود.

1. qubit 2. bra-ket

در یک رایانهٔ کاربردی، نیازمند روشهایی برای ارائهٔ مسألهٔ مورد نظر به رایانهٔ (ورودی)، استخراج پاسخ مسأله (خروجی) و همچنین عملیاتی برای تغییر حالت رایانه به منظور تبدیل ورودی به خروجی مطلوب، هستیم. در ادامه، ورودی و خروجی مدل مدارهای کوانتومی را به‌اختصار توضیح می‌دهیم. سپس به منظور بیان زمینه و انگیزهٔ قواعد محاسبه در رایانهٔ کوانتومی، مروری کوتاه بر مدل کلاسیک مدارها خواهیم داشت.

چون موضوع بحث ما مقایسهٔ رایانه‌های کوانتومی با رایانه‌های کلاسیک و حل مسائل کلاسیک با رایانهٔ کوانتومی است، در این مقاله ورودی رایانهٔ کوانتومی همواره اطلاعات کلاسیک است که با یک رشتهٔ دودویی، S، به طول k نمایش داده می‌شود. این رشته باید به‌صورت برداری در $\mathbb{C}^{2^n}$ به‌عنوان حالت اولیهٔ رایانهٔ کوانتومی در نظر گرفته شود. بدین منظور ابتدا رشتهٔ $S0\ldots0$ را که با افزودن $n-k$ تا ۰ به انتهای S حاصل می‌شود در نظر گرفته و سپس رایانهٔ کوانتومی را در حالت اولیهٔ $V_{S0\ldots0}$ قرار می‌دهیم. توجه شود که تعداد کوبیتها در حالت کلی بیشتر از اندازهٔ داده‌های ورودی است. این کوبیتهای اضافی که در ابتدا دارای مقدار ۰ هستند، اغلب برای فضای کاری[1] در اجرای الگوریتمهای کوانتومی مورد نیازند.

در پایان یک محاسبه، رایانهٔ کوانتومی در حالتی قرار دارد که بردار یکتایی در $\mathbb{C}^{2^n}$ است. این حالت را می‌توان به شکل $W = \sum_s \alpha_s V_s$ نوشت که در آن s روی رشته‌های دودویی به طول n تغییر می‌کند و $\alpha_s \in \mathbb{C}$ و $\sum_s |\alpha_s|^2 = 1$. ضرایب α_s در فرمول بالا دامنه‌های احتمال[2] نامیده می‌شوند و W یک برهم‌نهش بردارهای پایهٔ V_s است. براساس اصل عدم قطعیت هایزنبرگ در مکانیک کوانتومی، نمی‌توان به‌طور کامل حالت کوانتومی سیستم را اندازه‌گیری کرد. اندازه‌گیری‌های مجاز بسیاری وجود دارد؛ به عنوان مثال هر پایهٔ متعامد $\mathbb{C}^{2^n}$ یک اندازه‌گیریِ را تعریف می‌کند که در آن نتایج ممکن عناصر این پایه هستند. ولی ما فرض می‌کنیم که خروجی با تصویرکردن هر کوبیت برروی پایهٔ $\{V_0, V_1\}$ حاصل می‌شود. مزیت مهم این شیوهٔ اندازه‌گیری در سادگی آن است، و به نظر می‌رسد که هر اندازه‌گیری فیزیکی معقولی را می‌توان با محاسبات اولیهٔ لازم و سپس اندازه‌گیری استاندارد فوق انجام داد.

این فرایند تصویرکردن بر حالت $\sum_s \alpha_s V_s$، رشتهٔ s را با احتمال $|\alpha_s|^2$ تولید می‌کند. فرایند اندازه‌گیری کوانتومی ذاتاً احتمالاتی است. در نتیجه محاسبات همواره منجر به جواب صحیح نمی‌شود، ولی احتمال به‌دست آوردن جواب صحیح حداقل $\frac{2}{3}$ است. به‌جای احتمال $\frac{2}{3}$ می‌توان هر عدد دیگر x را که $\frac{1}{2} < x < 1$، در نظر گرفت بدون اینکه ردهٔ توابع قابل محاسبه در زمان چندجمله‌ای با رایانهٔ کوانتومی تغییر کند. چنانچه احتمال یافتن پاسخ درست، بزرگتر از $\frac{1}{2}$ باشد با تکرار محاسبات و بر اساس اکثریت نتایج این محاسبات مجزا، می‌توان این احتمال را افزایش داد.

برای تشریح زمینه و انگیزهٔ قواعد محاسبه در یک مدار کوانتومی ابتدا به توصیف مختصری از مدل مدار کلاسیک می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که یک مدار کلاسیک را می‌توان فقط با سه دریچهٔ «و» [AND، ∧]، «یا» [OR، ∨] و «نفی» [NOT، ¬] توصیف نمود. بنابراین گفته می‌شود که این سه دریچه یک مجموعهٔ جامع از دریچه‌ها تشکیل می‌دهند. علاوه بر این سه

1. workspace 2. probability amplitudes

دریچه اجزایی برای تکثیر مقادیر روی سیمها لازم است که البته می‌توان این اجزاء را نیز دریچه در نظر گرفت. براساس قضیه‌ای [۱۷، ۴۳] در مکانیک کوانتومی حاکی از اینکه یک حالت کوانتومی دلخواه را نمی‌توان تکثیر کرد، چنین تکثیری در حیطهٔ محاسبات کوانتومی وجود نخواهند داشت.

مدار کوانتومی، به‌طور مشابه، متشکل از سیمهای منطقی کوانتومیِ حامل کوبیتها و دریچه‌های کوانتومی است که بر این کوبیتها عمل می‌کنند. هر سیم متناظر با یکی از n کوبیت است و بدون کاستن از کلیت موضوع می‌توان فرض کرد که هر دریچهٔ کوانتومی برروی یک یا دو کوبیت عمل می‌کند. تبدیلهای فیزیکی ممکنِ یک سیستم کوانتومی تبدیلهای یکانی هستند؛ در نتیجه هر دریچهٔ کوانتومی را می‌توان با یک ماتریس یکانی توصیف کرد. یک دریچهٔ کوانتومی که بر یک کوبیت عمل کند با یک ماتریس ۲×۲ و یک دریچهٔ کوانتومی که بر دو کوبیت عمل کند با یک ماتریس ۴×۴ نمایش داده می‌شود. از آنجا که ماتریسهای یکانی وارون‌پذیرند محاسبات کوانتومی نیز برگشت‌پذیرند؛ بنابراین می‌توان از خروجی شروع کرد و با حرکت قهقرایی، ورودی را به‌دست آورد. بُعد فضای خروجی و ورودی برای یک دریچهٔ کوانتومی یکی است، در نتیجه در طول محاسبه همواره n کوبیت توسط n سیم منتقل می‌شوند.

شایان ذکر است که شرایط مفروض در بالا (یکانی دریچه‌ها و محاسبه با n کوبیت اولیه در تمام زمان محاسبه) در مورد دریچه‌های نوفه‌ای[1] نیاز به بازبینی دارد که بحث آن در این مقاله نمی‌گنجد. می‌توان نشان داد که تحت شرایط فوق امکان محاسبات طولانی با دریچه‌های نوفه‌ای وجود ندارد [۲] و روشهایی برای حذف نوفه از طریق دادن مقادیر نزدیک به صفر به کوبیتها لازم است.

دریچه‌های کوانتومی که بر یک یا دو کوبیت عمل می‌کنند ($\mathbb{C}^۲$ یا $\mathbb{C}^۴$) به‌طور طبیعی تابعی برروی کل فضای حالتهای رایانه‌ای کوانتومی القا می‌کنند. به‌طور مثال، اگر A یک ماتریس ۴×۴ باشد که بر کوبیتهای i و j عمل می‌کند، آنگاه تابع القاشده برروی یک بردار پایهٔ $\mathbb{C}^{۲^n}$ عبارت است از

$$A^{[i,j]}V_{b_۱b_۲\ldots b_n} = \sum_{s=۰}^{۱}\sum_{t=۰}^{۱} A_{b_ib_j\,st}V_{b_۱b_۲\cdots b_{i-۱}\cdots b_{j-۱}tb_{j+۱}\cdots b_n} \qquad (۱.۲)$$

عبارت فوق حاصلضرب تانسوری A (که بر کوبیتهای i و j عمل می‌کند) و $n-۲$ ماتریس همانی (که بر بقیهٔ کوبیتها عمل می‌کنند) است. حاصلضرب یک بردار دلخواه در ماتریس متناظر با یک دریچهٔ کوانتومی، می‌تواند ضرایب منفی و مثبت داشته باشد که همدیگر را خنثی کرده باعث تداخل کوانتومی[2] می‌شوند.

همانند حالت کلاسیک، مجموعه‌های جامعی از دریچه‌ها برای مدارهای کوانتومی وجود دارد. چنین مجموعهٔ جامعی از دریچه‌ها برای ساختن مدار به‌منظور هر محاسبهٔ کوانتومی کافی است. یکی از این مجموعه‌های جامع که بسیار مفید است، مجموعه‌ای مرکب از تمام دریچه‌های یک کوبیتی به‌همراه یک دریچهٔ خاص دوکوبیتی به‌نام نفیِ کنترل‌شده[3] [CNOT] است. هر مدار کوانتومی که دریچه‌هایش بر تعداد ثابتی کوبیت عمل کنند به وسیلهٔ این

1. noisy gates 2. quantum interference
3. Controlled Not (CNOT)

مجموعه به‌طور کارآمد شبیه‌سازی می‌شود [۴]. عمل دریچهٔ CNOT روی بردارهای پایه به شرح زیر است: دومین کوبیت (هدف) نفی می‌شود اگر و تنها اگر اولین کوبیت (کنترل) دارای مقدار ۱ باشد. به‌عبارت دیگر، بردار V_{XY} تبدیل به بردار V_{XZ} می‌شود که (به پیمانهٔ ۲) $Z = X + Y$. این تبدیل متناظر با ماتریس یکانی زیر است

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

توجه کنید که CNOT یک دریچهٔ کلاسیکِ برگشت‌پذیر است. برای به‌دست آوردن مجموعه‌ای جامع از دریچه‌های کلاسیک بازگشت‌پذیر، حداقل یک دریچهٔ سه‌بیتی برگشت‌پذیر مانند دریچهٔ تُفُلی[1] لازم است، در غیر این‌صورت تنها می‌توانید محاسبات خطی بولی را انجام دهید. دریچهٔ تُفُلی یک دریچهٔ دوکنترلی است، که سومین بیت را نفی می‌کند اگر و تنها اگر هر دو بیت اول دارای مقدار ۱ باشند. دریچهٔ تُفُلی به تنهایی یک مجموعهٔ جامع برای محاسبات کلاسیک برگشت‌پذیر و قادر به شبیه‌سازی هر دو دریچهٔ AND و NOT است [۲۱]. پس اگر یک دریچهٔ تُفُلی بسازید می‌توانید هر محاسبهٔ کلاسیک برگشت‌پذیری را انجام دهید. به‌علاوه تا زمانی که ورودی پاک نشده باشد، می‌توان هر محاسبهٔ کلاسیکی را به‌طور کارآمد در جهت عکس انجام داد [۶] و بنابراین، به طور کارآمد با دریچه‌های تُفُلی پیاده کرد. ماتریس متناظر با دریچهٔ تُفُلی این است:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

اکنون به معرفی ردهٔ پیچیدگی BQP[2] (ردهٔ کوانتومی با زمان چندجمله‌ای و خطای کراندار) می‌پردازیم. این رده متشکل از زبانهایی است که در زمان چندجمله‌ای با یک رایانهٔ کوانتومی قابل محاسبه هستند به‌طوری که رایانهٔ حداقل در ۲/۳ اوقات جواب صحیح را به‌دست می‌دهد.

برای ارائهٔ تعریف دقیق این ردهٔ پیچیدگی برپایهٔ مدارهای کوانتومی، نیاز به افزودن شرط یکنواختی در مدارها داریم. هر مدار کوانتومی مشخص تنها قادر به محاسبهٔ تابعی است که دامنه (ورودی) آن رشته‌هایی دودویی با طول مشخص باشد. برای کاربرد مدل مدارهای کوانتومی در محاسبهٔ توابعی که رشته‌هایی به طول دلخواه را به‌عنوان ورودی می‌پذیرند نیازمند به مجموعه‌ای

1. Toffoli 2. bounded-error quantum polynomial time

از مدارهای کوانتومی هستیم که برای هر طولی از ورودیها شامل یک مدار متناظر باشد. در صورتی که هیچ شرط دیگر برروی این مجموعه از مدارها گذاشته نشود، طراح می‌تواند به ازای هر طول ورودی، تابع محاسبه‌ناپذیری در طرح مدارها ذخیره کند، و در نتیجه، با این تعریف، توابع محاسبه‌ناپذیر در ردهٔ BQP وارد می‌شوند که نامطلوب است. ردهٔ نایکنواختی از توابع را BQP/poly می‌نامند به این معنی که طرح می‌تواند، حداکثر، مقداری چندجمله‌ای از اطلاعات اضافی داشته باشد.

برای اینکه امکان وجود توابع محاسبه‌ناپذیر در مدل مدارها منتفی شود، نیازمند شرایط یکنواختی در خانوادهٔ مدارها هستیم. ساده‌ترین روش برای پیاده‌سازی این شرط به شرح زیر است. متناظر با هر خانوادهٔ یکنواخت از مدارها یک ماشین تورینگ کلاسیک وجود دارد که برای هر اندازهٔ ورودی، مشخصات مدار متناظر با این ورودی را، در زمان چندجمله‌ای، ارائه می‌دهد. در محاسبهٔ کوانتومی، امکان دارد که طراح مدارها تابعی محاسبه‌ناپذیر (یا به‌سختی محاسبه‌پذیر) را در ماتریسهای یکانی متناظر با دریچهٔ کوانتومی، ذخیره کند و بنابراین علاوه بر شرط فوق نیازمند شرط اضافی دیگری برای یکنواختی هستیم: این شرط که یک ماشین تورینگ دیگر، kامین رقم درایه‌های ماتریسهای متناظر با دریچه‌های کوانتومی را در زمان چندجمله‌ای نسبت به k و n محاسبه کند. توصیف دقیقتر این مطلب از حوصلهٔ این مقاله خارج است، ولی توان ماشینهای کلاسیکی که مجموعهٔ مدارها را طرح می‌کنند می‌تواند بسیار متغیر باشد و از رده‌هایی کوچکتر از P تا ردهٔ تصادفی‌شدهٔ کلاسیک BPP تغییر کند. به کمک این موضوع متقاعد می‌شویم که تعریف درستی از BQP داریم.

پس بنا به تعریف، توابع محاسبه‌پذیر در زمان چندجمله‌ای با یک رایانهٔ کوانتومی عبارت‌اند از توابع محاسبه‌پذیر به‌وسیلهٔ خانوادهٔ یکنواختی از مدارها که اندازه (تعداد دریچه‌های) آنها یک چندجمله‌ای از طول ورودی است. علاوه بر این برای هر ورودی با احتمال حداقل ۲/۳ جواب صحیح حاصل می‌شود. مجموعهٔ متناظر از زبانها (زبانها توابعی با مقادیر در {۰ ,۱}) هستند، BQP نامیده می‌شود.

۳. ارتباط این مدل با فیزیک کوانتومی

مدل مدارهای کوانتومی بخش قبل صورت بسیار ساده‌شده‌ای از واقعیات فیزیک کوانتومی است. در سیستمهای فیزیک کوانتومی عملهایی میسر است که متناظر با هیچ عمل سادهٔ مجازی در مدل مدارهای کوانتومی نیست، و پیچیدگیهایی در هنگام اجرای آزمایشها پیش می‌آیند که در این مدل بازتاب نمی‌یابند. در این بخش، بحث مختصری در این زمینه ارائه می‌شود؛ برای اطلاعات بیشتر به [۸، ۱۸] مراجعه کنید.

در زندگی روزمره، اشیاء رفتار کاملاً کلاسیکی دارند و در مقیاسهای بزرگ رفتار کوانتومی مشاهد نمی‌شود. این به دلیل پدیدهٔ واهمدوسی[1] است که باعث فروپاشی برهم‌نهش‌های حالات، به‌خصوص باعث فروپاشی بسیار سریع برهم‌نهش‌های بزرگ مقیاس می‌شود. بحث مقدماتی کاملی دربارهٔ واهمدوسی در [۴۷] آمده است. یکی از دلایلِ رخ‌دادنِ واهمدوسی این است که ما با سیستمهای باز سروکار داریم نه بسته. اگرچه تحولات سیستمهای مکانیک کوانتومی بسته یکانی هستند، اما این وضع در سیستمهای باز برقرار نیست. در واقع سیستمهای باز زیرسیستمهایی از سیستمهای با تحولات یکانی هستند و در فرایند گذر به زیرسیستمها شرط یکانی‌بودن حفظ نمی‌شود.

هر قدر سعی کنیم رایانه‌های کوانتومی را از محیط اطرافشان جدا کنیم، باز پیدایش واهمدوسی و خطا تقریباً اجتناب‌ناپذیر است. باید دانست که این فرایندها، تغییر اساسی در رفتار سیستم ایجاد نمی‌کنند. در صورت عدم تصحیح خطا، چنانچه عمل هر دریچه‌ای باعث تولید خطا و واهمدوسی از مرتبهٔ $1/t$ شود، آنگاه نیازمند به $O(t)$ عمل برروی حالت کوانتومی هستیم تا سیستم آنقدر دچار نوفه نشود که معمولاً پاسخ غلط بدهد. تصحیح خطای فعالانه می‌تواند تا حد قابل ملاحظه‌ای، این موقعیت را بهبود بخشد؛ این نکته به‌طور کامل در یادداشتهای درسی گاتسمن[1] مورد بحث قرار گرفته است [۲۴].

در برخی طرحهای پیشنهادی برای ساخت رایانه‌های کوانتومی محدودیتهای جدیتری نسبت به مدل مدارهای کوانتومیِ بخش قبل وجود دارد. بسیاری از این محدودیتها ردهٔ BQP را تغییر نمی‌دهند. به‌طور مثال حالتی را در نظر بگیرید که یک دریچه بتواند فقط بر روی یک زوج کوبیت مجاور عمل کند. در این صورت هم اجرای عمل دریچه بر روی زوج دلخواهی از کوبیتها از طریق جابه‌جایی مکرر یکی از کوبیتها با یکی از همسایگانش میسر است. اگر محاسبات شامل n کوبیت باشد، این فرایند تنها باعث افزایش زمان محاسبه با ضریب n خواهد بود و در نتیجه ردهٔ پیچیدگی BQP تغییر نمی‌کند.

در مدل مدارهای کوانتومی بخش قبل تمامی اندازه‌گیریها به انتهای کار موکول می‌شود، و فرض بر این است که استفاده از گامهای احتمالاتی مجاز نیست. اگرچه طبق مکانیک کوانتومی هر دو حالت فوق امکان‌پذیر است، اما هیچ‌کدام ردهٔ پیچیدگی BQP را بزرگتر نمی‌کند [۸]. ولی برای محاسبات کوانتومی مقاوم در برابر خطا، اندازه‌گیری در طول محاسبه به‌منظور تصحیح خطا بسیار مفید واقع می‌شود.

در مدل مدارهای کوانتومی همچنین فرض بر این است که در هر زمان، دریچه‌ها تنها بر تعداد ثابتی کوبیت عمل می‌کنند. در سیستمهای کوانتومی کلی، تمام کوبیتها طبق تابع همیلتنیِ توصیف‌کنندهٔ سیستم به‌طور همزمان تغییر می‌کنند. این تحول همزمانِ تعداد زیادی از کوبیتها را نمی‌توان تنها با دریچه‌های دوکوبیتی توصیف کرد. ولی در یک مدل واقعگرایانهٔ محاسبهٔ کوانتومی نمی‌توان هر همیلتنیِ دلخواهی را در نظر گرفت زیرا برخی از آنها به‌طور تجربی قابل حصول نیستند. آنهایی به‌طور تجربی قابل حصول‌اند که همزمان روی همهٔ کوبیتها عمل می‌کنند. جالب است که بدانید حتی آن همیلتنی‌هایی که مستقیماً در مدل ما قابل توصیف نیستند، می‌توانند برای محاسبهٔ توابع خارج از BQP در زمان چندجمله‌ای به‌کار روند. این مطلب با نشان‌دادن اینکه سیستمهایی با این‌گونه همیلتنی را می‌توان با رایانهٔ کوانتومی به‌طور کارآمد شبیه‌سازی کرد، به اثبات می‌رسد. اگرچه تحقیقاتی در زمینهٔ شبیه‌سازیِ همیلتنی‌ها توسط رایانه‌های کوانتومی انجام پذیرفته است [۱، ۲۹، ۴۵]، به نظر من هنوز این مسأله به‌طور کامل حل نشده است.

1. decoherence

1. Gottesman

۴. الگوریتم سایمن

در این بخش به شرح الگوریتم دن سایمن [۳۰] برای مسأله‌ای می‌پردازیم که حل آن با رایانه‌ای کلاسیک، زمان نمایی می‌خواهد اما با رایانهٔ کوانتومی در زمان چندجمله‌ای درجهٔ دوم قابل حل است. این مسأله از نوع «سربسته و مجمل» است به این معنی که تابع fای در آن وجود دارد که به‌صورت یک زیروالِ «جعبهٔ سیاه» داده شده است و رایانه می‌تواند مقدار q را محاسبه کند ولی دسترسی به کد پیاده‌سازی f ندارد.

مسألهٔ سایمن بدین‌شرح است. تابع f به‌صورت نگاشتی از $\mathbb{F}_2^n$ به $\mathbb{F}_2^n$ با خاصیت زیر به رایانه داده می‌شود:

$$\exists c : f(x) = f(y) \leftrightarrow x \equiv y + c (\text{به پیمانهٔ } \mathbb{F}_2^n) \quad (۱.۴)$$

در عبارت فوق، + عمل جمع دودوییِ بیتی است. این تابع اساساً تابعی دوره‌ای روی $\mathbb{F}_2^n$ با دورهٔ (تناوب) c است.

اکنون به توصیف کران پایین این مسأله برای رایانهٔ کلاسیک می‌پردازیم. فرض کنید که تابع f به‌طور تصادفی از میان تمام توابعی که در شرط (۱.۴) صدق می‌کنند انتخاب شده است. نشان می‌دهیم که برای یافتن c به $O(2^{n/2})$ بار محاسبهٔ تابع نیاز است. فرض کنید که مقدار تابع f را به‌ازای s ورودی محاسبه کرده‌اید. در این صورت، به ازای هر جفت از s مقدار محاسبه شدهٔ f حداکثر یک مقدار ممکن برای c را حذف کرده‌اید ولی c می‌تواند هریک از امکانات باقیمانده را با احتمال یکسان اختیار کند. بنابراین، پس از محاسبهٔ s مقدار f حداکثر $s(s-1)/2$ مقدار c را حذف کرده‌اید. حداقل در نیمی از اوقات باید بیش از نصف مقادیر ممکن برای c را بیازمایید. بنابراین به $O(n^{n/2})$ بار محاسبهٔ تابع نیاز است.

اکنون الگوریتم سایمن برای یافتنِ دورهٔ تابع با رایانهٔ کوانتومی را توصیف می‌کنیم. به این منظور دریچهٔ آدامار را معرفی می‌کنیم:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

فرض کنید که تبدیل آدامار برروی هریک از k کوبیت اعمال شود. در نتیجه برای بردار a در $\mathbb{F}_2^k$ مقدار زیر حاصل می‌شود

$$H^{\otimes k}(V_a) = \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{b=0}^{2^k-1} (-1)^{a \cdot d} V_b \qquad (۲.۴)$$

می‌توان به‌راحتی مشاهده کرد که درایه‌های ماتریس $H^{\otimes k}$، مقادیر $\pm 2^{-k/2}$ هستند. علاوه بر این هر درایهٔ (a,b) دارای ضریب $(-1)^{a \cdot b}$ است که

$$a \cdot b = \sum_i a_i b_i \qquad (\text{به پیمانهٔ } 2)$$

حاصلضرب داخلی دودویی a, b است. در حقیقت ماتریس فوق تبدیل فوریه برروی $\mathbb{F}_2^k$ است.

اینک آماده‌ایم که به توصیف الگوریتم سایمن بپردازیم. در الگوریتم سایمن از دو ثبّات[1] که هریک شامل n کوبیت هستند، استفاده می‌کنیم.

1. register

حالت آغازین $V_0 \otimes V_0$ است. اولین گام، تبدیل هر کوبیتِ نخستین ثبّات به حالت $\frac{1}{\sqrt{2}}(V_0 \otimes V_0)$ است. در این صورت، ثبّات اول شامل حالت برهم‌نهش یکنواختِ تمام رشته‌های دودویی به طول n خواهد بود. حال رایانه در حالت زیر است

$$2^{-n/2} \sum_{x=0}^{2^n-1} V_x \otimes V_0$$

گام بعدی، محاسبهٔ $f(x)$ در ثبّات‌دوم است که منجر به حالت زیر می‌شود

$$2^{-n/2} \sum_{x=0}^{2^n-1} V_x \otimes V_{f(x)}$$

توجه کنید که چون ورودی x برای تابع $f(x)$ در حافظه باقی می‌ماند، محاسبهٔ فوق یک تبدیل برگشت‌پذیر کلاسیک، و در نتیجه یک تبدیل یکانی است. سومین گام، اِعمال تبدیل فوریه بر ثبّات اول است:

$$2^{-n} \sum_{x=0}^{2^n-1} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot y} V_y \otimes V_{f(x)}$$

و بالاخره، حالت رایانه را در پایهٔ $V_i \otimes V_j$ ملاحظه می‌کنیم. احتمال مشاهدهٔ حالت $V_y \otimes V_{f(x)}$ برابر مجذور دامنهٔ احتمال آن در مجموع فوق است. چون دقیقاً دو مقدارِ ورودی x و $x + c$ منجر به مقدار $f(x)$ می‌شوند، احتمال مشاهدهٔ $V_y \otimes V_{f(x)}$ برابر با

$$2^{-2n} \left((-1)^{x \cdot y} + (-1)^{(x+c) \cdot y} \right)^2$$

است. این احتمال بسته به اینکه $c \cdot y$ برابر ۰ یا یک باشد، دارای مقدار 2^{2n-2} یا ۰ است. بنابراین، اندازه‌گیری فوق عنصر تصادفی y را با خاصیت $c \cdot y = 0$، تولید می‌کند. به سادگی می‌توان دید که از yهایی که به‌طور تصادفی انتخاب می‌شوند، $O(n)$ تا در $c^\perp$، فضای $n-1$ بُعدی عمود بر c، رتبه‌تمام هستند. پس c به‌طور یکتا تعیین می‌شود. بنابراین، با $O(n)$ بار تکرار فرایند فوق، می‌توان c را به‌دست آورد. از آنجا که هریک از این تکرارها شامل برداشتن $O(n)$ گام در رایانهٔ کوانتومی است، کل محاسبه در زمان $O(n^2 + nF)$ انجام می‌شود، که در آن F هزینهٔ یک‌بار محاسبهٔ تابع f است.

الگوریتم سایمن استدلالِ تقریباً قانع‌کننده‌ای برای $\mathrm{BQP} \supsetneq \mathrm{BPP}$ ارائه می‌دهد، هرچند نمی‌توان آن را یک اثبات دقیق دانست. ولی مسألهٔ سایمن یک مسألهٔ ساختگی است و به نظر نمی‌رسد که در عمل کاربرد چندانی داشته باشد. این مسأله مرا به کشف الگوریتم تجزیه هدایت کرد. الگوریتم تجزیه برهان بسیار ضعیف‌تری برای $\mathrm{BQP} \supsetneq \mathrm{BPP}$ ارائه می‌کند زیرا پیچیدگی محاسبهٔ مسأله تجزیه، نامعین است. با این‌حال الگوریتم کوانتومی تجزیه باعث جلب توجه زیادی به شاخهٔ محاسبات کوانتومی شد، زیرا مسألهٔ تجزیه مسأله‌ای است که بسیار مورد مطالعه قرار گرفته و مسأله‌ای بنیادی برای رمزنگاری با کلید عمومی است [۳۵].

۵. الگوریتم تجزیه

بهترین الگوریتم کلاسیک شناخته شده برای تجزیهٔ عدد L بیتی N، الگوریتم غربال در نظریهٔ اعداد [۲۸] است. مدت زمان اجرای این الگوریتم در حالت مجانبی، $O(\exp(cL^{1/3}\log^{2/3} L))$است. در رایانهٔ کوانتومی، محاسبهٔ الگوریتم کوانتومی تجزیه به‌طور مجانبی شامل $O(L^2 \log L \log\log L)$ گام است. ایدهٔ اصلی الگوریتم کوانتومی تجزیه، استفاده از تبدیل فوریه برای یافتن دورهٔ (تناوب) دنبالهٔ $u_i \equiv x^i$ (به پیمانهٔ N) است. از این دوره، عوامل تجزیهٔ N را می‌توان به‌دست آورد. دورهٔ این دنباله دارای مرتبهٔ نمایی از L است و در نتیجه این روش تجزیه برای رایانه‌های کلاسیک قابل کاربرد نیست. ولی با رایانهٔ کوانتومی می‌توان این دوره را در زمان چندجمله‌ای محاسبه کرد. به این منظور از فضای حالات 2^{2L} بعدیِ $2L$ کوبیت بهره گرفته، تبدیل فوریه را بر این فضا اعمال می‌کنیم. توضیح کلی دربارهٔ این الگوریتم در ادامه می‌آید. شرح جزئیات آن به همراه الگوریتمی کوانتومی برای یافتن لگاریتمهای گسسته در [۳۶] آمده است.

ایدهٔ کلی تمام الگوریتمهای (کوانتومی و کلاسیک) سریع برای تجزیه، نسبتاً ساده است. برای تجزیهٔ N، کافی است که دو ماندهٔ به پیمانهٔ N با خصوصیت زیر را بیابیم

$$s^2 \equiv t^2 (\text{به پیمانهٔ } N) \qquad (۱.۵)$$

ولی $s \not\equiv \pm t$ (به پیمانهٔ N). پس خواهیم داشت

$$(s+t)(s-t) \equiv 0 \quad (\text{به پیمانهٔ } N) \qquad (۲.۵)$$

و هیچ‌کدام از این دو عامل برابر ۰ به پیمانهٔ N نیستند. بنابراین، $s+t$ باید شامل یک عامل N باشد (و $s-t$ شامل عامل دیگر آن). با یافتن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک N و $s+t$ می‌توان این عامل را استخراج کرد. این فرایند در زمان چندجمله‌ای با استفاده از الگوریتم اقلیدس انجام می‌گیرد.

در الگوریتم کوانتومی تجزیه، دورهٔ تناوب ضربی ماندهٔ x به پیمانهٔ N را می‌یابیم. این دورهٔ تناوب r در شرط $x^r \equiv 1$ (به پیمانهٔ N) صدق می‌کند. اگر شانس بیاوریم و r زوج باشد، آنگاه هر دو طرف معادلهٔ همنهشتی فوق مجذورکامل هستند و می‌توانیم الگوریتم تجزیهٔ توصیف شده در بالا را به‌کار ببریم. اگر کمی بیشتر شانس بیاوریم، آنگاه $x^{r/2} \not\equiv -1$ (به پیمانهٔ N)، و با محاسبهٔ $\gcd(x^{r/2}+1, N)$ (بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک) می‌توانیم یک عامل تجزیهٔ N را به‌دست آوریم. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک را می‌توان با رایانهٔ کلاسیک و با استفاده از الگوریتم اقلیدس، در زمان چندجمله‌ای به‌دست آورد اگر N عدد بزرگی با دو یا چندین عامل اول باشد، تمرین نسبتاً ساده‌ای در نظریهٔ اعداد نشان می‌دهد که حداقل نیمی از مانده‌های x به پیمانهٔ N با این روش منجر به محاسبهٔ عوامل اول N می‌شوند. برای اغلب Nهای بزرگ، نسبت مانده‌های مناسب (که منجر به یافتن عامل اول می‌شوند) بسیار بیشتر است. بنابراین اگر روش بالا را برای مقادیر مختلف x تکرار کنیم باید خیلی بدشانس باشیم که نتوانیم N را تجزیه کنیم.

اکنون لازم است تبدیل کوانتومی فوریه را شرح دهیم. تابع کوانتومی فوریه که بر k کوبیت عمل می‌کند، حالت V_a (a عدد صحیحی بین ۰ و $2^k - 1$ است) را به برهم‌نهشی از حالتهای V_b به شکل زیر تبدیل می‌کند

$$V_a \to \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{b=0}^{2^k-1} \exp(2\pi i\, ab/2^k) V_b \qquad (۳.۵)$$

به سادگی می‌توان مشاهده کرد که این تبدیل یک ماتریس یکانی را تعریف می‌کند. پیاده‌سازی این تبدیل فوریه به شکل دنباله‌ای از دریچه‌های یک و دو کوبیتی کارِ سرراستی نیست. اگرچه با اقتباس از الگوریتم کولی-توکی[1] می‌توان این تبدیل را به دنباله‌ای از $k(k-1)/2$ دریچهٔ یک و دوبیتی تجزیه کرد. در حالت کلی، می‌توان تبدیل فوریهٔ گسسته برروی حاصلضربِ Q از اعداد اول کوچک را (که اندازهٔ هریک حداکثر برابر $\log Q$ است) در زمان چندجمله‌ای توسط رایانهٔ کوانتومی اجرا کرد. در پایان این بخش، نحوهٔ تجزیهٔ تبدیل فوریهٔ (۳.۵) به حاصلضرب دریچه‌های دوبیتی را نشان خواهیم داد.

اکنون آمادهٔ توصیف الگوریتم کوانتومی تجزیه هستیم. ما مداری با اندازهٔ چندجمله‌ای طراحی می‌کنیم که حالت کوانتومی $V_{00\ldots0}$ ورودی اولیهٔ آن است و خروجی آن، با احتمال زیاد، منجر به تجزیهٔ عدد Lبیتی N در زمان چندجمله‌ای توسط رایانهٔ دیجیتال می‌شود. این مدار شامل دو ثبّات اصلی، اولی مرکب از $2L$ و دومی مرکب از L کوبیت است. در شرح خلاصهٔ زیر، اشاره‌ای به کوبیتهای اضافی که به عنوان فضای کار استفاده می‌شوند، نخواهیم کرد. این کوبیتها برای پیاده‌سازی گام (۵.۵) در زیر موردنیاز هستند.

در آغاز رایانه را در حالتی قرار می‌دهیم که نشان‌دهندهٔ برهم‌نهش تمامی مقادیر ثبّات اول است:

$$\frac{1}{2^L} \sum_{a=0}^{2^{2L}-1} V_a \otimes V_0 \qquad (۴.۵)$$

این کار با استفاده از $2L$ دریچه که هر کوبیت ثبّات اول را به حالت $\frac{1}{\sqrt{2}}(V_0 + V_1)$ تبدیل می‌کند، انجام می‌شود.

سپس با استفاده از مقدار a در ثبّات اول، مقدار (به پیمانهٔ N) x^a در ثبّات دوم محاسبه می‌شود. این کار به کمک مدار کلاسیک برگشت‌پذیر برای محاسبهٔ (به پیمانهٔ N) x^a از a انجام می‌شود. با استفاده از الگوریتم ابتدایی ضرب کردن می‌توان (به پیمانهٔ N) x^a را با تکرار عمل مجذورکردن توسط $O(L^3)$ دریچهٔ محاسبه کرد، و در صورت استفاده از الگوریتم سریع ضرب اعداد صحیح (که عملاً فقط در مورد مقادیر نه چندان بزرگ L سریع است) در حالت مجانبی تعداد دریچه‌ها از مرتبهٔ $O(L^2 \log L \log\log L)$ است. پس از این فرایند، رایانه در حالت زیر خواهد بود

$$\frac{1}{2^L} \sum_{a=0}^{2^{2L}-1} V_a \otimes V_{x^a (\text{به پیمانهٔ } N)} \qquad (۵.۵)$$

گام بعدی، اِعمال تبدیل فوریهٔ گسسته (رک. (۳.۵)) برروی اولین ثبات است که منجر به حالت زیر می‌شود

$$\frac{1}{2^{2L}} \sum_{a=0}^{2^{2L}-1} \sum_{c=0}^{2^{2L}-1} \exp(2\pi i ab/2^{2L}) V_c \otimes V_{x^a (\text{به پیمانهٔ } N)} \qquad (۶.۵)$$

1. Cooley-Tukey

و بالاخره، حالت رایانه را اندازه‌گیری می‌کنیم. در نتیجه، با احتمالی برابر با مجذور ضریب بردار $V_c \otimes V_{x^j(N \text{ به پیمانهٔ})}$ در مجموع بالا، این بردار حاصل می‌شود. از آنجا که برای بسیاری از مقادیر a، مقدار (به پیمانهٔ N) x^a یکسان است، جمله‌های بسیاری از مجموع بالا در هر ضریب تأثیر می‌گذارند. می‌توان تمامی مقدارهایی از a را که منجر به مقدار یکسانی از (به پیمانهٔ N) x^a می‌شوند با رابطهٔ

$$a = a_0 + br$$

نمایش داد، که در آن a_0 کوچکترین مقدار در میان همهٔ aها و b عددی صحیح بین ۰ و $\lceil 2^{2L}/r \rceil$ است. این احتمال به‌طور صریح عبارت است از

$$\frac{1}{2^{2L}} \left| \exp(2\pi i\, a_0 c/2^{2L}) \sum_{b=0}^{\lfloor 2^{2L}/r \rfloor + \eta} \exp(2\pi i b r c/2^{2L}) \right|^2 \qquad (7.5)$$

که η بسته به مقدارهای (به پیمانهٔ r) 2^{2L} و a_0 برابر ۰ یا ۱ است. عبارت (۷.۵) یک مجموع هندسی از اعداد مختلط یکه است که با فواصل مساوی بر روی دایرهٔ یکه قرارگرفته‌اند و به راحتی می‌توان دید که مقدار این مجموع کوچک است بجز در حالتی که تمامی این اعداد مختلط عمدتاً در یک جهت قرارگرفته باشند. در این صورت، لازم است که زاویهٔ بین فازهای مختلط b و $b+1$ از مرتبهٔ عکس تعداد مقادیر ممکن b باشد، به عبارت دیگر، به ازای مقدار صحیحی از d داریم

$$rc/2^{2L} = d + O(r/2^{2L}) \qquad (8.5)$$

بنابراین محتمل است فقط مقادیری از b را که در (۸.۵) صدق می‌کنند مشاهده کنیم. از آنجا که $2^{2L} \simeq N^2$، رابطهٔ بالا را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$\frac{c}{2^{2L}} = \frac{d}{r} + O(1/N^2) \qquad (9.5)$$

مقدار پارامترهای c و 2^{2L} را می‌دانیم و یافتن مقدار r مورد نظر است. چون d و r هر دو کمتر از N هستند، چنانچه $O(1/N^2)$ در رابطهٔ (۹.۵) دقیقاً برابر $1/2N^2$ باشد، نتیجه خواهد شد که

$$\left| \frac{c}{2^{2L}} - \frac{d}{r} \right| \leqslant \frac{1}{2N^2}$$

در آن صورت $\frac{d}{r}$ نزدیکترین کسر به $c/2^{2L}$ است که صورت و مخرج آن کمتر از N هستند و در عمل، محتمل است یکی از نزدیکترین کسرها باشد. بنابراین برای یافتن r کافی است که مقدار $c/2^{2L}$ را گرد کرده تمامی کسرهای نزدیک به آن را که دارای مخرج کمتر از N هستند یافت. این فرایند با استفاده از یک بسط به‌صورت کسرهای مسلسل در زمان چندجمله‌ای انجام می‌شود. از آنجا که درستی مقدار r را می‌توان امتحان کرد، این فرایند را می‌توان تا یافتن جواب صحیح ادامه داد. اندازهٔ ثبّات اول را برابر $2L$ انتخاب می‌کنیم تا مقدار d/r نزدیکترین کسر به $c/2^{2L}$ باشد که صورت و مخرج آن حداکثر N است.

شرح مفصلتر این الگوریتم در [۳۶] آمده است. اخیراً زالکا [۴۶] منابع موردنیاز این الگوریتم را به تفصیل بیشتر بررسی کرده و موفق به بهتر کردن مقادیر اولیه از بسیاری لحاظ شده است. به‌طور مثال، زالکا ثابت کرد که $3L + o(L)$ کوبیت برای اجرای این الگوریتم کافی است. در حالی که الگوریتم اولیه $2L$ کوبیت اضافی برای فضای کار، و جمعاً $5L$ کوبیت، لازم داشت. علاوه بر این، زالکا نحوهٔ موازی‌سازی کارآمد این الگوریتم را برای اجرا در رایانه‌های کوانتومی موازی نشان داده است.

۱.۵ پیاده‌سازی تبدیل فوریهٔ کوانتومی اکنون نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان تبدیل فوریهٔ گسسته (رابطهٔ ۳.۵) را به شکل حاصلضربی از دریچه‌های دوبیتی نوشت. تبدیل فوریه بر $k+1$ کوبیت را در نظر بگیرید:

$$V_a \to \frac{1}{2^{(k+1)/2}} \sum_{b=0}^{2^{k+1}-1} \exp(2\pi i a b/2^{k+1}) V_b \qquad (10.5)$$

فرض می‌کنیم که عبارتی برای تبدیل فوریه بر k کوبیت داریم و نشان می‌دهیم که چگونه عبارتی برای تبدیل فوریه بر $k+1$ کوبیت، تنها با استفاده از $k+1$ دریچهٔ عمل جمع، حاصل می‌شود.

فضای ورودی V_a بر $k+1$ کوبیت را به حاصلضرب تانسوری یک فضای k کوبیتی و یک فضای یک کوبیتی تجزیه می‌کنیم. بنابراین $V_a = V_{a_-} \otimes V_{a_0}$، که در آن رشتهٔ $(k+1)$ بیتی a زنجیره‌ای از رشتهٔ k-بیتی a_- و رشتهٔ یک بیتی a_0 است. بنابراین a_0، بیتِ واقع در منتهی‌الیه سمت راست رشتهٔ دودویی a یعنی بیت یکان است. به‌طور مشابه، فضای خروجی V_b را نیز به حاصلضرب تانسوری یک فضای یک کوبیتی و یک فضای k کوبیتی تقسیم می‌کنیم با این تفاوت که این بار اولین کوبیت را به‌عنوان فضای یک کوبیتی در نظر می‌گیریم و داریم $V_b = V_{b_k} \otimes V_{b_-}$، که در آن b_k بیت انتهای سمت چپ b یعنی بیتِ با مقدار 2^k و b_- شامل k بیت سمت راست است. حال تبدیل فوریه به شکل زیر درمی‌آید

$$V_{a_-} V_{a_0} \to 2^{\frac{k+1}{2}} \sum_{\substack{a_k=0 \\ b_0=0}}^{1} \sum_{\substack{a_-=0 \\ b_-=0}}^{2^k-1} \exp\left(2\pi i \left(\frac{a_0 b_k}{2} + \frac{a_0 b_-}{2^{k+1}} + a_- b_k + \frac{a_- b_-}{2^k}\right)\right) V_{b_k} V_{b_-} \qquad (11.5)$$

اکنون عبارت بالا را تحلیل می‌کنیم. جملهٔ $\exp(2\pi i a_- b_-)$ همواره برابر ۱ است و در نتیجه می‌توان از آن صرف نظر کرد. جملهٔ $\exp(2\pi i a_- b_-/2^k)$ ضریب فازی در تبدیل کوانتومی فوریه بر k کوبیت است. بنابراین اگر ابتدا تبدیل فوریه را بر k کوبیت اِعمال کنیم (طبق فرض استقرا)، بردار V_{a_-} به V_{b_-} تبدیل شده و ضریب فازی فوق حاصل می‌شود. جملهٔ $\exp(2\pi i a_0 b_-/2^{k+1})$ را می‌توان به شکل حاصلضرب k دریچه نمایش داد به‌طوری که دریچهٔ

$$T_{j,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp\left(\frac{2\pi i}{2^{k+1-j}}\right) \end{pmatrix}$$

بر کوبیتهای متناظر با a_0 و b_j $(j+1$ امین بیت از سمت راست با مقدار $2^j)$ عمل کند. این دریچه اگر، و تنها اگر، مقدار هر دو بیت a_0 و b_j برابر یک

باشد، ضریب فازی $\exp(2\pi i/2^{k+1-j})$ را اعمال می‌کند. نهایتاً، جملهٔ

$$\exp(2\pi i\, a_0 b_k/2) = (-1)^{a_0 b_k}$$

متناظر با دریچهٔ یکانی

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

است که بردار V_{a_0} را به $(-1)^{a_0 b_k} V_{b_k}$ تبدیل می‌کند. بنابراین برای اِعمال تبدیل فوریه بر $k+1$ کوبیت، می‌توان ابتدا این تبدیل را بر k کوبیت اعمال کرد که در نتیجه بردار V_{a_-} به $\sum \exp(2\pi i a_- b_-/2^k) V_{b_-}$ تبدیل می‌شود. سپس دریچهٔ $T_{j,k}$ را برکوبیتهای V_{a_0} و V_{b_j} (به ازای $j = 0, \cdots, k-1$)، و بالاخره دریچهٔ H را بر V_{a_0} اِعمال کرد (که کوبیت V_{b_k} را به‌دست می‌دهد). خواننده‌ای که با تبدیل فوریهٔ سریع کولی-توکی آشناست، ملاحظه می‌کند که این فرایند، ترجمهٔ مستقیم آن تبدیل به یک الگوریتم کوانتومی است.

ایرادی که می‌توان به این بسط تبدیل فوریه گرفت، نیاز آن به پیاده‌سازی دقیق دریچه‌هایی با فازهایِ به‌طور نمایی کوچک است که به‌طور دقیق از نظر فیزیکی امکان‌پذیر نیست. در حقیقت می‌توان با حذف این دریچه‌ها تقریبی از تبدیل فوریه به‌دست آورد که برای الگوریتم تجزیه کافی خواهد بود [۱۴]. به این ترتیب، تعداد دریچه‌های موردنیاز برای تبدیل فوریهٔ کوانتومی از $O(k^2)$ به $O(k \log k)$ کاهش می‌یابد.

۶. الگوریتم گُرور

دیگر الگوریتم بسیار مهم در محاسبات کوانتومی، الگوریتم جستجوی گُرور است که عنصر مشخصی را در یک فهرست نامرتب از N عنصر (یا در بُرد تابعی که به‌طور کارآمد محاسبه‌پذیر است) جستجو می‌کند. زمان اجرای الگوریتم گُرور از مرتبهٔ $O(\sqrt{N})$ است که در مقایسه با حالت کلاسیک بهینه، $O(N/2)$، سریعتر است [۲۵]. با به‌کار بردن تکنیک این الگوریتم برای مسائل مختلف دیگر نیز می‌توان به تسریع جذری فوق رسید [۲۶]. این تسریع جذریِ جستجو در فهرست نامرتب، به خوبیِ کاری است که رایانهٔ کوانتومی می‌تواند انجام دهد و این موضوع را با روشهای ارائه شده در [۷] می‌توان اثبات کرد. با تعمیمی از الگوریتم جستجوی گُرور و کران پایین ارائه شده در بالا می‌توان کرانهای دقیقی یافت که مشخص می‌کنند یک رایانهٔ کوانتومی تا چه میزانی می‌تواند یک فرایند کوانتومی با احتمال موفقیت مفروض را تقویت کند [۱۰]. الگوریتم کوانتومی جستجو را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت. در این فرایند، عضو داخواهی از N عضو فهرست به‌طور تصادفی با احتمال $1/N$ انتخاب می‌شود. با استفاده از رایانهٔ کوانتومی می‌توان این احتمال را تقریباً برابر ۱ کرد. بدین‌منظور نیاز به $O(\sqrt{N})$ بار تکرارِ فرایند است، حال آنکه در حالت کلاسیک $O(N)$ تکرار باید انجام شود. اکنون به توصیف اجمالیِ این الگوریتم جستجو می‌پردازیم.

در الگوریتم گُرور تنها از سه تبدیل استفاده می‌شود. اولین آنها، تبدیل $W = H^{\otimes k}$ است که از اِعمال ماتریس

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

بر هر کوبیت حاصل می‌شود. به‌سادگی می‌توان امتحان کرد که $W^2 = \mathrm{Id}$ زیرا $H^2 = \mathrm{Id}$. تبدیل دوم Z_0 است که بردار پایهٔ V_0 را به $-V_0$ تبدیل کرده تغییری در بردارهای پایهٔ V_i، $i \neq 0$، ایجاد نمی‌کند. سومین تبدیل، Z_t است که بردار پایهٔ V_t را به $-V_t$ می‌برد و تأثیری بر دیگر بردارهای V_i، $i \neq t$، ندارد. (t شمارهٔ عضو مورد جستجو در فهرست است). در نخستین نگاه، ممکن است به نظر برسد که برای اِعمال Z_t لازم است t بر ما معلوم باشد. ولی اگر بتوانیم مداری کوانتومی طراحی کنیم که قادر به بررسی تساوی عدد صحیح i با t باشد می‌توانیم آن را برای اجرای تبدیل Z_i به‌کار ببریم. به‌عنوان مثال، اگر در جستجوی عضو خاصی در یک فهرست نامرتب باشیم، به راحتی می‌توان برنامه‌ای نوشت که معلوم کند عضو iام فهرست همان عضو مطلوب است یا نه، اگر چنین بود، فاز را منفی کند بدون اینکه بدانیم عضو مطلوب درکجای فهرست قرار دارد. همین‌طور، اگر در جستجوی جوابی از یک مسألهٔ ریاضی باشیم، کافی است بتوانیم به‌طور کارآمدی آزمون کنیم که عدد صحیح مفروضی چون i، کُد جوابی از مسأله هست یا نه.

فرض کنید در میان $N = 2^k$ عضو فهرست، که به شکل اعداد صحیح ۰ تا $N-1$ کدگذاری شده‌اند، به جستجو می‌پردازیم. برای این منظور k کوبیت کافی است. اکنون نشان می‌دهیم که اگر با برهم‌نهش

$$\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i V_i$$

آغاز کنیم، با تبدیل $-WZ_0W$ حالت زیر حاصل می‌شود

$$\sum_{i=0}^{N-1} (2m - \alpha_i) V_i$$

که در آن $m = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i$، میانگین تمامی دامنه‌هاست. دو نکتهٔ زیر در اثبات مورد استفاده قرار می‌گیرد. اول اینکه پس از تبدیل W دامنهٔ احتمال V_0 برابر $\sqrt{N}m$ خواهد بود و دیگر اینکه $W^2 = \mathrm{Id}$. با استفاده از این دو نکته می‌توان نشان داد که تبدیل WZ_0W میانگین m در دامنهٔ V_0 را استخراج می‌کند، آن را منفی می‌کند، و دوباره با علامت منفی روی تمام حالات پایهٔ V_i توزیع می‌کند. پس تبدیل WZ_0W، $\sum_i \alpha_i V_i$ را به $\sum_i (\alpha_i - 2m) V_i$ می‌برد.

اکنون می‌توانیم الگوریتم گُرور را به تفصیل توصیف کنیم. الگوریتم با برهم‌نهش یکنواخت همهٔ V_iها، حالت $\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=0}^{N-1} V_i$، آغاز می‌شود. سپس تبدیل $Z_t W Z_0 W$ را $c\sqrt{N}$ بار اِعمال می‌کنیم (ضریب ثابت c به‌طور مناسب انتخاب می‌شود). با این کار، دامنهٔ V_t به بهای کاهش همهٔ دامنه‌های دیگر به تدریج افزایش می‌یابد تا آنکه پس از $c\sqrt{N}$ بار تکرار، دامنهٔ V_t تقریباً برابر یک شود. فرض کنید که به مرحله‌ای از الگوریتم رسیده‌ایم که ضریب V_iها به‌ازای هر $i \neq t$، برابر α و ضریب V_t برابر β است. به‌راحتی می‌توان مشاهده کرد که در گام بعدی دامنه‌های احتمالی به ترتیب $2m - \alpha$ و $\beta + 2m$ خواهند بود که در آن مقدار میانگین دامنه‌ها، m، برابر $(\beta + (N-1)\alpha)/N$ است. در حالتی که β کوچک باشد خواهیم داشت: $m \approx \alpha \approx 1/\sqrt{N}$. در نتیجه دامنه‌های بردارهای V_i، $i \neq t$، اندکی کاهش می‌یابد و دامنهٔ V_t تقریباً به اندازهٔ $2/\sqrt{N}$ افزایش پیدا می‌کند. بدون

آنکه تفصیل بیشتری بدهم، می‌توان به‌طور شهودی مشاهده کرد که پس از $c\sqrt{N}$ گام، حالتی نزدیک به V_t حاصل می‌شود. اشکال مختلف زیادی از این الگوریتم تاکنون ارائه شده است. از جمله، اشکالی که می‌توان آنها را برای حالتی نیز که بیش از یک عنصر مطلوب وجود دارد به‌کار برد. برای شرح مفصلتر به [۲۵] مراجعه شود. و بالاخره، چنانکه فاینمن مطرح کرد، به نظر می‌رسد محاسبهٔ کوانتومی برای شبیه‌سازی دینامیک مکانیک کوانتومی مفید باشد. من در این باره بحث نمی‌کنم. بعضی تحقیقات انجام شده در این زمینه را می‌توان در [۱، ۲۹، ۴۵] یافت.

مراجع

1. D. S. Abrams and S. Lloyd, Simulation of many-body Fermi systems on a universal quantum computer, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997), 2586-2589.

2. D. Aharonov, M. Ben-Or, R. Impagliazzo and N. Nisan, Limitations of noisy reversible computation, (1996), `http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9611028`.

3. D. Aharnonov, A. Kitaev and N. Nisan, Quantum circuits with mixed states, in *Proceedings of the Thirtieth Annual ACM Symposium on Theory of Computation*, ACM Press, New York (1998), 20-30.

و نیز: `http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9806029`

4. A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. A. Smolin, and H. Weinfurter, Elementary gates for quantum computation, *Phys. Rev. A* **52** (1995), 3457-3467.

5. P. Benioff, The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines, *J. Statist. Phys.* **22** (1980), 563-591.

6. C. H. Bennett, Logical reversibility of computation, *IBM J. Res. Develop.* **17** (1973), 525-532.

7. C. Bennett, E. Bernstein G. Brassard and U. Vazirani, Strengths and weaknesses of quantum computing, *SLAM J. Computing* **26** (1997), 1510-1523.

8. E. Bernstein and U. Vazirani, Quantum complexity theory, *SIAM J. Computing* **26** (1997), 1411-1473.

9. S. Bravyi and A. Kitaev, Fermionic quantum computation, (2000), `http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/0003137`.

10. H. Burhman, R. Cleve, R. de Wolfe, and C. Zalka, Bounds for small-error and zero-error quantum algorithms, *Proceedings of the Fortieth Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE Computer Society, Los Alamitos, CA (1999), 358-368.

11. A. R. Calderbank, E. M. Rains, P. W. Shor and N. J. A. Sloane, Quantum error correction via codes over GF(4), *IEEE Transactions on Information Theory* **44** (1998), 1369-1387.

12. A. R. Calderbank and P. W. Shor, Good quantum error-correcting codes exist, *Phys. Rev. A* **54** (1995), 1098-1106.

13. A. Church (1936), An unsolvable problem of elementary number theory, *Amer. J. Math.* **58**, (1936) 345-363.

14. R. Coppersmith, An approximate Fourier transform useful in quantum factoring, IBM Research Report RC 19642 (1994).

15. D. Deutsch, Quantum theroy, the Church-Turing principle and the universal quantum computer, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **400** (1985), 96-117.

16. D. Deutsch and R. Jozsa, Rapid solution of problems by quantum computation, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **439**, (1992), 553-558.

17. D. Dieks, Communication by EPR devices, *Phys. Lett. A* **92** 271-272 (1982).

18. D. P. DiVincenzo, The physical implementation of quantum computation, *Fortsch. Phys.* **48** (2000), 771-783. Also `http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/0002077`.

19. R. Feynman, Simulating physics with computers, *Internat. J. Theoret. Phys.* **21** (1982), 467-488.

20. R. Feynman, Quantum mechanical computers, *Found. Phys.* **16** (1986), 507-531; originally in *Optics News* (February 1985), 11-20.

21. E. Fredkin and T. Toffoli, Conservative logic, *Internet. J. Theoret. Phys.* **21** (1982), 219-253.

22. D. Gottesman, A class of quantum error-correcting codes saturating the quantum Hamming bound, *Phys. Rev. A* **54** (1996), 1862-1868.

23. D. Gottesman, *Stabilizer Codes and Quantum Error Correction*, Ph. D. Thesis, California Institute of Technology (1997). Also `http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9705052`.

24. D. Gottesman, An introduction to quantum error correction, this AMS Proceedings of Symposia in Applied Mathematics (PSAPM).

25. L. K. Grover, Quantum mechanics helps in searching for a needls in a haystack, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997), 325-328. Also `http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9706033`.

26. L. K. Grover, A framework for fast quantum mechanical algorithms, in *Proceedings of the 30th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, ACM Press, New York (1998), 53-62.

27. S. C. Kleene, General recuraive functions of natural numbers, *Mathematische Annalen* **112** (1936), pp. 727-742.

28. A. K. Lenstra and H. W. Lenstra, Jr., editors, *The Development of the Number Field Sieve*, Lecture Notes in Mathematics 1554, Springer Verlag, Berlin (1993).

29. S. Lloyd, Universal quantum simulators, *Science* **273** (1995), 1073-1078.

30. Yu. Manin, *Computable and Uncomputable* (in Russian), Sovetskoye Radio, Moscow (1980).

31. N. Margolus, Parallel quantum computation, in *Complexity, Entropy, and the Physics of Information*, edited by W. Zurek, Addison-Wesley (1990) 273-287.

32. E. Post, Finite combinatory processes. Formulation I, *J. Symbolic Logic* **1** (1936) 103-105.

33. J. Preskill, Fault-tolerant quantum computation, in *Introduction to Quantum Computation*, edited by H.-K. Lo, S Popescu and T. P. Spiller, World Scientific, Singapore (1998), 213-269. Also `http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9712048`.

34. J. Preskill, Lecture notes for Physics 219/Computer Science 219: Quantum Computation (1999), available online at `http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229`.

35. R. L. Rivest, A Shamir and L. Adleman, A method of obtaining digital signatures and public-key cryptosystems, *Comm. Assoc. Comput. Mach.* **21** (1978), 120-126.

36. P. W. Shor, Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer, *SIAM J. Computing* **26** (1997), 1484-1509.

37. P. W. Shor, Fault-tolerant quantum computation, in *Proc. 37nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA (1996), 56-65.

38. P. W. Shor, Quantum computing, *Documenta Mathematica* Extra Vol. ICM I (1998), 467-486.

39. D. R. Simon, On the power of quantum computation, *SIAM J. Computing* **26** (1997), 1474-1483.

40. A. Steane, Multiple particle interference and quantum error correction, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **452** (1996), 2551-2577.

41. A. M. Turing On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math. Soc.* (2) **42** (1936), 230-265; Corrections in *Proc. London Math. Soc.* (2) **43** (1937), 544-546.

42. W. van Dam, A universal quantum cellular automaton, in *Proceedings of PhysComp96*, edited by T. Toffoli, M. Biafore and J. Leão, New England Complex Systems Institute (1996), 323-331.

43. W. Wootters and W. H. Zurek; A single quantum cannont be cloned, *Nature* **299** (1982), 802-803.

44. A. Yao, Quantum circuit complexity, in *Proceedings of the 34th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA (1993), 352-361.

45. C. Zalka, Efficient simulation of quantum systems by quantum computers, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **454** (1998), 313-322.

46. C. Zalka, Fast versions of Shor's quantum factoring algorithm, `http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9806084` (1998).

47. W. H. Zurek, Decoherence and the transition from quantum to classical, *Physics Today* **44** (1991), 36-44.

******

• Peter W. Shor, "Introduction to quantum algorithms", *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, **58** (2002) 143-159.

* پیتر شور، آزمایشگاههای بل، آمریکا

`shor@research.att.com`

اولین اکتشافات هندسی کودک از نوع توپولوژیک است. اگر از او بخواهید شکل یک مربع یا یک مثلث را کپی کند، یک دایرهٔ بسته برایتان رسم خواهد کرد.

ژان پیاژه

عصب‌شناسی محاسباتی:
ریاضیات بیشتری برای شناخت مغز انسان لازم است*

اریک دی‌شوتر*
ترجمهٔ بکتاش بابادی

مقدمه

این بررسی کوتاه از دو بخش تشکیل شده است: در یک مقدمهٔ کلی، چیستی عصب‌شناسی و عصب‌شناسی محاسباتی و نیز مسائلی کلی که این رشته‌ها با آنها سروکار دارند توضیح داده می‌شود، و در بخش دوم چند مثال از مباحثی آورده می‌شود که ریاضیدانان می‌توانند سهم مهمی در آنها داشته باشند.

عصب‌شناسی در تلاش است که دریابد سیستم عصبی چگونه اطلاعات را پردازش می‌کند و این خود چگونه به رفتار، احساسات، یادگیری و آگاهی (در انسان) منجر می‌شود. با اینکه در چند دههٔ اخیر پیشرفتهای عظیمی در این زمینه حاصل شده است، هنوز شناختی اساسی به‌دست نیامده است. من میل دارم عصب‌شناسی را به‌عنوان دانشی که هنوز در دوران پیشا-نیوتنی خود به سر می‌برد توصیف کنم. این رشته از دانش از لحاظ طراحی آزمایشها در آن و روشهای جمع‌آوری داده‌ها بنیان علمی محکمی دارد و بنابراین قطعاً در دورهٔ پسا-کوپرنیکی به سر می‌برد امّا هنوز فاقد نظریه‌های وحدت‌بخش است. در حال حاضر هیچ‌کس نمی‌تواند تضمین کند که روزی بتوانیم مجموعه‌ای سازگار از قوانین ریاضی به‌دست آوریم که سیستم عصبی را توصیف کند. با اینکه برخی افراد چنین نظریه‌هایی پیشنهاد کرده‌اند [Arbib et al. 1997]. برای ایجاد یک نظریهٔ موفق به سطحی از تلفیق یافته‌ها نیاز داریم که هنوز موجود نیست. در حقیقت عصب‌شناسی (و به‌طورکلی زیست‌شناسی) تا حد زیادی مانند یک صنعت خانگی [نه صنعت متمرکز] عمل می‌کند که در آن، واحدهای کوچک بسیار زیادی مشغول گردآوری داده‌ها هستند. هزاران آزمایشگاه در سراسر جهان در حال مطالعهٔ جزءبه‌جزء قطعهٔ کوچکی از یک سیستم عصبی خاص و معمولاً در یک سطح معین از پیچیدگی‌اند. این شیوه منجر به حجم عظیمی از اطلاعات در بارهٔ جزئیات کالبدشناسی، ریخت‌شناسی، فیزیولوژی، داروشناسی و غیره در مورد بسیاری از قسمتهای سیستم عصبی مهره‌داران و بی‌مهرگان شده است. امّا متأسفانه در اکثر موارد، این داده‌ها بصیرتی در بارهٔ اینکه مدارات عصبی واقعاً چگونه عملیاتشان را انجام می‌دهند، در اختیار ما نمی‌گذارند (یک مورد استثنایی، مدارهای بسیار سادهٔ بی‌مهرگان است [Marder & Calabrese 1996]). از این گذشته، سطح فناوری موجود بسیاری از پژوهشها را محدود می‌سازد و پیشرفت روشهای آزمایشی اغلب به تجدیدنظرهای اساسی در اطلاعات موجود منجر می‌شود [Barinaga 1995; Stuart et al. 1997].

مغز به مثابهٔ یک سیستم چندسطحی پیچیده

یکی از دلایلی که برهم نهادن و تلفیق داده‌های عصب‌شناسی را تا این حد دشوار ساخته است، پیچیدگی این داده‌ها در مقیاسهای چندگانهٔ زمانی و مکانی است. همان‌طورکه در جدول ۱ نشان داده شده است، عموماً فرض می‌شود که پردازش اطلاعات به وسیلهٔ سیستم عصبی به‌طور همزمان در هفت سطح از پیچیدگی انجام می‌شود. این رویکرد با روشی که ما در برنامه‌ریزی سیستمهای پردازشی [مصنوعی] به‌کار می‌گیریم بسیار متفاوت است. به‌عنوان مثال، پروتکل TCP/IP، بر مبنای تمایز دقیق میان سطوح مختلف انتزاع در لایه‌های مختلف طراحی شده است. هنگامی که داده‌هایی را از طریق اینترنت ارسال می‌کنید، این داده‌ها هر یک از این سطوح را متوالیاً طی می‌کنند.

این روش، با وجود نارساییهایی که دارد، سیستم بسیار انعطاف‌پذیری ایجاد می‌کند که ارتباط اجزای سخت‌افزاریِ بسیار متفاوتی را با یکدیگر ممکن می‌سازد. در سیستم عصبی تمایزی میان سخت‌افزار و نرم‌افزار نیست و همچنین تفکیک دقیقی میان فرایندهای گوناگون وجود ندارد. بدین ترتیب با اینکه می‌توان به نواحی مختلف مغز ویژگیهای مختلفی نسبت داد، معمولاً دهها ناحیه در انجام‌دادن عملیات ساده شرکت دارند. این مسأله احتمالاً به این علت است که تکامل نمی‌تواند سیستمی را طراحی کند [و پس از طراحی آن را بسازد]، بلکه باید سیستمها را در همان زمانی که مشغول انجام عملیات هستند، بهبود بخشد. در بارهٔ مهره‌داران، این تکامل آشکارا با افزوده‌شدن سیستمهای هر چه پیچیده‌تر به سیستمهایِ از قبل موجود انجام شده است، روندی که به ایجاد لوب پیشانی قشر مغز در انسان ختم شده است ولی طی این روند سیستمهای قدیمی‌تر از کار نیفتاده‌اند. بلکه اجزای جدید و قدیمی در ساختارهای پردازش موازی و بازگشتی، قویاً با یکدیگر پیوند یافته‌اند. با این همه، فشار تکاملی این سیستم به ظاهر نامعمول را بسیار کارا و بهینه ساخته است. برای مثال، اتصالات میان نورونها و میان نواحی مختلف مغز از مسیرهایی سه‌بعدی تبعیت می‌کنند که به حداکثر چگالی و فشردگی برسند،

جدول ۱ بر اساس شکل ۴.۱ از [Churchland & Sejnowski 1992]

سطح		مقیاس فیزیکی (m.m)
۱	فرایندهای مولکولی	10^{-10}
۲	کانالها و سیناپسها	10^{-7}
۳	(نورون) سلولی	10^{-4}
۴	شبکهٔ موضعی	10^{-3}
۵	عصب‌دهی، ناحیه و میدان گیرندگی	10^{-2}
۶	سیستمهای مغز	10^{-1}
۷	مغز و رفتار	۱

زیرا روند زایمان طبیعی [که در آن سر نوزاد باید از کانال زایمان خارج شود] محدودیتی را در اندازهٔ سر نوزاد به سیستم تحمیل می‌کند. از این جهت، سیستم عصبی بسیار با اینترنت متفاوت است؛ با اینکه اینترنت نیز بسیار پیچیده است اما به میزان بسیار کمتری در معرض فشارهای تکاملی است.

از آنجا که روشهای علمی کنونی ما برای بررسی همزمان مسائل در سطوح متفاوت پیچیدگی شکل نگرفته‌اند، عصب‌شناسان معمولاً در بررسی سیستم عصبی در یک یا دو سطح از این سطوح متخصص هستند. در نتیجه در این دانش با بسیاری مجموعه‌های مجزا از داده‌های بسیار مبسوط برخورد می‌کنیم. مثالی از این دست، بیماری وراثتی هانتینگتون می‌باشد که دارای نشانه‌های مشخصه‌ای از ناهنجاری کنترل حرکتی و ناتوانی‌های شناختی است (در سطح مغز). دلیل ژنتیکی این بیماری به‌طور کامل در سطح مولکولی شناخته شده است: ژن مربوط، محصول آن ژن و نقص ژنی مسؤول بیماری شناسایی شده‌اند [Lunkes et al. 1998]. به‌علاوه این نیز معلوم شده است که این بیماری باعث از میان رفتن سلولها در نواحی ویژه‌ای از مغز به نام عقده‌ها [گانگلیونها]ی پایه[1] که در کنترل حرکت دخیل هستند، می‌شود. اما آنچه اصلاً فهمیده نشده است، این است که چرا این نقص ژنی تنها در عقده‌های پایه باعث از میان رفتن سلولها می‌شود (پرش از سطح ۱ به سطح ۲) یا اینکه چرا از بین رفتن سلولها باعث نشانه‌های حرکتی و شناختیِ بسیار اختصاصیِ این بیماری می‌شود (پرش از سطح ۳ به سطح ۷). مثالهای بسیار دیگری می‌توان آورد که نشان می‌دهند با اینکه اطلاعات مفصل و فراوانی در بسیاری از این سطوح (به‌ویژه در سطوح ۱ تا ۳ و ۶ و ۷) گردآوری کرده‌ایم، اما هنوز تا توضیح اینکه فعالیت عصبی چگونه باعث می‌شود جانوران رفتار کنند و یا انسانها فکر کنند و سخن بگویند، راه درازی داریم.

عصب‌شناسی محاسباتی چیست؟

هر چند بسیاری از عصب‌شناسان عقیده دارند که پاسخ این‌گونه سؤالات از راه جمع‌آوری داده‌های بیشتر به‌دست می‌آید، عدهٔ رو به افزایشی از آنان قانع شده‌اند که رویکرد علمی دیگری مورد نیاز است. بسیاری از این گروه، خود را عصب‌شناس محاسباتی می‌نامند، هر چند که اصطلاحات دیگری همانند عصب‌شناس انفورماتیکی و عصب‌شناس نظری نیز در مورد آنان به‌کار می‌رود. البته اصطلاح عصب‌شناس نظری از مدتها قبل ازجمله در مورد ریاضیدانانی همانند ویلفرید رال[2] [Segev et al. 1995] و دیوید مر [Marr 1969] رایج بوده است؛ این دو ریاضیدان سهمی بنیادی در این زمینه در دههٔ ۱۹۶۰ ادا کرده‌اند. اما تنها در دههٔ نود بود که رشتهٔ عصب‌شناسی محاسباتی وارد جریان اصلی عصب‌شناسی شد. عصب‌شناسی محاسباتی هم به استفاده از روشهای محاسباتی در بررسی سیستم عصبی می‌پردازد و هم به‌خصوص تلاش می‌کند که دریابد مغز چگونه محاسبه می‌کند. با اینکه به نظر بعضیها این دو جنبه در مقابل یکدیگر قرار دارند، به نظر من رشتهٔ محکمی آنها را به هم می‌پیوندد: هر دوی آنها در مقایسه با روشهای تحلیلی همه‌جانبه‌نگرتر و تلفیقی‌ترند و نیز هر دوی آنها از نظریه‌های ریاضی استفادهٔ وسیعی می‌کنند. با اینکه عصب‌شناسی محاسباتی در گذر زمان تبدیل به یک رشتهٔ علمی شده، هنوز از جانب همهٔ عصب‌شناسان آزمایشگاهی به رسمیت شناخته نشده است. ممکن است این مسأله از دید ناظران خارجی عجیب بنماید، اما بسیاری از عصب‌شناسان همچنان به مدلسازی بی‌اعتماد هستند و عده‌ای از آنها حتی تا همین اواخر، مدلسازی را با مُدسازی [که در آن دست طراح برای طراحی هر لباسی باز است] اشتباه می‌گرفتند. بخشی از این بی‌اعتمادی به علت فقدان آموزش نظری در برنامه‌های درسی استاندارد زیست‌ـپزشکی است که باعث می‌شود دانش‌آموختگان این رشته‌ها، تا زمانی که «برهان قاطع» آزمایشگاهی وجود نداشته باشد به نظریه‌ها و مدلها بی‌اعتماد باشند.

چالشهای پیش‌رو در عصب‌شناسی محاسباتی

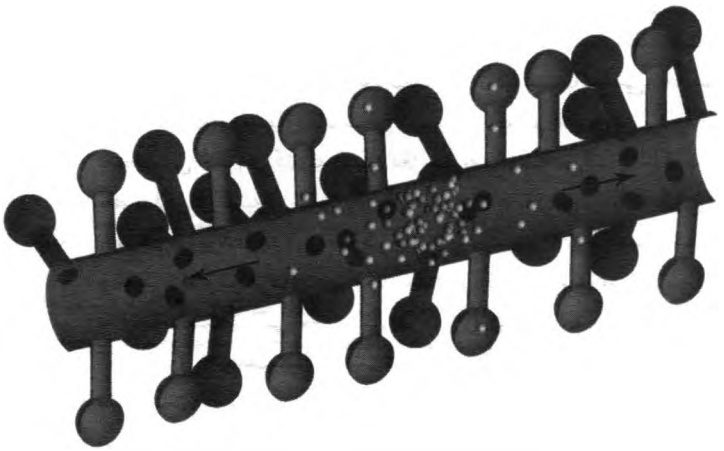
یک رویکرد کلاسیک ریاضی به سیستم عصبی این است که برای یافتن یک نظریهٔ بزرگ و وحدت‌بخش در بارهٔ مغز انسان تلاش شود. این رویکرد در چند دههٔ گذشته مقبولیت زیادی داشته است [Arbib et al. 1997]، اما بعید به نظر می‌رسد که در آیندهٔ نزدیک به موفقیت برسد، زیرا مغز یک ساختار همگن و یکنواخت نیست (به مطالب بالا رجوع کنید). این رویکرد در مورد نواحی خاصی از مغز ممکن است موفقیت بیشتری داشته باشد [مثلاً رجوع کنید به Marr 1969]، با این حال در عمل اغلب مشکل است که معلوم کنیم آیا ناهم‌خوانی خاصی میان نظریه و واقعیت مغز برای اعلام بطلان نظریه کافی است یا خیر [De Schutter 1995]. من به ریاضیدانان جوان توصیه می‌کنم که توجه خود را به‌جای نظریه‌های بزرگ، بر مسائل خاصی که نیاز به حل آنها هست متمرکز کنند. در بخش بعد چند مثال از چنین مسائلی خواهم آورد، اما مثالهای بسیار دیگری را نیز می‌توان به این فهرست افزود. اولین مثالها به بسط و کاربرد نظریه‌های ریاضی موجود برای رفع نیازهای خاص می‌پردازند و مثالهای آخری به حوزه‌هایی اشاره دارند که در آنها پیشرفتهای بنیادیتری [در ریاضیات] مورد نیاز است.

اهمیت کارکردی ریختِ سلولها:

همهٔ ابعاد مورد نیاز ندشکل در سیستم عصبی اهمیت دارد. این موضوع در سطح سلولی از همه جا بیشتر مطالعه شده است، اما در سطوح دیگر نیز تأثیر دارد. ما مثالهای متعددی در این بازه مطرح خواهیم کرد که در آنها پژوهشهای پردامنه‌ای برای بهبود بخشیدن به روشهای ریاضیِ موجود در جریان است.

■ سطح مولکولی و سیناپسی: شبیه‌سازی پخشِ سه‌بعدی به روش مونت کارلو. پیش‌فرض اکثر مدلهای فرایندهای مولکولی، حجم «کاملاً یکنواخت» است

1. basal ganglia 2. Wilfrid Rall



شکل ۱ تصویر پخش در طول محور یک دندریت [جسم استوانه‌ای شکل] و خارهای متصل به آن [اجسام قارچ‌شکل]. تعدادی مولکول بزرگ در مرکز محور اصلی دندریت آزاد شده‌اند و در طول این محور در حال انتشار هستند (پیکانها). اما به علت وجود خارها، فرایند پخش به‌سادگی در یک بعد انجام نمی‌شود زیرا بسیاری از مولکولها در داخل خارها به دام می‌افتند. شبیه‌سازی عددیِ ریخت دقیق این ساختار، پیش‌بینی این اثرها را در آرایشهای مختلف خارهای سیناپسی امکان‌پذیر می‌سازد [Bormann et al. 2000]. قطر سر یک خار معمولی ۵ر۰ میکرون است.

یعنی این فرض که گرادیانهای غلظت بر روی سیستم مورد نظر در مقیاسهای زمانی و مکانی مدلسازی شده اثری ندارد. روشن است که این فرض یک، ساده‌سازی خام است و سلولها، چه پیش و چه پس از بلوغ، استفادهٔ وسیعی از گرادیانهای غلظت می‌کنند. هنگامی که این فرایندهای مولکولی با جزئیات بیشتری مدلسازی می‌شوند، برای کم‌کردن میزان پیچیدگی مسأله، به یک فضای یک‌بعدی فرو کاسته می‌شوند. اما به علت ابعاد کوچک و ریخت بسیار نامنظم زواید [اکسونی و دندریتی] نورونها، در بسیاری موارد، اعتبار فرض یک‌بعدی بودن سیستم محتمل نیست.

این مسأله در شکل ۱ نشان داده شده است که در آن تأثیر خارهای دندریتی (جدول ۱ را ببینید) برروی پخش محوری در یک دندریت مشاهده می‌شود. روشهای تصویربرداری نوین اندازه‌گیری حساس فرایندهای پخش در دندریت‌ها و اکسون‌ها را امکان‌پذیر ساخته است. [Wang & Augustine 1995, Denk & Svoboda 1997]، اما تحلیل چنین داده‌هایی معمولاً مبتنی بر پخش یک‌بعدی در راستای محور زائدهٔ نورونی است [Gabso et al. 1997]. این ساده‌سازی بر مبنای این واقعیت است که پخش شعاعی [در جهت عمود بر محور طولی زائده] در فرایندهای نورونیِ با قطر کوچک به‌سرعت به تعادل می‌رسد. با این همه، این فرض آشکارا با وجود خارهای سیناپسی در تضاد است، زیرا این خارها به صورت دامی عمل می‌کنند که مانع پخش می‌شوند: مولکولهایی که وارد یک خار می‌شوند پیش از آنکه از خار خارج شوند، نمی‌توانند در طول دندریت حرکت کنند. همچنین ریخت ناحیه‌ای دندریت‌ها، که معمولاً شامل شاخه‌های متعدد و انتهاهای بسته در طی فواصل صد میکرونی است، تأثیر زیادی بر روی خواص پخش دارد [Bormann et al. 2000].

مکان دیگری که در آن ریخت پیچیده برروی پخش تأثیر می‌گذارد، شکاف سیناپسی است. این شکافها معمولاً ساختارهای بسیار پرپیچ و تابی هستند (به‌ویژه در عضلات) به‌طوری که فرض پخش یک‌بعدی در طول شکاف سیناپسی نمی‌تواند معتبر باشد.

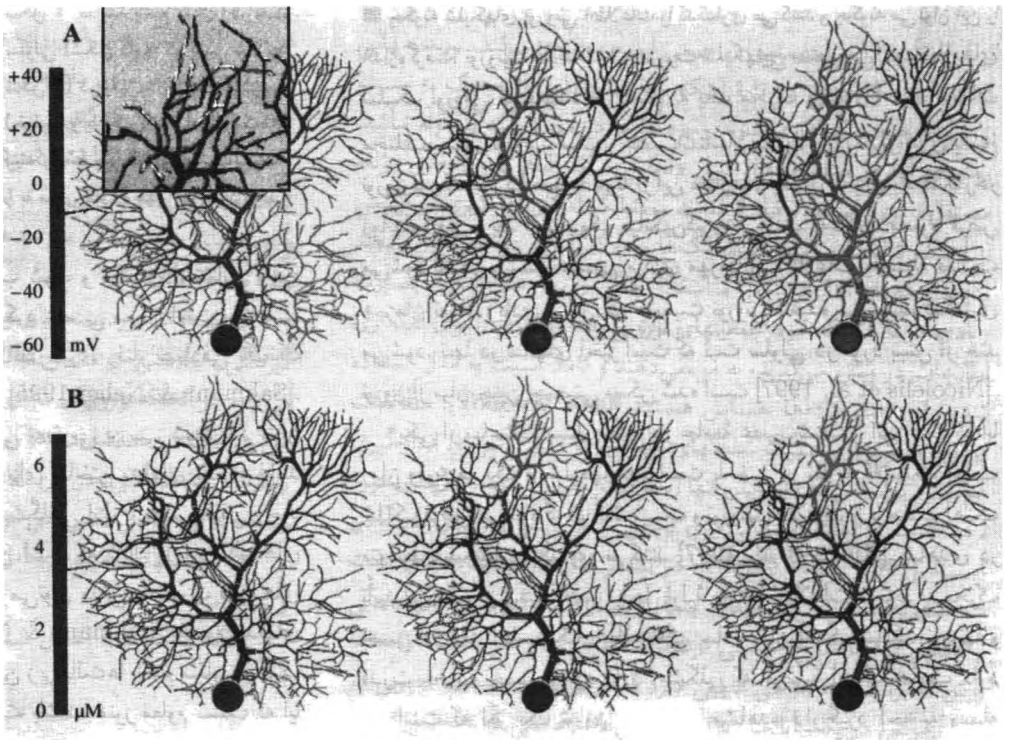
از آنجا که این‌گونه مسائل به تأثیر ساختارهای نامنظم مربوط می‌شوند، شبیه‌سازی عددی معمولاً بهترین رویکرد است. اما متأسفانه هنوز بسیاری از ابزارهای نرم‌افزاری مورد نیاز در دست نیست. رویکرد مهندسیِ استفاده از اجزاء محدود[1] [Fletcher 1991] برای این مسأله به دو دلیل زیاد مناسب نیست. نخست اینکه در مقیاسهای کوچک تعداد بسیار زیادی از اجزاء[1] مورد نیاز است که مسأله را از لحاظ محاسباتی بسیار سنگین می‌کند. مهمتر از آن این است که در مقیاسهای کوچک، مولکولهای مربوط رفتارهای تصادفی از خود نشان می‌دهند. مثلاً برای مدلسازی فرایند یادگیری، مهم است که غلظت یونهای کلسیم را در خارهای دندریتی دنبال کنیم، اما در هنگام استراحت [سلولی] یک خار دندریتی حاوی فقط یک یا دو عدد از این یونهاست. بنابراین به نظر می‌رسد که روش مونت کارلو در این نوع شبیه‌سازی‌ها بیشتر مناسب باشد. برای بعضی مسائل خاص همانند شبیه‌سازیِ پخشِ ناقلهای عصبی در طول شکاف سیناپسی، نرم‌افزارهایی در حال حاضر در دسترس است [Stiles & Bartol 2000]، اما برای موارد دیگر پیشرفت ریاضی بیشتری لازم است زیرا روشهای مونت کارلو برای اینکه کارا باشند، باید بهینه شوند و این بهینه‌سازی اغلب توصیف ریاضی مسأله را بغرنج می‌سازد [Bormann et al. 2000].

■ **سطح سلولی:** فراتر از نظریهٔ کابلِ کنش‌پذیر. بررسیهای ریاضی وسیعی در دههٔ شصت منجر به درک این مسأله شد که چگونه ریخت کلی دندریت‌های کنش‌پذیر[2] بر توزیع ولتاژ در طول آنها تأثیر می‌گذارد [Segev et al. 1995; Rall & Agmon-Snir 1998]. به‌خصوص پذیرفته شده است که مکان خاص سیناپس هم بر روی دامنه و هم بر روی زمان سیگنالی که به جسم سلولی نورون [سوما] مخابره می‌شود تأثیر دارد. این نظریه‌های ریاضی، دستورالعمل‌هایی برای به‌دست آوردن معادلات کابلی معادل برای زوائد نورونی فراهم کرده‌اند که فروکاستن ریخت‌شناسی‌های پیچیده را به توصیفهای ریاضی بسیار ساده و در عین حال، نسبتاً دقیق، امکان‌پذیر ساخته است. اما استفاده از این روشها در عمل محدود است زیرا بر مبنای فرضهای ساده‌ساز متعددی بنا شده‌اند [Rall & Agmon-Snir 1998].

نظریهٔ کابلی در ابتدا مورد قبول واقع شد، اما با پیشرفت روشهای الکتروفیزیولوژیک آشکار شد که همهٔ دندریت‌ها کنشگر[3]اند [Stuart et al. 1999]. در نتیجه اندازه‌گیری پارامترهای مورد نیاز برای توصیف دندریت به مثابهٔ موجودی کنش‌پذیر، بسیار دشوار است [Major 2000]. خوشبختانه مطالعهٔ دندریت‌های کنشگر با استفاده از

1. finite elements

1. voxels 2. passive 3. active



شکل ۲ شبیه‌سازی تأثیرات متقابل میان ورودی سیناپسی و کانالهای کلسیمی وابسته به ولتاژ در دندریت یک سلول پورکنژی مخچه.

(الف) نمایش پتانسیل غشا در مدل شبیه‌سازی‌شده در ۰٫۱، ۴٫۵ و ۸٫۳ میلی‌ثانیه پس از فعال‌شدن سیناپس. در شکل اول مکانهای ورودی سیناپسی با رنگ سفید نشان داده شده‌اند. شکلهای بعدی نشان می‌دهند که واقطبیدگی سیناپسی چگونه در شاخه‌های دندریتی مجاور پخش می‌شود؛

(ب) نمایش غلظت کلسیم زیرغشایی در مدل شبیه‌سازی شده در همان زمانهای شکل (الف). فعال‌شدن گستردهٔ کانالهای کلسیمی دندریتی در اطراف مکان فعالیت سیناپسی باعث افزایش غلظت این یون در داخل دندریت شده است.

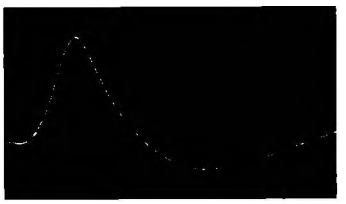
شبیه‌سازی عددی در حالتی با ۴۵۵۰ جزء و بیش از ۱۰۰۰۰ کانال انجام شده است. [De Schutter and Bower 1994].

شبیه‌سازیهای عددی و بسته‌های نرم‌افزاری متعددی امکان‌پذیر است [De Schutter 1992]. شکلهای ۲ و ۳ مثالی را نشان می‌دهند که در آن کانالهای کنشگر در دندریت، ورودی سیناپسی را تقویت می‌کنند و بدین ترتیب، تأثیر تضعیف سیناپسی در طی مسافت را که از پیش‌بینی‌های اصلی نظریهٔ کابل کنشگر است، از میان می‌برند. در این مورد خاص، ریخت‌شناسی دندریتی بسیار مهم است، چرا که شرایط موضعی متفاوتی را برای سیناپسهای دور و نزدیک [نسبت به حجم سلولی] ایجاد می‌کنند. و در نتیجه تقویت سیناپسهای دوردست امکان‌پذیر می‌شود [De Schutter & Bower 1994]. در حال حاضر نظریه‌ای ریاضی برای فروکاستن دندریت‌های کنشگر به یک کابل معادل، همانند شکل ۲، در دسترس نیست [De Schutter & Steuber 2000].

هم مدلسازی به‌صورت کابل کنش‌پذیر و هم رویکردهای عددی برای شبیه‌سازی دندریت‌های کنشگر بر مبنای فرضهای یک‌بعدی‌اند، به این معنی که تمامی جریان درون دندریت تنها در راستای محور اصلی آن حرکت می‌کند. مطالعهٔ گرادیانهای ولتاژ در طول یک دندریت مفید است اما در مورد دو مسألهٔ مهم عملی نیست. نخست، در مقیاسهای بسیار ریز، مثلاً خارهای دندریتی، ممکن است تأثیرهای متقابل میدانهای الکتریکی و پخش یونهای باردار بر یکدیگر مهم باشد [Qian & Sejnowski 1990]. برای مطالعهٔ این پدیده با دقتی که در بخش قبل ذکر شد، مدلی سه‌بعدی از گرادیان پتانسیل غشا در مقیاس بسیار ریز لازم است. همین‌طور، در مقیاسهای بزرگتر، مدلهایی سه‌بعدی از گرادیانهای ولتاژ دندریتی لازم است تا بتوان به نحوهٔ تأثیر متقابل جریانهای الکتریکی در دندریت‌ها یا اجسام سلولی نزدیک هم از طریق فضای خارج سلولی و اثر آنها بر گرادیانهای غلظتی خارج سلولی، پی برد [Holt and Koch 1999]. برای مربوط ساختن اطلاعات به‌دست آمده از نظریهٔ کابلی یک‌بعدی به فضای سه‌بعدی، ابزارهای ریاضی جدیدی مورد نیازند.

پردازش اطلاعات به‌وسیلهٔ سیستمهای تصادفی شاید یکی از دلایل ناچیزبودن شناخت ما از عملهای پیچیده‌تر مغز این باشد که مغز روشهایی را بر می‌گزیند که با روشهای مورد استفادهٔ ما در ماشینها و رایانه‌هایمان اساساً متفاوت است. یک سؤال اصلی در مورد مغز این است که آیا مغز از ویژگی تصادفی‌بودن در جهت تقویت فرایندهای محاسباتی‌اش بهره می‌برد، یا اینکه از طریق همگرایی ورودیهای تعداد بسیاری نورون، با گرفتن میانگین از فعالیت آنها، تصادفی‌بودن [تک‌تک نورونها] را خنثی می‌سازد. من در اینجا به‌اختصار دو مثال می‌آورم که در آنها این مسأله را به تفصیل بررسی کرده‌اند، اما پاسخ سؤال اصلی به دست نیامده است. بسیاری از عصب‌شناسان فرض می‌کنند که میانگینها [برای عملکرد مغز] کافی هستند و از روشهای میانگین‌گیری در آزمایشهایشان استفادهٔ وسیعی می‌کنند. اما آنهایی که معتقدند میانگین‌گیری روشی نیست که مغز با آن عمل می‌کند، با کمبود ابزارهای ریاضی قابل استفاده مواجه می‌شوند.

■ **چگونه می‌توان با استفاده از کانالهای [یونی] نوفه‌ای و تصادفی محاسبه کرد؟** در بسیاری از سطوح، مغز از سازوکارهایی استفاده می‌کند که در مقیاس میکروسکوپی تصادفی هستند. برای مثال، خصوصیات کنشگر غشای نورون مبتنی بر رفتار جمعی هزاران کانال یونیِ وابسته به ولتاژ است که به‌صورت تصادفی باز و بسته می‌شوند [Hille 1992]. در ثبت سلولی در مورد نورونها معلوم نیست که چگالی کانالها همیشه آنقدر بالا باشد که دینامیک



شکل ۳ مقایسهٔ پاسخ ولتاژی در جسم سلولی (شکل کروی در پایین سلولها، شکل ۲) در یک مدل کاملاً کنش‌پذیر (خط‌پر) و یا یک مدل با دندریت‌های کنشگر (خط‌چین) کانالهای کلسیمی پاسخ را به میزان قابل توجهی تقویت کرده‌اند.

گروهی آنها [بر رفتار تک‌تک آنها] غالب شود، و مواردی استثنایی وجود دارد که تصادفی‌بودن کانالها بر روی عملکرد عصبی ممکن است مؤثر باشد [Schneidman et al. 1998]. برای اندازه‌گیری رفتار تصادفی تک‌تک کانالها روشهای بسیار مناسبی وجود دارد [Sakmann & Neher 1995].

برای اینکه اهمیت این رفتار تصادفی به‌خوبی بررسی شود، باید بتوان آن را با جزئیات مدلسازی کرد. متأسفانه برای ساختن مدلهای یکتا از فرایند باز و بسته‌شدن کانالها بر پایهٔ نتایج آزمایشگاهی ابزار ریاضی کافی وجود ندارد. در مدلهای موجود، فرض بر این است که کانال از زیرحالت‌های متعدد بسته، باز یا غیرفعال گذر می‌کند و می‌توان مدلی به‌صورت فرایندهای مارکوفی برای آن ساخت [Sakmann & Neher 1995]. معمولاً مدلهای بسیاری می‌توان ساخت که از نظر تعداد این زیرحالت‌ها با هم متفاوت باشند، و با داده‌های آزمایشگاهی مطابقت داشته باشند. هنوز معلوم نیست که آیا ناتوانی ما در به دست آوردن مدلهای یکتا از داده‌های آزمایشگاهی به علت ناکافی‌بودن ابزارهای آماری موجود است یا ناکافی‌بودن داده‌ها و یا هر دو.

هر چند برای مطالعهٔ تصادفی‌بودن کانالهای یونی روشهای ثبت ویژه‌ای مورد نیاز است، همهٔ روشها نشان می‌دهند که سیناپسها در سیستم عصبی مرکزی نوفه‌ای و تصادفی هستند. احتمال انتقال پیام از سیناپسها می‌تواند تا حد ۱۰٪ پایین باشد و آزادسازی خودبه‌خودی ناقلهای عصبی در سیناپس [به این معنی که به علت شلیک نورون پیش‌سیناپسی نباشد] آن‌قدر زیاد اتفاق می‌افتد که اغلب از آن به‌عنوان ابزاری برای بررسی ویژگیهای سیناپسی استفاده می‌شود.

اینکه روش استانداردِ انتقال اطلاعات میان نورونها زیاد قابل اطمینان نیست، ممکن است مغایر با شهود ما به نظر برسد. در حقیقت، این موضوع ابتدا مایهٔ تعجب شد زیرا اولین سیناپس بررسی شده، سیناپس عصب به عضله، بسیار قابل اطمینان است. بعداً نشان داده شد که در سیستم عصبی مرکزی این‌گونه نیست. اکنون دلایل بیوفیزیکی این تفاوت را می‌فهمیم و مهمتر از آن، دلایلی برای اینکه چرا سیناپسهای مرکزی این‌گونه غیرقابل اطمینان هستند داریم. نشان داده شده است که در بیشتر سیناپسهای مرکزی، قابل اطمینان‌بودن می‌تواند در مقیاس زمانی کوتاه برپایهٔ فعالیت سیناپسی، و در مقیاس زمانی بلندتر در اثر قوانین یادگیری تغییر کند. سیناپسهای قابل اطمینان به‌طور متوسط قویتر به نظر می‌رسند ولی امکان تغییرات کوتاه‌مدت اندکی را دارند. تغییرپذیری کوتاه‌مدت سیناپسها، [قدرت] ارتباطات نورونی را به تکرار و تاریخچهٔ استفاده از آنها وابسته می‌سازد، که این به‌طور بالقوه یک اصل محاسباتی کارامد محسوب می‌شود. اهمیت این فرایندهای تغییرپذیری در چند مطالعهٔ مدلسازی واقع‌گرایانه بررسی شده است [Abbott et al. 1997; Markram et al. 1998]، اما کارهای انجام‌نشدهٔ زیادی باقی مانده است. در حال حاضر نظریه‌ای ریاضی برای توضیح اینکه چگونه اطمینان‌ناپذیری سیناپسها می‌تواند در پردازش اطلاعات در شبکه‌های عصبی بزرگ به‌کار آید، وجود ندارد.

■ چگونه شلیکهای نورونی اطلاعات را کدگذاری می‌کنند و چگونه می‌توان این را اندازه گرفت؟ نورونها اطلاعات را به‌صورت شلیکهایی منتقل می‌کنند. قطارهای شلیک نورونیِ تولیدشده در پاسخ به یک محرک یکسان اما در دفعات مختلف، بسیار نوفه‌دار است و عصب‌شناسان معمولاً برای اندازه‌گیری پاسخ نورون به یک محرک صدها نمونه از این قطارها را به‌صورت یک بافت‌نگار در زمانهای قبل و بعد از تحریک میانگین‌گیری می‌کنند. به‌علاوه، معمولاً فرض می‌شود که در سیستم عصبی مرکزی مهره‌داران اطلاعات به‌وسیلهٔ فعالیت همزمان تعداد زیادی نورون، که جمعیت نورونی نامیده می‌شوند، کُدگذاری می‌شود. تنها در سالهای اخیر است که ثبت سلولی در مورد بیش از چند نورون از میان چنین جمعیتی ممکن شده است [Nicolelis et al. 1997].

یکی از مباحثات بسیار مطرح در جامعهٔ عصب‌شناسان این است که آیا زمان وقوع هر یک از شلیکها مهم است یا خیر. در نظریهٔ کلاسیکِ آهنگ شلیک فرض می‌شود که این‌گونه نیست و نورونها اطلاعات را برحسب آهنگ متوسط شلیکشان کُدگذاری می‌کنند [Rieke et al. 1997]. شاهدی در تأیید این نظر، آن است که در مراحل اولیهٔ مخابرهٔ اطلاعات مربوط به محرک حسی در مغز، اغلب یک رابطهٔ خطی ساده میان آهنگ شلیک نورونها و قدرت محرک حسی وجود دارد. مشکلی که فرضیهٔ آهنگ شلیک دارد این است که اگر یک نورون تنها مورد مشاهده قرار گیرد [چه به وسیلهٔ آزمایشگر و چه به وسیلهٔ نورونهای گیرنده از آن]، اندازه‌گیری آهنگ شلیک زمان می‌برد، زمانی بسیار بیشتر از تأخیرهای معمول در پاسخهای رفتاری. بنابراین، طرفداران نظریهٔ آهنگ شلیک فرض می‌کنند که نورونها همیشه از ورودیِ رسیده از صدها نورون پیش‌سیناپسی میانگین می‌گیرند. در این صورت حتی با وجود قطارهای شلیک نوفه‌ای، تخمین لحظه‌ای و قابل اطمینانی از آهنگ شلیک متوسط جمعیت نورونی پیش‌سیناپسی امکان‌پذیر می‌شود [Shadlen & Newsome 1998].

جناح مخالف فرض می‌کند که زمان هر شلیک در یک قطار شلیک ممکن است مهم باشد. این فرض می‌تواند دو شکل (احتمالاً مکمل) به خود بگیرد: یکی اینکه فواصل بین شلیکها در فعالیت یک نورون منفرد می‌تواند حاوی اطلاعات باشد؛ دیگر اینکه ارتباط میان زمانهای شلیک در نورونهای مختلف یک جمعیت مهم است. فرض اول در مورد بعضی از سیستمهای حسی به تفصیل مطالعه شده است، سیستمهایی که در آنها می‌توان با استفاده از صورتبندی نظریهٔ اطلاعات به‌وسیلهٔ شانُن نشان داد که اگر فواصل میان شلیکها مورد استفاده قرار گیرند، می‌توان اطلاعات بسیار بیشتری در بارهٔ محرک به‌دست آورد [Rieke et al. 1997]. این نظر که زمان شلیک ممکن است در کدگذاری به‌وسیلهٔ جمعیت نورونی مهم باشد، معمولاً بر پایه این عقیده است که شلیک همزمان نورونها می‌تواند به‌طرز بسیار مؤثری سلولهای پس‌سیناپسی را فعال کند و بنابراین یک راه مفید برای برای کدگذاری اطلاعات است [Abeles 1991]، مخصوصاً هنگامی که با فرایندی بسیار دینامیک سروکار داشته باشیم [Singer 1998]. طرحهایی بر مبنای شلیکهای ناهمزمان نیز پیشنهاد شده است [Hopfield 1995].

با اینکه این نظرها بسیار جذاب‌اند، آزمودن آنها در شرایط آزمایشگاهی بسیار دشوار به نظر می‌رسد. به‌کار بردن نظریهٔ اطلاعات شانُن نیاز به اندازه‌گیری دقیق اطلاعات کدگذاری شده دارد و این در عمل استفاده

از این نظریه را به سیستمهای حسی اولیه محدود می‌کند، سیستمهایی که در آنها اطلاعاتی در بارهٔ اینکه چه جنبه‌هایی از محرک به وسیلهٔ نورونهای خاص کدگذاری شوند وجود دارد. در مواردی که این‌گونه نباشد، روشهای آماری چندمتغیره از قبیل «تحلیل مؤلفهٔ اصلی» و «تحلیل مؤلفهٔ مستقل» مورد استفاده قرار گرفته‌اند و نشانگر امکان بهره‌گیری از ترکیبی از آهنگ، شلیک و زمان تک‌شلیک‌ها برای کدگذاری در قشر مغز بوده‌اند [Nicolelis et al. 1998]. متأسفانه چنین رویکردهای آماری بصیرت زیادی در بارهٔ اینکه خود جمعیتهای نورونی چه راهکاری را برای کدگذاری اطلاعات در پیش می‌گیرند، به ما نمی‌دهند و کاملاً نسبت به مدل استفاده شده برای تعبیر داده‌ها حساس هستند [Todorov 2000]. مطالعات مربوط به وجود و اهمیت شلیکهای همزمان به دلیل دشواریِ اندازه‌گیری هم‌زمانی بر اساس یک آزمایش تنها (یک ثبت سلولی) به‌صورت جدی مورد تردید است. با اینکه روشهایی برای تحلیلِ تک‌آزمایشی در حال پدیدآمدن هستند [Riehle et al. 1997]، در بیشتر موارد آزمایشگر مجبور است داده‌های به‌دست آمده از دفعات بسیار زیادِ ارائهٔ محرک به سیستم عصبی را تحلیل کند تا نتایج خاصی از لحاظ آماری معنی‌دار شوند. متأسفانه روش اخیر، تنها به شرطی کارایی دارد که فرض شود سیستم عصبی در طی آزمایش در یک حالت پایدار باقی می‌ماند، فرضی که نامحتمل است.

به عنوان نتیجه‌گیری باید گفت که مطالعهٔ کدگذاری نورونی نیازمند پیشرفتهای جدی در بسیاری از روشهای آماری (اتفاقات تصادفی مربوط به کانالها، تحلیل کدگذاری جمعیت نورونی بر پایهٔ یک آزمایش تنها، ...) و تحلیل نظری پردازش اطلاعات به وسیلهٔ فرایندهای تصادفی است.

توضیحات کوتاهی در بارهٔ بعضی اصطلاحات (به جدول ۱ نگاه کنید)

۱) منظور از فرایندهای مولکولی، واکنشهای شیمیایی میان هزاران مولکول پروتئین و مولکولهای کوچک پیام‌دهنده است که در سازوکار سلولی نقش دارند، و بسیاری از آنها اختصاص به نورونها دارند.

۲) کانالها ساختارهایی غشایی هستند که عبور یونها از غشا، و در این مورد معمولاً غشای سلولی، را امکان‌پذیر می‌کنند. میان کانالهای یونی، که خصوصیات کنشگر نورونها مانند ایجاد شلیکهای نورونی را رهبری می‌کنند و کانالهای سیناپسی که در محل سیناپسها واقع شده‌اند، تمایز قائل می‌شویم. کانالهای یونی معمولاً به‌وسیلهٔ ولتاژ باز و بسته می‌شوند و گذردهی[1] آنها وابسته به پتانسیل غشاست. تمامی کانالها تحت کنترل مداوم بسیاری از مسیرهای واکنشی مولکولی قرار دارند. سیناپسها مکانهای برخورد میان نورونها هستند و معمولاً در آنها اکسون نورونهای پیش‌سیناپسی با دندریت نورون پس‌سیناپسی تماس برقرار می‌کند. اما این تماس مستقیم نیست: برای انتقال یک شلیک، ناحیهٔ پیش‌سیناپسی مولکولهای ناقل عصبی را آزاد می‌کند که در طول شکاف سیناپسی پخش می‌شوند و به کانالهای پس‌سیناپسی متصل می‌شوند و این اتصال باعث فعال‌شدن کانالهای پس‌سیناپسی و در پی آن، تحریک یا مهارشدن سلول پس‌سیناپسی می‌شود. تماس سیناپسی معمولاً بر روی زوائدی از دندریت‌ها به نام خار دندریتی اتفاق می‌افتد (شکل ۱ را نگاه کنید).

۳) واحد محاسباتی سیستم عصبی نورون است که معمولاً ورودیهایش را از طریق دندریت دریافت می‌کند و ممکن است شلیکی تولید کند که در طول اکسونش به بقیهٔ نورونها منتقل می‌شود. با یک دید ساده‌انگارانه، می‌توان گفت که نورون داده‌های آنالوگ را به مقادیر دودویی (شلیک یا عدم شلیک) تبدیل می‌کند.

۴) از نظر کالبدشناختی، می‌توان بین اتصالات موضعی میان صدها تا هزاران نورون که ممکن است تشکیل یک مدار کارکردی، مثلاً یکی از ساختارهای ستونی قشر مغز، بدهند و اتصالات دوردست با نواحی دیگر مغز، تمایزی قائل شد.

۵) اتصالات دوردست میان نورونها عصب‌دهی[1] نامیده می‌شود. میدان گیرندگی[2] نگاشتی از خصوصیات محرک است که باعث شلیک نورون می‌شود. از آنجا که نورونهای مجاور هم معمولاً میدان گیرندگی مشابهی دارند، می‌توان نگاشتی که نشان‌دهندهٔ این میدانها باشد روی نواحی ویژه‌ای از مغز رسم کرد. اختصاصی‌بودن این نگاشتهای میدان گیرندگی از عصب‌دهی‌های رسیده به این نواحی ناشی می‌شود.

۶) سیستمهای مغز نوعاً شامل قشر بینایی مغز، قشر حرکتی مغز، مخچه و غیره است.

۷) احتمالاً رفتار، اعمال شناختی، و هشیاری به اکثر قسمتهای مغز نیاز دارند.

1. conductance

1. projection 2. receptive field

مراجع

Abbott, L. F., Varela, J. A., Sen, K., and Nelson, S. B.: Synaptic depression and cortical gain control. *Science* **275** (1997) 220-224.

Abeles, M.: *Corticonics: Neural Structure of the Cerebral Cortex.* Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

Arbib, M. A., Èrdi, P., and Szentagothai, J.: *Neural Organization: Structure, Function, and Dynamics.* Cambridge, Mass., USA: MIT Press, 1997.

Barinaga, M.: Brain mapping - Researchers get a sharper image of the human brain. *Science* **268** (1995) 803-804.

Bormann, G., Brosens, F., and De Schutter, E.: Modeling molecular diffusion. In *Computational Modeling of Genetic and Biochemical Networks*, edited by J. M. Bower and H. Bolouri. Cambridge, Mass.: MIT Press, 2000 (in press).

Churchland, P. S., and Sejnowski, T. J.: *The computational brain.* Cambridge, Mass.: MIT Press, 1992.

De Schutter, E.: A consumer guide to neuronal modeling software. *Trends Neurosci.* **15** (1992) 462-464.

De Schutter, E.: Cerebellar long-term depression might normalize excitation of Purkinje cells: a hypothesis. *Trends Neurosci.* **18** (1995) 291-295.

De Schutter, E., and Bower, J. M.: Simulated responses of cerebellar Purkinje cells are independent of the dendritic location of granule cell synaptic inputs. *Proc. Natl. Acod. Sci. USA* **91** (1994) 4736-4740.

edited by C. Koch, and I, Segev, 2nd edn. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1998, pp. 27-92.

Riehle, A., Grun, S., Diesmann, M., and Aertsen, A.: Spike synchronization and rate modulation differentially involved in motor cortical function. *Science* **278** (1997) 1950-1953.

Rieke, F., Warland, D., de Ruyter van Steveninck, R. R., and Bialek, W.: *Spikes. Exploring the Neural Code.* Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1997.

Sakmann, B., and Neher, E.: *Single-channel recording.* 2nd edn. New York: Plenum Press, 1995.

Schneidman, E., Freedman, B., and Segev, L.: Ion channel stochasticity may be critical in determining the reliability and precision of spike timing. *Neural Comput.* **10** (1998) 1679-1703.

Segev, I., Rinzel, J., and Shepherd, G. M. (eds.) *The Theoretical Foundation of Dendritic Function. Selected Papers of Wilfrid Rall with Commentaries.* Cambridge, Mass.: MIT Press, 1995.

Shadlen, M. N., and Newsome, W. T.: THe variable discharge of cortical neurons: implications for connectivity, computation, and information coding. *J. Neurosci.* **18** (1998) 3870-3896.

Singer, W.: Consciousness and the structure of neuronal representations. *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. B* **353** (1998) 1829-1840.

Stiles, J. R., and Bartol, T. M.: Monte Carlo methods for simulating realistic synaptic microphysiology using MCell. In *Computational Neuroscience: Realistic Modeling for Experimentalists*, edited by E. De Schutter. Boca Raton, Florida: CRC Press, 2000, pp. 87-122.

Stuart, G., Spruston, N., and Häusser, M. (eds.) *Dendrites.* Oxford: Oxford University Press, 1999.

Stuart, G., Spruston, N., Sakmann, B., and Häusser, M.: Action potential inititation and backpropagation in neurons of the mammalian CNS. *Trends Neurosci.* **20** (1997) 125-131.

Todorov, E.: Direct cortical control of muscle activation in voluntary arm movements: a model. *Nature Neurosci.* **4** (2000) 391-398.

Wang, S. S.-H., and Augustine, G. J.: Confocal imaging and local photolysis of caged compounds: dual probes of synaptic function. *Neuron* **15** (1995) 755-760.

******

- Erik De Schutter, "Computational neuroscience: More math is needed to understand the human brain", in *Mathematics Unlimited 2001 and Beyond*, B. Engquist and W. Schmid (eds), Springer (2001) 381-391.

* اریک دی‌شوتر، دانشگاه انورس، بلژیک

Erik@bbf.u.i.a.ac.be

De Schutter, E., and Steuber, V.: Modeling simple and complex active neurons. In *Computational Neuroscience: Realistic Modeling for Experimentalists*, edited b E. De Schutter. Boca Raton, Florida: CRC Press, 2000, pp. 233-257.

Denk, W., and Svoboda, K.: Photon upmanship: why multiphoton imaging is more than a gimmick. *Neuron* **18** (1997) 351-357.

Fletcher, C. A. J.: *Computational Techniques for Fluid Dynamics. Volume I.*: Springer, Berlin Heidelberg 1991.

Gabso, M., Neher, E., and Spira, M. E.: Low mobility of the Ca^{2+} buffers in axons of cultured *Aplysia* neurons. *Neuron* **18** (1997) 473-481.

Hille, B.: *Ionic Channels of Excitable Membranes.* Sunderland: Sinauer Associates, 1992 Holt, G. R., and Koch, C.: Electrical interactions via the extracellular potential near cell bodies. *J. Comput. Neurosci.* **6** (1999) 169-184.

Hopfield, J. J.: Pattern recognition computation using action potential timing for stimulus representation. *Nature* **376** (1995) 33-36.

Lunkes, A., Trottier, Y., and Mandel, J. L.: Pathological mechanisms in Huntington's disease and other polyglutamine expansion diseases. *Essays Biochem.* **33** (1998) 149-163.

Major, G.: Passive cable modeling - a practical introduction. In *Computational Neuroscience: Realistic Modeling for Experimentalists*, edited by E. De Schutte, Bota Racon, Florida: CRC Press, 2000, pp. 209-232.

Marder, E., and Calabrese, R. L.: Principles of rhythmic motor pattern generation. *Physiol. Rev.* **76** (1996) 687-717.

Markram, H., Gupta, A., Uziel, A., Wang, Y., and Tsodyks, *M.: Information processing with frequency-dependent synaptic connections. Neurobiol. Learn. Mem.* **70** (1998) 101-112.

Marr, D. A.: A theory of cerebellar cortex. *J. Physiol.* **202** (1969) 437-470.

Nicolelis, M. A., Chazanfar, A. A., Stambaugh, C. R., Oliveira, L. M., Laubach, M., Chapin, J. K., Nelson, R. J., and Kaas, J. H.: simultaneous encoding of tactile information by three primate cortical areas. *Nature Neurosci.* **1** (1998) 621-630.

Nicolelis, M. A. L., Ghazanfar, A. A., Faggin, B. M., Votaw, S., and Oliveira, L. M. O.: Reconstructing the engram: simultaneous, multisite, many single neuron recordings. *Neuron* **18** (1997) 529-537.

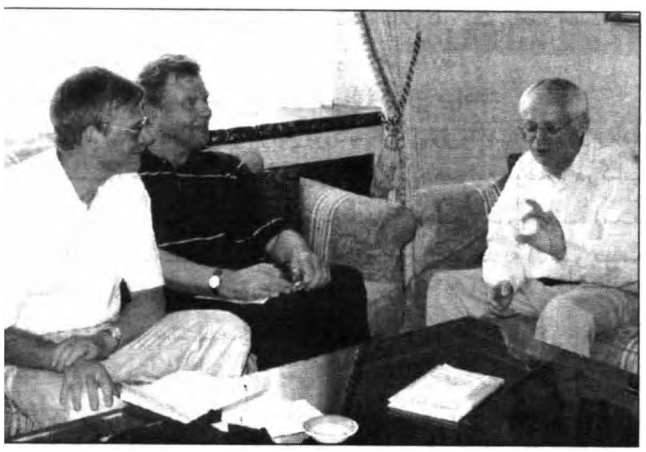
Qian, N., and Sejnowski, T. J.: When is and inhibitory synapse effective? *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **87** (1990) 8145-8149.

Rall, W., and Agmon-Snir, H.: Cable theory for dendritic neurons. In *Methods in Neuronal Modeling: From Ions to Networks*,

گفت‌وگو با ژان‌پیر سر

این مصاحبه در خلال سلسله برنامه‌هایی به مناسبت اعطای اولین جایزهٔ آبل به ژان‌پیر سر در شهر اُسلو پایتخت نروژ (که خبر آن را در شمارهٔ گذشته خواندید) در دوم ژوئن ۲۰۰۳ انجام شده است. مصاحبه‌کنندگان، مارتین راوسن (Martin Raussen) از دانشگاه اولبورگ دانمارک و کریستین اسکئو (Christian Skau) از دانشگاه علوم و فناوری نروژ هستند.

متن این گفت‌وگو نخست در
European Mathematical Society Newsletter, (Sept. 2003) 18-20
به چاپ رسیده و ترجمهٔ حاضر از روی باز چاپ مصاحبه در
Notices of the AMS, (2) 51 (2004) 210-214
انجام شده است.



از راست به چپ: سر، اسکئو، راوسن

• ابتدا به شما تبریک می‌گوییم که برندهٔ اولین جایزهٔ آبل شده‌اید. شما کار خود را با رساله‌ای آغاز کردید که دربارهٔ توپولوژی جبری بود. این مبحث در آن زمان (دست‌کم در فرانسه) رشتهٔ خیلی جدیدی بود و حوزهٔ مهمی به شمار نمی‌رفت. چه چیزی باعث شد این مبحث را انتخاب کنید؟

سر: من از شرکت‌کنندگان در سمینارکارتان دربارهٔ توپولوژی جبری بودم. ولی کارتان خودش موضوع تحقیق را به شاگردانش پیشنهاد نمی‌کرد. آنها باید خودشان موضوعی می‌یافتند و بعداً کارتان به آنها کمک می‌کرد. همین جریان برای من پیش آمد. من پی بردم که نظریهٔ لُری[1] (دربارهٔ فضاهای تاری و دنبالهٔ طیفی آنها) را می‌توان در موارد بسیار بیشتری از آنچه تصورش می‌رفت به کار برد، و اینکه با چنین تعمیم و گسترشی محاسبهٔ گروههای هوموتوپی میسر می‌شود.

• روشها و نتایجی که شما در رساله‌تان به‌دست دادید، نظریهٔ هوموتوپی را دگرگون کرد و آن را به شکل نوین‌اش درآورد ...

سر: بله مسلماً امکانات بسیار زیادی ایجاد کرد. پیش از آن رساله، گروههای هوموتوپی کُرات تقریباً به‌طورکامل قلمرو ناشناخته[2]ای بودند؛ حتی معلوم نبود که این گروهها متناهی‌مولّدند!

1. Leray 2. terra incognita

یک جنبهٔ جالب‌توجه روشی که من معرفی کردم، خصیصهٔ جبری آن بود. به‌خصوص محاسبات «موضعی» را امکان‌پذیر می‌کرد. کلمهٔ «موضعی» در اینجا به همان معنایی است که در نظریهٔ اعداد به‌کار می‌رود، یعنی نسبت به یک عدد اول مفروض.

• آیا راست است که یکی از نکات اصلی این ماجرا تعیین چیزی شبیه یک فضای تاری بود بدون اینکه دقیقاً همان باشد؟

سر: درواقع برای کاربرد نظریهٔ لری احتیاج داشتم فضاهایی تاری بسازم که با تعریف استاندارد وجود نداشتند. یعنی به‌ازای هر فضای X، نیاز به فضایی تاری چون E با پایهٔ X و هوموتوپی بدیهی (مثلاً انقباض‌پذیر) داشتم. اما چگونه می‌شود چنین فضایی به‌دست آورد؟

در سال ۱۹۵۰، شبی که با قطار از تعطیلات تابستانی برمی‌گشتم، راه‌حل مسأله ناگهان به ذهنم خطورکرد: کافی است E را فضای مسیرهای روی X (با مبدأ ثابت a)، و افکنش $E \to X$ را نگاشت ارزهٔ[1] از مسیر به نقطهٔ انتهایی آن بگیریم. در این صورت، تار عبارت است از فضای طوقی[2] (X, a). شکی در این‌باره نداشتم: این همان چیزی بود که می‌خواستم! آنقدر مطمئن بودم که همسرم را از خواب بیدارکردم تا موضوع را به او بگویم ...

1. evaluation map 2. loop space

(البته هنوز باید نشان می‌دادم که $E \to X$ استحقاق آن را دارد که «تاربندی» نامیده شود و اینکه نظریهٔ اری دربارهٔ آن صادق است. این کار صرفاً جنبهٔ فنی داشت اما چندان هم آسان نبود. عجیب است که چنین ساختار ساده‌ای آن همه پیامد داشت.

موضوعها و سبک کار

● ماجرایی که دربارهٔ کشف ناگهانی راه‌حل نقل کردید یادآور بارقهٔ الهام در ذهن پوانکاره است هنگامی که قدم در تراموا می‌گذاشت و ماجرای آن در نوشتهٔ آدامار با عنوان «روانشناسی ابداع در زمینهٔ ریاضی» آمده است. آیا شما معمولاً به الهام و شهود ناگهانی اتکا دارید یا کارتان را منظم و طبق برنامه انجام می‌دهید، و یا مخلوطی از این دو؟

سر: مباحثی هست که گاه و بیگاه به آنها برمی‌گردم (مانند نمایشهای l-آدیک)، اما این کار را واقعاً از روی برنامه انجام نمی‌دهم. فقط از شمّ خودم پیروی می‌کنم. اما از آن نوع الهاماتی که آدامار شرح داده، برای من فقط دو سه بار، در طیِ بیش از پنجاه سال کار، پیش آمده است. این جرقه‌های ذهنی خیلی خوب‌اند اما خیلی هم نادرند!

● حدس می‌زنم جرقهٔ ذهنی بعد از تلاش طولانی رخ می‌دهد.

سر: من کلمهٔ «تلاش» را در این مورد به‌کار نمی‌برم. شاید «فکرکردنِ زیاد» باشد. قسمت خودآگاه ذهن این کار را انجام نمی‌دهد. این موضوع در کتاب جذّاب لیتلوود با عنوان کشکول یک ریاضیدان[1] به‌خوبی تشریح شده است.

● بیشتر تحقیقات شما از «سالهای توپولوژی» به بعد به نظریهٔ اعداد و هندسهٔ جبری اختصاص داشته است.

سر: من در چند مبحثِ ظاهراً متفاوت کار می‌کنم. ولی در واقع همهٔ آنها به هم مربوط‌اند. احساس نمی‌کنم که زمینهٔ کار خود را تغییر می‌دهم. مثلاً در نظریهٔ اعداد، نظریهٔ گروهها، یا هندسهٔ جبری، از مفاهیم توپولوژی ازقبیل کوهومولوژی، بافه‌ها، و موانع[2] استفاده می‌کنم.

از این نظر، به‌خصوص ازکار در زمینهٔ نمایشهای l-آدیک و فرمهای پیمانه‌ای لذت برده‌ام که به آمیزهٔ بسیار خوبی از مباحث یعنی نظریهٔ اعداد، هندسهٔ جبری، گروههای لی (هم حقیقی و هم l-آدیک)، q-بسطها (سبک ترکیبیاتی) نیاز دارد.

● شهود و نگرش شما هندسی است یا جبری یا هر دو؟

سر: گمان می‌کنم جبری، ولی زبان هندسی را بهتر از زبان جبری محض می‌فهمم: اگر مجبور باشم بین یک گروه لی و یک جبر بی[3] یکی را انتخاب کنم، گروه لی را انتخاب می‌کنم! با این حال، گمان نمی‌کنم یک هندسه‌دان واقعی مانند بات یا گروموف باشم.

همین‌طور آنالیز را دوست دارم ولی نمی‌توانم ادعا کنم که آنالیزدان واقعی هستم. آنالیزدان واقعی در همان نظر اول می‌داند که «بزرگ»، «کوچک»، «احتمالاً کوچک» و «به نحو قابل اثباتی کوچک» (که این دو یکی نیستند) چیست. من چنین احساس شهودی ندارم؛ باید همهٔ براوردهای پیش پاافتاده را بنویسم.

● شما دوره‌ای طولانی از فعالیت علمی را پشت سر گذاشته‌اید و در مباحث متفاوت زیادی تحقیق کرده‌اید. کدام‌یک از نظریه‌ها یا قضیه‌هایتان را بیشتر دوست دارید؟ کدام‌یک، از نظر شما مهم‌ترند؟

سر: سؤال سختی است. آیا از مادر می‌پرسند که کدام‌یک از بچه‌هایش را بیشتر دوست دارد؟ تنها چیزی که می‌توانم بگویم این است که نوشتن بعضی مقاله‌ها برایم آسان بوده و بعضی دیگر واقعاً مشکل. نمونه‌ای از دستهٔ اول، مقالهٔ «بافه‌های جبری منسجم» (FAC)[1] بود که وقتی آن را می‌نوشتم، احساس می‌کردم متنی را که از قبل وجود داشته رونویسی می‌کنم. تقریباً هیچ زحمتی برایم نداشت. نمونه‌ای از مقاله‌های «مشکل»، مقاله‌ای بود دربارهٔ زیرگروههای بازِ گروههای متناهی‌ـافکن[2] که زحمت خیلی زیادی داشت و تا آخر کار مطمئن نبودم دارم قضیه را ثابت می‌کنم یا برای آن مثال ناقض می‌آورم! مورد مشکل دیگر، مقاله‌ای بود که آن را به منین[3] تقدیم کردم و در آن حدسهای بسیار مشخص (و بسیار جسورانه‌ای) دربارهٔ نمایشهای گالوایی «پیمانه‌ای» (به پیمانهٔ p) مطرح کردم. این یکی حتی رنج‌آور بود. بعد از اینکه تمامش کردم، آنقدر تاب و توان مرا گرفته بود که تا چند سال چیزی منتشر نکردم.

از موارد خوشایند، می‌توانم از مقاله‌ای دربارهٔ حاصلضربهای تانسوری نمایشهای گروهها روی مشخصهٔ p یاد کنم که آن را به بورل اهدا کردم. من از حدود بیست سالگی عاشق نظریهٔ گروهها بودم و از گروهها زیاد استفاده کرده و حتی چند قضیه دربارهٔ آنها ثابت کرده بودم. اما قضیهٔ مربوط به حاصلضربهای تانسوری که آن را در سنین نزدیک به هفتاد سالگی به‌دست آوردم اولین قضیه‌ای از این نوع بود که واقعاً به من لذت بخشید. احساس می‌کردم نظریهٔ گروهها پس از چهل سال عشق‌ورزی رضایت داده که کام عاشق را شیرین کند.

● شما بیش از پنجاه سال در خط مقدم ریاضیات مشغول فعالیت بوده‌اید. هاردی حرفی زده است که بسیار نقل می‌شود: «ریاضیات کارِ جوانهاست». آیا این حرف غلط نیست؟ آیا موردِ شما این حکم را کاملاً نقض نمی‌کند؟

سر: نه کاملاً. اگر توجه کرده باشید، در بیانیهٔ اعطای جایزهٔ آبل، بیشتر اشارات به کارهایی است که من قبل از سی سالگی کرده‌ام.

ولی این واقعیت دارد که افراد نسل من (مثلاً اتیا، بورل، بات، شیمورا ...) مدتی طولانی‌تر از اسلاف خود به کار ادامه داده‌اند (البته در نسل قبلی هم استثناهای قابل توجهی مانند الی کارتان، زیگل، و زاریسکی وجود داشته است). امیدوارم بتوانیم به کار ادامه دهیم.

پیوندهای تاریخی

● چون شما جایزهٔ آبل را برده‌اید، دوست داریم سؤالهایی مطرح کنیم که زمینهٔ آنها به زمان آبل برمی‌گردد. معادلات جبری که آبل و گالوا به بررسی آنها پرداختند و از نظریهٔ تبدیل توابع بیضوی نشأت می‌گرفتند، بعدها در نظریهٔ حسابی خمهای بیضوی اهمیت بسیار یافتند. نظر شما دربارهٔ این واقعیتِ شایان توجه، به‌خصوص در ارتباط با کارهایی که خودتان در این نظریه کرده‌اید، چیست؟

سر: بله، خمهای بیضوی امروز خیلی مطرح‌اند (به‌علت نیاز به آنها در زمینه‌های متعدد، از برنامهٔ لنگ لندزگرفته یا رمزنگاری). در دهه‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ من وقت زیادی صرف مطالعهٔ نقاط تقسیم آنها (که به مدولهای تیت[4] نیز موسوم‌اند) و گروههای گالوای آنها می‌کردم. کار مفرّحی بود: بایستی اطلاعات حاصل از چند منبع متفاوت را با هم ترکیب می‌کردی: تجزیه‌های هاج‌ـنیت[5]، لختی رام[6]، عناصر فروبنیوس[7]، قضایای متناهی‌بودنِ زیگل ... من این نوع کار را دوست دارم.

1. *A Mathematician's Miscellany*
2. obstructions
3. bi-algebra

1. Faisceaux algébriques cohérents
2. profinite
3. Manin
4. Tate modules
5. Hodge-Tate decompositions
6. tame inertia
7. Frobenius elements

● ارمیت زمانی گفت که آبل چیزی به ریاضیدانان داده است تا ۱۵۰ سال روی آن کار کنند. شما با این گفته موافق‌اید؟

سر: من با این نوع حکمهای پرطمطراق موافق نیستم. از اینها چنین برمی‌آید که شخصی که حرف می‌زند، می‌داند در قرن آینده چه اتفاقی می‌افتد؛ و این حاکی از غرور و تکبر است.

● آبل در مقدمهٔ یکی از مقالاتش می‌نویسد که باید تلاش کرد مسأله را به شکلی بیان کرد که همواره قابل حل باشد ــ کاری که او ادعا می‌کند همواره امکان‌پذیر است. در ادامه می‌گوید با ارائهٔ مسأله به شکلی که خوبْ انتخاب شده باشد، صورت مسأله حاوی بذرِ راه‌حل است.

سر: یک دیدگاه خوش‌بینانه! گروتندیک هم مسلماً با او هم‌عقیده است. اما من معتقدم که این حرف فقط در مورد مسائل جبری ممکن است صادق باشد و نه مسائل حسابی. مثلاً آبل دربارهٔ فرضیهٔ ریمان چه می‌توانست گفته باشد؟ آیا گفته است شکل ارائهٔ آن خوب نیست؟

نقش اثبات

● وقتی کارِ ریاضی می‌کنید آیا می‌توانید از درستی چیزی آگاه باشید بدون اینکه اثباتی از آن در دست داشته باشید؟

سر: البته، خیلی پیش می‌آید. ولی باید تمایزی گذاشت بین هدف اصلی (مثلاً پیمانه‌ای‌بودن خمهای بیضوی در مورد کار وایلز) که آدم احساس می‌کند حتماً درست است، و حکمهای کمکی (لمها و غیره) که کاملاً ممکن است مهارنشدنی باشند (همان‌طور که در نخستین اقدام وایلز پیش آمد) یا حتی غلط از آب درآیند (همان‌طور که در کار لافورگ دیدیم).

● آیا اثبات همیشه به خودی خود ارزش دارد؟ دربارهٔ مثلاً، اثبات قضیهٔ چهار رنگ چه نظری دارید؟

سر: داریم وارد قلمرو تاریکی می‌شویم که اثبات به کمک رایانه است. برهانهای رایانه‌ای، اثبات به مفهوم متعارف کلمه نیستند که بتوان درستی آنها را با بررسیِ سطر به سطر مشخص کرد. این اثباتها به‌خصوص وقتی ادعا می‌شود فهرست کاملی از این یا آن نوع چیزی می‌دهند قابل اعتماد نیستند. [به یاد دارم در دههٔ ۱۹۹۰ چنین فهرستی به دستم رسید که شاملِ زیرگروههایی با یک شاخص مفروض از یک گروه گسسته بود. رایانه مثلاً بیست تا از این زیرگروهها یافته بود. من با این زیرگروهها آشنا بودم و به‌راحتی در حدود سی تا از آنها را «با دست» یافتم. موضوع را به نویسندگان نوشتم و آنها اشتباه خود را این‌طور توضیح دادند که بخشی از محاسبه را در ژاپن و بخش دیگر را در آلمان انجام داده‌اند ولی فراموش کرده‌اند مراحل میانی لازم را اجرا کنند . . . که خلاف انتظار هم نیست!]

از طرف دیگر، اثباتهای مبتنی بر رایانه اغلب قانع‌کننده‌تر از بسیاری از اثباتهای متعارف‌اند که مثلاً مبتنی بر نمودارهایی هستند که ادعا می‌شود جابه‌جاشونده‌اند، پیکانهایی که فرض می‌شود یکی هستند، و استدلالهایی که به خواننده واگذار می‌شود.

● دربارهٔ اثبات رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی چه می‌گویید؟

سر: به نکتهٔ درستی انگشت گذاشتید. سالهاست که من با متخصصان نظریهٔ گروهها در این بارهٔ بحث می‌کنم. آنها مدعی‌اند «قضیهٔ رده‌بندی» یک «قضیه» است یعنی ثابت شده است. در واقع گورنستاین در سال ۱۹۸۰ چنین چیزی را اعلام کرد، ولی بعداً معلوم شد نقص و شکافی در آن وجود دارد (رده‌بندی گروههای «شبه‌نازک»). هر وقت در این‌باره از این متخصصان سؤال می‌کنم، جوابی از این قبیل می‌دهند: «نه، این شکافی در مطلب نیست؛ فقط چیزی است که در آن اثبات نوشته نشده است وگرنه دستنوشتهٔ ۸۰۰ صفحه‌ای ناکاملی دربارهٔ آن وجود دارد که هنوز چاپ نشده است.»

از نظر من، این هیچ فرقی با شکاف در اثبات ندارد و من نتوانستم بفهمم که چرا به این امر اذعان نشده است. خوشبختانه، اشبا کر[1] و اسمیت اکنون دستنوشتهٔ مفصلی (در ۱۲۰۰ صفحه) عرضه کرده‌اند تا این شکاف را پر کنند. وقتی این دستنوشته را متخصصان دیگر بررسی و تأیید کردند، زمان جشن گرفتن برای رده‌بندی این گروهها فرا می‌رسد.

● ولی اثبات ۱۲۰۰ صفحه‌ای چه فایده‌ای دارد؟

سر: واقعیت این است که طول کل اثبات رده‌بندی خیلی بیشتر از ۱۲۰۰ صفحه است ــ در حدود ۱۰ برابر بیشتر ــ ولی این موضوع تعجب‌آور نیست؛ خودِ صورت قضیه بسیار طولانی است زیرا برای اینکه مفید باشد باید توصیف مبسوطی از نه تنها گروههای شواله بلکه همچنین ۲۶ گروه پراکنده[2] را دربرداشته باشد.

این قضیه، قضیهٔ زیبایی است و بسیاری کاربردهای شگفت‌انگیز دارد. گمان نمی‌کنم استفاده از آن مشکل واقعی برای ریاضیدانِ سایر حوزه‌ها پیش بیاورد زیرا آنها فقط کافی است روشن کنند که چه بخشی از اثبات آنها به آن بستگی دارد.

مسأله‌های مهم ریاضی

● آیا به نظر شما می‌توان مباحثی را جریانهای مرکزی یا اصلی ریاضیات نامید؟ آیا بعضی از مباحث بهتر از بقیه‌اند؟

سر: سؤال ظریفی است. شاخه‌هایی از ریاضیات به‌وضوح کم‌اهمیت‌تر از بقیه‌اند یعنی شاخه‌هایی که در آنها عده‌ای ریاضیدان با معدودی اصل موضوع و ارتباط منطقی آنها «بازی می‌کنند». ولی در این باره نمی‌توان به‌طور قاطع و جزمی اظهارنظر کرد. گاه حوزه‌ای که مورد غفلت بوده جالب توجه می‌شود و روابطی با سایر شاخه‌های ریاضیات برقرار می‌کند.

از طرف دیگر، مسائلی هستند که به‌وضوح برای شناخت ما از دنیای ریاضی اهمیت اساسی دارند. فرضیهٔ ریمان و برنامهٔ لنگ‌لندز از نمونه‌های بارز این مسائل‌اند. حدس پوانکاره هم نمونهٔ دیگری است که کاملاً ممکن است به یمن کارهای پرلمان از حالت حدسی درآمده باشد.

● آیا دربارهٔ درستی اثبات پرلمان اطلاعات بیشتری دارید، و یا فکر می‌کنید به ظن قوی درست است؟

سر: چه کسی به ظن و گمان اهمیت می‌دهد؟ اما در مورد اطلاعات هم واقعاً اطلاعات خاصی ندارم ولی شنیده‌ام که متخصصان در IHÉS (مؤسسهٔ مطالعات عالی علمی) و MIT از این طرح اثبات خیلی به هیجان آمده‌اند. یک جنبهٔ جالب‌توجه روش پرلمان این است که از آنالیز برای یک مسألهٔ توپولوژیک محض استفاده کرده است که خیلی خشنودکننده است.

● حالا که با بحث دربارهٔ حدس پوانکاره کمی به طرف آینده رفته‌ایم، دوست دارید کدام مسائل مهم ریاضی در آیندهٔ نزدیک حل شوند؟ شما هم موافق‌اید که مسائل جایزه‌دار هزاره که بنیاد کلی[3] تعیین کرده اهمیت اساسی دارند؟

1. Aschbacher 2. Sporadic groups 3. Clay

سر: مسائل یک میلیون دلاری کلی! ایدهٔ غریبی است؛ دادن این قدر پول برای یک مسأله ... اما من چطور می‌توانم از آن انتقاد کنم در حالی‌که خودم جایزهٔ آبل را گرفته‌ام؟ با این حال، گمان می‌کنم قدری مخاطره در این کار هست به این معنی که اشخاص از بحث دربارهٔ نتایج ناقصی که در حل مسأله‌های جایزه‌دار به‌دست آورده‌اند خودداری خواهند کرد، در حالی‌که ده سال پیش در مورد قضیهٔ فرما این کار را می‌کردند.

اما در مورد انتخاب مسأله‌ها، به نظر من این انتخاب را مؤسسهٔ کلی خیلی خوب انجام داده است. فرضیهٔ ریمان و حدس برچ[1] و سوینرتون-دایر[2] به‌حق جزو این مسائل قرار گرفته‌اند. حدس هاج هم همین‌طور، هر چند به دلیلی متفاوت: اصلاً روشن نیست که جواب آن بله است یا خیر؛ خیلی مهم است که بتوان تعیین کرد کدام‌یک از این دو است. (البته امیدوارم این مسأله تصمیم‌ناپذیر از آب در نیاید ...) مسألهٔ $P = NP$ به همان رسته‌ای از مسائل تعلق دارد که مسألهٔ هاج، بجز اینکه اگر جواب آن مثبت باشد کاربردهای خیلی بیشتری خواهد داشت.

● آیا مسائل دیگری هستند که به نظر شما در همین مرتبه باشند؟

سر: قبلاً گفتم که برنامهٔ لنگ‌لندز یکی از مهمترین مسائل در ریاضیاتِ امروزی است. نیامدن آن در فهرست کلی احتمالاً به این دلیل است که صورت‌بندی آن با دقت موردنظر، بسیار مشکل است.

● شما علاوه بر داشتن شایستگیهای علمی، در سخنرانی و شرح و بیان هم استادید. این را در سخنرانی امروزتان شاهد بودیم.

سر: متشکرم. من اهل جنوب فرانسه‌ام. مردم آنجا دوست دارند حرف بزنند، نه فقط با دهانشان بلکه با دستهایشان، و من با یک قطعه گچ.

من وقتی چیزی را می‌فهمم احساس می‌کنم هرکس دیگری هم می‌تواند آن را بفهمد، و توضیح‌دادن آن برای دیگران، خواه دانشجو باشند یا همکار، لذت عظیمی به من می‌دهد.

روی دیگر سکه این است که حرفهای غلط مرا از نظر جسمی تقریباً بیمار می‌کند. نمی‌توانم این حرفها را تحمل کنم. وقتی مطلب غلطی در یک سخنرانی می‌شنوم، معمولاً حرف سخنران را قطع می‌کنم، و وقتی چنین چیزی در پیش‌چاپ یک مقاله یا یک مقاله یا کتاب چاپ‌شده می‌بینم، نظرم را برای نویسنده می‌فرستم (و اگر این نویسنده اتفاقاً خودم باشم، اشکال را یادداشت می‌کنم تا در چاپ بعدی تصحیح کنم). مطمئن نیستم که با این عادت، محبوبیت چندانی در میان سخنرانها و نویسندگان کسب کرده باشم.

دسترس‌پذیری و اهمیت ریاضیات

● رشد ریاضیات از نظر تعداد موضوعها و رشته‌ها انفجارگونه بوده است به طوری‌که اکنون کسب تبحر حتی در رشته‌های کوچک کار مشکلی است. از طرف دیگر، همان‌طور که در سخنرانی امروزتان روشن کردید، تلاقی و تأثیرگذاری رشته‌ها بر یکدیگر باعث غنای بیشتر هر یک از آنها می‌شود و خیلی مهم است. ریاضیدانان جوان چطور می‌توانند با این رشد انفجارگونه بسازند و چیز جدیدی به‌دست آورند؟

سر: بله، قبلاً هم این سؤال را در مصاحبه‌ای در سنگاپور، که در اینتلیجنسر بازچاپ شده، از من کرده بودند. جوابم این است که وقتی کسی واقعاً به مسألهٔ خاصی علاقه‌مند می‌شود، معمولاً مطالبی کمی در نوشتگان موجود پیدا می‌کند که به آن مسأله مربوط باشد. یعنی افسارِ کار در دست خود اوست.

در مورد اینکه احساس می‌کنیم ریاضیات «رشد انفجارگونه» دارد باید بگویم که به عقیدهٔ من آبل هم وقتی کار خود را پس از انبوه کارهای اویلر، لاگرانژ، لژاندر و گاوس آغاز کرد، همین احساس را داشته است. ولی او مسائلی تازه و راه‌حل‌هایی تازه یافت. همیشه همین‌طور بوده است. دلیلی برای نگرانی نیست.

● مسألهٔ دیگر این است که بسیاری از افراد جوان و مستعد ــ و همچنین راهبران افکار عمومی ــ ریاضیات را رشتهٔ چندان مهیجی نمی‌دانند.

سر: بله متأسفانه، شواهد زیادی در این زمینه هست.

چند سال قبل حتی وزیر تحقیقات فرانسه گفته بود که ریاضیدانها دیگر به درد نمی‌خورند چون امروز کافی است بدانید که کدام دکمه را روی رایانه فشار بدهید. (احتمالاً فکر می‌کرده کلیدها و برنامه‌های رایانه‌ای خود به خود به‌وجود آمده‌اند ...)

با این حال، من نظر خوش‌بینانه‌ای دربارهٔ جذب جوانها به رشتهٔ ریاضی و اهتمام آنها به کشفیات ریاضی دارم. یکی از جنبه‌های خوب جشنواره‌های آبل، برگزاری مسابقات آبل در نروژ بین دانش‌آموزان است.

ورزش و ادبیات

● ممکن است به ما بگویید غیر از ریاضیات به چه چیزهایی علاقه دارید؟

سر: ورزش! یا دقیقتر بگویم، اسکی، پینگ‌پنگ، و صخره‌نوردی. البته هیچ‌وقت این ورزشها را خیلی خوب انجام نمی‌دادم ولی از آنها لذت زیادی می‌بردم. (مثلاً وقتی اسکی می‌کردم، هیچ‌وقت حرکت مارپیچ را یاد نگرفتم و به‌جای پیچیدن ترمز می‌کردم).

خوشبختانه یا بدبختانه، یکی از عواقب پیری این است که زانوهایم دیگر یاری نمی‌کند (حتی به‌جای یکی از زانوها یک چیز عجیب و غریب فلزی-پلاستیکی قرار داده‌اند)، بنابراین مجبور شده‌ام از ورزش دست بکشم. تنها نوع صخره‌نوردی که می‌کنم مدل آن است یعنی دوستان را به فونتن‌بلو[1] می‌برم و آنها را تشویق می‌کنم از صخره‌هایی که من ده سال پیش بالا رفته‌ام، بالا بروند. این هم لذتی دارد اما خیلی کمتر از ورزش واقعی.

سایر علائق:

- فیلم (پالپ فیکشن[2] را دوست دارم. همچنین از طرفداران کارهای آلتمن[3]، تروفو[4]، رومر[5]، برادران کوئن[6] و ... هستم).
- شطرنج
- کتاب (از هر نوعی، از آثار جونو[7] گرفته تا بُل[8] و کاواباتا[9]، ازجمله، قصه‌های پریان و هری پاتر)

● پروفسور سر، از طرف انجمنهای ریاضی دانمارک و نروژ به خاطر این مصاحبه از شما تشکر می‌کنیم.

ترجمهٔ سیامک کاظمی

1. Birch 2. Swinnerton-Dyer

1. Fontainebleau 2. Pulp Fiction 3. Altman 4. Truffaut 5. Rohmer 6. Coen 7. Giono 8. Böll 9. Kawabata

نشر ریاضی، سال ۱۴، شمارهٔ ۲، صص ۵۵ـ۶۶

آموزش و مسأله

عکس نتایج را باید برعکس گذشتگان دریابیم!

امیدعلی شهنی کرم‌زاده*

این مقاله متن سخنرانی نویسنده درسی و سومین کنفرانس ریاضی کشور (مشهد، شهریور ۱۳۸۱) است. سخنران برای تحریک ذهن مخاطب و جلب‌توجه او به موضوع گهگاه از عباراتی استفاده کرده که ممکن است قدری بحث‌انگیز بنماید. این عبارات و نیز لحن مطلب که گاه جنبهٔ محاوره‌ای پیدا می‌کند، در ویرایش متن تغییر نیافته است.

بدین ترتیب، در تحلیلْ آنچه را به‌دنبال آن هستیم پذیرفته فرض می‌کنیم و از آن با نتیجه‌گیری متوالی به چیزی می‌رسیم که پذیرفتنی است. زیرا در تحلیلْ آنچه را که مطلوب است مبنا قرار می‌دهیم و چیزی را جستجو می‌کنیم که آن مطلب از آن حاصل می‌شود، و همین‌طور به دنبال حکم مقدم بر حکم اخیر می‌رویم، و به همین ترتیب، تا آنکه با بازپیمودن گامها به چیزی می‌رسیم که از قبل معلوم است یا از ردهٔ اصول اولیه است، و چنین روشی را تحلیل می‌نامیم که به مفهومیْ حل به‌صورت معکوس [قهقرایی] است.

اما در ترکیب، با معکوس‌کردن فرایند، آنچه را در تحلیل به آن رسیده‌ایم مبنا قرار می‌دهیم، هر آنچه را قبلاً به‌صورت مقدم بود به‌عنوان تالی در نظر می‌گیریم، آنها را به‌ترتیب طبیعی‌شان می‌آراییم و متوالیاً به یکدیگر پیوند می‌دهیم، و بالاخره به ساختِ آنچه موردنظر بود می‌رسیم، و این را ترکیب می‌نامیم.

از شرح پاپوس در بارهٔ اصول اقلیدس

بگذارید در اینجا سؤال دیگری را مطرح کنیم: چرا یونانیان سبک اکتشافی[1] را در ریاضیات اتخاذ نکردند؟ چرا آنها تحلیل خود را مخفی می‌کردند و فقط به ارائهٔ ترکیب می‌پرداختند؟ نمی‌دانیم. محتملاً حدس دکارت حاوی نکته‌ای هست: هندسه‌دانان باستان فقط ترکیب را در مکتوبات خود به‌کار می‌گرفتند، نه به این دلیل که از روش تحلیل بی‌اطلاع بودند بلکه، به عقیدهٔ من، به این دلیل که برای تحلیل آنچنان ارزش زیادی قائل بودند که می‌خواستند آن‌را به عنوان رمز مهمی نزد خود نگاه دارند.

ایمره لاکاتوش

نقل از

Imre Lakatos, *Mathematics, Science and Epistemology*, philosophical papers volume 2, (1983) 73-75.

1. heuristic

۱. مقدمه

عنوان بالا دو معنا دارد، یکی اینکه برداشت ما از عکس نتایج باید برخلاف برداشت گذشتگان باشد. دیگر اینکه گذشتگان توجهی به عکس نتایج نداشتند ولی ما باید داشته باشیم. شما به‌زودی می‌فهمید که منظور من کدام‌یک از این دو است. می‌دانیم مثلث ABC قائم‌الزاویه است اگر تنها و اگر $a^2 = b^2 + c^2$ یا اگر و تنها اگر $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$. حال اگر بگوییم مثلث ABC قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر $z^2 = x^2 + y^2$ که در آن z برابر است با ... ، بدون شک همه فکر می‌کنند که z یا وتر است یا $\sin A$. آیا می‌توانید تصور دیگری از z داشته باشید؟ کسی مقصر نیست، دو نتیجهٔ بالا تنها شرایط لازم و کافی شناخته‌شده به‌شکل $z^2 = x^2 + y^2$ برای قائم‌الزاویه‌بودن مثلث‌اند. ولی من در آخر این سخنرانی یک مورد دیگر را که با این دو متفاوت است ارائه می‌دهم (توجه داشته باشید که دو فرم بالا درواقع یکی هستند). باید توجه داشته باشیم که مفاهیمی نظیر قضیه، لم، عکس قضیه، اثبات، و مثال ناقض و خیلی چیزهای دیگر را مدیون اقلیدس و پیروانش هستیم. ولی در اینجا نشان می‌دهیم که یک ضعف کلی را نیز از او و پیروانش به ارث برده‌ایم. در واقع می‌خواهم در این سخنرانی به یک نکتهٔ خیلی بااهمیت در تاریخ ریاضی اشاره کنم که هیچ‌کس از زمان اقلیدس تا به‌حال متوجه آن نبوده است. به‌زودی خواهید فهمید که آن نکته چیست، اما توجه داشته باشید که من در اینجا ادعای خیلی بزرگی کرده‌ام و گفته‌ام: «هیچ‌کس از زمان اقلیدس تا به‌حال ... » یعنی انتظار می‌رود که افراد در آینده با تحقیق و جستجو کسانی را بیابند که در منابعی به این نکته اشاره‌ای کرده باشند و در غیر این‌صورت برای این نکته در صورت لزوم به این کنفرانس اشاره خواهند کرد.

موضوعی که متأسفانه در فرهنگ علمی ما خیلی مورد توجه قرار نمی‌گیرد همین ارجاع دادن و استناد کردن است. شنیده‌ایم که می‌گویند فلان حرف فلان دولتمرد در بارهٔ سیاست خارجی، «مصرف داخلی» دارد. اولین باری که من این عبارت را شنیدم خیلی به نظرم جالب آمد. راستی چه کسی آن را برای اولین بار به کار برده است؟ خیلی مشکل است که با تحقیق در متون سیاسی یا تاریخی بتوان به این موضوع پی برد. اما در ریاضیات که باید به گفته‌ها و کارهای دیگران ارجاع دهیم قاعدتاً نباید این مشکل پیش بیاید. چند ماه پیش در کرمان یکی از دوستان نزدیکم که الان هم در میان شما نشسته است به‌من گفت راستی خبرنامهٔ اخیر مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات و مصاحبهٔ خانم سوانسون را که متخصص جبر تعویض‌پذیر است و مهمان مرکز بوده خوانده‌ای؟ گفتم نه. گفت در این مصاحبه به یک نکتهٔ جالب اشاره کرده است. گفتم چه گفته؟ گفت که این خانم گفته نمی‌دانم چرا ایرانیها اینقدر به کمیّت مقاله و نه کیفیت آن توجه دارند. گفتم اولین بار است که این موضوع را می‌شنوی؟ گفت بله؛ گفتم کافی است به کتاب نتایج باور نکردنی در ریاضیات که خودم برای تو فرستادم نگاه کنی و ببینی که این موضوع را من ده سال پیش به‌طور مفصلتر گفته‌ام. به‌هر حال ما باید به گفته‌ها و نوشته‌های همدیگر ارجاع بدهیم تا سهممان در ادبیات ریاضی حفظ شود. حال بهتر است به موضوع سخنرانی برگردیم. اول بگذارید تعریف زیر را که نظر شخصی خودم است ارائه دهم.

تعریف ۱.۱ در بیشتر زمینه‌های ریاضی، نتیجه‌ای خوب و بااهمیت است که به‌شکل «اگر و تنها اگر» باشد و هر دو طرفِ «اگر و تنها اگر» اطلاعات تازه‌ای از شیء مورد مطالعه بدهند و اثبات یک طرف آن حتماً بدیهی باشد یا نتیجه‌ای باشد که اگر عکس آن درست نیست مثالهایی برای درست‌نبودن عکس آن وجود داشته باشد و قضایایی که با شرایط اضافیْ درستی عکس را تضمین می‌کند وجود داشته باشد.

(توجه: بدیهی‌بودن اثبات یک طرف ضروری است زیرا این موضوع به این معنی است که موجودی که همه یک‌طرفش را دیده‌اند، این قضیه طرف پنهانش را آشکار می‌کند ولی اگر اثبات دوطرف بغرنج بود یعنی موجودی را که هیچ‌کس ندیده و به‌طور طبیعی خود را نشان نداده با زور به‌وجود آوردیم، چنین نتیجه‌ای کارایی نخواهد داشت).

کافی است به هر نتیجهٔ با اهمیتی در ریاضیات نگاه کنید تا درستی تعریف بالا را قبول کنید. مثلاً مثلث ABC قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$. حلقهٔ R نویتری است اگر و تنها اگر $R[x]$ نویتری باشد. یا مسألهٔ فرما: «$n \geq 3$ و $z^n = x^n + y^n$ جوابهای صحیح غیرصفر ندارد» که اخیراً توسط اندرو وایلز حل شده است باید به شکل زیر بیان شود.

قضیهٔ ۱.۱. معادلهٔ دیوفانتی $z^n = x^n + y^n$، $n \geq 2$، در اعداد صحیح جوابهای غیرصفر و غیربدیهی دارد اگر و تنها اگر $n = 2$.

وقتی این نتیجه را به این شکل بیان کنیم متوجه یک خاصیت منحصر به‌فرد برای عدد ۲ می‌شویم که غیر از زوج‌بودن آن است و هیچ عدد دیگری این خاصیت را ندارد.

عکس یک نتیجه: X دارای خاصیت P است اگر و تنها اگر دارای خاصیت Q باشد.

هر چقدر که تعداد این خاصیتهای معادل P و Q برای موجود X زیادتر شود موجود X را بهتر می‌شناسیم. به‌زودی نشان می‌دهیم که متأسفانه به این موضوع بسیار ساده کم‌توجهی شده است. همان‌طور که در بالا اشاره کردیم دو طرف هر نتیجه‌ای به‌شکل «اگر و تنها اگر» باید اطلاعات غیربدیهی به‌ما بدهد. مثلاً در قضیهٔ کوچک‌فرما، اگر p اول باشد، آنگاه $p|a^{p-1} - 1$ اگر و تنها اگر $(a,p) = 1$. باید توجه داشت که یک طرف این قضیه اصلاً اطلاعاتی به ما نمی‌دهد. زیرا اگر $m|a^n - 1$، آنگاه باید به‌ازای هر m و n، $(a,m) = 1$. از این‌روست که عکس این قضیه موقعی مطلوب است که به‌شکل زیر باشد: «اگر $p|a^{p-1} - 1$، آنگاه p باید اول باشد». متأسفانه همان‌طور که می‌دانیم این عکس درست نیست. زیرا به‌سادگی می‌توان نشان داد به‌ازای هر $a \neq 1$ تعداد نامتناهی عدد غیراول m وجود دارد که $m|a^{m-1} - 1$. کافی است فرض کنید که $p \geq 3$ عددی اول است که $p \nmid a(a^2 - 1)$، و قرار دهید $m = \frac{a^{2p}-1}{a^2-1}$. آشکار است که m عدد اولی نیست ولی فرد است. همچنین $2p|(m-1)(a^2-1)$؛ پس $2p|m-1$ یعنی $m = 2pk + 1$. اما طبق تعریف، $m|a^{2p} - 1$؛ پس $m|a^{2pk} - 1$ یعنی $m|a^{m-1} - 1$، و توجه می‌کنیم که تعداد نامتناهی p و در نتیجه تعداد نامتناهی m وجود دارد. حال طبیعی است خواسته شود: تمام mهایی را بیابید که وقتی $(a,m) = 1$، آنگاه $m|a^{m-1} - 1$. نتیجهٔ زیر کار را تمام می‌کند.

قضیهٔ ۲.۱. اگر $(a,m) = 1$، آنگاه $m|a^{m-1} - 1$ اگر و تنها اگر $m = p_1 p_2 \cdots p_k$ (یعنی حاصلضرب اولهای متمایز) و $m - 1 \equiv 0 \pmod{(p_i - 1)}$ و $k = 1$ یا $k > 2$، به‌ازای هر $(a,m) = 1$.

اثبات. فرض کنید که $m|a^{m-1} - 1$. اگر m اول باشد کار تمام است. پس فرض کنیم که m اول نیست. ابتدا فرض می‌کنیم $r > 1$ و $m = 2^r$. اما در این حالت $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ به‌ازای $a = 3$ درست نیست. پس m دارای لااقل یک عامل فرد است. حال فرض می‌کنیم $p \neq 2$ اولی باشد که $p|m$، و r بزرگترین توانی از p باشد که $p^r|m$. قرار می‌دهیم $m = bp^r$ و فرض می‌کنیم که α یک ریشهٔ اولیهٔ p^r باشد (توجه: α یک ریشهٔ اولیهٔ n است هرگاه $\phi(n)$ کوچکترین عددی باشد که $\alpha^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. می‌دانیم که فقط اعداد ۲، ۴، p^r، $2p^r$ دارای ریشه‌های اولیه‌اند). اما طبق قضیهٔ دیریکله (توجه: اثباتهای ساده‌ای برای بعضی حالات قضیهٔ دیریکله وجود دارد) تصاعد حسابی

$$\alpha, \alpha + p^r, \alpha + 2p^r, \ldots$$

شامل تعداد نامتناهی عدد اول است. پس می‌توان s را آنقدر بزرگ اختیار کرد که عدد اول $x = \alpha + sp^r$ از m بزرگتر شود. اما آشکار است که $x^{m-1} \equiv \alpha^{m-1} \equiv 1 \pmod{p^r}$. در نتیجه، چون α یک ریشهٔ اولیه است باید $\phi(p^r) = p^r - p^{r-1}$ عدد $m - 1$ را عاد کند. اما $m - 1 = bp^r - 1$ به این معنی است که p و $m - 1$ نسبت به هم اول‌اند.

پس باید $r = 1$ یعنی $m - 1$ بر $p - 1$ قابل قسمت است. حال فقط باید نشان دهیم $k > 2$. اما اگر $m = p_1p_2$ و فرض کنیم مثلاً $p_1 > p_2$، آنگاه باید $p_1p_2 - 1 \equiv p_1 - 1 \equiv 0 \pmod{p_1 - 1}$ که غیرممکن است یعنی باید $k > 2$. عکس قضیه بدیهی است (که همیشه قرار است این‌گونه باشد).

نتیجهٔ ۱.۱ (خیلی جالب): اگر به‌ازای عدد اول $p \geq 3$، $p \nmid a(a^2 - 1)$ و $m = \frac{a^{2p}-1}{a^2-1}$، آنگاه m به‌شکل حاصلضرب متمایز بیش از دو عدد اول است.

(همان‌طور که متوجه شده‌اید این قضیهٔ کوچک فرماست که به‌شکل «اگر و تنها اگر» بیان شده است ولی متأسفانه اثری از آن در کتابهای درسی دانشگاهی نمی‌یابید.)

قضیهٔ ویلسن که می‌گوید $(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ اگر و تنها اگر n اول باشد، در همهٔ کتابهای نظریهٔ اعداد وجود دارد (هر چند کاربردهای زیادی هم ندارد) زیرا این قضیه از اول به همین ترتیب بیان شده است ولی نتایج دیگری که احتیاج به کار بیشتری دارد تا راجع به عکس آنها چیزی گفته شود کمتر وارد کتب درسی شده‌اند.

همه می‌دانیم که مطالعهٔ ساختار گروههای متناهی با بررسی زیرگروههای خاصی از آنها صورت می‌گیرد. مخصوصاً بعضی وقتها احتیاج داریم که بدانیم زیرگروهی خاص وجود دارد یا نه. قضیهٔ لاگرانژ در این مورد به‌ما کمک می‌کند و همان‌طور که می‌دانید عکس قضیهٔ لاگرانژ درست نیست (کافی است گروه جایگشتهای زوج را روی یک مجموعهٔ چهار عضوی در نظر بگیرید که گروهی است از مرتبهٔ دوازده ولی زیرگروهی از مرتبهٔ شش ندارد.) ولی قضایای کوشی و سیلو حاکی از اینکه «اگر G یک گروه و p عددی اول باشد که مرتبهٔ G را عاد می‌کند، آنگاه زیرگروهی از مرتبهٔ p وجود دارد؛ همچنین اگر p^m بزرگترین توان p باشد که مرتبهٔ G را عاد می‌کند، آنگاه G زیرگروههایی از مرتبهٔ p^i برای هر $1 \leq i \leq m$ دارد» تقریباً عکسهایی از قضیهٔ لاگرانژ هستند و در حقیقت همین قضایا بودند که کار رده‌بندی گروههای متناهی را تمام کردند. در میان کتابهای جبر دانشگاهی کمتر کتابی را مشاهده می‌کنید که به اهمیت اینها پرداخته باشد. در این کتب به قضیهٔ اساسی گروههای متناهی آبلی که جمع مستقیم گروههای دوری‌اند اشاره می‌شود ولی هیچ‌گاه اشاره نشده که علت اساسی این قضیهٔ ساختاری این است که قضیهٔ لاگرانژ برای گروههای متناهی آبلی به شکل «اگر و تنها اگر» است. خوب علت این بی‌توجهی به عکس نتایج چیست؟ با این مقدمه، نشان می‌دهیم که مقصران اصلی در حقیقت اقلیدس و پیروانش بوده‌اند که نگاه ما را به عکسها ممنوع کرده‌اند (ما را به این بی‌توجهی عادت داده‌اند.) و نشان می‌دهیم که به‌راحتی می‌توانیم خود را اصلاح کنیم و با نگاه‌کردن به عکسها نه تنها لذت ببریم بلکه در کار تخصصی خود نیز موفق شویم و هیچ‌وقت با کمبود مطلب و مسأله مواجه نشویم.

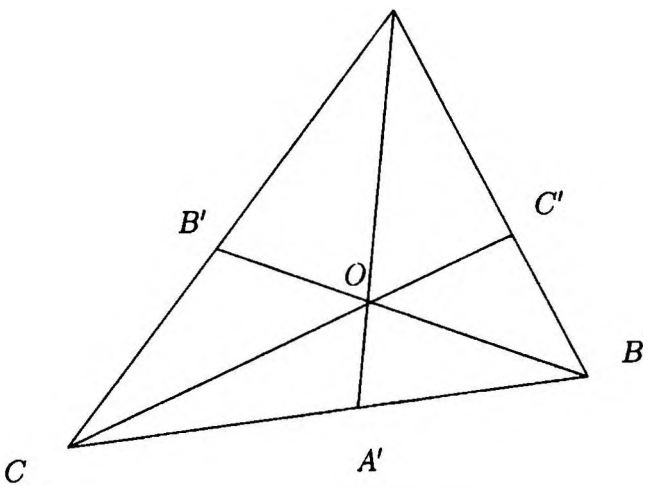
۲. غفلت بزرگ اقلیدس و پیروانش

همان‌طور که گفتم ما اساس ریاضیات را مدیون اقلیدس و پیروانش هستیم ولی دلیلی ندارد که به غفلتهای آنان اشاره نکنیم. در بیشتر کارهای اقلیدس و پیروانش با نتایجی مانند «اگر X دارای خاصیت P باشد آنگاه دارای خاصیت Q هم است» مواجه هستیم. به‌ندرت به عکس آن توجه داشته‌اند. این موضوع را با مثالهایی نشان می‌دهیم. با ابتداییترین نتایج شروع می‌کنیم.

آنها اثبات کرده‌اند که مثلاً سه میانه در هر مثلث متقارب‌اند و این میانه‌ها در $\frac{1}{3}$ از قاعده و $\frac{2}{3}$ از رأس همدیگر را قطع می‌کنند. در تمام کتابهای ریاضی دنیا از اول تا به‌حال همین مطلب نشان داده شده است و بس. آیا نمی‌توان به عکس آن اندیشید؟ یعنی نمی‌توان پرسید که آیا سه خط متقارب غیر از میانه‌ها وجود ندارند که این نسبت برای آنها مثلاً r و s باشد؟ در قضیهٔ زیر نشان می‌دهیم که جواب منفی است و در حقیقت عکس قضیهٔ میانه‌ها نیز درست است ولی جامعهٔ ریاضی تا به حال از آن محروم بوده است. قبل از بیان قضیه، بگذارید هر سه خط متقارب در مثلث را خطوط سوا[1] یی بنامیم و اگر در شکل زیر داشته باشیم

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{OB'}{BB'} = \frac{OC'}{CC'} = k$$

این خطها را خطوط سوایی همگن بنامیم.



قضیهٔ ۱.۲. سه خط در مثلث همگن هستند اگر و تنها اگر سه میانه باشند.

اثبات. اگر سه خط میانه باشند، اثبات موجود در کتابها کار را تمام می‌کند. به‌عکس، اگر سه خط سوایی همگن باشند آنگاه در شکل داریم

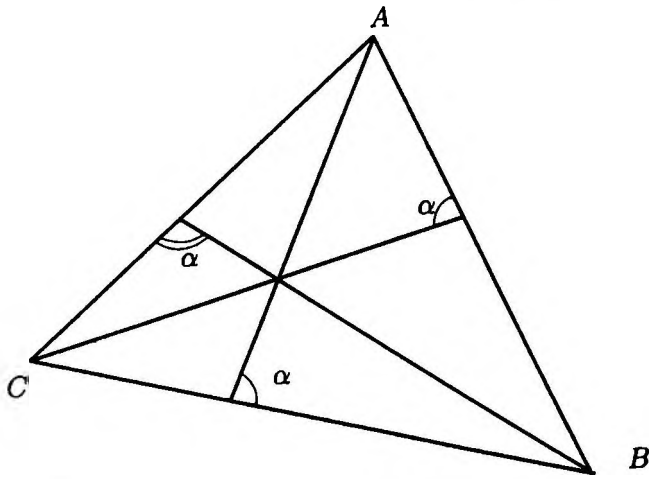
$$\frac{OC'}{CC'} = \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}} \text{ و } \frac{OB'}{BB'} = \frac{S_{OAC}}{S_{ABC}} \text{ و } \frac{OA'}{AA'} = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}$$

پس $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$ و در نتیجه $k = 1/3$. حال اگر O محل تلاقی سه میانه نباشد فرض می‌کنیم که $O \neq G$ محل تلاقی میانه‌ها باشد. در نتیجه OG باید موازی سه ضلع باشد که غیرممکن است.

اقلیدس و پیروانش ثابت کرده‌اند سه ارتفاع نیز متقارب‌اند. عکس این قضیه چه می‌تواند باشد؟ بعضی وقتها ظاهر یک قضیه به‌گونه‌ای است که ایده‌ای برای عکس خود به ما نمی‌دهد ولی با کمی تعمق می‌توان عکس آن را یافت. مثلاً در این مورد توجه می‌کنیم که سه ارتفاع با سه ضلع، زاویه‌های

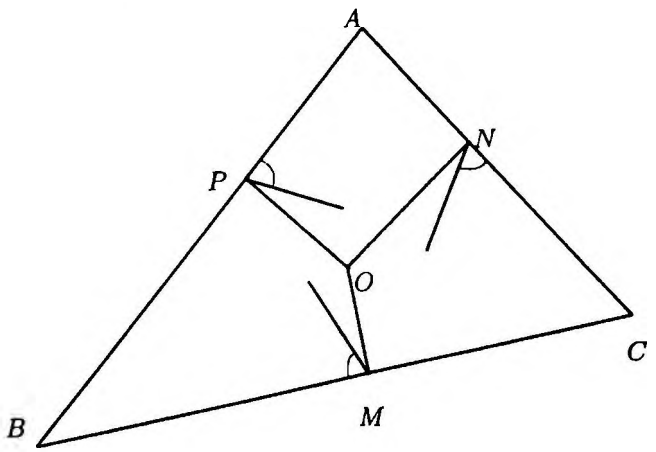
۱. سوا یا چوا (Giovanni Céva) ریاضیدان ایتالیایی.

مساوی می‌سازند. اول قرارداد می‌کنیم که با اضلاع زوایای مساوی می‌سازند یعنی مطابق شکل زیر



برای سهولت، مثلثها را حادالزوایا در نظر می‌گیریم. اول قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم که عکس قضیهٔ تلاقی عمودمنصف‌ها را نیز به‌ما می‌دهد.

قضیهٔ ۲.۲. سه خط متقارب در درون مثلث که از اوساط اضلاع آن می‌گذرند سه عمودمنصف هستند اگر و تنها اگر با اضلاع زوایای مساوی بسازند.

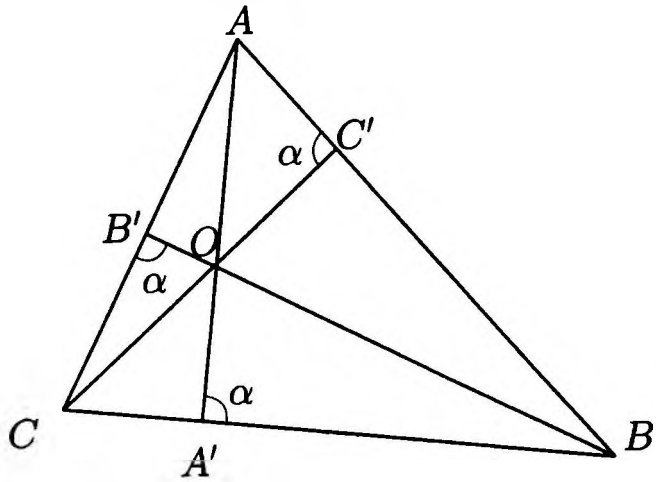


اثبات. فرض می‌کنیم OM و ON و OP مطابق شکل با اضلاع زوایای مساوی α بسازند. بدون از دست‌دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم $\alpha > ۹۰$ و به تناقض می‌رسیم. آشکار است که عمودمنصف‌های AC و AB در درون چهارضلعی $OMNC$ همدیگر را قطع می‌کنند ولی عمودمنصف BC هرگز از درون چهارضلعی $OMCN$ نمی‌گذرد که همان تناقض موردنظر است. عکس قضیه بدیهی و همان قضیهٔ تقارب سه عمودمنصف است.

حال به عکس قضیهٔ برخورد سه ارتفاع می‌پردازیم.

قضیهٔ ۳.۲. سه خط سوایی ارتفاعهای مثلث هستند اگر و تنها اگر این سه خط با اضلاع زوایای مساوی بسازند.

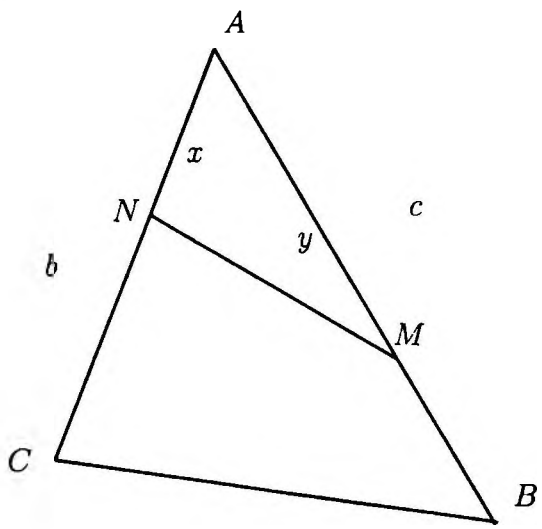
اثبات. در مثلث ABC فرض می‌کنیم که خطوط AA' و BB' و CC' سه خط سوایی باشند که با اضلاع زوایای مساوی بسازند (مطابق شکل).



از A به‌موازات BC و از B به‌موازات AC و از C به‌موازات AB رسم می‌کنیم تا مثلث جدیدی به‌دست آید. به‌طور بدیهی دیده می‌شود که OA و OB و OC با اضلاع مثلث جدید زوایای مساوی α می‌سازند و در نتیجه طبق قضیهٔ قبل OA و OB و OC بر اضلاع مثلث جدید و در نتیجه بر اضلاع مثلث ABC عمود هستند.

عکس قضیهٔ تقارب سه نیمساز را به شما واگذار می‌کنم.

به هر فرمول و هر مطلب ساده‌ای در هندسه نگاه کنید می‌توانید برای یافتن عکس آن کاری بکنید. مثلاً می‌دانید که هر میانه، مساحت مثلث را نصف می‌کند. ولی به‌راحتی می‌توان دید که در هر مثلث ABC تعداد نامتناهی پاره‌خط MN وجود دارند که مساحت مثلث را نصف می‌کنند زیرا کافی است $AM \cdot AN = \frac{bc}{۲}$. در میان این پاره‌خط‌ها میانه‌ها از چه خصوصیت ویژه‌ای برخوردارند؟ قبل از اینکه این ویژگی را تعیین کنیم بهتر است به این نکتهٔ ساده توجه داشته باشیم که در دو مثلث ABC با اضلاع a، b، c و $A'B'C'$ با اضلاع a'، b'، c'، هرگاه $bc = b'c'$ و $A = A'$، آنگاه $a \leq a'$ اگر و تنها اگر $c - b \leq c' - b'$ و یا اگر و تنها



اگر $b + c \leq b' + c'$ (توجه: فرض کرده‌ایم $c \geq b$ و $c' \geq b'$). اثبات این مطلب با توجه به فرمول کسینوسها بدیهی است. حال با توجه به نکتهٔ بالا قضیهٔ زیر بلافاصله به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۴.۲. در مثلث ABC که $c > b$، پاره‌خطی که اضلاع AB و AC را قطع می‌کند و مساحت مثلث را نصف می‌کند میانهٔ ضلع AC است و تنها اگر دارای بیشترین طول باشد.

با یک مثال سادهٔ دیگر به بحث هندسه خاتمه می‌دهیم.

همه می‌دانیم فرمول $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ که در آن $p = (a+b+c)/۲$، فرمول مساحت مثلثی با اضلاع a، b، c است. حال اگر این فرمول را به ما بدهند و فقط بدانیم که a، b، c مثبت هستند، آیا می‌توانیم بگوییم که S حتماً مساحت یک مثلث است؟

خوشبختانه جواب مثبت است. چون S فرمول معنی‌داری است پس باید $(p-a)(p-b)(p-c) > ۰$. در نتیجه یا هر سه عبارت مثبت هستند که فوری نتیجه می‌گیریم a، b، c اضلاع مثلث‌اند و در نتیجه S فرمول مساحت است. یا مثلاً $p - a > ۰$ و $p - b < ۰$ و $p - c < ۰$ که امکان‌پذیر نیست و به همین ترتیب حالتهای دیگر رد می‌شوند. پس فرمول بالا معنی‌دار است اگر و تنها اگر فرمول مساحت مثلث باشد.

قبل از اینکه به بحث ادامه دهیم، در اینجا می‌خواهم بی‌هیچ درنگی ادعا کنم که می‌توان به‌همان اندازه‌ای که تا حالا قضیه در هندسهٔ اقلیدسی داشته‌ایم، قضیه به هندسه اضافه کنیم (یعنی عکس همه قضیه‌ها و مسائلی در هندسه که عکس آنها گفته نشده است؛ اگر حمل بر خودستایی نشود، در صورت لزوم و داشتن فرصت، خود من با همکاری عده‌ای جوان علاقه‌مند قادر به این کار هستیم).

۳. عکسهایی فوری در جبر

بگذارید انگیزهٔ اصلی انتخاب موضوع سخنرانی را برای شما بگویم. دو سه ماه پیش برای امتحان ورودی دکتری در گروه ریاضی دانشگاه اهواز از همکاران خواستیم هر کس چند مسأله بدهد. یکی از همکاران به‌نام آقای رضایی این مسأله را داد: «نشان دهید هرگاه $R[x]$ یک حوزهٔ صحیح اصلی باشد، آنگاه R میدان است». بعد من گفتم نه بهتر است آن قسمت عکس هم که در کتابها به‌شکل قضیه است داده شود یعنی: «$R[x]$ حوزهٔ صحیح اصلی است اگر و تنها اگر R میدان باشد». اگرچه اثبات دو طرف این قضیه بدیهی است ولی این قسمت که توسط دکتر رضایی عنوان شد مهمتر است زیرا در اثبات این قسمت باید از این خاصیت مهم حلقه‌های حوزهٔ صحیح اصلی که هر ایده‌آل اول ماکسیمال است استفاده کرد و گفت (x) اول است، پس ماکسیمال است و در نتیجه $R \cong \frac{R[x]}{(x)}$ میدان است. حال آنکه در آن قسمتی که در تمام کتابهای جبر به‌عنوان قضیه می‌آید یعنی: «اگر F میدان باشد، آنگاه $F[x]$ حوزهٔ صحیح اصلی است» فقط از الگوریتم تقسیم استفاده می‌شود. یعنی خیلی جای تأسف است که همهٔ این سالها طرف بدیهی این قضیه در کتابهای جبر به‌عنوان قضیه عنوان شده است و طرف دیگر آن که مهمتر است کاملاً فراموش شده است. علت آن، همان‌طور که در اردیبهشت ماه گذشته در کرمان در مراسم تجلیل از شهریاری گفتم، این است که بیشتر نویسندگان کتابها به کتابهای گذشته نگاه می‌کنند و قضایای اصلی آنها کم‌وبیش یکی است. کتابهای قدیمی جیکوبسن و مکلین-برکاف از اولین کتابهای جبر دانشگاهی بوده‌اند که این قضیه را آورده‌اند ولی به‌صورت «اگر و تنها اگر» بیان نکرده‌اند و بقیهٔ نویسندگان کتابها هم با تقلید از یکدیگر این قسمت اساسی را عنوان نکرده‌اند. حال نشان می‌دهم نداشتن این تفکر «اگر و تنها اگر» چگونه باعث از دست دادن چیزهای ساده و قشنگی در جبر شده است. همان‌طور که دیده‌اید. در تمام کتابهای جبر نوشته می‌شود:

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

یعنی $\mathbb{Z}$ زیرحلقهٔ $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}$ زیرحلقهٔ $\mathbb{R}$ است. آیا طبیعی نیست این مسأله را مطرح کنیم که A زیرحلقهٔ $\mathbb{Q}$ است اگر و تنها اگر ... ؟ بدیهی است که $\mathbb{Z} \subseteq A$ و اگر فرض کنیم که

$$T = \{a/b \in A : a/b \notin \mathbb{Z}\} = \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$$

و قرار دهیم

$$P = \{p : p/b, a/b \in T, \quad \text{اول است } p\}$$

به‌سادگی دیده می‌شود که

$$A = \mathbb{Z}[۱/p_۱, ۱/p_۲, \ldots, ۱/p_n \ldots], p_i \in P$$

پس ما تمام زیرحلقه‌های $\mathbb{Q}$ را مشخص کرده‌ایم. یعنی $A \subseteq \mathbb{Q}$ زیرحلقه است اگر و تنها اگر به‌شکل بالا باشد. بهتر است به بعضی از زیرحلقه‌های $\mathbb{Q}$ توجه بیشتری داشته باشیم: فرض کنیم P مجموعهٔ تمام اعداد اول بجز یک عدد اول خاص مثلاً p باشد. آنگاه $A=\mathbb{Z}[۱/p_۱, ۱/p_۲, \ldots, ۱/p_n, \ldots]$ که $p_i \in P$. آشکار است که $A = \mathbb{Z}_{(p)}$ یعنی A همان حلقهٔ موضعی است که در جبر تعویض‌پذیر از جایگاه مهمی برخوردار است. اما نکتهٔ جالب و حیرت‌آوری که تا به‌حال هیچ‌یک از متخصصان جبر تعویض‌پذیر به آن توجه نکرده است این است که با توجه به شکل زیرحلقه‌های $\mathbb{Q}$، می‌توان آشکارا دید که به‌ازای هر عدد اول p زیرحلقهٔ موضعی $\mathbb{Z}_{(p)}$ در واقع یک زیرحلقهٔ ماکسیمال در $\mathbb{Q}$ است (توجه: $\mathbb{Q}$ زیرگروه ماکسیمال ندارد). اصلاً شاید باور نکنیم که در هیچ جا صحبت از زیرحلقهٔ ماکسیمال در حلقه‌های تعویض‌پذیر نشده است (عجله نکنید چیزهای قشنگتری در پیش است).

همان‌طور که می‌دانید، برای هر حلقهٔ R (نه لزوماً تعویض‌پذیر) همواره همریختی غیرصفر $\phi : \mathbb{Z} \to R$ وجود دارد که $\phi(۱) = ۱$. این مطلب در تمام کتابهای جبر آمده است ولی متأسفانه هیچ کتابی متوجه اهمیت آن نشده است. دلایل آن را در زیر عنوان می‌کنم.

به‌طور طبیعی می‌توان پرسید آیا $\mathbb{Z}$ تنها حلقه با خاصیت بالاست، یعنی سعی در اثبات قضیهٔ زیر کرد.

قضیهٔ ۱.۳. حلقهٔ A دارای خاصیت $\mathbb{Z}$ مذکور در بالاست اگر و تنها اگر A به‌شکل ... باشد.

قبل از استنتاج دقیق این قضیه توجه می‌کنیم که هر حلقهٔ A به‌شکل زیر است: با توجه به همریختی $\phi : \mathbb{Z} \to A$ یا $\mathbb{Z} \subseteq A$ یا $\mathbb{Z}_n \subseteq A$ که

n سرشتنمای A است. به‌عبارت دیگر در حالت $\mathbb{Z} \subseteq A$ اگر قرار دهیم $S = A\backslash\mathbb{Z}$ آنگاه $A = \mathbb{Z}[a]_{a\in S}$ و در حالت $\mathbb{Z}_n \subseteq A$، $T = A\backslash\mathbb{Z}_n$، و داریم $A = \mathbb{Z}_n[a]_{a\in T}$. پس هر حلقهٔ A به‌شکل چندجمله‌ای‌ها روی $\mathbb{Z}$، یعنی $A = \mathbb{Z}[x_i : i \in I]$ یا خارج‌قسمتی از حلقه‌های چندجمله‌ای‌ها روی $\mathbb{Z}$ است. به‌عبارت ساده‌تر، اگر حلقهٔ $\mathbb{Z}[x_i : i \in I]$ را بشناسیم تمام حلقه‌ها اعم از تعویض‌پذیر یا تعویض‌ناپذیر را شناخته‌ایم، موضوعی که هیچ‌کس کوچکترین اشاره‌ای به آن نکرده است. یعنی ما فقط یک حلقهٔ نشناخته داریم. خوب حالا آماده‌ایم تا تمام حلقه‌هایی را که همریختی ناصفری از آنها به هر حلقهٔ دیگری وجود دارد مشخص کنیم.

قضیهٔ ۲.۳. حلقهٔ A دارای این خاصیت است که برای هر حلقهٔ R، همریختی $\phi : A \to R$ وجود دارد اگر و تنها اگر یا $A = \mathbb{Z}[x_i : i \in I]$، یعنی حلقهٔ چندجمله‌ایهای چندمتغیره روی $\mathbb{Z}$، یا $A = \frac{\mathbb{Z}[x_i:i\in I]}{P}$ که P ایده‌آلی است که شامل هیچ عدد طبیعی ناصفری نیست.

اثبات. اگر A به‌شکلِ داده شده باشد آشکارا همریختی پوشای $\phi : A \to \mathbb{Z}$ وجود دارد و با توجه به خاصیت $\mathbb{Z}$ که در ابتدا ذکر کردیم اثبات تمام است. به‌عکس، دیدیم که هر حلقهٔ A به‌شکل $A = \mathbb{Z}[x_i : i \in I]$ یا $A = \frac{\mathbb{Z}[x_i:i\in I]}{P}$ است. اما آشکار است که P نمی‌تواند شامل عددی طبیعی و غیرصفر باشد زیرا اگر $0 \neq n \in P$ آنگاه در همریختی $\phi : A = \frac{\mathbb{Z}[x_i:i\in I]}{P} \to \mathbb{Z}$ باید $0 = n + P \to n$ که غیرممکن است.

در حلقهٔ چندجمله‌ایهای بالا لزوماً $x_ix_j = x_jx_i$ برقرار نیست و حلقه‌ها در حالت کلی تعویض‌ناپذیر هستند.

توجه: وجود همریختی ناصفر از $\mathbb{Z}$ به هر حلقهٔ A نشان می‌دهد که با به‌کار بردن لم تسورن به‌راحتی می‌توان دید که هر حلقهٔ تعویض‌ناپذیر A دارای زیرحلقهٔ تعویض‌پذیر ماکسیمال است.

حال که دیدیم می‌توان از زیرحلقهٔ تعویض‌پذیر ماکسیمال نام برد، از زیرگروه آبلی ماکسیمال در گروههای ناآبلی نیز می‌توان نام برد. به‌راحتی متوجه می‌شویم که تمام منابع ریاضی تاکنون از دو قضیهٔ زیر محروم بوده‌اند.

قضیهٔ ۳.۳. در حلقهٔ تعویض‌ناپذیر A، مرکز حلقه مساوی اشتراک تمام زیرحلقه‌های ماکسیمال تعویض‌پذیر A است.

اثبات. اگر مرکز حلقه را به C نشان دهیم و فرض کنیم که $R \subset A$ یک زیرحلقهٔ تعویض‌پذیر ماکسیمال در A باشد، آنگاه آشکار است که $R + C$ یک زیرحلقهٔ تعویض‌پذیر است و در نتیجه باید $R = R + C$ یعنی $C \subseteq R$. به‌عکس فرض می‌کنیم که عنصر $a \in A$ در اشتراک تمام زیرحلقه‌های تعویض‌پذیر ماکسیمال در A باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که $a \in C$. فرض می‌کنیم یک عنصر $b \in A$ وجود داشته باشد که $ab \neq ba$، و نشان می‌دهیم که به تناقض خواهیم رسید. برای این منظور زیرحلقهٔ تعویض‌پذیر $\mathbb{Z}[b]$ در A را در نظر می‌گیریم. اما طبق لم تسورن، $\mathbb{Z}[b]$ در یک زیرحلقهٔ تعویض‌پذیر ماکسیمال B در A قرار دارد. در نتیجه طبق فرض، $a \in B$؛ پس باید $ab = ba$ (توجه: $a, b \in B$) که تناقض است.

قضیهٔ قبل یک کاربرد جالب‌توجه دارد: در حقیقت همین کاربرد بود که ما را در سال گذشته در کلاس حلقه و مدولهای توپولوژیک دانشجویان دکتری به‌سوی این قضیه هدایت کرد. می‌دانیم در یک حلقهٔ توپولوژیک و هاوسدورف، بستار یک زیرحلقهٔ تعویض‌پذیر حلقه‌ای است تعویض‌پذیر. در نتیجه در چنین حلقه‌هایی تمام زیرحلقه‌های تعویض‌پذیر ماکسیمال بسته‌اند و در نتیجه مرکز چنین حلقه‌هایی یک زیرحلقهٔ بسته خواهد بود که قضیه‌ای است در نظریهٔ حلقه‌های توپولوژیک، ولی با اثباتی نه این‌قدر بدیهی. قضیهٔ زیر در مورد مرکز گروهها هم شناخته شده نیست و اثباتش مانند قضیهٔ قبل است.

قضیهٔ ۴.۳. اگر G یک گروه ناآبلی باشد، آنگاه مرکز آن مساوی اشتراک تمام زیرگروههای آبلی ماکسیمال است.

۴. عکسهایی در نابرابریها

نتایج بی‌شماری وجود دارد که در مورد عکس آنها کاری انجام نشده است. در این قسمت فقط به دو مطلب اشاره می‌کنم که یکی از آنها عکس ساده‌ای است که خودم یافته‌ام و کاربرد جالبی دارد و دیگری عکس نتیجه‌ای است که در نوع خود یکتاست و آن‌را کلمکین[1] یافته است. در اردیبهشت ماه گذشته درکرمان یک سخنرانی با عنوان «اثباتهای فراموش‌نشدنی» داشتم که در یکی از این اثباتها، به اثباتی خیلی ساده از نابرابری میانگین حسابی اشاره کردم که به‌نظر من ساده‌ترین اثبات در میان بیش از پنجاه اثبات مختلف این نابرابری است و متعلق به شخصی چینی به‌نام چونگ[2] است که در مجلهٔ مانتلی، شمارهٔ ۵ سال ۱۹۷۶، به‌چاپ رسیده است. در اینجا می‌خواهم با بیان عکس نکته‌ای ساده، طول اثبات این نابرابری را تقریباً به صفر برسانم و البته باید اقرارکنم که ایدهٔ آن‌را از همین اثبات چینی گرفته‌ام. ولی توجه داشته باشید تا اردیبهشت ماه گذشته آن اثبات چینی ساده‌ترین اثبات بود و حالا که قرار است به عکسها هم توجه داشته باشیم اثباتی که امروز ارائه می‌دهم ساده‌ترین است. همهٔ ما هزارها بار نوشته‌ایم $a < x < b$. آیا هرگز از خود پرسیده‌اید که آیا می‌توان نتیجه‌ای داشت مانند «$a < x < b$ اگر و تنها اگر ... ؟» برای راحتی فرض می‌کنیم که $0 < a < b$ و نتیجهٔ زیر را خواهیم داشت.

قضیهٔ ۱.۴. به‌ازای هر عدد حقیقی x و $0 < a < b$، $a < x < b$ اگر و تنها اگر $a + b - x > \frac{ab}{x}$.

اثبات. اگر $a < x < b$، آنگاه با تقسیم بر x بدون از دست‌دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم که $x = 1$. پس $a < 1 < b$. حال آشکار است که $a < 1 < b$ اگر و تنها اگر $b(1 - a) > 1 - a$ یعنی اگر و تنها اگر $a + b > ab + 1$، و اثبات تمام است.

کاربرد قضیهٔ بالا (نابرابری میانگین حسابی و هندسی): اگر $a_1 \geq a_2 \geq \cdots a_n > 0$ به‌طوری که $a_1a_2\cdots a_n = 1$ آنگاه $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$.

اثبات. اگر a_iها مساوی باشند، حکم بدیهی است و به‌ازای $n = 2$ گرچه همه آن‌را بدیهی می‌دانند ولی بهتر است تأکید کنم که قضیهٔ قبلی ما

1. M. S. Klamkin 2. K. M. Chong.

یعنی $a_1 + a_2 \geq a_1a_2 + 1$ کار را تمام می‌کند. حال به استقرا:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \geq 1+a_1a_2+a_3+a_4\cdots a_n \geq 1+n-1=n$$

(توجه: باید یکی از a_iها کمتر از یک و یکی بزرگتر از یک باشد؛ فرض کرده‌ایم $a_1 < 1 < a_2$.)

نابرابری کلمکین. همان‌طور که قبلاً اشاره کردم، a، b، c اضلاع مثلث‌اند اگر و تنها اگر $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} > 0$ که $p = (a+b+c)/2$. با ضرب عوامل زیر رادیکال خواهیم داشت: a، b، c اضلاع یک مثلث‌اند اگر و تنها اگر

$$2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4) > 0$$

شاید باور نداشته باشید که تا به‌حال این تنها نابرابری با این خاصیت است یعنی به‌طور کلی مسألهٔ «یافتن یک چندجمله‌ای مانند $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ که $f > 0$ اگر و تنها اگر هر سه تای x_iها اضلاع یک مثلث باشند» حل نشده است. اما یک طرف این مسأله توسط کلمکین با نابرابری زیر حل شده است که این نابرابری در نوع خود یکتاست ولی در حقیقت کلمکین هم ایدهٔ نابرابری خود را از فرمول هرون برای مساحت مثلث گرفته است. دیدیم که مساحت مثلث (S) بزرگتر از صفر است اگر و تنها اگر $2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4) > 0$. نابرابری اخیر را می‌توان به‌شکل $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 2(a^4 + b^4 + c^4)$ نوشت. کلمکین قضیهٔ زیر را با کمی تغییر، ثابت کرده است.

قضیهٔ ۲.۴. اگر x_1، x_2، $\ldots$ x_n در

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\sum_1^n x_i^2\right)^2 - (n-1)\left(\sum_1^n x_i^4\right) > 0$$

صدق کنند آنگاه هر سه تا از x_iها اضلاع یک مثلث هستند.

اثبات. به استقرا روی n عمل می‌کنیم. به‌ازای $n = 3$ دیدیم که نابرابری به‌شکل «اگر و تنها اگر» است. حال نشان می‌دهیم که اگر نابرابری به‌ازای n متغیر x_i درست باشد، آنگاه به‌ازای هر $n-1$ متغیر x_i نیز درست است و اثبات تمام می‌شود. حال قرار می‌دهیم $A = \sum_2^n x_i^2$ و $B = \sum_2^n x_i^4$ و نابرابری بالا را به‌شکل زیر می‌نویسیم

$$x_1^4 + (x_2^2 + \cdots + x_n^2)^2 + 2x_1^2(x_2^2 \cdots x_n^2) \geq$$
$$(n-1)x_1^4 + (n-1)(x_2^4 + \cdots + x_n^4)$$

پس خواهیم داشت

$$x_1^4 + A^2 + 2x_1^2A \geq (n-1)x_1^4 + (n-1)B$$
$$= (n-1)x_1^4 + (n-2)B + B$$

در نتیجه

$$A^2 - (n-2)B \geq (n-2)x_1^4 - 2x_1^2A + B$$

حال طرفین نابرابری را در $n-2$ ضرب می‌کنیم

$$(n-2)[A^2-(n-2)B] \geq [(n-2)x_1^2-A]^2-A^2+(n-2)B$$

در نتیجه

$$(n-1)[A^2 - (n-2)B] \geq [(n-2)x_1^2 - A]^2$$

پس خواهیم داشت $A^2 \geq (n-2)B$ که همان نابرابری اصلی ولی به‌ازای $n-1$ متغیر است و اثبات تمام است.

توجه: عکس قضیهٔ قبل به‌ازای $n = 4$ درست نیست، زیرا هر چهار عدد a، a، a و $a \geq 5.2a - 1$ ، را که در نظر بگیریم، هر سه‌تای آنها تشکیل اضلاع مثلث می‌دهند ولی در نابرابری قضیه صدق نمی‌کنند. هر کس بتواند قضیه‌ای مانند قضیهٔ قبل ولی به‌شکل «اگر و تنها اگر» بیابد کار مهمی کرده است.

۵. عکسهای پنهان

همیشه بیان کردن عکس یک قضیه ساده نیست زیرا وقتی می‌گوییم X با خاصیت p دارای خاصیت q هم هست، طبیعی است که برای عکس آن جای p و q را عوض کنیم ولی همیشه نمی‌توان چنین کرد. حتی در حالتهای بدیهی ممکن است خاصیت p یک، خاصیت r را نیز که در قضیه گفته نشده به ما بدهد و آنگاه برای عکس قضیه نیاز باشد که q و r با هم p را بدهند. به‌طور کلی هر خاصیتی را که روی X با p معادل شود می‌توان یک عکس p نامید و ممکن است این دو از نظر ظاهر هیچ ارتباطی با هم نداشته باشند. منظور این است که به‌طور کلی وقتی می‌گوییم p اگر و تنها اگر q، p و q را عکس هم می‌نامیم یعنی معادلها را باید عکسهای پنهان نامید.

مثلاً به نتیجهٔ زیر نگاه کنید

قضیهٔ ۱.۵. هر حلقهٔ یکدار دارای ایده‌آل ماکسیمال است اگر و تنها اگر حاصلضرب فضاهای فشرده، فشرده باشد.

معمولاً این نوع عکسهای پنهان به ما کمک می‌کند که یک مسأله را به مسأله‌ای در زمینهٔ دیگر تبدیل کنیم. این عکسهای پنهان اکثراً به‌طور تصادفی به‌دست می‌آیند (مانند عکسهایی که عکاسان به‌طور تصادفی و بدون برنامه‌ریزی قبلی از صحنه‌ای مثل سقوط یک هواپیما می‌گیرند). بگذارید منظورم را با یک مثال بهتر نشان دهم.

مسأله‌ای که بیش از ۳۰۰ سال از مطرح شدن آن می‌گذرد و هنوز هم حل نشده، این مسأله است که آیا مکعب مستطیلی وجود دارد که تمام یالها و اقطارش اعداد صحیح باشند؟ عجیب است که برخلاف مسألهٔ فرما که آنقدر موردتوجه قرارگرفت، ریاضیدانان اصلاً توجهی به این مسأله نکرده‌اند. از این‌رو تقریباً می‌توان ادعا کرد هیچ کار اساسی برای حل این مسأله انجام نگرفته است. ظاهر این مسأله خیلی مظلومانه است. آدم فکر می‌کند اکثر جعبه کارتن‌ها مکعب مستطیل‌هایی هستند با این خاصیت. درواقع این

مسأله به‌این معنی است که آیا دستگاه زیر دارای جوابهای صحیح غیرصفر است:

$$\begin{cases} a^2+b^2=x^2 \\ b^2+c^2=y^2 \\ a^2+c^2=z^2 \\ a^2+b^2+c^2=d^2 \end{cases}$$

که در آن a، b و c یالها هستند و x، y و z قطرهای مستطیلها و d هم قطر خود مکعب مستطیل است.

در سال ۱۸۹۵، شخصی به نام بروکار[1] که یک نظامی فرانسوی بود و در سخنرانی کرمان هم به یک کار دیگرش اشاره کردم، با فرض اینکه یالها دوبه‌دو نسبت به هم اول‌اند نشان داد که چنین مکعب مستطیلی وجود ندارد، ولی خیلی زود متوجه اشتباه او شدند، زیرا می‌دانیم که مجموعهٔ مربعات دو عدد فرد نمی‌تواند مربع کامل باشد پس اگر $(a,b)=1$، یکی فرد و دیگری زوج است و همین‌طور برای $(b,c)=1$ و $(a,c)=1$.

در نتیجه اگر مثلاً a فرد باشد آنگاه چون $a^2+y^2=d^2$ و y هم فرد است به تناقض می‌رسیم. یعنی اگر چنین جعبه‌ای وجود داشته باشد دو تا از یالهایش نسبت به هم اول نیستند. همچنین ثابت شده است که اگر چنین جعبه‌ای وجود داشته باشد، حاصلضرب یالهایش یعنی abc بر ۱۱ قابل قسمت است.

حال بهتر است کمی جدی فکر کنیم و ببینیم چه عکسهای پنهانی می‌توان از این جعبهٔ جادویی بیرون کشید. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که این موجود سه بعدی وجود دارد اگر و تنها اگر یک موجود دوبعدی خاص وجود داشته باشد.

قضیهٔ ۲.۵. جعبهٔ جادویی وجود دارد اگر و تنها اگر مثلثی وجود داشته باشد که اضلاع آن اعداد صحیح مربع کامل و نیمسازهای آن گویا باشند.

اثبات. فرض کنیم که جعبهٔ جادویی وجود دارد و یالهای آن x، y و z اند. قرار می‌دهیم $a=y^2+z^2$ و $b=x^2+z^2$ و $c=x^2+y^2$، آشکار است که $a+b>c$ و $a+c>b$ و $b+c>a$، یعنی a، b و c اضلاع یک مثلث‌اند که مربع کامل هم هستند. حال قرار می‌دهیم $p=\frac{a+b+c}{2}$ یعنی $p=x^2+y^2+z^2$ برابر است با مربع قطر جعبه و $p-a=x^2$ و $p-b=y^2$ و $p-c=z^2$ یعنی p، $p-a$، $p-b$ و $p-c$ مربع کامل هستند. در نتیجه نیمسازها که برابرند با $d_a=\frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$ و همین‌طور برای d_b و d_c، اعدادی گویا می‌شوند. به‌عکس اگر چنین مثلثی وجود داشته باشد می‌توان فرض کرد که $(a,b,c)=1$ زیرا اگر $d=(a,b,c)$ آنگاه مثلث $(a/d,b/d,c/d)=1$ نیز دارای همین خاصیت است. با توجه به فرمول نیمسازها و گویا بودن آنها باید $4p(p-a)=(b+c)^2-a^2$ و $4p(p-b)=(a+c)^2-b^2$ و $4p(p-c)=(a+b)^2-c^2$ مربع کامل باشند و همان‌طور که قبلاً گفتیم چون مجموع مربعات دو عدد فرد نمی‌تواند مربع کامل باشد و می‌دانیم که a، b و c با هم زوج نیستند، در نتیجه باید دو تا فرد و دیگری زوج باشد یعنی $p=\frac{a+b+c}{2}$ یک عدد صحیح است. دیدیم که $p(p-a)$، $p(p-b)$ و $p(p-c)$ مربع کامل هستند.

1. Brocard

پس $d=(p-a,p-b,p-c)=1$ زیرا اگر $d\neq 1$ آنگاه چون $p-b+p-c=a$ پس $d|a$ و به‌طور مشابه $d|b$ و $d|c$ که تناقض است. در نتیجه $p=(p(p-a),p(p-b),p(p-c))$ مربع کامل می‌شود.

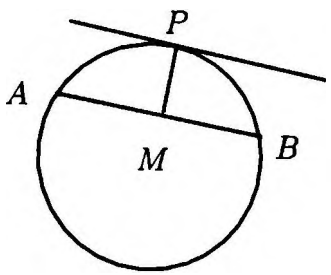
یعنی p، $p-a$، $p-b$ و $p-c$ مربع کامل‌اند و اگر قرار دهیم $x=\sqrt{p-a}$ و $y=\sqrt{p-b}$ و $z=\sqrt{p-c}$، آنگاه خواهیم داشت

$$\begin{cases} x^2+y^2=c= \text{مربع کامل} \\ x^2+z^2=b= \text{مربع کامل} \\ y^2+z^2=a= \text{مربع کامل} \\ x^2+y^2+z^2=p= \text{مربع کامل} \end{cases}$$

یعنی جعبهٔ جادویی وجود دارد.

۶. عکسهایی در آنالیز و توپولوژی

در زمینهٔ آنالیز و توپولوژی شاید بیشتر از هر زمینهٔ دیگری کتاب داشته باشیم ولی بجز چندتایی از آنها بقیه تفاوت چندانی با هم ندارند و متأسفانه اکثراً هم به این موضوع «اگر و تنها اگر» توجهی نکرده‌اند. بگذارید این موضوع را با مثال نشان دهم.



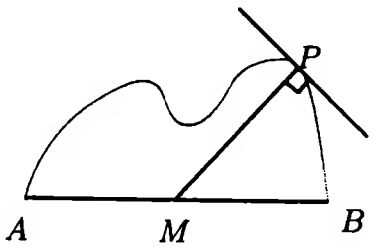
دایره را حتماً می‌شناسید. می‌دانیم دایره دارای این خاصیت است که اگر A و B دو نقطهٔ دلخواه روی آن باشند، آنگاه نقطه‌ای مانند P روی قوس AB وجود دارد به‌طوری که مماس بر دایره در نقطهٔ P بر MP عمود است که M وسط وتر AB است.

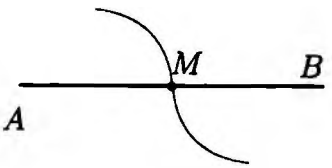
همه از دورهٔ مدرسه با این نتیجه آشنا هستیم ولی آیا به عکس آن فکر کرده‌ایم؟ معلوم است که نه، زیرا اقلیدس ما را با دایره آشنا کرده است. خوب حالا ببینیم عکس آن چگونه است؛ اول برای آنکه بتوانیم به دایره به‌عنوان موجودی آنالیزی نگاه کنیم نیم‌دایره را در نظر می‌گیریم تا بتوانیم آن را به‌عنوان یک تابع پیوسته بررسی کنیم. فوراً متوجه می‌شویم که نتیجهٔ بالا برای نیم‌دایره هم درست است. حال می‌پرسیم که آیا این خاصیت، نیم‌دایره را بین توابع پیوسته به‌صورت یکتا مشخص می‌کند؟ قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که نتیجهٔ بالا تقریباً برای تمام توابع پیوسته و مشتق‌پذیر درست است.

قضیهٔ ۱.۶. فرض کنیم f خمی باشد که در $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد. آنگاه برای هر دو نقطهٔ A و B روی این خم، یا این خم از وسط AB می‌گذرد یا این خم دارای خاصیت ذکرشده در بالا برای نیم‌دایره است (مطابق دو شکل صفحهٔ بعد)

اثبات. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم که $A=(a,0)$ و $B=(b,0)$ و M وسط پاره‌خط AB باشد. حال قرار می‌دهیم

$$g(x)=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(f(x)-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)^2$$





آشکار است که $g(a) = g(b)$. در نتیجه طبق قضیهٔ رول یک نقطهٔ $c \in (a,b)$ وجود دارد به‌طوری که $g'(c) = 0$. حال از $g'(c) = 0$ فوراً به‌دست می‌آید $f'(c)\left(f(c) - \frac{f(a)+f(b)}{2}\right) = -(c - \frac{a+b}{2})$. چنانچه قرار دهیم $P = (c, f(c))$، اگر $c \neq \frac{a+b}{2}$ آنگاه تساوی اخیر نشان می‌دهد که خط مماس در P بر خط MP که M وسط AB است عمود است. اگر $c = \frac{a+b}{2}$ و $f(c) \neq \frac{f(a)+f(b)}{2}$، آنگاه داریم $f'(c) = 0$ یعنی مماس در P دوباره بر MP عمود است. پس ممکن است $c = \frac{a+b}{2}$ و $f(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$، و اثبات تمام است.

توجه: نیم‌دایره خاصیت فوق را به شکل قویتری دارد که آن را به‌طور یکتا مشخص می‌کند و در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیهٔ ۲.۶. اگر $f(x)$ روی $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $A = (a, f(a))$ و $B = (b, f(b))$، آنگاه $f(x)$ نیم‌دایره‌ای است به قطر AB اگر و تنها اگر برای هر نقطهٔ P روی قوس AB، مماس در P بر خط MP (M وسط AB) عمود باشد و $f(x)$ هم از وسط AB نگذرد و $f(a) = f(b) = 0$.

اثبات. یک طرف قضیه بدیهی است. برای اثبات طرف دیگر، اول مبدأ مختصات را به وسط AB می‌بریم. حال اگر $P = (x, f(x))$، آنگاه باید $f'(x)\frac{f(x)}{x} = -1$. اگر $y = f(x)$، آنگاه داریم $x^2 + y^2 = \lambda$.

در تمام کتابهای توپولوژی این قضیه وجود دارد که اگر X یک فضای فشرده و هاوسدورف باشد، آنگاه تابع پیوستهٔ $f : X \to X$ یک همسانریختی[1] است اگر و تنها اگر f دوسویی باشد. قضیهٔ فوق برای $\mathbb{R}$ هم درست است ولی در هیچ کتاب آنالیز اشاره‌ای به آن نشده است، یعنی قضیهٔ زیر را داریم.

قضیهٔ ۳.۶. تابع پیوستهٔ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ همسانریختی است اگر و تنها اگر f دوسویی باشد.

اثبات. فرض کنیم f دوسویی باشد. باید نشان دهیم f مجموعهٔ باز را به مجموعهٔ باز می‌برد. برای این منظور کافی است نشان دهیم که f بازهٔ باز را به بازهٔ باز می‌برد. در نتیجه کافی است که نشان دهیم f اکیداً یکنواست. برای این منظور فرض می‌کنیم چنین نیست و به تناقض می‌رسیم. پس فرض می‌کنیم که $x_1 < x_2 < x_3$ و مثلاً $f(x_1) > f(x_2)$ و $f(x_2) < f(x_3)$. اما طبق قضیهٔ مقدار میانی به‌ازای هر λ که $f(x_2) < \lambda < \min(f(x_1), f(x_3))$، a و b وجود دارند به‌طوری که $a \in (x_1, x_2)$ و $b \in (x_2, x_3)$ و $f(b) = \lambda = f(a)$. پس باید $a = b$ که ممکن نیست. عکس قضیه بدیهی است.

در مورد قضیهٔ مقدار میانی که در قضیهٔ بالا از آن نام بردیم، می‌دانیم که عکس قضیه متأسفانه درست نیست ولی چند کتاب آنالیز را می‌شناسید که به‌درست نبودن عکس آن توجه کرده باشند؟ در کتاب کوچک بواس[1] به‌نام مقدمات توابع حقیقی[2] از انتشارات «جامعهٔ ریاضی آمریکا» مثالی از تابعی که پیوسته نیست ولی خاصیت قضیهٔ مقدار میانی را دارد آمده است. اگر $f(x)$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد آنگاه $f'(x)$ همواره دارای خاصیت قضیهٔ مقدار میانی است ولی می‌دانیم که مشتق یک تابع پیوسته ممکن است پیوسته نباشد. پس برای تابعی که خاصیت مقدار میانی را داشته باشد و پیوسته نباشد مثالهای طبیعی وجود دارد. بگذارید برای راحتی اثباتی از این موضوع ارائه دهیم. فرض کنید که $[a,b] \subseteq D$ و D بازه‌ای است که f' در آن وجود دارد. حال اگر $f'(a) < \lambda < f'(b)$، آنگاه تابع $g(x) = f(x) - \lambda x$ را در نظر می‌گیریم. اما داریم $g'(a) < 0 < g'(b)$. در نتیجه در نقطه‌ای مانند $a < c < b$، تابع $g(x)$ دارای مینیمم $g(c)$ خواهد شد. یعنی $g'(c) = 0$ و یا $f'(c) = \lambda$.

توجه کنید که مثلاً

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

دارای مشتق پیوسته نیست.

حال می‌توان قضایای زیادی بیان کرد که مثلاً ارتباط بین پیوستگی و خاصیت مقدار میانی را به‌ما بدهد، از قبیل قضیهٔ زیر.

قضیهٔ ۴.۶. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته است اگر و تنها اگر f دارای خاصیت مقدار میانی باشد و $f^{-1}(a)$ به‌ازای هر $a \in A$ که A در $\mathbb{R}$ چگال است، بسته باشد.

اثبات. یک طرف قضیه طبق معمول بدیهی است. برای طرف دیگر فرض می‌کنیم که f در $a \in \mathbb{R}$ پیوسته نباشد و به تناقض می‌رسیم. با این فرض، یک دنبالهٔ $\{a_n\}$ وجود دارد به‌طوری که $a_n \to a$ ولی $f(a_n)$ به‌سمت $f(a)$ همگرا نیست. در نتیجه یک $\epsilon > 0$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر عدد طبیعی k یک $n_k > k$ وجود دارد که $|f(a_{n_k}) - f(a)| \geq \epsilon$. پس $f(a_{n_k}) \geq f(a) + \epsilon$ یا $f(a_{n_k}) \leq f(a) - \epsilon$. حال فرض کنید مثلاً $f(a_{n_k}) \geq f(a) + \epsilon$. اما می‌دانیم که $b \in A$ وجود دارد به‌طوری که $f(a) < b < f(a) + \epsilon$، پس $f(a) < b < f(a_{n_k})$. اکنون طبق خاصیت مقدار میانی یک x_k بین a و a_{n_k} وجود دارد به‌نحوی که $f(x_k) = b$، یعنی $x_k \in f^{-1}(b)$. آشکار است که $x_k \to a$ و در نتیجه $a \in f^{-1}(b)$ یعنی $f(a) = b$، که تناقض است.

1. homeomorphism

1. R. P. Boas 2. *A Primer of Real Numbers*

حال به چند نتیجه در توپولوژی نیز اشاره می‌کنم که در همه جا یکطرفه بیان شده‌اند و نتایج معروفی هستند که می‌توان آنها را به شکل «اگر و تنها اگر» در آورد. مثلاً همه می‌دانند که در هر فضای T_1، X، اگر $A \subseteq X$، آنگاه A' یک مجموعهٔ بسته است. به‌طور کلی داریم:

قضیهٔ ۵.۶. اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه به‌ازای هر $A \subseteq X$ مجموعهٔ مشتق A' بسته است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $x \in X$، مجموعه $\{x\}'$ بسته باشد.

اثبات. نشان می‌دهیم $A'' \subseteq A'$. فرض کنید $x \in A''$ و G یک مجموعهٔ باز باشد که $x \in G$. اما $x \in G - \{x\}' = H$ و H باز است. پس $\emptyset \neq H \cap A' \neq \{x\}$. فرض کنید که $x \neq y \in H \cap A'$. آنگاه چون $y \notin \{x\}'$، پس یک مجموعهٔ باز U وجود دارد به‌طوری که $y \in U$ و $x \notin U$. اما $y \in U \cap H$ و $y \in A'$، در نتیجه باید $U \cap H \cap A \neq \emptyset$. ولی آشکار است که $x \notin U \cap H \cap A$ یعنی $\emptyset \neq H \cap A \neq \{x\}$. در نتیجه $\emptyset \neq G \cap A \neq \{x\}$ یعنی $x \in A'$. عکس قضیه بدیهی است.

در آنالیز از این موضوع زیاد استفاده می‌شود که اگر دو تابع پیوسته مثلاً روی اعداد گویا مساوی باشند، آنگاه آن دو تابع مساوی‌اند. به‌طور کلی در توپولوژی ثابت می‌شود که اگر Y یک فضای هاوسدورف و X یک فضای توپولوژیک باشد به‌طوری که به‌ازای زیرفضای چگال $D \subseteq X$ و دو تابع $f, g : X \to Y$ داشته باشیم $f|_D = g|_D$، آنگاه $f = g$ ولی صحبتی از عکس این قضیه نمی‌شود. در حالی که داریم:

قضیهٔ ۶.۶. اگر Y یک فضای توپولوژیک باشد و X یک فضای دلخواه، آنگاه فضای Y هاوسدورف است اگر و تنها اگر برای هر دو تابع $f, g : X \to Y$ و هر زیرمجموعهٔ چگال $D \subseteq X$ که $f|_D = g|_D$، داشته باشیم $f = g$.

اثبات. یک طرف قضیه همان نتیجهٔ مذکور در کتابهاست. به‌عکس، فرض می‌کنیم که به‌ازای $y_1 \neq y_2$ در Y و هر دو مجموعهٔ باز $y_1 \in G_1$ و $y_2 \in G_2$ داشته باشیم $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ و نشان می‌دهیم که به تناقض خواهیم رسید. فرض کنید $a \notin Y$ و قرار دهید $X = Y \cup \{a\}$ و نیز

$$B = T \cup \{G : G = (G_1 \cap G_2) \cup \{a\}\}$$

که در آن $G_1, G_2 \in T$، $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$، $y_2 \in G_2$، $y_1 \in G_1$ و T توپولوژی روی Y است. B را پایهٔ یک توپولوژی برای X می‌گیریم. حال تعریف می‌کنیم که به‌ازای هر $x \in X$، $f(x) = g(x) = x$، و همچنین $f(a) = y_1$ و $g(a) = y_2$. آشکار است که Y در X چگال است. و $f|_Y = g|_Y$ اما $f \neq g$.

اثبات نتایج زیر را که در کتابها به‌شکل یکطرفه ارائه شده است به خواننده واگذار می‌کنم.

قضیهٔ ۷.۶. اگر Y یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه Y فضای هاوسدورف است اگر و تنها اگر به‌ازای هر فضای X و هر دو تابع پیوستهٔ $f, g : X \to Y$ مجموعهٔ $F = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ بسته باشد.

قضیهٔ ۸.۶. اگر X یک فضای شمارش‌پذیر از نوع اول باشد، آنگاه X فضای هاوسدورف است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ فشرده X، بسته باشد.

بیشتر اوقات وقتی مسأله یا قضیه‌ای که می‌تواند به‌شکل «اگر و تنها اگر» بیان شود به‌شکل یکطرفه بیان می‌شود، کار را برای حل مسأله یا اثبات قضیه مشکل می‌کند چون از خاصیتی که باید به‌کار برده شود محروم می‌شویم. بگذارید با مثال زیر موضوع عکس در توپولوری را هم به‌پایان ببرم.

مسأله‌ای در کتاب توپولوژی ویلارد وجود دارد به این صورت که «نشان دهید هر مجموعهٔ بسته در فضای $\mathbb{R}^2$ مرز یک مجموعه است».

این مسأله برایم جالب بود زیرا می‌دانیم که مرز یک مجموعه همیشه بسته است و در این مسأله می‌بینیم که در بعضی از فضاها مجموعه‌های بسته و مرزها بر هم منطبق می‌شوند ولی از اول از خودم پرسیدم که $\mathbb{R}^2$ چه خاصیتی دارد که مثلاً $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{R}^n$ ندارد (بجز بعد فضا). بعد دیدم که هیچ فرقی ندارند. اگر یک فضای X بخواهد دارای این خاصیت باشد چون خود X بسته است پس X هم باید یک مرز باشد یعنی باید یک $A \subseteq X$ وجود داشته باشد که $X = b(A) = \overline{A} - A^\circ$. بنابراین باید $\overline{A} = X$ و $A^\circ = \emptyset$ یعنی باید یک زیرمجموعهٔ چگال که درونش تهی باشد داشته باشیم. آنگاه دیدم $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}^2$ چنین است. در نتیجه حدس زدم که فضاهایی که این خاصیت را دارند باید تمام فضاها را به ما بدهند و آن‌را ثابت کردم. چند سال بعد این موضوع را به‌صورت مسأله در مجلهٔ مانتلی دیدم و خودم را سرزنش کردم که چرا من آن‌را به شکل مسأله برای این مجله نفرستادم. از این‌رو تصمیم گرفتم نتیجه‌ای قویتر ثابت کنم تا هم مسألهٔ کتاب ویلارد و هم این مسألهٔ مجلهٔ مانتلی از آن به‌دست آیند.

قضیهٔ ۹.۶. اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه $F \subseteq X$ بسته است اگر و تنها اگر $F = \overline{A}$ که $A \subseteq X$ و $A^\circ = F^\circ \cap Y^\circ$ به‌ازای هر زیرمجموعهٔ چگال Y در X.

اثبات. اگر $F \subseteq X$ بسته باشد و $F^\circ = \emptyset$، آنگاه کافی است قرار دهیم $A = F$. پس فرض می‌کنیم که $F^\circ \neq \emptyset$، قرار می‌دهیم $F \cap Y = B$، و آشکار است که $B \neq \emptyset$. اما $\overline{B} \subseteq F$ و $\overline{B} = \overline{F \cap Y} \supseteq \overline{F^\circ \cap Y} = \overline{F^\circ}$. حال قرار می‌دهیم $F - \overline{B} = C$ و $A = B \cup C$. در نتیجه $\overline{A} = \overline{B} \cup \overline{C} = \overline{B} \cup \overline{(F - \overline{B})} \supseteq \overline{B} \cup (F - \overline{B}) = F$. اما از $A = B \cup C \subseteq F$ خواهیم داشت $\overline{A} \subseteq F$ و در نتیجه $F = \overline{A}$. حال ادعا می‌کنیم که $A^\circ = B^\circ = F^\circ \cap Y^\circ$؛ و اثبات تمام می‌شود. چون $A = B \cup C$ پس $B^\circ \subseteq A^\circ$. حال توجه می‌کنیم که $A^\circ \subseteq A = B \cup C \subseteq F$ یعنی $A^\circ \subseteq F^\circ \subseteq \overline{B}$. پس $A^\circ \cap C = \emptyset$ و بنابراین از $A^\circ \subseteq B \cup C$ نتیجه می‌گیریم که $A^\circ \subseteq B$ یعنی $A^\circ \subseteq B^\circ$. پس $A^\circ = B^\circ = F^\circ \cap Y^\circ$، و اثبات تمام است.

حال نتیجهٔ زیر فوراً به‌دست می‌آید.

نتیجه. در فضای X، هر زیرمجموعهٔ بسته، مرز یک مجموعه است اگر و تنها اگر در X یک زیرمجموعهٔ چگال وجود داشته باشد که درونش تهی باشد.

۷. فتوکپی نه عکس

همان‌طور که تفاوت اساسی وجود دارد بین عکاسی که با دوربین عکاسی خود از منظره‌ای عکس می‌گیرد با کسی که از این عکس یک فتوکپی

می‌گیرد، در ریاضیات هم بین کسی که عکس، یک نتیجه را حدس می‌زند و اثبات می‌کند با کسی که این حدس و اثبات را از نتیجه‌ای دیگر فتوکپی می‌کند تفاوت هست. در اینجا فقط به یک مثال بسنده می‌کنم زیرا دارم بیش از حد دست خودم را رو می‌کنم. می‌دانیم که اگر فضای برداری V روی میدان K (با مشخصهٔ صفر) دارای بعد متناهی باشد، آنگاه برای هر دو عملگر S و T، $TS - ST \neq \lambda I$ که $\lambda \in K$ و $\lambda \neq 0$ و I عملگر یکه است. زیرا می‌دانیم که TS و ST دارای یک اثر[1]ند یعنی $tr(TS - ST) = 0$ ولی $tr(\lambda I) \neq 0$. آیا می‌توان فکری برای عکس آن کرد؟ جواب در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیهٔ ۱.۷. اگر K میدانی با مشخصهٔ صفر باشد، آنگاه فضای برداری V روی K دارای بعد متناهی است اگر و تنها اگر برای هر دو عملگر S و T به‌ازای هر $\lambda \in K$ و $\lambda \neq 0$ داشته باشیم $TS - ST \neq \lambda I$.

اثبات. اگر بعد فضا متناهی باشد، موضوع قبلاً ثابت شده است. به‌عکس اگر به‌ازای هر دو عملگر S و T، $TS - ST \neq \lambda I \neq 0$، باید نشان دهیم که بعد فضا متناهی است. پس فرض کنیم که بعد فضا نامتناهی است و به تناقض برسیم. از این به بعد کار فتوکپی شروع می‌شود. چون فضاهای با بعد نامتناهی برای این منظور تفاوتی ندارند، یک فضای خاص را در نظر می‌گیریم و به تناقض می‌رسیم و بعد هم آن‌را برای هر فضای دیگری کپی می‌کنیم. می‌دانیم که $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ یک پایهٔ نامتناهی برای فضای چندجمله‌ای‌ها روی K یعنی $K[X]$ است. عملگر مشتق D را در نظر می‌گیریم. حال عملگر دیگری مانند S می‌یابیم به‌طوری که $DS - SD = I$. آشکار است که باید $DS(1) - SD(1) = 1$ یعنی $D(S(1)) - 0 = 1$. پس $S(1) = x$. به همین طریق $S(x) = x^2$ و $S(x^n) = x^{n+1}$. حال برای یک فضای کلی V دو عملگر T و S می‌یابیم که $TS - ST = I$، و اثبات تمام می‌شود. اول توجه می‌کنیم چون هر مجموعهٔ نامتناهی را می‌توان به‌شکل اجتماعی از مجموعه‌های شمارا و نامتناهی و دوبه‌دو جدا از هم نوشت، پس بدون از دست‌دادن کلیت مسأله، بعد V را شمارا می‌گیریم. حال فرض کنیم که $B = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$ یک پایه برای V باشد و T و S را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم: $T(\alpha_n) = n\alpha_{n-1}$ و $T(\alpha_0) = 0$ و $S(\alpha_n) = \alpha_{n+1}$. آشکار است که $TS - ST = I$، و اثبات تمام می‌شود.

حال برمی‌گردیم به مسألهٔ اول که ABC قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر . . . . اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد می‌دانیم که حاصلضرب دو ضلع یعنی bc برابر است با حاصلضرب وتر a در ارتفاع h_a. بدیهی است که عکس آن هم درست است. یعنی مثلث قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر حاصلضرب دو ضلع آن مساوی باشد با حاصلضرب ضلع سوم در ارتفاع وارد بر آن.

درکتابهای هندسهٔ دبیرستانی ۴۰ سال پیش، این مسأله وجود داشت که ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(A = 90^\circ)$ داریم $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ که h ارتفاع وارد بر وتر است. این تساوی، یک طرفِ نتیجهٔ قبل است ولی متأسفانه عکس آن طرف دیگرِ نتیجهٔ قبل نیست. اما به‌خاطر این سخنرانی این عکس را ثابت کردم، یعنی داریم

قضیهٔ ۲.۷. مثلث ABC که در آن $a \geq b \geq c$، قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر

$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

اثبات. اگر مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد آنگاه $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ یعنی $a^2h_a^2 = b^2c^2$. پس $ah_a = bc$ که دو برابر مساحت است و فرمولی است که همه آن را می‌شناسند و از زمان اقلیدس وجود داشته است. به‌عکس، فرض کنیم تساوی $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ را که در آن $h = h_a$، داشته باشیم. اما در هر مثلث داریم «دوبرابر مساحت $= bc\sin A = ah$» پس $\frac{1}{h} = \frac{a}{bc\sin A}$ یا $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{\sin^2 A}\left(\frac{b^2+c^2-2bc\cos A}{b^2c^2}\right)$. در نتیجه طبق فرض، $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{\sin^2 A}\left(\frac{b^2+c^2-2bc\cos A}{b^2c^2}\right) = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2+c^2}{b^2c^2}$ یعنی $(b^2+c^2)(1-\sin^2 A) = 2bc\cos A$. پس یا $\cos A = 0$ یا $\cos A = \frac{2bc}{b^2+c^2}$. در نتیجه یا $A = 90^\circ$ یا $\cos A = \frac{2bc}{b^2+c^2}$. نشان می‌دهیم که $\cos A = \frac{2bc}{b^2+c^2}$ ما را به تناقض می‌رساند و اثبات تمام می‌شود. حال داریم $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\frac{2bc}{b^2+c^2} = \frac{(b^2-c^2)^2}{b^2+c^2}$. در نتیجه $a^2(b^2+c^2) = (b^2-c^2)^2$. اما در تساوی اخیر سمت چپ از $b^4 + c^4$ بزرگتر است ولی سمت راست از $b^4 + c^4$ کوچکتر است که همان تناقض موردنظر است.

توجه: من این تساوی $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ را از $a^2 = b^2 + c^2$ بیشتر دوست دارم زیرا اولی نه‌تنها قضیه‌ای است که هم خودش و هم عکسش درست است بلکه خود تساوی هم از عکس پاره‌خط‌ها تشکیل شده است. تعجب نمی‌کنید که از زمان اقلیدس تا به حال کسی این قضیه را پیدا نکرده است؟

قبل از اینکه سخنان خود را به پایان برسانم، ذکر ماجرایی را مناسب می‌دانم. دو سه روز پیش که پس از پایان کنگرهٔ ریاضیدانان در چین با هواپیما در حال بازگشت به ایران بودیم، در ارتفاع دوازده هزارپایی آقای نیکنام دبیرکل سی‌وسومین کنفرانس ریاضی کشور که همسفرم بود گفت: راستی توکه سخنران مدعوکنفرانس مشهد هستی فقط عنوان سخنرانی‌ات را فرستاده‌ای؛ ممکن است بگویی راجع به چی می‌خواهی صحبت کنی؟ من داشتم فکر می‌کردم که جواب بدهم ولی او ادامه داد که راستی در سخنرانی آن فرانسوی در چین راجع به «چگونه جبر خطی را تدریس کنیم» شرکت داشتی؟ گفتم نه. گفت خیلی اظهار نارضایتی از دانشجویان می‌کرد. مثلاً گفت در سر یک کلاس از دانشجویان پرسیده است که «اگر T یک عملگر خطی و α و β دو بردار باشند، آنگاه کدام‌یک از دو گزارهٔ زیر درست است: اگر α و β مستقل خطی باشند آنگاه $T(\alpha)$ و $T(\beta)$ هم مستقل خطی‌اند یا اگر $T(\alpha)$ و $T(\beta)$ مستقل خطی باشند آنگاه α و β مستقل خطی‌اند». اکثر دانشجویان نتوانسته‌اند جواب درست بدهند. من دیدم که بهترین موقع است که با استفاده از همین سؤال موضوع سخنرانی‌ام به او بگویم. گفتم خوب معلوم است که گزارهٔ دوم درست است ولی ما نباید این‌گونه سؤالها را فقط جواب بدهیم و رها کنیم. چیزی که من می‌خواهم در مشهد راجع به آن صحبت کنم این است که ما باید سعی کنیم که در بیشتر موارد تکلیف یک مسأله یا یک قضیه را معلوم کنیم، به این معنی که من الان در ذهنم دیدم با

1. trace

به‌کار بردن خاصیتهای عملگر T گزارهٔ دوم درست است ولی آیا تمام قدرت عملگر T برای این مسأله لازم است؟ به عبارت دیگر من در مشهد به دنبال این موضوع هستم که نشان دهم در بیشتر موارد ما می‌توانیم از هر مسألهٔ ساده یا نتیجه‌ای که یکطرفه بیان شده یک قضیه به‌صورت «اگر و تنها اگر» بسازیم ولی متأسفانه آموزش ریاضی تاکنون به‌گونه‌ای بوده است که این موضوع را تشویق نکرده است و فقط افراد در تحقیقات تخصصی خود به این موضوع توجه دارند و اکثراً هم وقت زیادی روی این موضوع نمی‌گذارند و اکثر آنها نتایج خود را یکطرفه بیان می‌کنند. به‌هر حال به نیکنام گفتم بگذار کمی فکر کنم تا قضیهٔ مناسب را بیابیم و این‌کار اساس سخنرانی‌ام است. بعد از مدتی در هواپیما قضیهٔ زیر را یافتم. اول بگذارید با یک تعریف شروع کنم.

تعریف ۱.۷ اگر V یک فضای برداری و $T : V \to V$ یک تابع باشد، T را شبه‌خطی گوییم هرگاه به‌ازای هر $\alpha \in V \neq ۰$ و هر اسکالر $\lambda \neq ۰$ یک اسکالر $\mu \neq ۰$ وجود داشته باشد که $T(\lambda\alpha) = \mu T'(\alpha)$.

قضیهٔ ۳.۷. تابع $T : V \to V$ شبه‌خطی است اگر و تنها اگر برای هر دو بردار $\alpha, \beta \in V$ که $T(\alpha)$ و $T(\beta)$ مستقل خطی باشند، α و β نیز مستقل خطی باشند.

اثبات. فرض می‌کنیم T شبه‌خطی است و $T(\alpha)$ و $T(\beta)$ مستقل خطی‌اند ولی α و β مستقل خطی نیستند، و به تناقض می‌رسیم. پس اسکالر $\lambda \neq ۰$ وجود دارد که $\beta = \lambda\alpha$ و در نتیجه $\mu \neq ۰$ و $T(\beta) = T(\lambda\alpha) = \mu T(\alpha)$، که تناقض است. به‌عکس باید نشان دهیم که T شبه‌خطی است. حال به‌ازای هر $\alpha \in V \neq ۰$ و هر اسکالر $\lambda \neq ۰$ چون α و $\lambda\alpha$ مستقل خطی نیستند پس $T(\alpha)$ و $T(\lambda\alpha)$ مستقل خطی نیستند، یعنی به‌ازای یک $\mu \neq ۰$، $T(\lambda\alpha) = \mu T(\alpha)$.

توجه: به نظر من قضیهٔ بالا می‌تواند به درک مفهوم استقلال خطی دو بردار خیلی کمک کند.

نتیجهٔ ۱.۷ اگر V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{Z}_۲$ باشد، آنگاه قضیهٔ بالا برای هر تابع $T : V \to V$ درست است.

حال هرکس بتواند تا پایان کنفرانس قضیهٔ بالا را به‌جای دو بردار α و β به هر تعداد متناهی بردار تعمیم دهد یک جایزهٔ باورنکردنی به او می‌دهم.

۸. نتیجه‌گیری

همیشه همکاران ما در رشته‌های شیمی و فیزیک و زیست‌شناسی تعجب می‌کنند که مقالات ریاضی ما با نتیجه‌گیری (conclusion) تمام نمی‌شود. بگذارید در این مقاله کمی هم آنها را خوشحال کنم.

از این سخنرانی نتایج کلی زیر به‌دست می‌آیند.

۱. تمام راهی راکه هندسهٔ اقلیدسی تاکنون پیموده است می‌توان برعکس پیمود.

۲. با نگاه‌کردن به تمام نتایج و مسائل می‌توان در صورتی که عکسی نداشته باشند برای عکس آنها فکری کرد و صاحب نتایج و مقالات زیادی شد. مثلاً همیشه می‌توانید به سریهای همگرا نگاه کنید و سؤالهایی به این شکل مطرح کنید: اگر $\sum_{۱}^{\infty} U_n = \lambda$ که $U_n = a_n b_n$، آیا می‌توان نشان داد که در یک مربع به مساحت λ می‌توان تمام مستطیلهای به ابعاد a_n و b_n را جا داد؟ مثلاً می‌دانیم $\sum_{۱}^{\infty} \frac{۱}{n(n+۱)} = ۱$. آیا در یک مربع به ضلع واحد می‌توان مستطیلهای $\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۱}$ و $\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲}$ و ... را جا داد؟ یا مثلاً با توجه به $\sum_{۱}^{\infty} \frac{۱}{n(n+۱)(n+۲)} = \frac{۱}{۴}$ می‌توان پرسید که آیا در مکعبی به حجم یک‌چهارم می‌توان مکعب‌مستطیلهای به ابعاد $\frac{۱}{n} \times \frac{۱}{n+۱} \times \frac{۱}{n+۲}$ به‌ازای $n = ۱, ۲, \ldots$ را جا داد؟ تقریباً می‌توان ادعا کرد که تمام این سؤالها یا بینهایت سؤالی که می‌توان از سریهای همگرا به‌دست آورد بدون پاسخ هستند و مسائل مشکلی خواهند بود.

۳. هر ریاضیدانی به مقالات خود نظر بیفکند متوجه می‌شود که بیش از ۵۰ درصد از نتایجش بدون عکس هستند. با فکرکردن به این عکسها می‌توانید به تعداد مقالات خود اضافه کنید یا از این به بعد مقالات بدون عکس کمتر چاپ کنید.

۴. اگر داوران مقالات مجله‌های ریاضی تحت تأثیر اقلیدس نبودند و برای هر نتیجه‌ای در مقاله خواستار بررسی عکس آن می‌شدند، امروزه به‌جای چهارصد تا پانصد مجلهٔ ریاضی بیش از صد مجله نداشتیم و تعداد مقالات افراد هم به میزان ۹۰٪ کاهش پیدا می‌کرد و صاحب مقالاتی با کیفیت بالا بودیم.

******

* امیدعلی شهنی کرمزاده، دانشگاه شهید چمران، اهواز

karamzadeh@cua.ac.ir

نقد و بررسی

مکاتبات

در این شماره، بخش «مقالهٔ کلاسیک» را به نوعی در بخش «نقد و بررسی» ادغام کرده‌ایم. انتشار کتاب مکاتبات بیر-گروتندیک و تصمیم مجله به چاپ شرحی در معرفی آن، این فکر را برای ما پیش آورد که به گذشته برگردیم و مکاتبات جالب توجه دیگری را که نیز در تاریخ ریاضیات صورت گرفته به این مطلب بیفزاییم. در زیر، نخست نمونه‌ای از مکاتبات فرگه و هیلبرت را از مجموعه‌ای که شامل مکاتبات فلسفی و ریاضی فرگه است همراه با شرحی در بارهٔ موضوع این مکاتبات می‌خوانید و سپس نمونه‌ای از نامه‌های رد و بدل شده بین اینشتین و الی کارتان همراه با توضیحی در بارهٔ موضوع آنها می‌آید. در آخر، ترجمهٔ شرحی در بارهٔ کتاب مکاتبات سر-گروتندیک عرضه می‌شود. در گذشته، مکاتبه میان دانشمندان یکی از وسایل مهم ارتباط علمی بود و اسناد این مکاتبات نقش مهمی در تاریخ‌نویسی علمی داشته است. با کم‌رنگ‌شدن نقش مکاتبه و رواج ارتباطات الکترونیک و سبک محاوره‌ای آن، قطعاً در آینده شاهد تحولاتی در تاریخ‌نگاری علمی خواهیم بود.

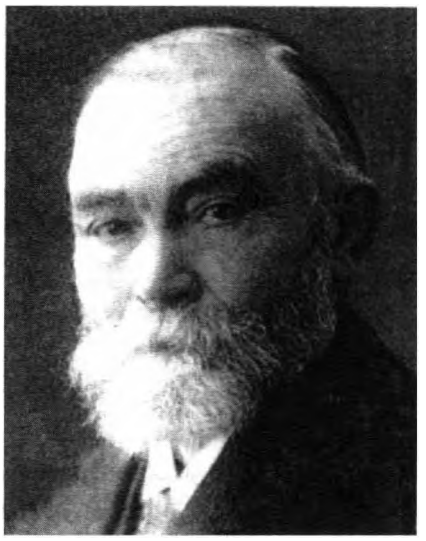
فرگه-هیلبرت

سیاوش شهشهانی*

سالهای آخر قرن نوزدهم شاهد یکی از بنیادیترین دگرگونیهای پارادایم در تاریخ ریاضیات بود. حرکتی که طی یک قرن با پیدایش هندسه‌های غیراقلیدسی، دقیق‌سازی مبانی آنالیز و اعداد حقیقی، آنچه به حسابی‌سازی ریاضیات معروف شده است و بالاخره نظریهٔ مجموعه‌های کانتور و ظهور بینهایت‌های بالفعل در پس صحنه در جریان بود سرانجام به شکل یک سلسله اثر تاریخی دورانساز در فلسفهٔ ریاضیات و نیز آثار فرگه و هیلبرت در مبانی ریاضیات به صورت رسمی ظاهر شد. آثار فرگه معمولاً سرآغاز منطق نوین محسوب می‌شود و کوشش او برای ارائه تعریفی از مفهوم «عدد» نقطهٔ شروع بحثهای جدید در مورد ماهیت ریاضیات است. با این همه، فرگه به نوعی به سنتهای فلسفهٔ ریاضی پیش از قرن بیستم که عینیت وجودی برای مفاهیم ریاضی قائل بودند وفادار ماند و شاید هرگز با صورتگرایی هیلبرت و دیگران که به اعتباری ادامهٔ منطقی راهی است که خود فرگه گشوده بود، کنار نیامد. در یک سلسله مکاتبه بین فرگه و هیلبرت که در کتاب

G. Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, U. Chicago Press (1980).

گردآوری شده است شاهد این مقابله هستیم. در زیر، نخست نامه‌ای را که فرگه در واکنش به چاپ مبانی هندسه هیلبرت به او نوشته است ملاحظه می‌کنیم که در آن پیداست فرگه برخلاف هیلبرت که منکر اصالت شیئیت خاص برای مفاهیم ریاضی است همچنان مصر است که باید برای مفاهیم بنیادی هندسه (خط، نقطه، وقوع، ...) تعاریف مطلق وجودی ارائه شود که آنها را از سایر اشیاء (به مفهوم عام شیء، شامل اشیاء مجرد) متمایز کند. در جواب، هیلبرت به تضاد دیدگاههای فلسفی بین خودش و او اشاره می‌کند و این اعتقاد خویش را بیان می‌کند که برای حصول دقت منطقی مورد نظر هر دوی آنها دیدگاه سنتی فرگه راه به جایی نمی‌برد. این مکاتبات چندی



فرگه

هیلبرت

ادامه پیدا کرد ولی وقتی معلوم شد که سازش بین دیدگاههای فلسفی دو ریاضیدان ممکن نیست، هیلبرت به بهانه‌های گوناگون مکاتبه را قطع کرد.

فرگه به هیلبرت

ینا، ۲۷ دسامبر ۱۸۹۹

همکار عزیز

من مشتاق آشناشدن با رسالهٔ شما در مورد «مبانی هندسه»[1] بودم به‌خصوص، که ذهن خودم درگذشته به این مبانی مشغول بود ولی چیزی در این باب به چاپ نرسانده بودم. همان‌طور که انتظار می‌رفت، نکات مشترک بسیاری میان کوششهای تحقق‌نیافتهٔ من و روایت شما یافت می‌شود همچنان که وجه افتراق‌های بسیاری نیز وجود دارد. بالاخص من گمان می‌کردم که می‌توان با تعداد کمتری اصطلاح اولیه کار را به انجام رساند. وقتی با همکارانم تومایی[2] و گوتسمر[3] در مورد اثر شما صحبت کردم دریافتیم که مقصود واقعی شما در مواردی برایمان روشن نیست و این موجب شد بعضی تردیدهای خود را به صورت مکتوب تقدیم کنم به این امید که از روشن‌ساختن ذهن من دریغ نکنید. اجازه دهید با نکته‌ای که تومایی در مورد توضیح شما در بخش ۳ی رساله گفت[4] شروع کنم. او حدوداً چیزی به این مضمون گفت:

«این تعریف نیست، زیرا که نشانه‌های مشخصه‌ای ارائه نمی‌کند که بتوان به کمک آن دریافت که رابطهٔ 'بین' ['بینیّت'] برقرار است یا نیست. من هم نمی‌توانم آن را به عنوان تعریف بپذیرم، اما شما نیز آن را تعریف نمی‌نامید بلکه از آن به عنوان توضیح یاد می‌کنید. ظاهراً شما دو اصطلاح 'توضیح' و 'تعریف' را برای چیزهای مختلف به‌کار می‌گیرید ولی تفاوت آنها برای ما روشن نیست. توضیحات بخش ۴ به نظر می‌آید دقیقاً از نوع تعاریف شما باشند: مثلاً به ما گفته می‌شود که قرار است کلمات 'روی خط a در همان طرف نقطهٔ o قرار دارد'، دقیقاً همان معنی را القا کنند که تعریف بعدی در مورد معنی 'قطعه خط' القا می‌کند. توضیحات بخشهای ۱ و ۳ ظاهراً از نوعی کاملاً متفاوت‌اند، زیرا که در آنجا معانی لغاتی مانند 'نقطه'، 'خط' و 'بین' داده نشده است، بلکه از قبل دانسته فرض شده است. دست‌کم به نظر ما این‌گونه می‌رسد. اما اینکه چه چیزی را نقطه می‌نامید روشن نشده است. خواننده نخست می‌پندارد که نقطه به مفهوم هندسهٔ اقلیدسی آن در نظر است، تصوری که بر این حکم استوار است که اصول موضوعِ واقعیتهای بنیادی شهود ما را بیان می‌کنند[1]. اما بعداً (در صفحهٔ ۲۰) شما یک زوج عدد را نقطه می‌نامید[2]. من در مورد این حکم که اصول موضوع هندسه توصیف دقیق و کاملی از روابط ارائه می‌کنند تردید دارم (بخش ۱)[3]، و اینکه مفهوم 'بین' توسط اصول موضوع تعریف می‌شود (بخش ۳). در اینجا باری بر دوش اصول موضوع نهاده شده است که متعلق به تعاریف است. به نظر من می‌رسد که این کار، خط فاصل میان تعاریف و اصول موضوع

۱. مقصود فرگه، ویراست اول کتاب مبانی هندسهٔ هیلبرت است که به صورت بخش اول مجموعه‌ای در بزرگداشت گاوس-وبر، در سال ۱۸۹۹ در لایپزیگ، به چاپ رسید.

۲ و ۳. J. Thomae و C. F. A. Gutzmer، دو ریاضیدانِ دانشگاه ینا که هر دو از اولین صورتگرایان محسوب می‌شوند و نظرات آنها مورد انتقاد فرگه قرار گرفته بود.

۴. در اینجا فرگه عمدتاً به دو مطلبی اشاره دارد که هیلبرت مقدم بر اصول موضوع IL۱ تا IL۴ یعنی اصول موضوع ترتیب، می‌آورد و عبارت‌اند از

(۱) این دسته اصول موضوعِ مفهوم 'بین' را تعریف می‌کنند و ارائهٔ ترتیب برای نقاط روی یک خط در صفحه و در فضا را میسر می‌سازند.

(۲) «توضیح. نقاط روی یک خط رابطه‌ای با یکدیگر دارند که می‌توان آن را با استفاده از لغت 'بین' توصیف کرد».

۱. ر. ک. مبانی هندسه، بخش ۱: «اصول موضوع هندسه به پنج گروه تقسیم می‌شوند؛ هر یک از این پنج گروه تعدادی از واقعیتهای بنیادی شهود ما را که با هم مرتبط‌اند بیان می‌کنند.»

۲. اشارهٔ فرگه به اثباتی است که هیلبرت برای سازگاری دستگاه اصل موضوعی خود با ارائهٔ یک مدل تحلیلی عرضه می‌کند و در بخش ۹ مبانی هندسه ظاهر می‌شود. هیلبرت در آنجا می‌نویسد: «یک زوج عدد (x, y) در دامنهٔ Ω را یک نقطه تصور می‌کنیم . . . »

۳. هیلبرت می‌نویسد: «ما روابط متقابلی میان نقاط، خطوط، و صفحات تصور می‌کنیم و این روابط را با لغاتی چون 'قرار دارد'، 'بین'، 'موازی'، 'همنشهت'، و 'ثابت' مشخص می‌کنیم. توصیف دقیق و کامل این روابط به وسیلهٔ اصول موضوع هندسه ارائه می‌شود.»

را مخدوش می‌سازد، و علاوه بر معنی سنتی اصطلاح 'اصل موضوع' که در حکم «اصول موضوع واقعیتهای بنیادی شهود را بیان می‌کنند» ظاهر می‌شود، معنی دیگری را ظاهر می‌سازد که درک آن دیگر برای من میسر نیست. هم‌اکنون ابهامات و سوءبرداشتهایی در مورد تعریف در ریاضیات رایج است، و به نظر می‌رسد بعضیها پیرو قاعدهٔ زیر هستند:

اگر نمی‌توانید گزاره‌ای را ثابت کنید، آن را تعریف قلمداد کنید.

با توجه به این، به نظر من خوب نیست که با استفاده از اصطلاح 'اصل موضوع' به معانی متغیر و یا به‌معنایی مشابه 'تعریف'، بر این ابهامات بیفزاییم. من گمان می‌کنم وقت آن رسیده است که به تفاهمی در مورد اینکه تعریف قرار است چه باشد و چگونه عمل کند برسیم، و نیز در مورد اینکه از چه اصولی در تعریف یک اصطلاح پیروی کنیم (به جلد ۱ کتاب قوانین بنیادی حساب من، بخش ۳۳، مراجعه کنید). به نظر من می‌رسد که در حال حاضر هرج و مرج کامل و تمایلات ذهنی حاکم هستند. اجازه می‌خواهم در مورد بعضی افکار خود در این زمینه توضیحاتی بدهم.

تمایل من این است که همهٔ گزاره‌های ریاضی را به دو بخش تقسیم کنیم، تعاریف و بقیهٔ گزاره‌ها (اصول موضوع، قوانین بنیادی، قضایا). هر تعریف شامل نشانه (عبارت، واژه)ای است که قبلاً معنی نداشته و برای اولین بار توسط تعریف معنی می‌یابد. از آن پس، تعریف به یک گزارهٔ بدیهی مبدل می‌شود که می‌توان از آن مانند یک اصل موضوع استفاده کرد. ولی نباید فراموش کنیم که تعریف بر چیزی حکم نمی‌کند بلکه چیزی را وضع می‌کند. بدین ترتیب هرگز نباید تعریف را به عنوان چیزی که نیاز به اثبات دارد یا صدق آن نیازمند به تأیید دیگری است تلقی کنیم. من از علامت تساوی به عنوان نشانی همانی استفاده می‌کنم. حال فرض کنید ما معنی علامت جمع و علائم سه و یک را می‌دانیم ولی معنی علامت چهار را نمی‌دانیم، در این صورت می‌توانیم با تساوی '۴ = ۱ + ۳' معنایی به علامت مربوط به چهار بدهیم. پس از این عمل، این رابطه به‌طور بدیهی صادق خواهد بود و نیازی به اثبات نخواهد داشت. ولی اگر قرار باشد با ارائهٔ تعریف زحمت اثبات را از دوشمان برداریم، این کار یک نوع شعبده‌بازی منطقی خواهد بود. برای صحت و کمال تحقیقات ریاضی واجب است که تمایز میان تعاریف و سایر گزاره‌ها اکیداً رعایت شود. گزاره‌های دیگر (اصول موضوع، قوانین بنیادی، قضایا) نباید حاوی لغت یا نشانه‌ای باشند که مفهوم و معنی آن، یا نقش آن در بیان یک اندیشه، قبلاً به‌طور کامل وضع نشده باشد، یعنی نباید هیچ ابهامی در مورد مفهوم یک عبارت یا اندیشه‌ای که آن عبارت بیان می‌کند وجود داشته باشد. تنها مسأله‌ای که می‌تواند مطرح باشد صدق این اندیشه و مبنای صدق آن است. بدین ترتیب، اصول موضوع و قضایا هرگز نباید در مقام وضع معنا برای نشانه‌ها یا لغاتی باشند که در آنها ظاهر می‌شوند، بلکه اینها باید از قبل معلوم باشند. می‌توان نوع سومی از گزاره را نیز تمیز داد و آن گزارهٔ توضیحی است، ولی تمایل ندارم این گزاره‌ها را جزو متن ریاضیات به حساب آورم، بلکه جزو مقدماتی به شمار می‌آورم که در دالانِ ورود به متن قرار دارند. این گزاره‌ها از این نظر که با وضع معنی برای نشانه (یا لغت) سروکار دارند، شبیه تعاریف‌اند؛ بنابراین اینها نیز چیزی در بطن خود دارند که معنی آن را نمی‌توان از قبل دانسته پنداشت، یا حداقل نمی‌توان به‌طور کامل و بدون تردید دانسته فرض کرد، شاید به این دلیل که آن نشانه‌ها یا لغات در زبان روزمره به‌طور متغیر به معانی گوناگونی به کار می‌روند. در چنین وضعیتی، اگر معنی‌ای که قرار است نسبت دهیم از نظر منطقی ساده باشد، نمی‌توان یک تعریف به مفهوم دقیق آن ارائه کرد بلکه باید به طرد معانی ناخواسته‌ای که در کاربرد زبانی پیدا می‌شوند اکتفا کنیم و به معنای مورد نظر اشاره کنیم، که البته در اینجا بهره‌گیری از حدس هوشمندانه می‌تواند کارساز باشد. برخلاف تعاریف، نمی‌توان از این گزاره‌های توضیحی در اثباتها استفاده کرد زیرا از دقت لازم برخوردار نیستند، و به این دلیل است که همچنان که در بالا گفتم آنها را به دالان ورودی حواله می‌کنم. من گزاره‌هایی را اصل موضوع می‌نامم که صادق‌اند اما اثبات نشده‌اند زیرا که دانش ما از آنها از منبعی بسیار متفاوت با منبع منطقی جاری می‌شود، منبعی که می‌توان آن را شهود فضایی نامید. از صدق اصول موضوع نتیجه می‌شود که اینها در تناقض با همدیگر نیستند. بنابراین نیازی به اثبات دیگر نیست. تعاریف نیز نباید با هم در تناقض باشند، اگر چنین باشد غلط‌اند. اصول تعریف باید چنان باشند که اگر از آنها پیروی کنیم تناقضی ظاهر نشود. اگر قرار بود من اصل موضوع II/1 شما را بیان کنم، اطلاع کامل و قاطعی از معنای عباراتی مانند 'چیزی یک نقطه روی خط است' و 'B بین A و C قرار دارد' را پیش‌فرض می‌گرفتم، و در مورد دوم، فرض می‌کردم اطلاعی عمومی در بارهٔ اینکه از حروف جمله چه برداشتی باید داشت وجود دارد. در این صورت نمی‌توان مثلاً از یک اصل موضوع برای توضیح دقیقتر کلمه 'بین' استفاده کرد، و بدیهی است که نمی‌توان بعداً معنای دیگری به این کلمه اطلاق کرد؛ آن‌طور که به نظر می‌آید شما می‌خواهید در صفحهٔ ۲۰ چنین کنید[1]. اگر این معنی با معنایی که شما در بخش ۳ برای لغت 'بین' در نظر دارید متفاوت است، آنگاه شما دچار دوگانگی شک برانگیزی شده‌اید. به نظر می‌آید این رهیافت راهی باقی نمی‌گذارد جز اینکه فرض کنیم لغت 'بین' در II/1 هنوز فاقد معناست. اما در این صورت II/1 نمی‌تواند صادق باشد، و بنابراین نمی‌تواند به مفهوم مورد نظر من از کلمه، که گمان می‌کنم مفهوم عموماً پذیرفته‌شده‌ای است، یک اصل موضوع باشد؛ و اگر این کلمه هنوز در بخش ۳ فاقد معنی است، که چنین محتمل است، آنگاه گزارهٔ II/1 نیز فاقد معنی است، اندیشه‌ای را بیان نمی‌کند، و بنابراین یک واقعیت بنیادی شهود ما را نیز بیان نمی‌کند. پس در این صورت، هدف آن چیست؟ آیا قرار است معنی 'بین' را مانند یک تعریف وضع کند؟ در این صورت نمی‌توان بعداً دوباره این کار را کرد. در بخش ۶، شما می‌گویید: «اصول موضوع این گروهٔ مفهوم همنهشتی یا حرکت را تعریف می‌کنند.» پس چرا آنها را تعریف نمی‌نامید؟ اگر تفاوتی میان تعریف و اصل موضوع وجود دارد چیست؟ در واقع اصول موضوع در شرایط تعریف صدق نمی‌کنند، حداقل به این دلیل که بیش از یکی هستند، و به‌علاوه حاوی عباراتی هستند ('روی یک طرف خط a') که معنی‌شان به‌نظر نمی‌آید هنوز مشخص شده باشد. من آگاهم که برای اثبات استقلال متقابل اصول موضوع، شما باید از منظر رفیعتری عمل کنید که از آن منظرْ هندسهٔ اقلیدسی تنها به‌صورت حالت خاصی از یک نظریهٔ کلی‌تر دیده شود، اما به دلایلی که ذکر کردم، به نظرم می‌رسد پیشروی در مسیری که انتخاب کرده‌اید بدون مقدمات دیگر برای شما میسر نیست.

۱. در اینجا مقصودْ ارائهٔ مفهوم ترتیب در مدل هیلبرت از اصول موضوع اوست.

اگر تصور نمی‌کردم که می‌توان گزند ایرادهای ذکرشده را زدود، اثر شما را چنین ارزشمند تلقی نمی‌کردم، اما این کار بدون بازسازی قابل ملاحظهٔ متن امکان‌پذیر نیست. اولین کار به نظر من این است که به تفاهمی در مورد عباراتی چون 'توضیح'، 'تعریف' و 'اصل موضوع' برسیم که در این موارد شما بسیار از آنچه برای من آشناست، و در میان ریاضیدانان رایج است دور می‌شوید و این مانع از آن می‌شود که من تمایز این عبارات را در کار شما ملحوظ کنم و ساختار منطقی را به روشنی دریابم. با همهٔ این تردیدها، من علاقهٔ وافری به کار شما دارم، و بسیار مسرور خواهم شد اگر مواضع خود را نسبت به تردیدهای من در یک نامه توضیح دهید.

خواهش می‌کنم مرا به خاطر این تذکرات ببخشید و مطمئن باشید که هدف من این نبوده است که بارِ تردیدهای خود را به دوش شما منتقل کنم، بلکه به این خاطر است که اعتقاد دارم خواننده‌های دیگر اثر شما نیز همین تردیدها یا مشابه آنها را خواهند داشت و مناسب و مطلوب، است که آنها را رفع کنیم.

ارادتمند

دکتر گ. فرگه

هیلبرت به فرگه

(خلاصه شده توسط فرگه)

۲۹ دسامبر ۱۸۹۹

... یک نکتهٔ مقدماتی دیگر: اگر بخواهیم یکدیگر را درک کنیم نباید فراموش کنیم که مقاصدی که رهنمون ما هستند متفاوت‌اند. ضرورت بود که مرا واداشت دستگاه اصل موضوعی خود را بنا کنم. من می‌خواستم درک آن گزاره‌های هندسی را که مهمترین نتایج کاوشهای هندسی می‌دانم میسر سازم، مثلاً اینکه اصل توازی نتیجهٔ سایر اصول نیست، و همین‌طور اصل ارشمیدس و غیره. می‌خواستم به این سؤال پاسخ دهم که آیا می‌توان این گزاره را ثابت کرد که دو مستطیل هم‌مساحت که خط قاعدهٔ مشترک داشته باشند در ضلع جانبی نیز بر هم منطبق‌اند، یا اینکه مثل کتاب اقلیدس، این گزاره یک اصل جدید است[1]. من می‌خواستم درک و پاسخ‌گویی به سؤالهایی از این قبیل را ممکن سازم که چرا مجموع زوایای یک مثلث دو قائمه است و این واقعیت چگونه با اصل توازی مرتبط است. اینکه دستگاه اصل موضوعی من به ما امکان می‌دهد این پرسشها را به‌گونهٔ قاطعی پاسخ دهیم، و اینکه جواب بسیاری از این سؤالها تعجب‌آور و حتی کاملاً غیرمنتظره است، در رسالهٔ من و نیز در مقاله‌هایی که دانشجویان من متعاقب آن نوشته‌اند نشان داده می‌شود. از این میان فقط به ذکر رسالهٔ آقای دِن[2] که قرار است به‌زودی در ماتماتیشه آنالن[3] چاپ شود اکتفا می‌کنم. این از نیات اصلی من. من البته معتقدم یک نظام هندسی به پا کرده‌ام که سختگیرانه‌ترین الزامات منطقی را برآورده می‌کند و از اینجاست که به جواب مفاد نامهٔ شما به‌طور خاص می‌رسیم.

شما می‌گویید توضیح من در بخش ۳ تعریف مفهوم 'بین' نیست زیرا نشانه‌های مشخصهٔ آن را ارائه نمی‌کند. اما این نشانه‌های مشخصه را اصول موضوع II/۱ تا II/۵ بیان می‌کنند. با این حال، اگر قرار باشد از لغت 'تعریف' دقیقاً به‌معنای متداول آن استفاده کنیم، باید گفت:

'بین' رابطه‌ای است که برای نقاط روی یک خط برقرار می‌شود و نشانه‌های مشخصهٔ II/۱ تا II/۵ را داراست.

بعداً اضافه می‌کنید که «توضیحات شما در بخش ۱ ظاهراً از نوعی کاملاً متفاوت‌اند، زیرا در آنجا معانی لغاتی مانند 'نقطه'، 'خط'، ... داده نشده است، بلکه از قبل دانسته فرض شده است». ظاهراً نکتهٔ اصلی سوءتفاهم بین ما در اینجا نهفته است. من نمی‌خواهم چیزی را از پیش‌دانسته فرض کنم؛ من توضیحاتم در بخش ۱ را تعریف مفاهیم نقطه، خط، و صفحه تلقی می‌کنم ــ البته اگر دوباره همهٔ اصول موضوع گروههای I تا V به‌عنوان نشانه‌های مشخصه افزوده شوند. اگر در پی تعاریف دیگری از 'نقطه'، مثلاً بر اساس واژه‌هایی همچون 'فاقد امتداد' و امثال آن باشیم، من باید مخالفت خود با چنین کوششهایی را به قاطعترین وجهی ابراز کنم. در این کوششها دنبال چیزی می‌گردیم که هرگز نمی‌توانیم پیدا کنیم زیرا که وجود ندارد؛ همه چیز در یک کلاف سر درگم محو و ناپدید می‌شود و بحث نهایتاً به یک بازی قایم‌موشک تنزل می‌یابد. اگر ترجیح می‌دهید اصول موضوع مرا نشانه‌های مشخصهٔ مفاهیمی تلقی کنید که دانسته فرض شده‌اند و بنابراین در 'توضیحات' مستترند، من هیچ‌گونه مخالفتی ندارم جز اینکه البته با عرف رایج در میان ریاضیدانان و فیزیکدانان در تضاد است، و البته باید دست من در ارائهٔ نشانه‌های مشخصه کاملاً باز باشد. زیرا همین که من اصلی را وضع می‌کنم، آن اصل وجود دارد و 'صادق' است، و این مرا به نکتهٔ مهم دیگری در نامه‌تان می‌رساند. شما نوشته‌اید: «من گزاره‌هایی را اصل موضوع می‌نامم ... از صدق اصول موضوع نتیجه می‌شود که آنها در تناقض با همدیگر نیستند.» برای من خواندن این جملهٔ خاص در نامهٔ شما بسیار جالب توجه بود زیرا از زمانی که در این امور به تفکر، تحریر و تدریس پرداخته‌ام، همواره عکس این را گفته‌ام: اگر گردایه‌ای از اصول موضوع دلخواه و نتایج آنها با همدیگر در تناقض نباشند، آنگاه آنها صادق‌اند و چیزهایی که این اصول موضوع آنها را تعریف می‌کنند وجود دارند. این از نظر من ضابطهٔ صدق و وجود است. اگر افزودن اصل موضوع 'هر معادله ریشه دارد' به سایر اصول حساب هیچ‌گونه امکان تناقض، هر چه پیش رویم، به همراه نداشته باشد، می‌توان گزارهٔ 'هر معادله ریشه دارد' را صادق تلقی کرد، و وجود ریشه ثابت شده است. این طرز تلقی در واقع کلید درک رسالهٔ من و نیز فی‌المثل سخنرانی‌ای است که اخیراً در مونیخ در مورد اصول حساب ایراد کردم و طی آن ثابت کردم یا حداقل اشاره کردم به اینکه چگونه ثابت می‌شود که دستگاه اعداد حقیقی معمولی وجود دارد، در حالی که دستگاه همهٔ اعداد اصلی (کاردینالها) به مفهوم کانتور، یا به اصطلاح 'الف‌ها'، وجود ندارد ــ خود کانتور هم حکمی با مفهوم مشابه و فقط با بیانی نسبتاً متفاوت عرضه کرده است. بدین ترتیب نکتهٔ اصلی را تکرار می‌کنم: اینکه 'اصول موضوع' را 'نشانه‌های مشخصه' بنامید، قطعاً یک موضوع جانبی و وابسته به سلیقه است ــ و به هر حال مشکلی ندارد. ولی، به عقیدهٔ من، ارائهٔ یک تعریف سه خطی برای نقطه کار غیرممکنی است، زیرا فقط کل ساختارِ دستگاه اصل موضوعی است که تعریف کاملی عرضه می‌کند. هر اصل موضوع سهمی در این تعریف دارد، و بنابر این هر اصل جدید مفهوم را عوض می‌کند. مفهوم «نقطه»

۱. این گزاره مبنای اندازه‌گیری همهٔ اشکال مسطح است ــ هیلبرت.

2. Max Dehn 3. *Mathematische Annalen*

در هندسه‌های اقلیدسی، نااقلیدسی، ارشمیدسی و نا‌ارشمیدسی، متفاوت است. پس از اینکه مفهومی به‌طور کامل و قاطع تثبیت شد، به عقیدهٔ من افزودن یک اصل موضوع کاملاً نامشروع و غیرمنطقی است ــ اشتباهی که بسیار معمول است به‌خصوص در میان فیزیکدانها. بعضی فیزیکدانها، با وارد کردن پی‌درپی اصول جدید طی تحقیقات خود، بدون آنکه آنها را در مواجهه با فرضهای پیشین خود قرار دهند و بدون اینکه نشان دهند اینها در تناقض با اصول قبلی نیستند، اجازه می‌دهند مهملات محضی در تحقیقات نظری‌شان رخنه کند. یکی از منابع اصلی اشتباه و سوءتفاهم در تحقیقات نوین فیزیک دقیقاً روشِ وضع‌کردن یک اصل، تمسک به صدق آن (؟) و این نتیجه‌گیری است که این اصل با مفاهیم تعریف شده سازگار است. یکی از اهداف اصلی من در رسالهٔ مورد بحث، احتراز از این خطا بود.

فقط یک ایراد دیگر هست که باید به آن اشاره کنم. شما می‌گویید که مفاهیم من، مثلاً 'نقطه' و 'بین' به‌طور صریح مشخص نشده‌اند، مثلاً 'بین' در صفحهٔ ۲۰ مفهوم دیگری دارد، و نقطه یک زوج عدد است. اما باید روشن باشد که هر نظریه فقط یک داربست یا طرحی از مفاهیم است با روابط ضروری بین آنها، و عناصر پایهٔ آن را می‌توانیم به هر شکلی که دوست داریم تصور کنیم. اگر در بحث در مورد نقاط، دستگاهی از چیزها را در ذهن داشته باشیم: عشق، قانون، بخاری پاکن، ... و فرض کنم اصول موضوع به‌عنوان روابط بین اینها برقرارند، آنگاه گزاره‌ها، مثلاً قضیهٔ فیثاغورس، نیز برای این چیزها برقرارند. به عبارت دیگر، هر نظریه را می‌توان برای بینهایت دستگاه از عناصر پایه به‌کار برد. کافی است یک تبدیل یک‌به‌یک وارون‌پذیر به‌کار گیریم و فرض کنیم اصول موضوع به‌طور متناظر برای اشیاء تبدیل شده برقرارند. از این وضعیت در بسیاری اوقات بهره‌گیری می‌شود مثلاً در اصل دوگانی[1]، و من در اثباتهای استقلال خود از آن استفاده کرده‌ام. همهٔ احکام نظریهٔ الکتریسیته البته برای هر دستگاه از چیزهایی که جایگزین مفاهیم مغناطیس، الکتریسیته، ... شوند نیز برقرار است مشروط به اینکه اصول مورد نیاز برقرار باشند. ولی وضعیتی که شرح دادم هرگز نقصی برای نظریه نیست[2]، و در هر حال اجتناب‌ناپذیر است. به تصور من، به‌کارگیری یک نظریه در عالم ظاهر[3] باید همواره با میزانی از حسن تدبیر و هوشمندی همراه باشد، مثلاً از کوچکترین اجسام به‌عنوان نقطه استفاده کنیم، و از طویلترین آنها مثلاً پرتوهای نور برای خط. و نباید در آزمودن گزاره‌ها دقت افراطی پیشه کنیم، زیرا که اینها فقط گزاره‌هایی نظری هستند. از طرف دیگر، هر چه یک نظریه بیشتر رشد کرده باشد و هر چه ظرایف ساختار آن بیشتر متجلی شده باشند، نوع کاربرد آن در عالم ظاهر واضحتر می‌شود. اگر بخواهیم از گزاره‌های ظریفتر هندسهٔ مسطحه یا نظریهٔ الکتریسیتهٔ ماکسول در قلمروهایی جز آنچه به خاطر آنها خلق شده‌اند استفاده کنیم سوءتدبیر زیادی به خرج داده‌ایم.

******

* سیاوش شهشهانی، دانشگاه صنعتی شریف
shahshah@nic.ir

1. principle of duality

۲. بلکه مزیت مهمی برای آن است ــ هیابرت.

3. world of appearances

اینشتین-کارتان

مسعود خلخالی*

پس از دستیابی اینشتین به‌صورت‌بندی نهایی نظریهٔ میدان گرانشی (نظریهٔ نسبیت عام) در سال ۱۹۱۵، یکی از دلمشغولی‌های اصلی او در نیمهٔ دوم عمرش (۱۹۲۰-۱۹۵۶) این بود که نظریهٔ الکترومغناطیس ماکسول و نظریهٔ میدان گرانشی را در قالب یک نظریهٔ میدان واحد، وحدت ببخشد. میدان گرانشی با یک تانسور متقارن دوظرفیتی و میدان ماکسول با یک تانسور پادمتقارن دوظرفیتی بیان می‌شوند. در اینجا چالش اصلیْ پیداکردن برهم‌کنشِ میدان گرانشی و میدان الکترومغناطیسی در یک لاگرانژیِ مناسب است که از آن، معادلات میدان واحد به‌کمک حساب وردشها استخراج شود. اما این روش، اگرچه امروز مقبولیت عام یافته است، حداقل مورد استفادهٔ اینشتین در نظریهٔ توازی دوردست [به آلمانی، Fernparallelismus] قرار نگرفت. اینشتین در نیمهٔ دوم عمر خود راههای متعددی را برای وحدت میدانها آزمود که همهٔ آنها به شکست انجامیدند. امروز با توجه به پذیرش عام مکانیک کوانتومی می‌دانیم که تلاشهای او از ابتدا محکوم به شکست بوده است چرا که وحدت میدان گرانشی و میدان الکترومغناطیسی تنها در انرژیهای بسیار بالا (فرضاً!) قابل مشاهده است و این نیز حاصل کوانتشِ توأمان این دو نیرو خواهد بود، موضوعی که اینشتین به کلی با آن مخالفت می‌ورزید. جدا از این، او میدانهای الکتروضعیف و الکتروقوی را به کلی از ملاحظات خود کنار می‌گذاشت. البته نباید فراموش کرد که کوانتش و وحدت میدان گرانشی با میدانهای دیگر هنوز هم یکی از بزرگترین آرزوهای فیزیکدانهاست.

در ارتباط با این موضوع، نامه‌هایی بین اینشتین و الی کارتان در فاصلهٔ سالهای ۱۹۲۹-۱۹۳۲ مبادله شده که ترجمهٔ انگلیسی آنها (همراه با اصل فرانسوی و آلمانی) در مرجع [۲] آمده است. از مجموع ۳۹ نامه، ۲۶ نامه در فاصلهٔ سه‌ماههٔ دسامبر ۱۹۲۹ تا فوریهٔ ۱۹۳۰ نوشته شده‌اند! سرعتی استثنایی در مکاتبه، حتی برای ذهنهای استثنایی!

در ۱۹۲۹، الی کارتان یکی از بزرگترین ریاضیدانان جهان محسوب می‌شد. کارهای عمیق و وسیع او در رده‌بندی جبرها و گروههای لی، هندسهٔ ریمانی، و هندسهٔ فضاهای متقارن، برای او شهرتی درخور فراهم آورده بود. اولین نامه را کارتان در ۸ ماه مه ۱۹۲۹ به اینشتین می‌نویسد. او از اینکه در مقالهٔ وایتسنبوک[1] به تاریخ ۱۹۲۸ (که به توصیف کارهای وایتسنبوک و اینشتین در نظریهٔ میدان واحد روی فضاهای با توازی دوردست اختصاص داشت) به کارهای او در هندسهٔ با هموستار[2] [التصاق]های اقلیدسی ارجاعی داده نشده، متعجب و ناراحت است. ایدهٔ اصلی اینشتین و وایتسنبوک این بود که در حالی که میدان گرانشی را می‌توان با یک متریک لورنتس بیان کرد، میدان مغناطیسی نیز می‌تواند به‌صورت تانسور تاب[3] یک هموستارِ تخت که با متریک لورنتسی نیز قابل محاسبه است بیان شود. از نظر کارتان، چنین هندسه‌ای حالت خاصی از هندسهٔ با هموستارهای اقلیدسی او بود که او آن را حداقل ۷ سال پیشتر مطرح کرده بود. کارتان در این

1. Weitzenböch 2. connection 3. torsion

نامهٔ اول که بسیار مؤدبانه و با رعایت مقام علمی اینشتین نوشته شده است به او یادآوری می‌کند که در یک میهمانی در خانهٔ آدامار در پاریس به سال ۱۹۲۲ سعی کرده بود که با یک مثال، چنین هندسه‌هایی را برای اینشتین توضیح دهد.

اینشتین در جواب خود به تاریخ ۱۰ ماه مه ضمن اینکه تقدم کارتان را می‌پذیرد و از او (به‌خاطر خطای وایتسنبوک!) پوزش می‌طلبد. به کارتان پیشنهاد می‌کند که یا مؤخره‌ای بر مقالهٔ در دست چاپ اینشتین در این موضوع بنویسد و یا اینکه مقالهٔ طولانیتری بنویسد و آن را مستقلاً چاپ کند. در ضمن یادآور می‌شود که توضیحات کارتان را در خانهٔ آدامار نفهمیده بوده و نیز در آن زمان نمی‌دانسته که این نوع هندسه احتمالاً چه کاربردی در نظریهٔ میدان واحد می‌تواند داشته باشد، و توضیح می‌دهد که تنها در سال ۱۹۲۸ به همراه وایتسنبوک به اهمیت هندسهٔ توازی دوردست پی برده است. این دو نامه آغازگر یک مکاتبهٔ سه ساله بین دو غول ریاضی و فیزیکِ آن زمان بوده است.

در اینجا قصد نداریم که این مکاتبهٔ علمی بسیار جالب و آموزنده را گام‌به‌گام دنبال کنیم و فقط ترجمهٔ دو نامهٔ اول را می‌آوریم. خواننده می‌تواند به متن اصلی [۲] و یا به مقالهٔ بسیار زیبای [۱] و مراجع داخل آن که خلاصه‌ای از این مکاتبات را به‌دست می‌دهد، رجوع کند.

کارتان به اینشتین

لوشنه، ۸ مه ۱۹۲۹

استاد شهیر

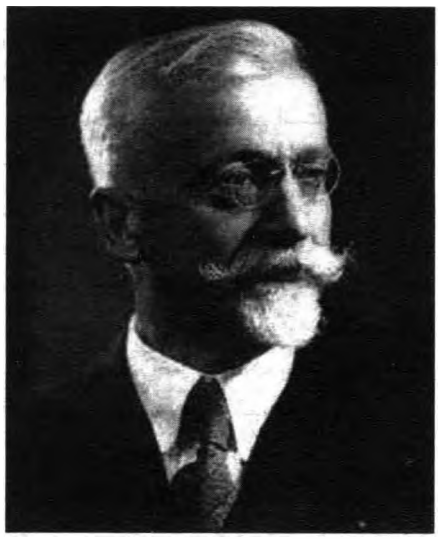
معذرت می‌خواهم که چند دقیقه‌ای از وقت شما را که برای علم بسیار ارزشمند است، می‌گیرم. من به توصیهٔ دوستم لانژون[1] تصمیم گرفتم برایتان نامه بنویسم.

در مقاله‌های جدیدتان در نشریهٔ زیتسونگز بریشته[2] که به نظریهٔ نسبیت عام اختصاص دارد، مفهوم «توازیِ دوردست»[3] در یک فضای ریمانی را مطرح کرده‌اید. مفهوم فضای ریمانی مجهز به توازی دوردست حالت خاصی از یک مفهوم کلیتر، یعنی فضا با هموستار (التصاق) اقلیدسی است که من کلیات آن را در سال ۱۹۲۲ در مقاله‌ای در کونت روندو[4] شرح دادم، و آن مقاله در زمانی که شما در کولژ دوفرانس[5] درس می‌دادید، انتشار یافت؛ حتی به یاد می‌آورم که در منزل آقای آدامار سعی کردم ساده‌ترین مثال از یک فضای ریمانی با توازی دوردست را برایتان توضیح بدهم که در آن مثال، دو بردار در درون یک کره که با نصف‌النهارهای گذرنده از مبدأهایشان زاویهٔ یکسانی بسازند، متوازی در نظر گرفته می‌شدند: ژئودزیکهای متناظر، خمهای ثابتْ

1. Langevin 2. *Sitzungsberichte* 3. Fernparallelismus

4. *Comptes Rendus* (vol. 174, pp. 593-595)

5. Collège de France



کارتان

زاویه[1] هستند. این مثال در مقاله‌ای با عنوان «در بارهٔ تعمیمهای اخیر مفهوم فضا» در بولتن ...[2] نقل شده است.

با اصطلاحاتی که من به‌کار می‌برم، فضاهایِ مجهز به هموستار اقلیدسی، پذیرای انحنا و تاب هستند: در فضاهایی که در آنها توازی به شیوهٔ اوی-چیویتا تعریف می‌شود، تاب صفر است؛ در فضاهایی که در آنها توازی مطلق است (توازی دوردست) انحنا صفر است؛ پس فضاهایی بدون انحنا که تاب داشته باشند وجود دارد. من در مقاله‌ای مفصل با عنوان «در بارهٔ واریته‌هایِ با هموستار آفین و نظریهٔ نسبیت عام» که در آنال ...[3] به چاپ رسید به بررسیِ روشمندِ تانسورهایی که از انحنا یا از تاب نشأت می‌گیرند پرداخته‌ام: یکی از تانسورهایی که از تاب به‌دست می‌آید دقیقاً همهٔ مشخصات ریاضی پتانسیل الکترومغناطیسی را دارد.

خمینه‌های ریمانی با توازی دوردست، نقش مهمی در نظریهٔ گروهها دارند. من این موضوع را در مقالهٔ مفصل دیگری با عنوان «هندسهٔ گروههای تبدیلات» در ژورنال ...[4] بررسی کردم. در فضای نمایشگرِ تبدیلات یک گروه پیوسته، دو هموستار آفین جالب‌توجه بدون انحنا (توازیِ دوردست) وجود دارد. برای اینکه تانسوری که به‌وسیلهٔ توازی دوردست معرفی می‌شود ضرایب ثابت داشته باشد، فضای مورد نظر باید فضای نمایندهٔ یک گروه باشد (یک گروه ساده یا نیم‌ساده در صورتی که فضا ریمانی باشد).

بیش از این با برشمردن مقالاتی که مفهوم تاب در آنها به‌کار رفته، وقتتان را نمی‌گیرم. فقط اجازه بدهید متن دو سخنرانی را برایتان بفرستم که یکی را در سال ۱۹۲۴ در تورنتو و دیگری را در ۱۹۲۷ در برن ایراد کردم و در آنها رئوس نظریهٔ عام خودم را بدون ارائهٔ فرمول بیان کرده‌ام. (این نظریه به هر حال از محدودهٔ هندسهٔ ریمانی فراتر می‌رود). مایلم توجه شما را به متن سخنرانی اول و به‌خصوص به آنچه در صفحات ۹۲-۹۳ در بارهٔ فضای هندسیِ نخستین نظریهٔ نسبیت شما گفته شده، جلب کنم و همچنین به

1. rhumb lines (= loxodromic curves)

2. *Bull. Sciences math.* 48, 1924, pp. 294-320.

3. *Annales de l'École normale* (vol. 42, 1925).

4. *J. de math. pures et appliquées* vol. 6, 1927, pp. 1-119.

صفحهٔ ۲۰۹ از متن دوم که در آنجا صریحاً در بارهٔ توازی مطلق بحث کرده‌ام و همچنین به صفحهٔ ۲۱۷ که در آنجا دو توازی مطلق یک فضای گروهها را معرفی کرده‌ام.

از اینکه نامه خیلی طولانی شد پوزش می‌خواهم . . .

الی کارتان

مقالهٔ راجع به خمینه‌ها با هموستار آفین و نظریهٔ نسبیت عام در آنال . . .[1] جلدهای ۴۰، ۴۱، و ۴۲ به چاپ رسیده است.

اینشتین به کارتان

برلین، ۱۰ مه ۱۹۲۹

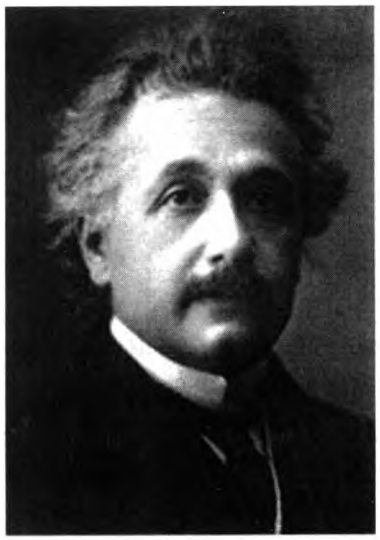
همکار عزیز

من به واقع درک می‌کنم که خمینه‌هایی که به کار برده‌ام حالت خاصی از خمینه‌هایی هستند که شما در بارهٔ آنها تحقیق کرده‌اید. ایزنهارت[2] (در پرینستن) و وایتسنبوک (در سار[3]) هم تا حدی مبانی ریاضی نظریهٔ جدید مرا، قبل از اینکه من به آن بپردازم، فراهم کرده‌اند. وایتسنبوک در مقاله‌ای که در زیتسونگز بریشته [گزارش نشست] آکادمی ما چاپ شد[4]، کتابشناسیِ (ظاهراً کاملی) از تمام آثار ریاضی مربوط آورده ولی کار شما را کاملاً از قلم انداخته است. این اشتباه اکنون باید تصحیح شود. ولی من کمی سردرگم هستم که چه کاری باید انجام دهم تا [صاحبان] همهٔ دعاویِ بر حق، خشنود شوند.

دیروز مقاله‌ای مروری در بارهٔ این موضوع برای تسایتشریفت فور فیزیک[5] فرستادم که در آن به تفصیل به موضوع پرداخته‌ام ولی استنادی به انتشارات قبلی (حتی به نوشته‌های خودم) نکرده‌ام. می‌توانستم مؤخره‌ای بر این مقاله بنویسم که شرح سوابق ریاضی این نظریه در آن بیاید. ولی می‌ترسم که حتی با اجرای چنین نقشه‌ای هم نتوان حق همهٔ دست‌اندرکاران ماجرا را به‌جا آورد. پس این پیشنهاد را به شما می‌دهم: تحلیل کوتاهی از پیش‌زمینهٔ ریاضی موضوع بنویسید تا من آن را، البته به نام خودتان، به صورت تکمله به مقالهٔ مروری جدیدم اضافه کنم. با این کار نه تنها لطف بزرگی در حق من خواهید کرد بلکه الگوی خوبی برای حل و فصل مسائل حق‌تقدم به‌صورت محترمانه و دوستانه، ارائه خواهیم کرد.

من از توضیحات شما [در خانهٔ آدامار] در پاریس اصلاً سر در نیاوردم و به هیچ‌وجه برایم روشن نبود که آن مطالب چه فایده‌ای در نظریهٔ فیزیکی می‌توانند داشته باشند. سال گذشته بود که برای اولین بار متوجه شدم افزودن فرض توازی دوردست به متریک ریمانی، بسیار طبیعی است. ولی تازه در همین چند ماه اخیر است که پی برده‌ام این امر در واقع به نظریه‌ای می‌انجامد که با اطلاعات موجود در بارهٔ خصوصیات فضا، یعنی با مجموعهٔ مفیدی از معادلات میدان، همخوان است، معادلاتی که تقریباً به‌صورت یکتا با ملاحظات صوری معین می‌شوند.

1. *Annales de l'École normale* 2. Eisenhart 3. Saar
4. *Sitz. Ber.* 1928, XXVI 5. *Zeitschrift für physik*



اینشتین

مقاله‌هایم در بارهٔ این موضوع را، که تاکنون آکادمی انتشار داده است، برای شما می‌فرستم. مقالهٔ دوم، در بارهٔ معادلات تقریبی میدان، این اشکال را دارد که با همیلتنی‌ای که در آنجا انتخاب شده، میدان الکتریکی با تقارن کروی غیرممکن است. مقالهٔ سوم متأسفانه نایاب است و مجبورم تنها نسخهٔ خودم را برایتان بفرستم (مقاله در بارهٔ نظریهٔ وحدت میدانهاست). خواهش می‌کنم این نسخه و همین‌طور مقالهٔ وایتسنبوک را، که از آن فقط یک نسخه دارم، پس بفرستید. حل صحیح مسأله برای اولین بار در مقالهٔ آخری آمده است.

از شما می‌خواهم اگر ندانسته مرتکب سرقت علمی شده‌ام، مرا ببخشید و به من کمک کنید مسأله را از راه قابل‌قبولی که به نفع همه باشد حل و فصل کنیم.

با بهترین آرزوها

آلبرت اینشتین

من اثباتهای مقالهٔ جدید را به محض اینکه به دستم برسد برای شما خواهم فرستاد.

مراجع

1. Michel Biezunski, "Inside the coconut: the Einstein-Cartan discussion on distant parallelism", in John Stachlel and Don Howard (eds.), *Einstein and the History of General Relativity*, Birkhauser (1989) 315-324.
2. Robert Debever (ed.), *Elie Cartan-Albert Einstein, Letters on Absolute Parallelism* 1929-1932, Princeton University Press (1979).

******

* مسعود خلخالی، دانشگاه انتاریوی غربی، کانادا

masoud@uwo.ca

سِر-گروتندیک

میشل رینو*
ترجمهٔ حسن حقیقی

***Correspondance Grothendieck-Serre*, Société Mathématique de France (SMF) (2001), 288 pp.**

این کتاب دربردارندهٔ بیش از هشتاد نامه است که عمدتاً بین سالهای ۱۹۵۵ تا ۱۹۶۶ نوشته شده است. امروزه دانشمندان برای ارتباط با هم بیشتر از اینترنت استفاده می‌کنند و کمتر به شیوه سابق نامه می‌نویسند. از همین‌رو باید انتشار این کتاب را ارج نهاد. کتاب به ابتکار کولمز[1] و سِر چاپ شده و جزو سلسله کتابهایی با عنوان «اسناد ریاضیات» است که انجمن ریاضی فرانسه شروع به انتشار آنها کرده است. اقدام این انجمن بسیار جای تقدیر دارد.

دوره‌ای که این نامه‌ها به رشتهٔ تحریر درآمده، شاهد بسط و توسعهٔ شگفت‌انگیز هندسهٔ جبری بوده است و نویسندگان این نامه‌ها، نقش مهمی در این امر داشتند. با مطالعهٔ کتاب، خواننده در جریان ابداع بسیاری ایده‌ها و مسأله‌های نو قرار می‌گیرد. دو همکارگاه در یک جهت و گاه در جهت مخالف حرکت می‌کنند و بعضی وقتها رو در روی هم می‌ایستند. حدسهای خیلی خوش‌بینانه در یک نامه مطرح و در نامهٔ بعدی رد می‌شوند و بعضی هم پالایش می‌شوند، تقویت می‌شوند و سپس ثابت می‌شوند. مشاهدهٔ این تضارب آرای دوستانه و بی‌تکلف بین دو استاد بزرگ هیجان‌انگیز است.

«سِر عزیزم ...»، «گروتندیک عزیز ...». ما در سال ۱۹۵۵ قرار داریم. قرار است سِر به استادی کولژ دوفرانس منصوب شود. گروتندیک در ایالات متحده است، از فضاهای برداری توپولوژیک دست کشیده و مطالب پیشرفته‌تری در توپولوژی و هندسه می‌آموزد. اما چنانکه می‌گوید، هنوز به کار تحقیق نپرداخته است. موضوع اصلی بحث، همانستگی (هومولوژی) بافه‌ها در توپولوژی یا آنالیز مختلط یا هندسهٔ جبری است. بهترین تعریف برای این همانستگی چیست؟ چه ابزارهایی محاسبه آن را امکان‌پذیر می‌سازند؟ این سؤالات به‌سرعت پاسخ داده می‌شوند. گودمن[2] روشی ساده برای ساختن تحلیل انژکتیو[3] (کتاب نظریهٔ بافه‌های او بعداً در ۱۹۵۸ منتشر می‌شود) ارائه می‌دهد. هانری کارتان دنبالهٔ طیفی وابسته به یک پوشش را کشف می‌کند. ضمناً یادآوری می‌کنیم که مفاهیم بافه و دنباله طیفی متعلق به لری[4] هستند. سر این مفاهیم را در مقالهٔ «بافه‌های جبری منسجم» [۱] تکامل می‌بخشد که به بحث جالبی در بارهٔ دوگانی[5] می‌انجامد. بعداً این بررسیها را در مقالهٔ «هندسهٔ جبری و هندسهٔ تحلیلی»، معروف به «GAGA» [۲]

1. P. Colmez 2. R. Godement 3. injective resolution
4. J. Leray 5. duality

گروتندیک

ادامه می‌دهد: هم‌ارزی بین بافه‌های منسجم در هندسهٔ جبری و در هندسهٔ تحلیلی را در چارچوب واریته‌های تصویری ثابت می‌کند. گروتندیک از قبل به نظریهٔ رسته‌ها علاقه‌مند است، و مشغول تنظیم ایده‌های خود در بارهٔ همانستگی است. او قصد دارد مقالهٔ «نکاتی چند در بارهٔ جبر مانستگی»[1] را به چاپ برساند.

در سال ۱۹۵۸، گروتندیک با همکاری ژان دیودونه عهده‌دار تنظیم مبانی هندسهٔ جبری (موسوم به EGA[2]) می‌گردد. در سال بعد، او به استادی مؤسسهٔ مطالعات عالی (IHÉS) منصوب می‌شود. در سال ۱۹۶۰ سمینارهای معروف هندسهٔ جبری‌اش (موسوم به SGA[3]) را آغاز می‌کند. در ابتدا خیلی خوش‌بین است و فکر می‌کند EGA ظرف سه یا چهار سال کامل خواهد شد. هر چند این برنامه خیلی به طول انجامید، اما بالاخره به پایان رسید. دوازده سال بعد، اگر شخصی EGA، SGA و سخنرانیهای متعدد او در سمینار بورباکی را در کنار هم قرار دهد تصدیق می‌کند که او اساساً برنامه جاه‌طلبانه‌ای را که شروع کرده بود به اتمام رسانده است.

اجازه دهید به سال ۱۹۵۸ برگردیم. سؤالات درباره پوششها بسیار زیادند. سِر در گروههای افکنشی-جبری[4] و در نظریهٔ میدانهای رده‌ای بازنگری می‌کند. گروتندیک روی گروه اساسی در نظریهٔ طرحها[5] کار می‌کند. وی احساس می‌کند که به یک GAGAی صوری نیاز دارد (که جلد سوم SGA شامل آن خواهد بود). در ضمن ارتباط نزدیک بین نظریهٔ درست‌فهمیده شدهٔ حلقه‌های موضعی و هندسهٔ تصویری را کشف می‌کند. این کشف، موضوع وحدت‌بخش جلد دوم SGA می‌شود.

در سال ۱۹۵۹ ناگهان واقعه‌ای حیرت‌انگیز رخ می‌دهد. دورک[6] با روش

1. Sur quelques points d'algèbre homologique
2. Eléments de Géométrie Algébrique
3. Séminaire de Géometrie Algébrique 4. pro-algebraic groups
5. schemes 6. B. Dwork

کاملاً دور از انتظار تحلیلی p-ادیک، اولین حدس ویل برای میدانهای متناهی، یعنی گویابودن L-تابعها را ثابت می‌کند. این واقعهٔ شگفت‌انگیز کنجکاویهای زیادی را برمی‌انگیزد. کار دورک موضوع درس بعدی سر در کولژ می‌شود. دورک به یک معنا جلوتر از زمان خود است. برای اینکه اثبات وی در چارچوب یک نظریهٔ عمومی همانستگی به سبک گروتندیک قرار گیرد، سالها صبر لازم است تا حساب دیفرانسیل p-ادیک بسط و توسعه یابد.

بحث و جدل مختصری بر سر ارزه‌ها و نیکولای بورباکی درمی‌گیرد. گروتندیک ارزه‌ها را دوست ندارد و استفاده از آنها را در کارهایش به حداقل رسانده است. وی از سنت‌گرایی بورباکی که یک فصل کامل را به ارزه‌ها اختصاص می‌دهد، انتقاد می‌کند. اما سر بدون اینکه هواخواه غیرمشروط ارزه‌ها باشد، از کار بورباکی دفاع می‌کند.

در سال ۱۹۶۱ فرانسه کاملاً درگیر جنگ الجزایر است. گروتندیک از اینکه محققان تازه‌کار که باید سخت سرگرم تحقیق باشند دو سال از وقت خود را در خدمت سربازی بگذرانند ناراحت است. سر نیز از این موضوع متأسف است اما توقع معافیت از سربازی برای اهل علم را منصفانه نمی‌داند.

پس از این موضوع سیاسی-نظامی، به ریاضیات برمی‌گردیم. از بافه‌های منسجم خیلی دور شده‌ایم و مشغلهٔ ذهنی ما بیشتر جنبهٔ حسابی دارد. در اینجا دو مثال، از میان مثالهای متعدد، می‌آوریم که تبادل افکار به طرز شگفت‌انگیزی مفید واقع شده است. گروتندیک در بارهٔ قضیه ریمان-رخ[1] برای بافه‌های اِتال[2] روی خمهای جبری فکر می‌کند. اما در مشخصهٔ $p > 0$، برای در نظر گرفتن چندشاخگی سرکش[3] باید اصطلاحات جدیدی وضع کند و فهرستی از خواص صوری را که لازم است این اصطلاحات در آنها صدق کنند ارائه دهد. سر، که با چندشاخگی در ابعاد بالاتر و مشخصه‌های براؤر[4] آشناست به وجود یک نمایش تصویری خاص گروه اینرسی پی می‌برد. و این به پیدایش هادی سوان[5] می‌انجامد که پس از چهل سال هنوز مایهٔ مسرت ریاضیدانانی است که خواهان صفرشدن دورها هستند.

سال ۱۹۶۴ مطمئناً سال پرباری از نظر تحقیق در فروکاستهٔ[6] واریتهٔ جبری تعریف شده روی یک میدان موضعی[7] است. به یمن کارهای اولیهٔ کوی زومی[8] و شیمورا[9] و به دنبال آن کارهای نرون[10] و اگ[11]، واریته‌های آبلی موردی را برای آزمون در اختیار می‌گذارند. سر حدس می‌زند که یک واریتهٔ آبلی، پس از توسیع متناهی میدان موضعی به توسیعی از یک واریتهٔ آبلی به‌وسیلهٔ یک چنبره فرو می‌کاهد. سپس مامفرد[12] این موضوع را با استفاده از رهیافت جدیدش به تابع تتا، به شرط اینکه مشخصهٔ مانده‌ها ۲ نباشد ثابت می‌کند. فروکاهش نیمه‌پایدار[13]، به‌صورت یک ناوردای گسسته وارد کار می‌شود. بالاخره گروتندیک ثابت می‌کند که یک زیرگروه باز گروه اینرسی به‌طور تک‌توان[14] روی همانستگی اتال عمل می‌کند و سپس نشان می‌دهد این عمل در حالت خمها می‌تواند حداکثر در دو مرحله پالایش شود. از حالا به بعد، متخصصان نظریهٔ اعداد نیازی ندارند که مکانهای بد[15] را نادیده بگیرند، بلکه می‌توانند برعکس عمل کنند. اجازه دهید این گفتگوی

1. Riemann-Roch 2. ètale 3. wild ramification
4. Brauer characters 5. Swan conductor 6. reduction
7. Local field 8. Koizumi 9. G. Shimura 10. Néron
11. A. Ogg 12. D. Mumford 13. semistable 14. unipotently
15. bad places

نسبتاً تکنیکی را خاتمه دهیم.

ممکن است بپرسید راجع به موتیف‌ها[1] چه چیزی مطرح شده است. این نظریهٔ حدسی در مکاتبات سال ۱۹۶۴ ظاهر می‌شود. گروتندیک به‌طور مختصر آن را برای سر توضیح می‌دهد و از آن به‌عنوان نخ آریادنه[2]، یک نوع فلسفه، یک نوع «یوگا»، استفاده می‌کند. ضمن عمیقتر شدن شناخت دورهای جبری، حضور موتیف‌ها افزایش می‌یابد.

آخرین نامه‌ها خیلی بعد نگاشته شده‌اند و به سالهای ۱۹۸۴-۱۹۸۵ مربوط می‌شوند. اوضاع تغییر کرده است. از بیش از دوازده سال پیش، گروتندیک از حضور در مجامع عمومی کناره گرفته است و فقط هر از گاهی به ریاضیات می‌پردازد. او کتاب داشت و برداشت[3] را که یک اثر جدلی است، نوشته است و در آن، دانشجویان سابقش را ملامت می‌کند که او را پس از خروجش از صحنهٔ ریاضیات از یاد برده‌اند، در حالی که ایده‌های او را به نام خود ضبط کرده‌اند. همچنین آنها را سرزنش می‌کند که مسیری را که وی طراحی کرده بود، دنبال نکرده‌اند. وی می‌گوید «حوزهٔ اصلی تحقیقْ متروک شده است». سر موافق نیست و می‌پندارد که او خودخواهانه تصویر را تیره می‌کند. لحن تلخ است. گروتندیک در حال و هوایی درون‌نگرانه می‌خواهد دوست قدیمی‌اش را به این وادی بکشاند. سر مقاومت می‌کند. می‌کوشد به ریاضیات بازگردد و حدس خود را در مورد نمایشهای گالوایی و فرمهای پیمانه‌ای (که ده سال بعد در اثبات قضیهٔ آخر فرما نقش مهمی بازی می‌کند) توضیح می‌دهد. اما گروتندیک از راه به در نمی‌رود.

در بازخوانی این سطور می‌بینم که نوشتهٔ من خلاصه و سطحی است. این متن حداکثر، سرنخ‌هایی را به‌دست می‌دهد، و هیچ ادعایی در مورد انعکاس کامل تنوع و عمق موضوعات مورد بحث در کتاب ندارد. این کتاب یادآور خاطرات خوبی برای ریاضیدانان مسن است. ریاضیدانان جوان نیز نمونه‌ای عالی از همکاری صادقانه و بی‌قید و بند را می‌بینند که در سطحی عالی انجام گرفته است. تاریخ‌نگاران علوم اطلاعات دست اول زیادی را در آن خواهند یافت. روزی می‌رسد که آنها به مطالعه این دورهٔ بسیار پربار بپردازند.

مراجع

1. J. P. SERRE, Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.* **61** (1955), 197-278.

2. _____, Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier* **6** (1956), 1-42.

* * * * * *

• Michel Raynaud, *Notices. Amer. Math. Soc.*, (9) **50** (2003) 1085-1086.

* میشل رینو، دانشگاه پاریس، جنوب، فرانسه

michel.raynaud@th.U-psud.fr

1. motives 2. Ariadne 3. *Récoltes et Semailles*

راهنمای درخواست اشتراک

نشر ریاضی

خواهشمندیم پیش از تنظیم برگهٔ اشتراک به موارد زیر توجه کنید:

۱. فعلاً هر سال دو شماره منتشر می‌شود.

۲. بهای هر شماره ۱۰۰۰۰ ریال (برای دانشجویان، ۷۰۰۰ ریال).

۳. بهای اشتراک سالانه ۲۰۰۰۰ ریال (برای دانشجویان، ۱۴۰۰۰ ریال).

۴. هزینهٔ پستی مجله‌های ارسالی به خارج از کشور جداگانه محاسبه می‌شود.

۵. لطفاً بهای اشتراک مجله را با مراجعه به یکی از بانکها در سراسر کشور به حساب جاری ۹۰۰۰۹ بانک ملی، شعبه خیابان پارک، کد ۱۸۳، به نام مرکز نشر دانشگاهی واریز کنید و رسید آن را همراه با برگهٔ تکمیل شده به نشانی: تهران، صندوق پستی ۴۷۴۸ـ۱۵۸۷۵، امور مشترکین بفرستید (تلفن: ۸۷۲۲۴۹۸).

۶. در صورت تغییر نشانی لطفاً بی‌درنگ موضوع را به بخش اشتراک مجله اطلاع دهید.

برگه درخواست اشتراک

با ارسال برگهٔ بانکی شمارهٔ ..... مورخ ..... به مبلغ ..... ریال

تقاضای اشتراک نشر ریاضی از شمارهٔ ..... الی ..... سال ..... را دارم.

خواهشمند است مجله‌های درخواستی را به نشانی زیر بفرستید.

نام و نام خانوادگی: (حروف به تفکیک در جدول آورده شود.)

نام: ..... نام خانوادگی: .....

میزان تحصیلات: شغل: نحوه آشنایی با مجله:

پیشتر مشترک مجله بوده‌ام / نبوده‌ام

نشانی:

کد پستی: صندوق پستی: تلفن: امضاء

NASHR-E RIYĀZI

Volume 14, Number 2, April 2004

Nashr-e Riyāzi is a Persian-language, expository mathematics journal published biannually (in April and October) by Iran University Press.

Annual subscription rates (including airmail postage) are: Middle East £ 19, Europe & Asia £ 21, North America & Far East £ 26.

For more information write to Iran University Press, 85 Park Avenue, Tehrān 15134, Iran, or contact ⟨nashriaz@acnet.ir⟩.

CONTENTS

* An asterisk indicates that the article was originally published elsewhere. Complete address of the original article appears at the end of the article.

ISSN: 1015-2857

در شماره‌های آینده می‌خوانید

تعمیم قضیه‌ای از گاوس به گروههای متناهی	محمدرضا پورنکی
فلسفهٔ آمار	دنیس ایندلی
پیشرفتهای اخیر در ترکیبیات جبری	ریچارد استنلی
ریاضیات تجربی	دیوید بیلی، جاناتان بوروواین
دستگاههای قوانین بقا	دنیس سر