سینما

سال ۱۳، شمارهٔ ۲

شمارهٔ پیاپی: ۲۵

بسم‌الله الرحمن الرحیم

مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

شمارهٔ ۸۵ خیابان پارک خیابان دکتر بهشتی، تهران ۱۵۱۳۴

بهای این شماره ۵۵۰۰ ریال؛ حق اشتراک سالانه برای داخل کشور ۱۱۰۰۰ ریال.
(برای دانشجویان با ۳۰٪ تخفیف)

وجه اشتراک به حساب شمارهٔ ۹۰۰۰۹ بانک ملی شعبهٔ خیابان پارک تهران به نام مرکز نشر دانشگاهی واریز شود.

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر شش ماه یک بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجّه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی پژوهان فارسی زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چهارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبک مقاله‌های چاپ‌شده در ***نشر ریاضی*** باشد. به همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حک و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ شدهٔ در ***نشر ریاضی*** باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۱۳، شمارهٔ ۲

تاریخ انتشار: مهر ۱۳۸۱

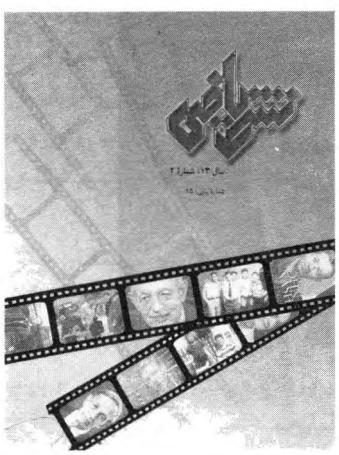
شمارهٔ پیاپی: ۲۵

nashriaz@acnet.ir

صاحب امتیاز: مرکز نشر دانشگاهی

مدیر مسؤول: سیاوش شهشهانی

فهرست



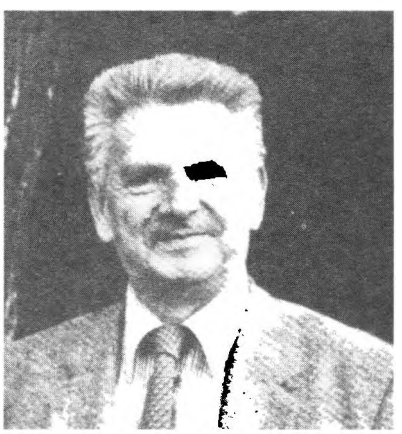
روی جلد

ر. ک. «دنیا از نگاه ذهنی زیبا»

گزارش

رنه توم (۱۹۲۳ـ۲۰۰۲)

رنه توم ریاضیدان شهیر فرانسوی اخیراً بر اثر عوارض بیماریهای عروقی و دیابت درگذشت. او در دهکده‌ای در نزدیکی مرز سوئیس به‌دنیا آمد، استعداد ریاضیش از کودکی نمایان گشت، و در سال ۱۹۴۶ از اکول نرمال سوپریور در پاریس فارغ‌التحصیل شد. پس از آن به‌دانشگاه استراسبورگ رفت که در آن زمان مرکز تجمع عده‌ای از ریاضیدانان برجستهٔ فرانسوی مانند هانری کارتان، ارزمان[1]، ایشنرویچ، و شابوته[2] بود. توم در سال ۱۹۴۹ اولین اثر خود را به‌چاپ رساند و طی ده سال بعد تعدادی اثر بسیار بدیع و عمیق در توپولوژی جبری و توپولوژی دیفرانسیل پدید آورد که به پاس آنها در سال ۱۹۵۸ موفق به دریافت مدال فیلدز شد. از جمله مفاهیمی که در کارهای توم شکل گرفت، گروههای کوبوردیسم، ارتباط آنها با گروههای هوموتوپی پایدار، و نگاشتهای ترارود[3]



رنه توم

1. Ehresmann 2. Chaboty 3. transversal

بود. مفهوم اخیر، رنه توم را به‌تدریج به سمت بررسی تکینه‌ها و دستگاههای دینامیکی سوق داد. شعار توم که «همهٔ ناپایداریهای توپولوژیک به‌سبب فقدان ترارودی است» سرمشق بسیاری تحقیقات در این زمینه‌ها بوده است. شهرت عمومی توم به سبب ارائهٔ «نظریهٔ فاجعه» است که در دههٔ ۱۹۷۰ سروصدای زیادی به پا کرد. رنه توم کوشش داشت زبان ریاضی مناسبی برای گذر از وضعیت متعادل پیوسته به گسستگی و ناپایداری پدید آورد. حدس اولیهٔ او در مورد رده‌بندی «فاجعه‌های ابتدایی» به هفت نوع، توسط جان مدر[1] به اثبات رسید و در ایجاد انگیزه برای مطالعهٔ تکینه‌ها نقش مهمی داشت. موفقیت نظریهٔ فاجعه در تبیین و توجیه پدیده‌های زیستی و اجتماعی که موردنظر توم بود، محدود بوده است. رنه توم در هفتمین کنفرانس ریاضی کشور (فروردین ۱۳۵۵، تبریز) شرکت کرد. مصاحبه‌ای در آن زمان با او صورت گرفت که در شمارهٔ ۳ی سال ۱ نشر ریاضی (آذر ۱۳۶۷) به‌چاپ رسیده است.

لئوپولد ویتوریس (۱۸۹۱ـ۲۰۰۲)

لئوپولد ویتوریس ریاضیدان اتریشی در فروردین ماه سال ۱۳۸۱ چند ماه قبل از به پایان رساندن ۱۱۱ سال عمر درگذشت. شهرت ویتوریس شاید بیش از هر چیزی مدیون دنبالهٔ مایر-ویتوریس در توپولوژی جبری باشد که از مؤثرترین ابزارهای محاسبهٔ گروههای هومولوژی [ماندگی] و کوهومولوژی [همانستگی] فضاهاست. وجود این دنبالهٔ دقیق را ویتوریس در سال ۱۹۲۶ یا ۱۹۲۷ حدس زد و اثبات آن را به همکارش مایر پیشنهاد کرد. مایر موفق شد مطلب را در حد مرتبط‌ساختن رتبه‌های گروههای هومولوژی به اثبات برساند و سرانجام با درگیرشدن خودِ ویتوریس، حدس به‌طور کامل به اثبات رسید. علاوه برکارهایش در توپولوژی جبری، تعدادی از مفاهیم اصلی توپولوژی عمومی نیز برای اولین بار در آثار ویتوریس ظاهر شده‌اند که از آن جمله‌اند مفهوم فضای منظم، همگرایی توری و پالایه‌ای، و نیز ارائهٔ مفهوم فشردگی برحسب همگرایی توری. بعضی از این مفاهیم بعداً به طور مستقل توسط دیگران کشف شدند. علاوه بر این، ویتوریس آثاری در احتمال، معادلات تابعی و دیفرانسیل و مجموعه‌های فوریه دارد. قضیهٔ زیر را ویتوریس در ۱۰۳ سالگی انتشار داد:

لئوپولد ویتوریس

1. Mather

قضیه. فرض کنید $a_0, a_1, \ldots, a_n$ و t اعدادی حقیقی باشند. اگر داشته باشیم (الف) $a_0 > a_1 > \ldots > a_n > 0$ و (ب) به‌ازای $1 \le k \le \frac{n}{2}$، $a_{2k} \le \frac{2k-1}{2k} a_{2k-1}$، آنگاه $\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kt > 0$ و به‌ازای $0 < t < \pi$، $\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kt > 0$.

حالات خاصی از این نابرابریها به نابرابریهای فیر[1]ـجکسن و یانگ معروف‌اند.

جایزهٔ کیوتو

نام میخائیل گروموف به‌عنوان یکی از برندگان جایزهٔ کیوتو در سال ۲۰۰۲ اعلام شده است. جایزهٔ کیوتو را بنیاد اینامورِی ژاپن به افرادی که خدمات بزرگی به ارتقای سطح علمی و فرهنگی و معنوی بشر کرده باشند اهدا می‌کند. مبلغ جایزه ۵۰ میلیون ین ژاپن (حدود ۴۲۰۰۰۰ دلار) است. گروموف که روس‌تبار است به‌طور همزمان به‌عنوان محقق در مؤسسهٔ مطالعات عالی علمی فرانسه (IHES) و مؤسسهٔ کورانت دانشگاه نیویورک عضویت دارد. او یکی از بزرگترین محققان هندسه در دورهٔ معاصر به شمار می‌آید و آثاری اساسی در هندسهٔ ریمانی، هندسهٔ خمینه‌های همتافته، نظریهٔ هندسی گروهها و نیز در توپولوژی دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل جزئی دارد. برندگان قبلی جایزهٔ گروموف در علوم ریاضی عبارت‌اند از کالمن و شائن (۱۹۸۵)، مک‌کارتی (۱۹۸۸)، گلفاند (۱۹۸۹)، لورنتس (۱۹۹۱)، ویل (۱۹۹۴)، کنوت (۱۹۹۶)، و ایتو (۱۹۹۸).

س. ش.

مسألهٔ اول بودن یک مسألهٔ P است

در اواخر مرداد ماه سال جاری، یک استاد علوم نظری کامپیوتر به نام آگراوال[2] و دو دانشجوی او به‌نامهای ساکسنا[3] و کایال[4] در مؤسسهٔ تکنولوژی کانپور[5] هند موفق به حل یکی از مسائل مهم در مبحث پیچیدگی محاسبه و نظریهٔ اعداد شدند. ایشان الگوریتمی برای تعیین اول بودن یک عدد صحیح ارائه داده‌اند که نه تنها از روشهای احتمالاتی استفاده نمی‌کند و قطعیتی است، بلکه زمان لازم برای اجرای دستورالعملها و رسیدن به نتیجه در مورد اول بودن یا نبودن، تابعی چند جمله‌ای از عدد ورودی الگوریتم است. به‌این ترتیب، این حدس قدیمی را که: برای تعیین اول بودن یا مرکب بودن یک عدد صحیح نمی‌توان یک الگوریتم قطعیتی با زمان اجرای چندجمله‌ای ارائه داد، ابطال کرده‌اند. آگراوال به‌خاطر این دستاورد جایزهٔ بنیاد کلی[1] را در سال ۲۰۰۲ دریافت کرده است. در شمارهٔ آینده، مطلب مشروحتری دربارهٔ این دستاورد مهم خواهید خواند.

از راست به چپ، آگراوال، کایال، ساکسنا

1. Fejer 2. Agrawal 3. Saxena 4. Kayal 5. Kanpur

برندگان مدال فیلدز و جایزهٔ نوانلینا در سال ۲۰۰۲

در بیستم اوت ۲۰۰۲ در مراسم افتتاحیهٔ کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در پکن، مدال فیلدز به لوران لافورگ[2] و ولادیمیر وِوُدسکی[3] اعطا شد.

مدال فیلدز همزمان با کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان که هر چهار سال یک‌بار در نقطه‌ای از جهان برگزار می‌شود، اعطا می‌گردد. اگرچه هیچ محدودیت رسمی برای سن دریافت‌کنندگان مدال وجود ندارد، اما سنت چنین بوده که برای تشویق برندگان به کارهای بیشتر در آینده، مدال به ریاضیدانانی اعطا شود که کمتر از ۴۰ سال سن دارند. این مدال به‌نام ریاضیدان کانادایی، جان‌چارلز فیلدز (۱۸۶۳ـ۱۹۳۲) که سازمان‌دهندهٔ کنگره در سال ۱۹۲۴ در تورنتو بود، نامگذاری شده است. در یک نشست کمیتهٔ کنگرهٔ بین‌المللی به ریاست فیلدز در سال ۱۹۳۱، تصمیم گرفته شد که مبلغ ۲۵۰۰ دلار باقیمانده از کنگرهٔ تورنتو برای اعطای دو مدال به برجسته‌ترین ریاضیدانان در کنگره‌های بین‌المللی تخصیص داده شود. از جمله قواعدی که فیلدز برای اعطای این مدالها معین کرد این بود که مدالها باید کاملاً جنبهٔ بین‌المللی داشته و اعطای آنها فارغ از سلایق شخصی باشد. در دههٔ ۱۹۶۰ به دنبال گسترش زیاد تحقیقات ریاضی، تعداد مدالهای اعطایی ممکن از ۲ به ۴ افزایش پیدا کرد. امروزه مدال فیلدز عالیترین نشان افتخار جهانی در ریاضیات محسوب می‌گردد.

دریافت‌کنندگان قبلی مدال فیلدز عبارت بوده‌اند از: لارس آلفورس و جسی داگلس (۱۹۳۶)، لوران شوارتس و اتله سلبرگ (۱۹۵۰)، کونیهیکو کُدایرا و ژان پیرسر (۱۹۵۴)، کلاوس راث و رنه توم (۱۹۵۸)، لارس هورماندر و جان میلنر (۱۹۶۲)، مایکل اتیا، پال کوهن، الکساندر گروتندیک و استیون اسمیل (۱۹۶۶)، آلن بیکر، هسوکی هیروناکا، سرگی نوویکف و جان تامسن (۱۹۷۰)، انریکو بومبی‌یری، و دیوید مامفرد (۱۹۷۴) پیر دُلین، چارلز ففرمن، گریگوری مارگولیس و دانیل کویلن (۱۹۷۸)، آلن کن، ویلیام ترستن و شینگ تونگ یائو (۱۹۸۲)، سیمون دانلدسن، گرت فالتینگس و مایکل فریدمن (۱۹۸۶)، ولادیمیر درینفلد، وان جونز، شیگه‌فومی موری و ادوارد ویتن (۱۹۹۰)، ژان بورگن، پیرـلویی لیون، ژان کریستف یوکوز و افیم زلمانوف (۱۹۹۴)، ریچارد بورچردز، ویلیام تیموتی گاورز، ماکسیم کونتسویچ و کورتیس مک مولن (۱۹۹۸).

مدال فیلدز را اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان به‌توصیهٔ کمیتهٔ انتخاب‌کننده اعطا می‌کند. اعضای کمیتهٔ انتخاب‌کنندهٔ برندگان مدال فیلدز سال ۲۰۰۲ عبارت بودند از جیمز آرتر، اسپنسر بلوک، ژان بورگن، هلموت هوفر، یاسوتاکا ایهارا، بلین لاوسن، سرگی نوویکف، جورج پاپانیکولو، یاکوف سینایی (رئیس) و افیم زلمانوف.

1. Clay 2. Laurent Lafforgue 3. Vladimir Voevodsky

لوران لافورگ

ولادیمیر وِوُدسکی

لوران لافورگ

لوران لافورگ با اثبات تناظر فراگیر لنگ لندز برای میدانهای توابع، گام مهمی در پیشبرد برنامهٔ موسوم به لنگ لندز برداشته است. توان فنی چشمگیر، بینش عمیق، و رهیافت نظام‌مند قوی از جمله مشخصه‌های کار اوست.

برنامهٔ لنگ‌لندز که برای اولین بار در سال ۱۹۶۷ توسط رابرت لنگ‌لندز، در نامه‌ای به‌آندره ویل، صورتبندی شد، مجموعه‌ای است از حدسهای عمیق و پردامنه، شامل پیش‌بینی‌های دقیقی دربارهٔ نحوهٔ ارتباط بین بعضی از مباحثِ ریاضیِ دور از هم. نفوذ برنامهٔ لنگ‌لندز در طی سالهای بعد با هر پیشرفت جدید و مهمی در راستای آن، گسترش پیدا کرده است.

در دههٔ ۱۹۹۰ هنگامی که اثبات آخرین قضیهٔ فرما توسط اندرو وایلز به همراه‌کارهای دیگر ریاضیدانان، منجر به حل و فصل انگارهٔ تانیاما-شیمورا-ویل شد، یکی از چشمگیرترین قرائن در تأیید برنامهٔ لنگ‌لندز به‌دست آمد. این انگاره حاکی از این است که خمهای بیضوی، که اشیایی هندسی با خواص عمیق حسابی‌اند، با فرمهای پیمانه‌ای، که توابعی با ساختار تناوبی غنی هستند و ابتدائاً در زمینه‌ای کاملاً متفاوت در آنالیز ریاضی ظاهر شده‌اند، ارتباطی نزدیک دارد. برنامهٔ لنگ‌لندز، شبکه‌ای از این گونه روابط مطرح می‌کند که نمایشهای گالوایی را که برخاسته از نظریهٔ اعدادند با فرمهای تمامریخت که برخاسته از آنالیزند به‌هم پیوند می‌دهد. منشأ برنامهٔ لنگ‌لندز یکی از عمیقترین نتایج نظریهٔ اعداد یعنی قانون تقابل مربعی است که به‌زمان فرمادر قرن هفدهم باز می‌گردد، و برای اولین بار کارل فریدریش گاوس در سال ۱۸۰۱ آن را اثبات کرد. قانون تقابل مربعی، ارتباطی قابل توجه بین دو سؤال ظاهراً نامرتبط دربارهٔ اعداد اول p و q برقرار می‌کند. «آیا ماندهٔ p به‌پیمانهٔ q مربع کامل است؟» و «آیا ماندهٔ q به پیمانهٔ p مربع کامل است؟» این قانون، علی‌رغم اینکه اثباتهای متعددی از آن ارائه شده (خود گاوس شش اثبات مختلف از آن ارائه داد) هنوز یکی از حقایق اسرارآمیز در نظریهٔ اعداد به‌شمار می‌رود. قوانین تقابل مربعی دیگری که در حالات کلیتری صادق‌اند، توسط تائیجی تاکاگی و امیل آرتین در دههٔ ۱۹۲۰ کشف شدند. یکی از انگیزه‌های اولیه در پس برنامهٔ لنگ لندز این بود که شناخت کاملی از قوانین تقابل مربعی که در حالات کلیتری صادق‌اند، به‌دست آید.

تناظر فراگیر لنگ‌لندز، که توسط لافورگ اثبات شد، این شناخت کامل را نه در مورد اعداد معمولی، بلکه در مورد اشیایی مجردتر، موسوم به میدانهای توابع امکان‌پذیر می‌کند. میدان توابع را می‌توان مرکب از خارج‌قسمتهایی از چندجمله‌ای‌ها در نظر گرفت. این کسرها درست مانند اعداد گویا می‌توانند جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم شوند. لافورگ برای هر میدان توابع، ارتباطی دقیق بین نمایشهای گروههای گالوای آن و فرمهای تمامریخت متناظر به میدان برقرارکرد. اوکار خود را براساس کار برندهٔ نشان فیلدز ۱۹۹۰، ولادیمیر درینفلد، که یک حالت خاص تناظر لنگ‌لندز را در دههٔ ۱۹۷۰ ثابت کرده بود، بنا نهاد. لافورگ اولین فردی بود که دریافت که چگونه کار درینفلد را می‌توان گسترش داد تا تصویر کاملی از تناظر لنگ‌لندز در حالت میدان توابع به‌دست آورد. در طی این کار لافورگ یک نوع شیوهٔ ساخت هندسی ابداع کرده است که اهمیت آن شاید در آینده معلوم شود. تأثیر این تحولات در تمامی ریاضیات احساس می‌شود.

لوران لافورگ در ۶ نوامبر ۱۹۶۶ در آنتونی فرانسه به‌دنیا آمد. در سال ۱۹۸۶ از اکول نرمال سوپریور در پاریس فارغ‌التحصیل شد. در سال ۱۹۹۰ محقق مرکز ملی تحقیقات علمی (CNRS) شد و با گروه هندسهٔ جبری و حسابی در دانشگاه پاریس جنوب، که درجهٔ دکتریش را (در سال ۱۹۹۴) در آنجا گرفت، کار کرد. در سال ۲۰۰۰ استاد دائم ریاضیات در موسسهٔ مطالعات عالی علمی (IHES) فرانسه شد.

ولادیمیر وِوُدسکی

ولادیمیر وِوودسکی با ارائهٔ نظریه‌های جدید کوهومولوژی [همانستگی] برای واریته‌های جبری یکی از مهمترین گامها را در پیشبرد هندسهٔ جبری در چند دههٔ گذشته برداشته است. از خصوصیات کارهای او این است که می‌تواند خیلی راحت با ایده‌های بسیار مجرد دست و پنجه نرم کند و آنها را در حل مسائل کاملاً مشخص ریاضی به‌کار بگیرد.

دستاورد وِوودسکی ریشه در کارهای الکساندر گروتندیک، برندهٔ مدال فیلدز ۱۹۶۶ دارد، ریاضیدانی ژرف‌اندیش و اصیل که می‌توانست ساختارهای مجرد و عمیقی را که متحدکنندهٔ ریاضیات‌اند درک کند. گروتندیک دریافته بود که باید اشیایی که او آنها را «موتیو» می‌نامید وجود داشته باشند که منشأ وحدت بین دو شاخهٔ ریاضیات یعنی نظریهٔ اعداد و هندسهٔ جبری باشند. ایده‌های گروتندیک تأثیر گسترده‌ای در ریاضیات داشته و الهامبخش کارهای وِوودسکی نیز بوده است.

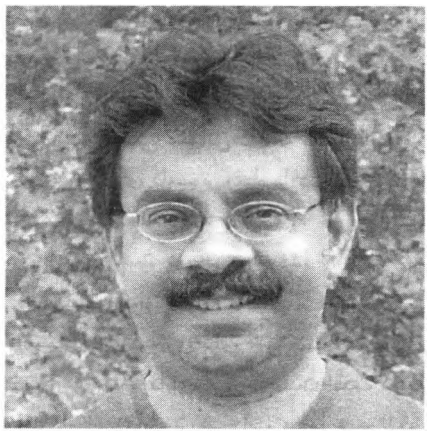
مفهوم کوهومولوژی برای اولین بار از توپولوژی برخاست که به‌زبانی غیردقیق می‌توان آن را «علم شکلها» نامید. کره، رویهٔ چنبره و همتاهای

آنها در ابعاد بالاتر، مثالهایی از اشکالی هستند که مورد بررسی قرار گرفتند. توپولوژی آن دسته از خواص اساسی شئ را بررسی می‌کند که وقتی شئ تغییر شکل می‌یابد (بی‌آنکه پاره شود) ثابت می‌مانند. در سطح پایه، نظریهٔ کوهومولوژی راهی به‌دست می‌دهد برای برش یک شئ توپولوژیک به قطعاتی که آسانتر قابل فهم باشند. گروههای کوهومولوژی در بردارندهٔ اطلاعات مربوط به نحوهٔ ترکیب کردن این قطعات برای ساختن شئ هستند. راههای گوناگونی برای دقیق کردن این مفهوم وجود دارد. یکی از آنها کوهومولوژی تکین نامیده می‌شود. نظریه‌های کوهومولوژی تعمیم یافته، داده‌هایی دربارهٔ ویژگیهای اشیای توپولوژیک استخراج می‌کنند و آن اطلاعات را به‌زبان گروهها بیان می‌کنند. یکی از مهمترین نظریه‌های کوهومولوژی تعمیم یافته، یعنی نظریهٔ توپولوژیک K، عمدتاً توسط مایکل اتیا، دیگر برندهٔ مدال فیلدز در سال ۱۹۶۶، عرضه شد. یکی از نتایج قابل ملاحظهٔ آن، ارتباطی قوی بین کوهومولوژی تکین و نظریهٔ توپولوژیک K را آشکار می‌کرد.

واریته‌های جبری، که مجموعه‌های جواب دستگاههای معادلات چندجمله‌ای هستند، اشیای اصلی مورد مطالعه در هندسهٔ جبری‌اند. واریته‌های جبری با اشیایی هندسی مانند خم و رویه قابل نمایش هستند. اما در مقایسه با اشیای «نرم» توپولوژی، سخت و صلب‌اند، و بنابراین، آن نظریه‌های کوهومولوژی که در چارچوب توپولوژیک پرورده شده‌اند، برای آنها قابل کار بست نیستند. ریاضیدانان حدود چهل سال به‌جد کار کردند تا نظریه‌های کوهومولوژی خوبی برای واریته‌های جبری وضع کنند. از میان این نظریه‌ها، نظریه‌ای که عمیقاً درک شده، روایت جبری نظریهٔ K است. هنگامی که وودسکی، براساس ایده‌ای کمتر شناخته شده که توسط آندره‌ئی سوسلین مطرح شده است، نظریهٔ «کوهومولوژی موتیویک» را ابداع کرد، پیشرفتی عمده به‌سمت هدف فوق صورت گرفت. مشابه با چارچوب توپولوژیک، ارتباطی قوی بین کوهومولوژی موتیویک و نظریهٔ جبری K وجود دارد. به‌علاوه وودسکی چارچوبی برای توصیف بسیاری از نظریه‌های کوهومولوژی جدید برای واریته‌های جبری به‌وجود آورده است. کارهای او گامی مهم به‌سوی تحقق رویای گروتندیک در مورد وحدت ریاضیات است.

یکی از تبعات کارهای وودسکی و یکی از معروفترین دستاوردهای او، حل و فصل انگارهٔ میلنر است که در طول سه دهه مسألهٔ برجسته و اصلی نظریهٔ جبری K بود. این نتیجه پیامدهایی قابل توجه در چندین حوزهٔ ریاضیات، از جمله کوهومولوژی گالوا، فرمهای درجهٔ دوم و کوهومولوژی واریته‌های جبری مختلط داشته است. کار وودسکی ممکن است در آینده تأثیر عظیمی در ریاضیات داشته باشد زیرا این امکان را فراهم می‌کند که از ابزارهای نیرومند به‌دست آمده در توپولوژی، برای بررسی واریته‌های جبری استفاده شود.

ولادیمیر وودسکی در ۴ ژوئن ۱۹۶۶ در روسیه به‌دنیا آمد. درجهٔ کارشناسی خود را در ریاضیات در سال ۱۹۸۹ از دانشگاه مسکو و دکتریش را در ۱۹۹۲ از دانشگاه هاروارد دریافت کرد. او قبل از پیوستن به هیأت علمی دانشگاه نورث‌وسترن آمریکا در سال ۱۹۹۶، استاد میهمان در مؤسسهٔ مطالعات عالی پرینستن، دانشگاه هاروارد و مؤسسهٔ ریاضی ماکس پلانک



مدو سودان

بود. وی در سال ۲۰۰۲ به استادی دائم در مدرسهٔ ریاضیات مؤسسهٔ مطالعات عالی پرینستن منصوب شد.

همچنین در مراسم افتتاحیهٔ کنگرهٔ جایزهٔ نوانلینا به مدو سودان[1] اعطا شد.

دانشگاه هلسینکی در سال ۱۹۸۲ اعتباری برای اهدای جایزه‌ای به‌نام نوانلینا تخصیص داد تا از محل آن از کارهای ریاضیدانان جوان (زیر چهل سال) در زمینهٔ جنبه‌های ریاضی علوم اطلاعات تجلیل شود. این جایزه نیز همانند مدال فیلدز هر چهار سال یک بار به‌هنگام برگزاری کنگره بین‌المللی ریاضیدانان اعطا می‌شود. برندگان قبلی این جایزه عبارت بوده‌اند از: رابرت تارجان (۱۹۸۲)، لزلی والیانت (۱۹۸۶)، الکساندر رازبوروف (۱۹۹۰)، آوی ویگدرسون (۱۹۹۴)، و پیترشور (۱۹۹۸). این جایزه نیز از طرف اتحادیهٔ بین المللی ریاضیدانان و به‌توصیهٔ اعضای کمیتهٔ انتخاب‌کننده به‌برنده اعطا می‌شود. اعضای کمیتهٔ انتخاب کننده جایزهٔ نوانلینا در سال ۲۰۰۲ عبارت بودند از آندره‌ئی آگراچف، اینگرید دوبه‌شیز، ولفگانگ هاکبوش، مایکل رابین (رئیس)، و الکساندر شریور.

مدو سودان

مدو سودان دستاوردهای مهمی در چندین حوزهٔ علوم نظری کامپیوتر، شامل بررسی احتمالاتی درستی اثباتها، تقریب‌ناپذیری مسائل بهینه‌سازی و کدهای تصحیح‌کنندهٔ خطا، داشته است. بینش عالی و گستردگی طیف علایق، مشخصهٔ کارهای اوست.

سودان در پیشبرد نظریهٔ بررسی احتمالاتی درستی اثباتها نقش عمده‌ای داشته است. اگر اثبات یک حکم ریاضی داده شده باشد، این نظریه راهی برای بازنویسی اثبات به‌دست می‌دهد، به‌شکلی که منطق اصلی اثبات به‌صورت دنباله‌ای از بیت [صفر و یک]های قابل ذخیره در کامپیوتر درآید. آنگاه «بررسی‌کننده» می‌تواند با مقابلهٔ تنها چند تا از این بیت‌ها، با احتمال زیادی تعیین کند که اثبات مذکور صحیح است یا نه. آنچه بغایت تعجب برانگیز و کاملاً خلاف شهود ماست، این است که تعداد بیت‌هایی را که لازم است بررسی‌کننده مقابله کند، می‌توان بسیار کم کرد. این نظریه در مقالاتی به‌قلم سودان، آرورا، فایگه، گولدواسر، لوند، لواس، موتوانی، سفرا، و سگدی پرورانده

1. Madhu Sudan

شد. مؤلفان این مقاله‌ها به‌خاطر این کار جایزهٔ گودل ۲۰۰۱ را به اشتراک از انجمن ماشینهای محاسب (ACM) دریافت کردند.

همچنین سودان، به‌همراه محققانی دیگر، سهمی اساسی در فهم تقریب‌ناپذیری جواب بعضی مسائل داشته است. این موضوع به این سؤال اساسی در علوم نظری کامپیوتر ربط دارد: آیا P برابر با NP است؟ به‌بیان نادقیق، ردهٔ P مرکب از مسائلی است که حل آنها به‌وسیلهٔ روشهای محاسباتی رایج «آسان» است در حالی که ردهٔ NP گمان می‌رود شامل مسائلی باشد که اساساً دشوارترند. اصطلاح «آسان» معنایی فنی دارد که به کارایی الگوریتمهای کامپیوتری برای حل مسائل مربوط می‌شود. هر مسألهٔ اساساً دشوار در NP دارای این خاصیت است که درستی جواب ارائه‌شده برای آن به‌آسانی قابل بررسی است، اما هیچ الگوریتمی وجود ندارد که به‌آسانی یک جواب را از ابتدا به‌دست دهد. بعضی مسائل دشوار NP مستلزم یافتن جوابی بهینه برای مسأله‌ای ترکیبیاتی مانند مسألهٔ زیر هستند: گردآیه‌ای متناهی از مجموعه‌های متناهی داده شده است؛ اندازهٔ بزرگترین زیرگردآیه از این مجموعه‌ها به‌قسمی که هر دو مجموعه در زیر گردایه، از هم جدا باشند، چقدر است؟ آنچه سودان و سایر محققان نشان دادند این است که، برای بسیاری از این‌گونه مسائل، تقریب زدن جواب بهینه به‌همان اندازه دشوار است که پیدا کردن جواب بهینه. این نتیجه ارتباط نزدیکی با کارهای انجام شده در زمینهٔ بررسی احتمالاتی درستی اثباتها دارد. چون مسائل موردنظر ارتباط نزدیکی با بسیاری از مسائل روزمره در علوم و فناوری دارد، این نتیجه علاوه بر اهمیت نظری آن، اهمیت عملی زیادی نیز دارد.

سومین حوزه‌ای که سودان در پیشبرد آن مشارکتی مهم داشته است، کدهای تصحیح‌کنندهٔ خطاست. این کدها در تضمین اعتمادپذیری و کیفیت تمامی انواع انتقال اطلاعات، از ضبط موسیقی بر روی CDها گرفته تا ارتباطات از طریق شبکهٔ اینترنت و انتقال اطلاعات از طریق ماهواره، نقشی عظیم دارند. در هر کانال ارتباطی، مقدار معینی نوفه وجود دارد که ممکن است در پیامهای ارسال شده ایجاد خطا کنند. برای حذف خطاهای ناشی از نوفه با کدگذاری و نشاندن پیام در یک پیام بزرگتر، از فزونگی[1] استفاده می‌شود. به شرط اینکه در پیام کد شده به‌هنگام انتقال خطاهای زیادی رخ ندهد، دریافت‌کننده می‌تواند به کمک کدهای فرعی افزوده‌شده پیام اصلی را بازیابد. فزونگی هزینهٔ ارسال پیامها را افزایش می‌دهد و هنر و علم کدهای تصحیح‌کنندهٔ خطا برقراری توازنی بین فزونگی و کارایی است. یک ردهٔ پر استفاده از کدها، کدهای ریدسولومون و انواع گوناگون آنهاست که در دههٔ ۱۹۶۰ ابداع شد. در طی ۴۰ سال اعتقاد بر این بود که این کدها تنها تعداد معینی خطا را می‌توانند اصلاح کنند. سودان با ابداع یک الگوریتم جدید کدگشایی نشان داد که خطاهایی که کدهای ریدسولومون می‌توانند اصلاح کنند بسیار بیشتر از آن است که قبلاً تصور می‌شد.

مدو سودان در ۱۲ سپتامبر ۱۹۶۶ در مَدرَس (اکنون چنایی) هند متولد شد. او درجهٔ کارشناسی خود را در سال ۱۹۸۷ از مؤسسهٔ تکنولوژی هند در دهلی نو و درجهٔ دکتریش را در علوم کامپیوتر از دانشگاه برکلی در سال ۱۹۹۲ دریافت کرد. طی سالهای ۱۹۹۲ـ۱۹۹۷ به‌عنوان محقق در مرکز تحقیقاتی توماس واتسن کمپانی آی. بی. ام. در یورک‌تاون هایتس نیویورک مشغول به کار بود و هم‌اکنون دانشیارِ بخش مهندسی برق و علوم کامپیوتر در مؤسسهٔ تکنولوژی ماساچوست (ام.آی.تی.) است.

1. redundancy

مدال کانتور

انجمن ریاضی آلمان مدال گئورگ کانتور سال ۲۰۰۲ را به یوری منین ریاضیدان روس‌تبار و رئیس مؤسسهٔ ریاضی ماکس پلانک بن اعطا کرد. در بیانیهٔ مربوط به اهدای این مدال از «دستاوردهای مهم منین در جبر، جبر کوانتومی، هندسهٔ جبری، نظریهٔ اعداد، و فیزیک ریاضی» یادشده و گفته شده است که کارهای او بسیار تأثیرگذار و الهام‌بخش ریاضیدانان در سراسر جهان بوده است.

برندگان قبلی مدال کانتور عبارت‌اند از کارل اشتین (۱۹۹۰)، یورگن موزر (۱۹۹۲)، ارهارت هاینتس (۱۹۹۴)، ژاک تیتز (۱۹۹۶)، فولکر اشتراسن (۱۹۹۹).

حسن حقیقی

سخنرانیهای کامران وفا در ایران

کامران وفا، فیزیکدان برجسته و استاد دانشگاه هاروارد، در طول سفر یک هفته‌ای خود به ایران، چهار سخنرانی در زمینهٔ نظریهٔ ریسمان ایراد کرد که با استقبال دانشجویان و استادان ریاضی و فیزیک روبه‌رو شد. سه سخنرانی عمومی او (در دانشگاه تهران، دانشگاه شریف و پژوهشکدهٔ ریاضی پژوهشگاه دانشهای بنیادی) به توصیف کلی نظریهٔ ریسمان و تأثیر آن در فیزیک و ریاضی اختصاص داشت و چهارمین سخنرانی (در پژوهشکدهٔ فیزیک پژوهشگاه) سخنرانیی تخصصی بود با عنوان

"A perturbative window into non-perturbative physics"

که به‌بیان دیدگاه و روش جدیدی در استفاده از «مدلهای ماتریسی» می‌پرداخت.

پ. ص.

از نقدی بر یک مقالهٔ ریاضی:

این مقاله حاوی راه‌حل‌های نادرست برای مسائل بدیهی است. اشتباه اساسی آن، البته، بدیع نیست.

کلیفرد تروسدل، مکمتیکال ریویوز، ۱۲، ص ۵۶۱.

نشر ریاضی، سال ۱۳، شمارهٔ ۲، صص. ۷ـ۹

نظری به هومولوژی دوری ناوردا•

مسعود خلخالی*

می‌دانیم که در گذار از چارچوبهای جابه‌جایی به ناجابه‌جایی، هومولوژی [مانستگی] دوری جایگزین کوهومولوژی [همانستگی] دُرام می‌شود. به‌عنوان مثال، طبق قضیه‌ای از کُن [۷] هومولوژی دوری تناوبیِ جبر تابعهای هموار روی یک خمینهٔ هموار با کوهومولوژی دُرام آن خمینه یکریخت است. یکی از انگیزه‌های شواله وایلنبرگ [۲] برای معرفی کوهومولوژی دُرام ناوردا این بود که بین هومولوژی دُرام یک گروه لی و کوهومولوژی جبر لیِ آن گروه رابطه‌ای ایجاد کند.

در این نوشتهٔ توصیفی کوتاه می‌خواهیم شرح مختصری در بارهٔ همتایِ ناجابه‌جاییِ کوهومولوژی دُرام ناوردا، که هومولوژی دوری ناوردا نام دارد، با استفاده از [۹] بیاوریم. یک هدف ما درک کوهومولوژی دوری جبر هوپف که کُن و مسکوویچی تعریف کرده‌اند [۴، ۵، و ۶] و نظریهٔ دوگان آن [۱۱] به‌عنوان نمونه‌هایی از هومولوژی دوری ناورداست. شرح کامل این موضوع را می‌توان در [۹] یافت. شرحی در بارهٔ هومولوژی دوری یکسان‌وردا[1]ی جبر هوپف در [۱] آمده است. این دو نظریه در واقع مرتبط به هم‌اند. هومولوژی دوری ناوردا، به‌معنایی، صورتی موضعی از هومولوژی یکسان‌ورداست.

۱. تقارن در هندسهٔ ناجابه‌جایی

نقطهٔ آغاز هندسهٔ ناجابه‌جاییِ آلان کُن، ایدهٔ آشنای دوگانی میان جبر جابه‌جایی و هندسه است:

$$\{\text{جبرهای جابه‌جایی}\} \longleftrightarrow \{\text{فضاها}\}$$

$$X \longmapsto F(X) = X \text{ جبر تابعها روی}$$

$$\text{(A طیف)}\,\mathrm{Spec}(A) \longleftarrow A$$

این ایدهٔ کلی در شاخه‌های مختلفی از ریاضیات به صورت قضیه‌های خاص دقیق ظاهر می‌شود. به عنوان نمونه، سه مثال ارائه می‌کنیم:

(i) در آنالیز تابعی، قضیهٔ گلفاند‌ـنایمارک [۸] بیانگر یک پادهم‌ارزی[2] میان رستهٔ فضاهای هاوسدُرف فشرده و توابع پیوستهٔ بین آنها با رستهٔ C^*ـجبرهای جابه‌جایی است. در این تناظر، به فضای X، C^*ـجبر جابه‌جایی $C(X)$ متشکل از تابعهای پیوسته با مقدار مختلط روی X را نسبت می‌دهیم و بالعکس، به هر C^*ـجبر، $\mathrm{Spec}(A)$ یعنی فضای ایده‌آلهای ماکسیمال A با توپولوژی طبیعی آن نظیر می‌شود.

(ii) در جبر جابه‌جایی، قضیهٔ صفر[1] هیلبرت یک پادهم‌ارزی میان رستهٔ واریته‌های جبری مستوی روی یک میدان جبری‌ـبستهٔ F و رستهٔ Fـجبرهای مستوی ارائه می‌کند (برای ملاحظهٔ اثباتی از این قضیه برای میدانهای ناشمارا که شباهت چشمگیری به اثبات قضیهٔ گلفاند‌ـنایمارک دارد، به [۳] رجوع کنید.)

(iii) فرض کنید X یک فضای هاوسدُرف فشرده باشد. قضیهٔ سرـسوآن [۸] بیانگر یک هم‌ارزی میان رستهٔ کلافهای برداری مختلط روی X و رستهٔ $C(X)$ـمدولهای افکنشیِ متناهی‌مولد است. به هر کلاف برداری E، $C(X)$ـمدول $\Gamma(E)$ متشکل از مقاطع سراسری پیوستهٔ E نسبت داده می‌شود.

بدین ترتیب، طبیعی است که رسته‌های گوناگون جبرهای ناجابه‌جایی را شواهد وجودِ رسته‌هایی از فضاهای ناجابه‌جایی یا کوانتومی تلقی کنیم که هنوز وجودِ بالفعل ندارند.

چگونه می‌توان مفهوم تقارن را در هندسهٔ ناجابه‌جایی صورتبندی کرد؟ نخست خاطرنشان می‌کنیم که می‌توان خود مفهوم گروه را به صورت جبر هوپف یا، به مفهومی محدودتر، به صورت گروه کوانتومی، کوانتیزه کرد. یادآوری می‌کنیم که یک جبر هوپف روی میدان F از یک Fـجبر شرکت‌پذیر و یکدار H مجهز به نگاشتهای خطی $\Delta : H \to H \otimes H$، $\epsilon : H \to F$ و $S : H \to H$، به ترتیب موسوم به پادضرب[2]، پادواحد[3]، پادپا[4]، تشکیل شده است که در آن Δ پادشرکت‌پذیر است، ϵ پادواحد است، و به‌ازای هر $h \in H$، رابطهٔ $\sum S(h^{(1)})h^{(2)} = \sum h^{(1)}S(h^{(2)}) = \epsilon(h)1_H$ برقرار است. در اینجا $\Delta(h)$ را به $\sum h^{(1)} \otimes h^{(2)}$ نمایش داده‌ایم. مفاهیم معمولی جبر، مانند شرکت‌پذیری، جابه‌جایی‌بودن، یکداربودن، مدول، مدول مضاعف[5]، ... را می‌توان به سهولت به جبرهای هوپف تعمیم داد به این ترتیب که ویژگیهای جبری مورد نظر را به صورت نمودارهای جابه‌جایی نشان می‌دهیم و سپس جهت پیکانها را معکوس می‌کنیم [۱۴]. در اینجا چند

1. equivariant 2. anti-equivalence

1. Nullstellensatz 2. co-multiplication 3. co-unit 4. antipode 5. bimodule

مثال از جبرهای هوپف می‌آوریم و بالاخص خاطرنشان می‌کنیم که چگونه گروهها و جبرهای لی منجر به پیدایش جبرهای هوپف می‌شوند.

(الف) فرض کنید G یک گروه باشد و $H = FG$ جبرگروه آن روی میدان F. حال Δ، ϵ، و S را به صورت $\Delta(g) = g \otimes g$ و $\epsilon(g) = 1$ و $S(g) = g^{-1}$، به‌ازای هر $g \in G$، تعریف می‌کنیم. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که H یک جبر هوپف است.

(ب) فرض کنید $\mathfrak{g}$ یک جبر لی روی میدان F باشد و $H = U(\mathfrak{g})$ جبر پوششی $\mathfrak{g}$. طبق تعریف، $H = T(\mathfrak{g})/I$ که در آن $T(\mathfrak{g})$ جبر تانسوری فضای برداری $\mathfrak{g}$ است و I ایده‌آل دو طرفهٔ ایجاد شده توسط عناصر به‌شکل $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$؛ و x و y در $\mathfrak{g}$اند. حال Δ، ϵ، و S را به‌صورت $\Delta(g) = 1 \otimes g + g \otimes 1$، $\epsilon(g) = 0$ و $S(g) = -g$، به‌ازای هر $g \in \mathfrak{g}$، تعریف می‌کنیم. و باز می‌توان تحقیق کرد که H یک جبر هوپف است.

(ج) فرض کنید G یک گروه جبری مستوی روی یک میدان جبری‌ـبستهٔ F باشد و $H = F[G]$ حلقهٔ مختصاتی G. با گرفتن دوگان نسبت به‌نگاشتهای ضرب، واحد و وارون، یعنی $G \times G \to G$، $\{1\} \to G$، و $G \to G$، می‌توان پادضرب $\Delta : F[G] \to F[G \times G] = F[G] \otimes F[G]$، $\epsilon : F[G] \to F$ و $S : F[G] \to F[G]$ را به‌ترتیب تعریف کرد. می‌توان تحقیق کرد که H یک جبر هوپف است.

مثالهای (الف) و (ب) پاد جابه‌جایی هستند و مثال (ج)، جابه‌جایی. مثال بعدی از این‌رو جالب توجه است که نه جابه‌جایی است و نه پاد جابه‌جایی، و در واقع یکی از اولین مثالهای گروه کوانتومی است.

(د) جبر هوپف $H = A(SL_q(2, F))$ یا به‌اصطلاح «حلقهٔ مختصاتی» گروه کوانتومی $SL_q(2, F)$ به‌این صورت تعریف می‌شود: فرض کنید $q \in F$ ناصفر باشد و یک ریشهٔ واحد نیز نباشد. H به‌عنوان جبر به‌وسیلهٔ علامتهای x، u، v، و y با روابط زیر تولید می‌شود.

$$ux = qxu, vx = qxv, yu = quy, yv = qvy,$$

$$uv = vu, xy - q^{-1}uv = yx - quv = 1$$

ضرب، پادواحد و پادبای H به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\Delta \begin{bmatrix} x & u \\ v & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & u \\ v & y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x & u \\ v & y \end{bmatrix}$$

$$\epsilon(x) = \epsilon(y) = 1, \ \epsilon(u) = \epsilon(v) = 0,$$

$$S(x) = y, \ S(y) = x, \ S(u) = -qu, \ S(v) = q^{-1}v$$

برای ملاحظهٔ تفصیل مطالب به [۱۲] مراجعه کنید.

اکنون می‌توانیم مفهوم اصلی این بخش، یعنی کنش یک جبر هوپف را برروی یک جبر، معرفی کنیم. گیریم H یک جبر هوپف و A یک جبر باشد. گوییم A یک جبر Hـپادمدول است اگر A یک Hـپادمدول باشد و نگاشت ساختاری $\rho : A \to H \otimes A$ یک ریختار [مورفیسم] جبرها باشد. به‌عنوان مثال، کنش یک گروه جبری G روی واریتهٔ V را می‌توان به این صورت بیان کرد که بگوییم $A = F[V]$ یک $H = F[G]$ جبر پادمدول است. نگاشت ساختاری $A \to H \otimes A$ دوگان کنش $G \times V \to V$ است. به‌طریق مشابه، A را یک جبر Hـمدول می‌نامیم اگر A یک Hـمدول باشد و نگاشت ساختاری $H \otimes A \to A$ یک ریختار جبرها باشد. به‌عنوان مثال، اگر گروه G روی جبر A به‌صورت یکریختی‌ها عمل کند، A یک جبر $H = FG$ـمدول است.

۲. کوهومولوژی دوری یا همتای ناجابه‌جایی هومولوژی دُرام

کوهومولوژی دوری در [۷]، و نیز مستقلاً توسط تسیگان[1]، معرفی شد. در این بخش، تعریف کوهومولوژی دوری جبرهای شرکت‌پذیر (توپولوژیک) و نیز کوهومولوژی دوری جبرهای هوپف را یادآوری می‌کنیم [۴، ۵، ۶] و همچنین به‌نظریهٔ دوگان مربوط می‌پردازیم. نظریه‌های اخیر قرابت چندانی با نظریه‌های دوری جبرها ندارند. نکتهٔ اصلی این مقاله این است که، به‌تبعیت از [۹]، نشان دهیم که هومولوژی دوری جبرهای هوپف را می‌توان به‌عنوان هومولوژی (به‌ترتیب، کوهومولوژی) ناوردای جبرها (به‌ترتیب، پاد جبرها) تعبیر کرد. کتاب [۱۳] مرجعی برای هومولوژی دوری جبرهاست.

فرض کنید A یک جبر شرکت‌پذیر باشد و $C^n(A)$ فضای تابعکهای $(n+1)$ـخطی $\varphi : A^{\otimes(n+1)} \to \mathbb{C}$ روی A. اگر $C^n_\lambda(A) \subset C^n(A)$ فضای تابعکهای دوری یعنی آن φهایی باشد که

$$\varphi(a_n, a_0, a_1, \ldots a_{n-1}) = (-1)^n \varphi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

عملگر $b : C^n(A) \to C^{n+1}(A)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(b\varphi)(a_0, \ldots, a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \varphi(a_0, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} \varphi(a_{n+1} a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

می‌توان تحقیق کرد که $b^2 = 0$. آلن کن به این کشف قابل توجه دست یافت که $(C^*_\lambda(A), b)$ در واقع یک زیر مجتمع[2] $(C^*(A), b)$ است. کوهومولوژی مجتمع اول را کوهومولوژی دوری A می‌خوانند و به $HC^*(A)$ نمایش می‌دهند، و کوهومولوژی مجتمع دوم را کوهومولوژی هوخشیلد[3] A (با ضرایب در A^*) می‌نامند و به $HH^*(A)$ نمایش می‌دهند.

مثال. فرض کنید M یک خمینهٔ بستهٔ هموار باشد و $V \subset M$ یک زیرخمینهٔ بستهٔ n بعدی. تابعک خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\varphi(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \int_V f_0 df_1 \cdots df_n$$

می‌توان به‌آسانی (به‌کمک فرمول استوکس) تحقیق کرد که φ یک nـدور دوری روی $A = C^\infty(M)$ است. این مثال به صراحت رابطهٔ نزدیک جریان[4]های درام روی خمینهٔ M و کوهومولوژی $A = C^\infty(M)$ را نشان می‌دهد. در واقع، طبق قضیه‌ای اساسی از کن [۷]، برای $A = C^\infty(M)$ داریم

$$HC^n(A) \simeq Z_n(M) \oplus_{i \geq 1} H^{dR}_{n-2i}(M)$$

که در اینجا Z_n فضای nـجریان‌های درام بسته روی M است و H^{dR} هومولوژی درام جریانهاست.

هومولوژی دوری جبرها(ی توپولوژیک) نظریه‌ای مبسوط است که پیامدهای عمیق و پیوندهای بسیار با بخشهایی از آنالیز، توپولوژی و جبر

1. B. Tsygan 2. subcomplex 3. Hochschild 4. current

دارد (نظریهٔ شاخص[1]، نظریهٔ K، حدس نویکوف، نظریهٔ Kی جبری) [۶، ۸، ۱۳]. در چند سال اخیر یک نظریهٔ هومولوژی دوری جدید توسط کن و مسکوویچی تعریف شده است [۴، ۵، ۶] که تفاوتهای بنیادی با نظریهٔ هومولوژی دوری جبرها دارد و شالوده‌های جبری آن بسیار پیچیده‌ترند. ما در [۱۱] نظریهٔ دوگان این را برای جبرهای هوپف تعریف کردیم. هر دو نظریه را می‌توان برحسب وجود نگاشت سرشتی جامع[2] برای کنش جبرهای هوپف درک کرد. در [۹] ما رهیافت متفاوتی نسبت به این نظریه‌ها یافتیم که از هومولوژی درام ناوردا منبعث می‌شود. ما نخست یک همتای ناجابه‌جایی برای کوهومولوژی درام ناوردا [۲] تعریف می‌کنیم. این نظریه را هومولوژی دوری ناوردا نام گذارده‌ایم. سپس نشان می‌دهیم که هومولوژی دوری یک جبر هوپف H دقیقاً هومولوژی دوری ناوردای جبر H نسبت به کنش طبیعی (به‌وسیلهٔ انتقال) H روی خود آن است. این رهیافت شباهت قابل ملاحظه‌ای به‌روش استخراج کوهومولوژی جبرهای لی به‌عنوان کوهومولوژی درام ناوردای گروه لی آن توسط شواله و ایلنبرگ، دارد [۲].

۳. هومولوژی دوری ناوردا

تعریف. مقصود از یک سه‌تایی چپ هوپف، یک سه‌تایی (A, H, M) است که در آن H یک جبر هوپف، A یک جبر Hـ پادمدول چپ، و M یک Hـمدول چپ است.

یک مثال ذی‌ربط، سه‌تایی (H, M, M) است که در آن پاد کنش H روی $A = H$ از طریق پاد ضرب $\Delta : H \to H \otimes H$ است (این همتای ناجابه‌جایی کنش گروه روی خود از طریق انتقال چپ است.)

در [۱۱] به هر سه‌تایی هوپف (A, H, M) یک مدول دوری نسبت می‌دهیم (برخی فرضهای فنی در اینجا لازم می‌آید. برای سهولت توصیف فرض می‌کنیم $S^2 = id_H$). یادآوری می‌کنیم که یک مدول دوری، یک مدول سادکی[3] M_n، $n \geq 0$، است مجهز به یک کنش گروه دوری $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ روی M_n، $\tau_n : M_n \to M_n$، به‌طوری که برخی روابط اضافی نیز برقرارند (برای تعریف دقیق، ر. ک. [۱۳]). قرار می‌دهیم

$$C_n(A, M) = M \otimes A^{\otimes(n+1)}$$

نخست یک ساختار مدول پَرادوری[4] روی $C_n(A, M)$، $n \geq 0$، وضع می‌شود، و سپس یک Hـپادکنش چپ $\rho : C_n(A, M) \to H \otimes C_n(A, M)$ تعریف می‌شود که القا شده از Hـپادکنش روی A است. مدول زنجیره‌های ناوردا روی A فضای پادناورداهای این پادکنش است:

$$C_n^H(A, M) = \{x \in C_n(A, M) | \rho(x) = 1 \otimes x\}$$

در این زمینه، نتایج زیر نقش اساسی دارند (برای اثباتها، ر. ک. [۹]).

قضیه. فرض کنید (A, H, M) یک سه‌تایی هوپف باشد، در این صورت $C_n^H(A, M)$، $n \geq 0$، یک مدول دوری است.

قضیه. مدول دوری سه‌تایی هوپف (H, H, F) با مدول دوری منسوب به H یکریخت است [۱۱].

برای اثبات اینکه مدول پاددوری یک جبر هوپف به مفهوم موردنظر کن‌ـمسکوویچی را می‌توان از طریق فرایند مشابهی به‌دست آورد، باید یک نظریهٔ هومولوژی دوری ناوردا برای پادجبرها بنا کرد. این موضوع و نتایج بسیار دیگر در [۹] آمده است.

1. index theory 2. universal characteristic map
3. simplicial module 4. paracyclic

مراجع

1. R. Akbarpour, and M. Khalkhali, "Hopf algebra equivariant cyclic homology and cyclic homology of crossed product algebras," To appear in *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*.
2. C. Chevalley, S. Eilenberg, "Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras", *Tran. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948) 85-124.
3. N. Chriss, and V. Ginzburg, *Representation Theory and Complex Geometry*, Birkhäuser (1997).
4. A. Connes, and H. Moscovici, "Cyclic cohomology and Hopf algebra symetry", Conference Moshe Flato 1999 (Dijon), *Lett. Math. Phys.*, (1) **52** (2000) 1-28.
5. A. Connes, and H. Moscovici, "Cyclic cohomology and Hopf algebras". Moshe Flato (1973-1998), preprint.
6. A. Connes, and H. Moscovici, "Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem", *Comm. Math. Phys.*, (1) **198** (1998) 199-246.
7. A. Connes, "Noncommutative differential geometry", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **62** (1985) 257-360.
8. M. Gracia-bondia, J. Varilly, and H. Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser (2001).
9. M. Khalkhali, and B. Rangipour, "Invariant cyclic homology", preprint.
10. M. Khalkhali, and B. Rangipour, "On the generalized cyclic Eilenberg-Zilber theorem", To appear in *Canadian Mathematical Bulletin*.
11. M. Khalkhali, and B. Rangipour, "A new cyclic module for Hopf algebras", To appear in *K-Theory*.
12. A. Klimyk, and K. Schmüdgen, *Quantum Groups and Their Representations*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin (1997).
13. J. L. Loday, *Cyclic Homology*, Springer-Verlag (1992).
14. M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Benjamin (1969)

******

* مسعود خلخالی، بخش ریاضی دانشگاه انتاریوی غربی، کانادا

masoud@uwo.ca

نویسندهٔ این مقاله از همیاری استاد دکتر شهشهانی در ترجمهٔ اصل مقاله به زبان فارسی و نیز از علاقهٔ ایشان به این موضوع که مشوق نویسنده در نوشتن این مقاله بوده است، کمال تشکر را دارد.

نشر ریاضی، سال ۱۳، شمارهٔ ۲، صص. ۱۰ـ۱۳

گزارش ویژه

دورهٔ دکتری، میزگرد، اقتراح، و باقی قضایا

سیاوش شهشهانی*

در اولین شمارهٔ نشر ریاضی که در فروردین ماه ۱۳۶۷ انتشار یافت، میزگردی در بارهٔ دورهٔ جدیدالتأسیس دکتری ریاضی داشتیم که آن وقت موضوع داغ ریاضیات کشور بود. در آن زمان نخستین دانشجویان دورهٔ دکتری ریاضی کشور به چند دانشگاه راه یافته بودند. در فضای بخشهای ریاضی دانشگاهها و سایر نهادهای مرتبط با ریاضیات، احساساتی در مورد این دوره وجود داشت که آمیزه‌ای از ترس، احتیاط، دودلی، ابهام، شوق، امید، و اراده بود. بعضیها تأسیس این دوره را زودهنگام و آکنده از خطرهای گوناگون می‌دیدند، برخی دیگر معتقد بودند که از زمان مناسب برای تأسیس این دوره مدتها گذشته و نباید بیش از این تردید و اهمال کرد، و به هر حال، اجماع نظر در جامعهٔ ریاضی، متمایل به ورود محتاطانه به این وادی بود. اکنون با گذشت حدود ده سال از فارغ‌التحصیل‌شدن اولین دانشجویان این دوره، فرصت را مناسب دیدیم که به بازبینی آنچه در این مدت گذشته است بپردازیم، و با ترسیم چشم‌انداز آینده، توصیه‌های صاحبنظران را در مورد ادامهٔ این جریان مطرح کنیم.

این نگارنده هم که در میزگرد ذکرشده شرکت داشت، از خوشبینانی بود که اعتقاد داشت در ایجاد دورهٔ دکتری تأخیر بیجا شده است و به‌عنوان شاهدی در تأیید نظر خود، توفیق دورهٔ کارشناسی ارشد ریاضی در ایران را ذکر می‌کرد. به‌خصوص، ماجرایی در مورد یک رسالهٔ کارشناسی ارشد ریاضی در برزیل همیشه در ذهن من بود به این شرح که وقتی مسألهٔ رسالهٔ دکتری خود را دریافت کردم، یکی از دانشجویان همرشتهٔ سالهای بالاتر به نام ژاکوب پالیس (که اکنون شهرت جهانی دارد و رئیس اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان است) نوشته‌ای به زبان پرتغالی به من داد در همان موضوع مقالهٔ خودم که به قول او رسالهٔ کارشناسی ارشد یکی از دوستانش در برزیل بوده و می‌گفت که هر چند مطلب چندانی ندارد و در سطح یک رسالهٔ کارشناسی ارشد

گزیده‌ای از میزگرد نشر ریاضی در بارهٔ دورهٔ دکتری ریاضی

نشر ریاضی: در آغاز تأسیس دورهٔ دکتری ریاضی، از دو هدف اصلی برای این دوره صحبت می‌شد. یک هدفْ تأمین نیروی انسانی برای دانشگاههای کشور بود که در حال رشد کمّی قابل ملاحظه‌ای بودند و هدف دیگر نهادینه‌کردن تحقیقات ریاضی در کشور بود. در مورد هدف اخیر هر چند عده‌ای از اعضای هیأت علمی دانشگاهها کار تحقیقاتی را دنبال می‌کردند ولی این احساس وجود داشت که برای اینکه تحقیقات به‌عنوان یک رکن اصلیِ کار دانشگاهی تثبیت شود، لازم است دوره‌های دکتری که جزء اصلی آنها کار تحقیقی است در سطح کشور پا بگیرد. به نظر شما تا چه حد به این هدفها نائل شده‌ایم؟

دیوانی‌آذر: به عقیدهٔ من اهدافی که برای دورهٔ دکتری تعریف شده بود تا حد زیادی برآورده شده‌اند ولی مهم این است که چگونه برآورده شده‌اند. این موفقیت بیش از همه مدیون زحماتی بوده که دانشجویان دورهٔ دکتری کشیده‌اند نه برنامه‌ریزی اصولیِ دورهٔ دکتری یا مهارت استادان در تربیت دانشجویان. حالا هم نباید این موفقیت ما را گول بزند و تأسیس دوره‌های دکتری به مسابقه‌ای تبدیل شود که هر دانشگاهی با هر شرایطی دست به کار آن شود. به نظر من از این به بعد باید اصولیتر جلو رفت و به‌خصوص تأکید دارم بر اینکه امکان گذراندن دوره‌های ششماههٔ فرصت مطالعاتی یا فوق‌دکتری

است بد نیست نگاهی به آن بیندازم. به‌کمک یک فرهنگ پرتغالی‌ـانگلیسی، این رسالهٔ کوتاه را در ۴۸ ساعت خواندم و به این نتیجه رسیدم که حاوی هیچ مطلب غیربدیهی و جالب‌توجهی نیست و در واقع، جمع‌آوری مبادی موضوع همراه با چند نتیجهٔ به نسبت واضح است. بعدها وقتی این رساله را با بعضی از رساله‌های کارشناسی ارشد که در کشور خودمان نوشته شده بود مقایسه می‌کردم می‌دیدم که ما چقدر «ظاالمانه» از دانشجویان کارشناسی ارشد کار می‌کشیم و معتقد بودم بعضی رساله‌های کارشناسی ارشد ما چیزی بینابین رساله‌های کارشناسی ارشد و رساله‌های دکتری در کشورهایی است که زودتر از ما وارد گود شده‌اند. این برداشت در ذهن من هیچ تردیدی باقی نمی‌گذاشت که ما باید هر چه زودتر دست به‌کار تأسیس دورهٔ دکتری شویم.

به هر صورت، موضوع پیش روی مجلهٔ ما یافتن راه مطلوب برای بازبینی و آینده‌نگری در مورد دورهٔ دکتری ریاضی بود. بعضی از دوستان پیشنهاد برگزاری میزگرد جدیدی را مطرح کردند و بعضی دیگر، اقتراح و نظرخواهی کتبی را مناسبتر می‌دانستند. پس از بحث زیاد به این نظر رسیدیم که میزگردی با شرکت عده‌ای از فارغ‌التحصیلان این دوره تشکیل دهیم. به این منظور از گروهی از این افراد از دانشگاههای مختلف برای شرکت در میزگردی که در تاریخ ۸۰/۸/۱۶ برگزار شد دعوت کردیم. مدعوین نامبرده در زیر همراه اعضای هیأت ویراستاران نشر ریاضی در میزگرد دورهٔ دکتری ریاضی شرکت کردند:

دکتر **کامران دیوانی‌آذر** (فارغ‌التحصیل دورهٔ دکتری دانشگاه تربیت معلم، عضو هیأت علمی دانشگاه الزّهرا)؛

دکتر **محمدرضا رزوان** (فارغ‌التحصیل دورهٔ دکتری دانشگاه صنعتی شریف، عضو هیأت علمی پژوهشگاه دانشهای بنیادی)؛

دکتر **مجید میرزاوزیری** (فارغ‌التحصیل دورهٔ دکتری دانشگاه فردوسی مشهد، عضو هیأت علمی دانشکدهٔ علوم پایهٔ دامغان)؛

دکتر **رضا نکوئی** (فارغ‌التحصیل دورهٔ دکتری و عضو هیأت علمی دانشگاه شهید باهنر کرمان).

چند نکتهٔ زیر، عمده‌ترین برداشتهای ما از این میزگرد است:

۱. تنوع آرای چشمگیری در مورد ارزیابیِ تحصیل در دورهٔ دکتری ریاضی در ایران وجود داشت. در یک انتهای طیف، فردی بود که نه تنها ارزیابی مثبتی از تحصیل خود داشت بلکه معتقد بود استادان و محققان دانشگاه او چیزی از همتایان خود در بهترین دانشگاههای خارج کم ندارند. او مشوق تحصیل در داخل کشور برای ایجاد و پیشبرد یک «ریاضیات ایرانی» بود. در انتهای دیگر طیف، زمزمهٔ پشیمانی در لابه‌لای سخنان یکی از شرکت‌کنندگان به گوش می‌رسید که می‌گفت با ماندن در ایران شاید موقعیتهای علمی برتر و امکانات حرفه‌ای بهتر را برای همیشه از دست داده باشد.

۲. بیشتر شرکت‌کنندگان، شکایاتی نسبت به کمبود امکانات داشتند ولی این شکایتها بسته به دانشگاه محل تحصیل متفاوت بود. یکی از آنها از مشکلات مالی دانشجویان دورهٔ دکتری صحبت می‌کرد، دیگری از کمبود منابع علمی، آن یکی از ضعف محیط علمی، و شهرستانیهایی که در تهران تحصیل کرده بودند، از مشکلات مسکن، و . . .

۳. بعضی از شرکت‌کنندگان در میزگرد با توجه به اینکه پیش‌بینی می‌کردند جامعه از لحاظ تعداد فارغ‌التحصیل دکتری اشباع شود و امکانات استخدامی در خارج از کشور برای فارغ‌التحصیلان داخل پس از اخذ درجهٔ دکتری فراهم شود.

میرزاوزیری: به عقیدهٔ من اگر تا حدودی به هدفهای اولیه رسیده‌ایم، وقت آن است که در هدفها تجدیدنظر کنیم. در آغاز هدف اصلیْ تربیت مدرس برای دانشگاهها بوده که این نهایتاً یک دور بسته ایجاد می‌کند: مدرسین خوب، دانشجویان خوب تربیت می‌کنند که اینها هم مدرس خوب می‌شوند و دانشجوی خوب تربیت می‌کنند، و . . . حالا وقت آن رسیده که تحقیقات را محور اصلی دورهٔ دکتری قرار دهیم. از نظر مدرس ممکن است به نقطهٔ اشباع رسیده باشیم.

نکویی: اشباع می‌تواند معنیهای مختلفی داشته باشد. شاید مقصود شما از اشباعْ جنبهٔ اقتصادی آن است و گرنه در دانشگاههای خارج از کشور، گروههای ریاضی هستند با چند برابر تعداد اعضای هیأتهای علمی ما و همین تعداد دانشجو. شاید خیلی از استادها به دلایل اقتصادی بیش از آنچه باید، تدریس می‌کنند و به این دلیل به نظر می‌آید به نقطهٔ اشباع رسیده‌ایم. به علاوه دانشگاهها می‌توانند حلقه‌های پژوهشی ایجاد کنند و عده‌ای از اعضای هیأت علمی فقط عضو پژوهشی باشند. البته این درست است که در عمل وضع مثل سابق نیست؛ شش سال پیش که من فارغ‌التحصیل شدم خیلی از دانشگاهها حاضر بودند بدون اینکه بدانند رشتهٔ تخصصی من چیست مرا فوراً استخدام کنند ولی امروزه از کسی که در آستانهٔ فارغ‌التحصیلی است در بارهٔ رشته و کارش سؤال می‌کنند و بعداً می‌گویند «خوب، وقتی فارغ‌التحصیل شدی، اگر به این تخصص نیاز داشتیم با شما تماس می‌گیریم.»

میرزاوزیری: من در یک دانشگاه کوچک تدریس می‌کنم و وضعیت استخدام طوری شده که افرادِ دارای درجهٔ دکتری را دعوت می‌کنیم بیایند سخنرانی کنند. با آنها مصاحبه می‌کنیم، و بعداً در مورد استخدام آنها تصمیم می‌گیریم. به علاوه بار اصلیِ کار ما تدریس دروس ریاضی عمومی برای رشته‌های مختلف است. حالا آیا می‌شود شما یک محقق خوب را استخدام کنید و از او بخواهید ریاضیات عمومی درس دهد؟

نشر ریاضی: چه عیبی دارد؟ در دانشگاههای بزرگ و مهم دنیا هم همین کار را می‌کنند. فرض بر این است که استاد جوان نباید وقت زیادی صرف تدریس کند تا وقت کافی برای تحقیقات داشته باشد. آیا شما واقعاً ترجیح می‌دهید یک درس تخصصی سطح بالا تدریس کنید؟

نکویی: نظر شخصی من مثبت است. من به هیچ عنوان قبول نمی‌کنم درسهای عمومی تدریس کنم چون نمی‌خواهم نتیجهٔ زحمات ده‌ساله‌ام تلف شود. . . . وقتی خودم دانشجوی دکتری بودم، سه‌چهارم کار درس دکتری با خودم بود، خودم می‌خواندم، خودم تمرین را حل می‌کردم و درس را ارائه می‌کردم، استادم می‌نشست، گوش می‌کرد، و اگر جایی من گیر می‌کردم می‌گفت «خوب حالا خودت برو بیشتر کار کن» تدریس درسهای دورهٔ

کافی در آینده وجود نداشته باشد، نسبت به گسترش دورهٔ دکتری ریاضی در کشور ابراز نگرانی می‌کردند؛ و نیز این گلایه ابراز شد که فارغ‌التحصیلان داخل کشور از امکاناتی مشابه دانش‌آموختگان خارج بهره‌مند نمی‌شوند.

پس از آنکه نوار گفتگوها روی کاغذ آمد، به دلایل زیر، چاپ متن کامل میزگرد را در صفحات مجله به صلاح ندیدیم:

۱. نگارندهٔ این سطور به‌عنوان گردانندهٔ میزگرد موفق نشده بود طوری جریان بحث را هدایت کند که از پراکنده‌گویی و تکرار مطالب اجتناب شود و متن منسجم و موجز و مستدلی از این بحث حاصل شود.

۲. هر چند شرکت‌کنندگان به‌وضوح نظراتی مشخص و گاه تُند در بارهٔ دورهٔ تحصیل دکتری خود داشتند، نظرهای آنها در بسیاری موارد جنبهٔ احساسی، گله‌گزاری، و نارضایی مبهم داشت و به‌نحوی تدوین و تنظیم نشده بود که منجر به یک بحث پخته شود.

۳. چون اکثر شرکت‌کنندگان در میزگرد، تجربهٔ طولانی تحصیل در خارج از کشور را نداشتند، ارزیابی نسبی و مقایسه‌هایی که به عمل می‌آوردند اکثراً مبتنی بر شنیده‌های پراکنده در بارهٔ کشورهای مختلف بود و نتیجهٔ مشخصی از بحث عاید نشد.

علاوه بر اینها، مشخص بود که دانشجویان این دوره لزوماً از همهٔ مشکلات و مسائل دورهٔ دکتری آگاه نیستند و برای متعادل‌بودن بحث، لازم است نظر استادان این دوره را نیز جویا شویم. به این منظور، از تعدادی از استادان دانشگاههای مختلف با تجربیات و زمینه‌های متفاوت نظرخواهی کردیم که بعضی جواب دادند. با خواندن این پاسخها معلوم می‌شود که دست‌اندرکاران قطعاً نظرات مهم و گاه احساسات تند و تیزی نسبت به مسائل دورهٔ دکتری دارند ولی میدان مناسبی برای بحث دقیق در این‌باره فراهم نشده است. این موضوع مهم استحقاق بررسی دقیقتر، عمیقتر، و نقادانه‌تری دارد که فراتر از ذکر بدیهیات و کلیات باشد. بنابراین در اینجا از همهٔ دست‌اندرکاران، اعم از استادان و فارغ‌التحصیلان دورهٔ دکتری ریاضی داخل کشور، و نیز فارغ‌التحصیلان جدید دوره‌های دکتری خارج از کشور، دعوت می‌کنیم مشاهدات، برداشتها، و نظرهای خود را برای درج در بخش مخصوصی که امیدواریم در یکی از شماره‌های آینده به این امر اختصاص دهیم بفرستند تا شاهد برخورد عقاید به‌صورتی روشنگر و ثمربخش باشیم. در اینجا ده سؤالی را که برای شرکت‌کنندگان در میزگرد مطرح کردیم می‌آوریم. پاسخ‌دهندگان به این دعوت می‌توانند حول و حوش این پرسشها یا پرسشهای دیگری که به نظر آنها اهمیت دارد وارد بحث شوند. مسلماً هدف ما این نیست که پاسخهای کوتاه دو سه‌سطری به همهٔ پرسشها دریافت کنیم؛ شکافتنِ عمیقتر یکی دو موضوع، قطعاً ارزشمندتر است.

پرسشهای زیر با فارغ‌التحصیلان دورهٔ دکتری ریاضیِ داخل کشور در میان گذاشته شد:

۱. آیا از ماندن در ایران و گذراندن این دوره در داخل کشور راضی هستید؟
۲. ویژگیهای استاد رساله به نظر شما چه باید باشد؟
۳. آیا به اندازهٔ کافی بر ریاضیات مسلط هستید که بتوانید شاخهٔ تحقیقاتی خود را تغییر بدهید؟

دکتری خیلی طرفدار دارد، تازه ۲۰ واحد هم برایش اختصاص داده‌اند.

رزوان: من اصلاً از این صحبتهایی که در مورد تفکیک آموزش و تحقیقات می‌شود ترس دارم. خودم خیلی بیش از آنچه از درسهای استاد راهنمایم چیز یاد بگیرم از درسهای دیگران یاد گرفتم. بعضی استادان راهنما چند کتاب و مقاله به دانشجو می‌دهند و از او می‌خواهند که چیزی به‌عنوان تز از آنها دربیاورد. این چیزی نیست که وقتی دانشجوی دکتری شدم در ذهن من بود. من هنوز هم ناراحت می‌شوم وقتی به مفاهیمی برمی‌خورم که اصلاً در دورهٔ تحصیل به گوشم نخورده ولی الان می‌بینم که چقدر مهم و حیاتی هستند. حالا که صحبت از بازنگری هدفهاست، من دو هدف جدید یا دو اصلاحیه در مورد اهداف گذشته دارم. یکی جامعترشدن درسهاست که منجر به ارتقاء سطح تحقیقات هم می‌شود و حالا دیگر به این مرحله رسیده‌ایم که نباید دانشجویان را زیاد دچار استرسِ مقاله چاپ‌کردن بکنیم. دوم اینکه باید بیشتر به کاربردهای علوم و ریاضی هم بپردازیم. برای این اهداف هم به نظر من ارتباط جهانی خیلی ضروری است. باید در مورد توسعه و افزایش فرصتهای مطالعاتی برای استادان و دانشجویان کوشش بیشتری بشود. دانشجویان دورهٔ دکتری باید بتوانند درکارگاههای آموزشی و پژوهشی متنوع در خارج شرکت کنند.

نشر ریاضی: در ادامهٔ صحبت شما، بعضی از خطر درونزایی صحبت می‌کنند و اینکه فارغ‌التحصیلان ما رونوشت استادان فعلی از آب دربیایند. دو سؤال مطرح است، یکی اینکه حالا که این دوره را گذرانده‌اید واقعاً احساس می‌کنید که می‌توانید روی پای خودتان بایستید و در صورت لزوم، کار تحقیقاتی در یک رشتهٔ جدید را شروع کنید؟ دوم اینکه نظرتان در بارهٔ دوره‌های ۶ تا ۹ ماههٔ در خارج در حین تحصیل دورهٔ دکتری چیست؟ اگر از این دوره‌ها استفاده کرده‌اید، نتیجه‌اش را چگونه ارزیابی می‌کنید؟

میرزاوزیری: من فکر می‌کنم این تبحر نسبی را پیدا کرده‌ام که روی یک مقالهٔ جدید که هیچ اطلاعی درباره‌اش ندارم کار کنم و تا حدودی متکی به خودم شده‌ام ولی اگر بپرسید آیا جرأتش را دارم که چنین کاری بکنم، فکر نمی‌کنم. در مورد دوره‌های خارج کشور هم برای من یک موقعیت خیلی خوب پیش آمد که بروم ولی گفتند امسال بودجه نداریم و بالاخره نشد. بعد از دکتری یک دوره رفتم که برایم خیلی مفید و جذاب بود و افسوس خوردم که چرا قبلاً این کار نشد. به نظر من این یک ضرورت است برای دانشجویان دورهٔ دکتری ریاضی ایران.

دیوانی‌آذر: به نظر من در اینجا باید حداقل سه پارامتر را در نظر گرفت، یکی خودباوری، دیگری فرهنگ عمومی، و بالاخره پیشینهٔ آموزشی. به نظر من کسانی که در ایران با کار و زحمت خودشان دکتری گرفته‌اند از نظر خودباوری و اعتماد به نفس نسبت به فارغ‌التحصیلان خارج برترند. از نظر فرهنگ عمومی که یک جزء مهم آن می‌تواند زبان خارجی باشد، البته فارغ‌التحصیلان خارج در وضعیت بهتری

۴. دربارهٔ اینکه باید مقاله‌ای مبتنی بر رسالهٔ دکتری در یک ژورنال قابل قبول بین‌المللی چاپ شود تا اجازهٔ دفاع از رساله داده شود چه نظری دارید؟
۵. در بارهٔ دورهٔ مطالعاتی ۹ـ۶ ماههٔ خارج از کشور چه نظری دارید؟ آیا از آن استفاده کرده‌اید؟
۶. اهداف اولیهٔ تأسیس دورهٔ دکتری در ایران، تربیت نیروی انسانی برای تدریس در دانشگاهها و مدارس عالی و نیز نهادینه‌کردن امر تحقیق بود. تا چه حد به این هدفها رسیده‌ایم و آیا باید هدفهای این برنامه را بازبینی کرد؟
۷. به نظر شما تحقیقاتی که امروزه در دوره‌های دکتری ریاضی کشور می‌شود در موضوعهایِ روز ریاضی است یا در مباحث حاشیه‌ای؟
۸. در ارتباط با سؤال بالا، آیا دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد ریاضی کشور، دانشجو را به اندازهٔ کافی برای گذراندن دورهٔ دکتری در رشته‌های فعال ریاضی آماده می‌کند؟
۹. پیش‌بینی شما در مورد بازارکار برای فارغ‌التحصیلان دکتری رشتهٔ ریاضی در آینده چیست؟
۱۰. امکانات مادی و معنویِ موجود برای دانشجویان دورهٔ دکتری چگونه است؟

از فارغ‌التحصیلان سالهای اخیر خارج از کشور می‌توان پرسید که سطح دانشجویان و فارغ‌التحصیلان دورهٔ دکتری داخل کشور را در مقایسه با دانشگاهی که خود در آن تحصیل کرده‌اند چگونه می‌یابند. این مقایسه را می‌توان به‌خصوص در مورد معلومات ریاضی در هنگام اخذ درجه و سطح کارِ تحقیقاتی دورهٔ دکتری انجام داد.

******

در خاتمه به تکمیل خاطره‌ای می‌پردازم که قبلاً در مورد رسالهٔ برزیلی شرح دادم. حدود نُه سال پیش که ژاکوب پالیس به ایران آمد، در بارهٔ دورهٔ تازه‌تأسیس دکتری ریاضی در ایران و مشکلات آن سر صحبت را با او گشودم. خیلی به تشویق ما پرداخت و ابراز خوشبینی کرد. گفت حالا که دورهٔ دکتری ریاضی در برزیل جا افتاده و محصولات بسیار آبرومندی به جهان عرضه کرده، می‌توانم حقیقتی را به تو بگویم که قبلاً کتمان کرده بودم. پرسید آیا آن رسالهٔ کارشناسی ارشد در برزیل را که سالها پیش به تو دادم به یاد داری؟ گفتم بله، ولی رساله‌های کارشناسی ارشدی که در دانشگاه من در ایران می‌نویسند معمولاً از آن بهتر است. گفت تعجب نکن اگر بگویم که آن رساله در واقع رسالهٔ کارشناسی ارشد نبود بلکه یک رسالهٔ دکتری ریاضی در برزیل بود ولی آن زمان خجالت می‌کشیدم واقعیت را بگویم! نقطهٔ شروع شما خیلی بالاست!

******

* سیاوش شهشهانی، دانشگاه صنعتی شریف

هستند. اما در مورد پیشینهٔ آموزشی، به نظر من یکی از نقاط ضعف برنامهٔ دکتری داخلی ما کمبود درسهای متنوع است. یکی از استفاده‌های اصلی که من از گذراندن یک دوره در خارج کردم همین آشناشدن با ارتباطات رشتهٔ خودم با سایر رشته‌ها بود. همین‌طور خیلی لذت بردم که دیدم یک استاد ۶۰ ساله تازگی تغییر مسیر داده و در رشتهٔ کاملاً جدیدی کار می‌کند و کلی معلومات هم در همین سن کسب کرده است.

نشر ریاضی: در مورد انتشار مقاله براساس رسالهٔ دکتری قبل از اخذ درجهٔ دکتری، که اکنون الزامی است، چه نظری دارید؟

میرزاوزیری: من فکر می‌کنم در این‌باره باید واقعاً بازنگری شود. همهٔ ما مواردی را سراغ داریم که با پرداخت پول، یک مقاله در ژورنالی در خارج چاپ می‌شود.

نکویی: واقعاً رساله نوشتن و مقاله نوشتن خیلی فرق دارد. یکی از استادان ما که در زمان جنگ از آمریکا دکتری گرفته بود می‌گفت به استادم گفتم کشورم در حال جنگ است وخانواده‌ام در خطرند، گفت «من تو را قبول دارم، با اینکه مقاله چاپ‌نکرده‌ای ولی کار تحقیقاتی‌ات خیلی خوب است» و رساله‌ام را امضا کرد و تمام شد. در همین دپارتمان خودمان افرادی داریم با درجهٔ دکتری از خارج که مقاله ندارند. حالا اینجا این‌قدر سختگیری می‌کنند. آیا واقعاً چاپ مقاله در یک ژورنال بین‌المللی، این ژورنالهایی که پول می‌گیرند و مقاله چاپ می‌کنند، ملاک مهمی است؟ مگر نمی‌شود صد صفحه کار تحقیقاتی کرد که هیچ جا هم چاپ نشود و ارزشش بیش از آن مقاله‌ها باشد؟

دیوانی‌آذر: به نظر من اینکه چاپ کردن مقاله شرط لازم و کافی برای گرفتن دکتری باشد اشتباه است. برای دکتری گرفتن یک رسالهٔ خوب لازم است. اینکه مقاله‌ای هم از رساله دربیاید واواینکه در جای خیلی مهمی هم چاپ نشود برای اینکه یک خودباوری اولیه ایجاد شود خوب است ولی سختگیریهای ثانویه که گاهی موجب می‌شود افراد متوسل به پرداختن پول برای چاپ مقاله شوند و اصلاً موضوع رسالهٔ خوب جنبهٔ فرعی پیدا کند درست نیست.

نکویی: مطلب دیگری که باید به آن توجه داشت این است که وقتی شما مقاله‌ای از ایران به خارج می‌فرستید و مقاله به‌دست داوری می‌افتد که اصلاً دانشگاه شما برایش گمنام است یا حتی نوع ریاضیاتی که شما کار می‌کنید برای او آشنا نیست، چاپ مقاله خیلی دشوار می‌شود.

رزوان: به نظر من نیاز به تولید علم یک قسمت کار است و نیاز به ارائهٔ آن یک قسمت دیگر. اگر شما تحقیق خوبی کرده باشید ولی آن را در مجله‌ای ارائه نکنید، کار خوبی نیست. ارائهٔ کار به همان اندازهٔ تولید اهمیت دارد. به نظر من فارغ‌التحصیلان ما در ایجاد این ارتباط علمی ضعف دارند و باید یاد بگیرند که در صحنهٔ ارتباطات علمی بین‌المللی فعال باشند.

احتمال روی گروهها: قدم‌زدن تصادفی و پخشِ ناوردا •

اوران سافـدکاست*

ترجمهٔ آرش فهیم

بُرزدن کارتها، رشد حجم و نابرابریهای هارنک[1] چه ارتباطی با یکدیگر می‌توانند داشته باشند؟ همهٔ آنها در مطالعهٔ قدم‌زدن تصادفی[2] روی گروهها پیش می‌آیند. احتمال روی گروهها، در باب اندازه‌های احتمال و فرایندهایی تصادفی است که خواصشان تا حدی به‌وسیلهٔ یک ساختار گروهی زیربنایی تعیین می‌گردد. این شاخه واجد جنبه‌های گوناگونی است و می‌توان در آن هم نظریه‌های پیچیده و هم تحلیل مسائل ملموس را یافت. علی‌رغم وجود بسیاری مثالهای جالب دیگر، توجه ما معطوف به قدم‌زدن تصادفی و پخشها[3]ی ناورداست که هر دو فرایندهایی با نموهای مستقل مانا هستند. قدم‌زدن تصادفی به‌صورت جهشی [گسسته] است حال آنکه پخشها مسیرهای پیوسته دارند. این دو در خواص مهمّی اشتراک دارند ولی از برخی جنبه‌ها، ازجمله ماهیت گروه زیربنایی مربوط، متفاوت‌اند: این گروه برای قدم‌زدن تصادفی، متناهی‌مولد است و برای پخش، همبند. توجه ما روی خواص اساسی این فرایندها متمرکز خواهد بود و از بسیاری از نتایج به‌دست آمده چشم می‌پوشیم؛ برخی از آنها را می‌توان در [V+] و [W] یافت.

هدف ما ارائهٔ نظریهٔ قدم‌زدن تصادفی و پخش ناوردا روی گروههای دلخواه است با تأکید بر روابط این مباحث با جبر، آنالیز و هندسه. با مطالعهٔ این فرایندها امید داریم چیزی در بارهٔ گروه زیربنایی و مباحث مربوط به آن بیاموزیم. به‌عنوان مثال، برخی خواص جوابهای معادلهٔ پخش گرما و معادلهٔ لاپلاس روی پوشش عام خمینه‌های فشرده به خواص قدم‌زدن تصادفی روی گروه بنیادی مربوط می‌شود. از این دیدگاه، درک خواص بنیادی قدم‌زدن تصادفی روی رده‌های وسیعی از گروهها مهمتر از مطالعهٔ دقیق مثالهای خاص است. دانش فراهم‌آمده در مورد مثال حرکت براونی dبعدی (ازجمله پیشرفتهای زیبای اخیر که لاولر[4]، شرام[5] و ورنر[6] به‌دست آورده‌اند) ایده‌آلی دور از دسترس و شاید دست‌نیافتنی به‌نظر می‌رسد که موجب سؤالات، ایده‌ها و بینشهایی طبیعی می‌شود، ولی در مورد گروهها در حالت کلی، مجبوریم به اطلاعات بسیار کمتری قناعت کنیم.

این مقاله دو بخش دارد که یکی در بارهٔ قدم‌زدن تصادفی است و دیگری در بارهٔ پخش. این دو بخش از طرق بسیار با یکدیگر پیوند دارند ــ هم در سطح ایده‌ها و هم از لحاظ احکام و قضایا ــ و این پیوندها بیش از آن است که شرح آنها در این مقاله بگنجد. ورای اختلاف موقعیتها، که از گروه متقارن S_n تا گروه لی $SL_n(\mathbb{R})$ و تا چنبرهٔ بینهایت بعدی $\mathbb{T}^\infty$ گسترده‌اند، وحدتی بین مسائل مورد بحث وجود دارد و هر پیشرفت اساسی در یک مبحث خاص بر کل موضوع پرتو می‌افکند.

قدم‌زدن تصادفی

فرض کنید G گروهی باشد که توسط یک مجموعهٔ متقارن متناهی S تولید شده است. در نتیجه $s \in S$ ایجاب می‌کند $s^{-1} \in S$ و $G = \cup_{n=0}^{\infty} S^n$. گراف کیلی (G, S) دارای مجموعهٔ رئوس G و یالی از x به y است اگر و تنها اگر به‌ازای یک $s \in S$، $y = xs$. برای درک ایدهٔ اساسی قدم‌زدن تصادفی، متحرکی را که روی رأسی از این گراف قرار دارد، تصوّر کنید. در هر مرحله، متحرک قدمی در طول یکی از یالهای مجاور، با انتخاب تصادفی یکنواخت یال از میان گزینه‌های ممکن، برمی‌دارد. بعد از n مرحله، متحرک کجا خواهد بود؟

به‌طور کلیتر، اگر اندازهٔ احتمال p روی G داده شده باشد، قدم‌زدن تصادفی مربوط به آن، $(X_n)_{n\geq 0}$، در هر مرحله با انتخاب s در G با احتمال $p(s)$ و حرکت به $X_{n+1} = X_n s$ انجام می‌شود. توزیع بعد از n مرحله، توان پیچشی $p^{(n)}$ است که $p * q(x) = \sum_y p(y)q(y^{-1}x)$.

1. Harnack 2. random walks 3. diffusions 4. Lawler
5. Schramm 6. Werner

بُرزدن کارتها

به چه دلیل کسی ممکن است به مطالعهٔ قدم‌زدن تصادفی روی گروهها علاقه‌مند شود؟ شاید به این دلیل ساده که هر کسی قدم‌زدن تصادفی را [عملاً] به‌کار می‌برد، همان‌طور که موسیو ژوردانِ مولیر نثر را به‌کار می‌برد بدون آنکه تشخیص دهد نثر است. در حقیقت، برای بیشتر روشهای برزدن کارتها می‌توان مدلی به‌صورت قدم‌زدن تصادفی روی گروه متقارن S_n $(n = ۵۲)$ ارائه کرد که در آن روند برزدن به انتخاب تصادفی از میان یک مجموعهٔ خاص از جایگشتها تعبیر می‌شود. یک سؤال به‌وضوح در وسط صحنه قرار می‌گیرد: چند بار باید کارتها را بُر زد تا کاملاً مخلوط شوند؟ بیر[1] و دیاکونیس اثبات کردند که ۷ بار برزدن لازم و کافی است و پای این قضیه به نیویورک تایمز هم کشیده شد. نه تنها این سؤال برای خیلیها جذاب است بلکه ریاضیاتِ برزدن ورقْ زیبایی و غنای شگفت‌انگیزی دارد. اینکه چنین جواب دقیقی می‌توان به این سؤال داد خود نکتهٔ جذابی است که توسط دیاکونیس مورد مطالعه قرار گرفت و با نام «پدیدهٔ تقطیع[2]» مطرح شد.

برزدن کارتها خیلی پیش از این در ریاضیات مورد بحث قرار گرفته بود: به‌عنوان مثال، توسط پوانکاره، بورل و دیگران ([HO] را ببینید). امّا اولین قضیهٔ کمّی، قضیهٔ زیر از دیاکونیس و شهشهانی دربارهٔ ترانهش تصادفی است. برای توضیح این فرایند، فرض می‌کنیم که کارتها روی میزی به‌طور مرتب در یک ردیف چیده شده‌اند. دو کارت را به‌طور مستقل و یکنواخت به تصادف برمی‌داریم و با هم جابه‌جا می‌کنیم. برای ترانهش تصادفی، بعد از تقریباً $\frac{1}{2}n\log n$ بار تکرار این کار، همگرایی ناگهانی به توزیع یکنواخت روی می‌دهد که مثالی از پدیدهٔ تقطیع است. برای یک دست ورق استاندارد که ۵۲ کارت دارد، این به‌معنای مناسب‌بودن تقریباً ۱۰۰ ترانهش تصادفی برای کاملاً مخلوط‌کردن کارتهاست. برای بیان یک نتیجهٔ دقیق، توجه می‌کنیم که فاصلهٔ تغاضلی کل بین دو اندازهٔ احتمال p و q به‌صورت $||p-q||_{\mathrm{TV}} = \sup|p(A)-q(A)|$ تعریف می‌شود که سوپریمم روی تمام زیرمجموعه‌های A از G گرفته می‌شود.

قضیهٔ ۱. برای ترانهش تصادفی روی گروه متقارن S_n، $p^{(k)}$ را قانون بعد از k مرحله می‌گیریم. اگر $k(n,c) = \frac{1}{2}n(c+\log n)$، آنگاه ثابت Aای موجود است که به‌ازای هر n و هر $c > 0$،

$$||p^{(k(n,c))} - u_n||_{\mathrm{TV}} \geq Ae^{-c}$$

که در آن u_n اندازهٔ احتمال یکنواخت روی S_n است. به‌علاوه ثابت Bای و تابع مثبت fای با شرط $\lim_{c\to\infty} f(c) = 0$ وجود دارند که به‌ازای هر n و هر $c < 0$،

$$||p^{(k(n,c))} - u_n||_{\mathrm{TV}} \geq 1 - f(c) - Bn^{-1}\log n$$

ترانهشهای مجاور (جابه‌جایی کارتهای مجاور) و جادادن تصادفی (برداشتن کارتی به تصادف و قراردادن آن به تصادف در جایی مستقل) دو مثال دیگر از شیوه‌های برزدن‌اند که مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. برای اینکه کارتها به‌طور یکنواخت کاملاً مخلوط شوند، تعداد دفعات لازم برزدن برای ترانهش مجاور از مرتبهٔ $n^2\log n$ و برای جادادن تصادفی از مرتبهٔ $n\log n$ است. در هر دو حالت ضریب ثابت دقیق شناخته شده نیست و وجود یا عدم وجود یک زمان تقطیع دقیق هم مسألهٔ حل‌نشده‌ای است. حدسهای پخته از این قرار است که به حدود ۳۰۰۰۰ ترانهش مجاور و چند صد جادادن تصادفی برای مخلوط‌کردن ۵۲ کارت نیاز است.

به‌ازای n بزرگ، حدود سه تا از هر چهار جفت جایگشت، گروه متقارن را تولید می‌کند اما سرنخی از این مسأله به‌دست نیامده است که برای کاملاً مخلوط‌کردن کارتها با استفاده از چنین جفتی از جایگشتها، معمولاً به چند بار برزدن نیاز است. در بیست سال گذشته، آلدوس[1]، دیاکونیس و همکاران و پیروان فراوان آنها از روشهای متنوعی برای درک قدم‌زدن تصادفی روی گروههای متقارن و گروههای متناهی دیگر استفاده کرده‌اند. ما در اینجا دو رهیافت بسیار متفاوت را، تا حدی به‌تفصیل، شرح می‌دهیم. شرح مفصلتر را در [D] ببینید.

یک روش برزدن را در نظر بگیرید. در روش احتمالاتیِ موسوم به «جفت‌سازی»، دو نسخهٔ وابسته (X_n, Y_n) از فرایند ــ اولی مانا و دومی شروع شده از یک حالت ثابت دلخواه ــ با این خاصیت که با گذشت زمان با احتمال بیشتر و بیشتری مساوی می‌گردند، ساخته می‌شوند. فرض کنید T زمانی تصادفی است برابر با اولین nای که به‌ازای آن X_n و Y_n، برابر می‌شوند. این T زمان جفت‌شدن نامیده می‌شود و می‌توان فاصلهٔ تغاضلی کل بین قانون $p^{(n)}$ مربوط به Y_n و اندازهٔ مانای u (یعنی قانون X_n) را به کران زیر محدود کرد.

$$||p^{(n)} - u||_{\mathrm{TV}} \geq \mathrm{Prob}(T > n)$$

بنابراین، مسأله به جفت‌سازی مناسبی که برای آن $\mathrm{Prob}(T > n)$ را بتوان تخمین زد، تبدیل می‌شود. این روش دارای این مزیت است که تنها به قدم‌زدن تصادفی روی گروههای متناهی محدود نمی‌گردد بلکه در مباحث دیگر نیز کاربرد وسیع دارد.

نظریهٔ نمایش (مثلاً نمایش گروههای متقارن) زمانی‌که قدم‌زدنْ تقارنهایی اضافی دارد امکانات عظیمی پیش‌رو می‌گذارد. مطالعهٔ قدم زدن تصادفی روی گروههای متناهی بزرگ را می‌توان به‌عنوان عملیات روی یک ماتریس بزرگ یعنی ماتریس احتمال تغییر وضعیتِ قدم‌زدن در نظر گرفت. نظریهٔ نمایش همچنین به کوچک‌کردن اندازهٔ مسأله از طریق قطری‌سازی جزئی ماتریس به‌صورت بلوکی کمک می‌کند. اما ممکن است بلوکها هم بعد بزرگی داشته باشند. مثلاً برای گروه متقارن S_n، اندازهٔ ماتریس اولیه $n! \times n!$ است و پس از تقسیم براساس نمایشهای تحویل‌ناپذیر، بزرگترین بلوک هنوز اندازهٔ $\sqrt{n!} \times \sqrt{n!}$ دارد. اما اگر قدم‌زدن تحت خودریختی داخلی ناوردا باشد (یعنی $x \mapsto axa^{-1}$، که یک مثال معمولی از تقارنهای اضافی است که در بالا به آنها اشاره شد)، در این‌صورت هر بلوک یک ماتریس اسکالر است و می‌توان نتایج ظریفی، همانند حالت ترانهش تصادفی، به‌دست آورد. یک رهیافت بسیار مفید دیگر شامل مقایسهٔ قدم‌زدن‌های تصادفی مختلف و بررسیهای ترکیبیاتی مقدماتی ازجمله هندسهٔ مسیرها درگرافهای کیلی متناهی متناظر است. به‌عنوان نمونه، دیاکونیس و نویسندهٔ این مقاله از مقایسه با

1. Bayer 2. cut-off

1. Aldous

ترانهش تصادفی به‌منظور کرانیابی مؤثر برای تعداد برزدن‌های مورد نیاز در ترانهش مجاور، جادادن تصادفی و بسیاری مثالهای دیگر استفاده کرده‌اند.

با وجود این، نتایجی نظیر قضیهٔ ۱ تنها برای معدودی مثال خاص در دست است. هر چند نتایج رضایت‌بخش ضعیفتری برای معدودی رده‌های بزرگتر قدم‌زدن‌های تصادفی روی گروههای متناهی به‌دست آمده است، هیچ شناخت کلی واقعی از چگونگی قدم‌زدن تصادفی روی گروههای متناهی حاصل نشده است، خصوصاً برای قدم‌زدن‌هایی که برپایهٔ مجموعه‌های کوچک از مولّدها استوار است.

بنابراین، تعداد زیادی سؤال مبارزطلب و مسألهٔ حل‌نشده وجود دارد. یکی از آنها به‌شرح زیر است. در هر گراف دلخواه، مرز مجموعهٔ A، ∂A، مجموعهٔ تمام یالهایی است که A را به متمم آن، A^c، وصل می‌کنند. یک خانواده از (k,c)-بسط‌دهنده‌ها عبارت‌است از گردایه‌ای نامتناهی از گرافهای متناهی که هر رأس آنها حداکثر k همسایه دارد و برای هر زیرمجموعهٔ A داریم

$$\min\{\#A, \#A^c\} \leq c\#\partial A$$

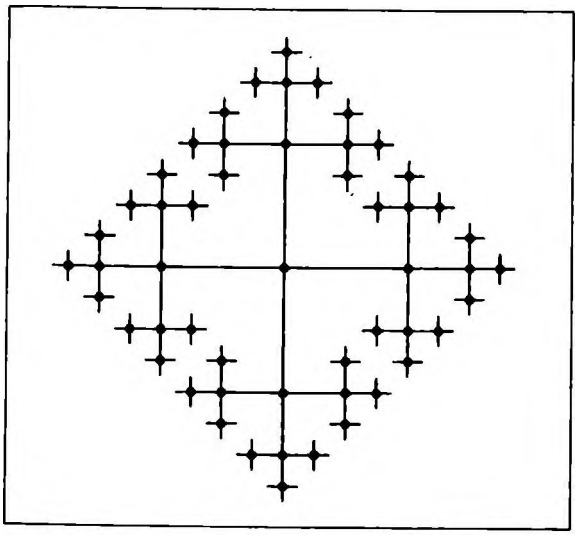
این گرافها خاصیتهای همبندی بسیار خوبی دارند و به‌عنوان مدلهایی برای شبکه‌های ارتباطی، فایدهٔ عملی نیز دارند. قدم‌زدن تصادفی روی بسط‌دهنده‌ها شامل چند حرکت موضعی است ولی به‌سرعت به تعادل میل می‌کند. اولین نمونه‌های بسط‌دهنده‌ها توسط مارگولیس[1] با استفاده از نظریهٔ نمایش گروه نامتناهی $SL_n(\mathbb{Z})$ مطابق خاصیت کاژدان (T) ساخته شدند ([L] را ببینید). اینکه آیا گروه متقارن می‌تواند خانواده‌ای از (k,c)-بسط‌دهنده‌ها به‌دست دهد، پرسشی است که پاسخی نیافته است.

پیش از گذار به گروههای نامتناهی، تأکید می‌کنیم که قدم‌زدن‌های تصادفی روی گروههای متناهی و متناهی‌مولد از طرق زیادی به یکدیگر مربوط می‌شوند. نتایج مربوط به گروههای نامتناهی خاص (به‌عنوان مثال خاصیت کاژدان (T)) می‌تواند منجر به نتایج جالبی دربارهٔ خارج‌قسمتهای متناهی شود؛ برعکس، بسیاری از گروههای نامتناهی را می‌توان با گروههای متناهی تقریب زد. با این همه، یک قدم‌زنِ تصادفی با وسعت دید کم که روی گروه متناهی دوری بزرگ $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ قدم می‌زند به‌سرعت در نخواهد یافت که گروه، $\mathbb{Z}$ نیست. ماجرای موفقیت‌آمیز جدیدی که این نکته را روشن می‌سازد محاسبات گریگورچوک[2] و زوک[3] در باب اندازهٔ طیفی (یعنی اندازهٔ μ روی $[-1,1]$ که $p^{(n)}(e) = \int_{-1}^{1} \lambda^n d\mu(\lambda)$) مربوط به قدم‌زدن تصادفی روی حاصلضرب تاجی[4] $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$ است (این گروه بعداً در بخش گروههای حل‌پذیر شرح داده خواهد شد). آنها کار را با تقریب‌زدن به‌وسیلهٔ قدم‌زدن تصادفی روی گروههای متناهی دنبال نمودند؛ به‌همراه اینل[5] و شیک[6] نشان دادند که این محاسبات به سؤالی از اتیا در مورد خواص تقسیم‌پذیری اعداد L^2-بتی فضاهای پوششی خمینه‌های فشرده پاسخ منفی می‌دهد.

تولد مبحث قدم‌زدن تصادفی روی گروهها

برای قدم‌زدن تصادفی روی یک گروه متناهی‌مولد، $\phi(n)$ را احتمال برگشت به نقطهٔ شروع بعد از $2n$ قدم بگیرید. بنابراین، اگر p اندازهٔ احتمالی باشد که قدم‌زدن بر مبنای آن انجام می‌پذیرد، داریم $\phi(n) = p^{(2n)}(e)$. همه جا

1. Margulis 2. Grigorchuk 3. Żuk 4. wreath product
5. Linnel 6. Schick



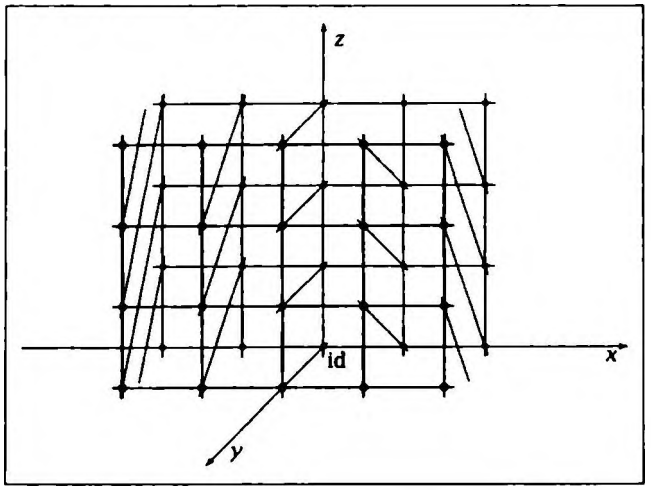
شکل۱ گوی با شعاع ۴ در گروه آزاد $\mathbb{F}_2$ روی دو مولّد.

فرض می‌کنیم محمل p گروه را تولید کند و p دارای محمل متناهی و متقارن باشد؛ یعنی $p(x) = p(x^{-1})$. به‌دلیل فرض تقارن، $\phi(n) = p^{(2n)}(e)$ تابعی نزولی از n است (رفتار $p^{(2n+1)}(e)$ اهمیت کمتری دارد: برای قدم‌زدن تصادفی ساده روی اعداد صحیح، $p^{(2n+1)}(e) = 0$ به‌ازای هر n).

قدم‌زدن تصادفی، بازگشتی است اگر، با احتمال ۱، بینهایت بار به‌نقطهٔ شروع بازگردد. در حدود سال ۱۹۲۰ پولیا ثابت کرد که قدم‌زدن تصادفی ساده روی مشبکهٔ مربعی در ابعاد ۱ و ۲ بازگشتی است ولی در ابعاد ۳ و بیشتر نیست. درحقیقت، نتایج مقدماتی نظریهٔ احتمال نشان می‌دهد که بازگشت با $\sum_n \phi^{(n)} = +\infty$ معادل است و برای مشبکهٔ مربعی dبعدی، $\phi(n) \sim c(d)n^{-d/2}$. از دیدگاه ما، درک رفتار $\phi^{(n)}$ اساسیترین مسأله در نظریهٔ قدم‌زدن تصادفی است.

در ۱۹۵۸، کستن[1]، در پایان‌نامهٔ دکتری خود ــ با الهام از سؤال کاتس در مورد حاصلضرب ماتریسهای تصادفی 2×2 ــ موضوع قدم‌زدن تصادفی روی گروههای متناهی‌مولد را ابداع کرد. او در دنبال پایان‌نامه‌اش ثابت کرد که $\phi(n)$ با سرعت نمایی برحسب n نزول می‌کند اگر و تنها اگر گروهٔ میانگین‌ناپذیر[2] باشد. گروه توپولوژیک G میانگین‌پذیر[3] است اگر تابعک پیوستهٔ خطی v تعریف‌شده روی فضای تمام توابع بورل اندازه‌پذیر کراندار موجود باشد که $v(f) \geq 0$ وقتی $f \geq 0$، $v(1) = 1$، و $v(f_x) = v(f)$ که $f_x(y) = f(xy)$. این چنین تابعک خطی، میانگین ناوردا از چپ نامیده می‌شود. با وجود ارتباط میانگین‌پذیری با ساختار جبری گروه، هیچ توضیح جبری قانع‌کننده‌ای برای تمایز گروههای میانگین‌پذیر و میانگین‌ناپذیر در دست نیست. قبل از کار کستن، فولنر میانگین‌پذیری را برحسب برابرمحیطی مشخص کرد و ثابت کرد که یک گروه میانگین‌ناپذیر است اگر و تنها اگر ثابت C موجود باشد که به‌ازای هر مجموعهٔ متناهی $A \subset G$، $\#A \leq C\#\partial A$. این نتیجه‌های ابتدایی چگونگی ارتباط نظریهٔ قدم‌زدن تصادفی با ایده‌های جبری و هندسی را به‌خوبی نشان می‌دهد.

1. Kesten 2. nonamenable 3. amenable



شکل۲ قسمتی از گراف کیلی روی گروه هایزنبرگ.

تمام گروههای آبلی و، به‌طورکلیتر، تمام گروههای حل‌پذیر، میانگین‌پذیرند. شکل ۳ را ببینید. گروه آزاد $\mathbb{F}_k$ روی $k \geq 2$ مولّد و گروه بنیادی یک رویهٔ دوبعدی جهت‌پذیر با گونای $g \geq 2$ میانگین‌ناپذیرند. ازجمله مثالهای حیرت‌آورِ گروههای میانگین‌ناپذیر، گروههایی هستند که همهٔ اعضایشان مرتبهٔ متناهی یکسان دارند، (این مثالهای عمیق متعلق به آدیان[1] است و در اثبات از محک هم‌رشدی گریگورچوک استفاده می‌شود). برای قدم‌زدن تصادفی طبیعی ساده روی گروه آزاد $\mathbb{F}_k (k \geq 2)$ داریم

$$\phi(n) \sim c(k) n^{-\frac{3}{2}} (2\sqrt{k}/(k+1))^{2n}, \quad n \to \infty \text{ وقتی}$$

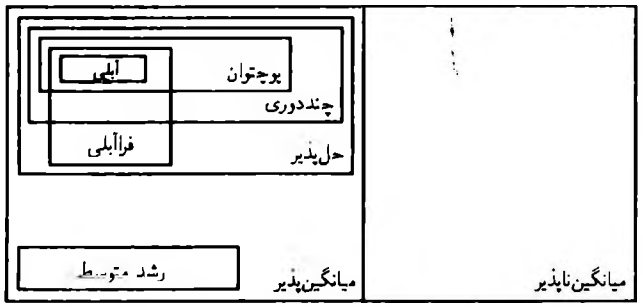
اما برای بیشتر قدم‌زدن‌های تصادفی روی گروههای میانگین‌ناپذیر، محاسبهٔ سرعت دقیق نزول نمایی ϕ یعنی شعاع طیفی $\rho = \lim_{n\to\infty} \phi(n)^{1/2n}$ دشوار، و این سرعت نامعلوم مانده است.

تا بیست سال بعد از پایان‌نامهٔ کِستن، در مورد ویژگیهای قدم‌زدن تصادفی روی گروههای متناهی‌مولد پیشرفت کمی صورت گرفت. این حدس که تنها گروههای نامتناهی که پذیرای قدم‌زدن تصادفی بازگشتی‌اند، توسیعهای متناهی $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}^2$ هستند به حدس کستن معروف شد. مطابق آنچه خواهیم دید، درستی این حدس را واروپولوس در اواسط دههٔ ۸۰ ثابت کرد [V+] و [W]. حدس مشابه در مورد گروههای لی همبند توسط بالدی[2]، لوئوه[3] و پیریر[4] با استفاده از کارهای گیوارک[5]، کین[6]، و روینت[7] در ۱۹۷۷ حل و فصل شد، اما به‌دلیل ساختار نظریهٔ گروههای لی، ماجرای آن تا حدی متفاوت است.

ناورداهای شبه‌ایزومتریک

در دههٔ ۱۹۸۰ گروموف به ترویج مفهوم شبه‌ایزومتری [شبه‌طولپایی] بین دو فضای متریک و نگرش به گرافهای کیلی گروهها به‌عنوان اشیای هندسی بنیادی که به‌خودی خود شایستهٔ مطالعه‌اند، پرداخت. نگاشتهای شبه‌ایزومتری نگاشتهایی هستند که فواصل بزرگ را زیاد تغییر نمی‌دهند حال آنکه هیچ محدودیتی بر فواصل کم و توپولوژی موضعی اعمال نمی‌کنند. به‌عنوان نمونه، پوشش عام یک خمینهٔ ریمانی فشرده و گروه بنیادیش اشیایی شبه‌ایزومتریک

1. Adyan 2. Baldi 3. Lohoué 4. Peyrière 5. Guivarc'h
6. Keane 7. Roynette



شکل۳ نمودار کلی روابط شمول بین رده‌های گوناگون گروههای متناهی‌مولد.

هستند. دوگراف کیلی مربوط به دو مجموعهٔ مولد متناهی متفاوت از یک گروه واحد، شبه‌ایزومتریک هستند. یک گروه متناهی‌مولد با هر یک از زیرگروههایش که شاخص متناهی داشته باشند، شبه‌ایزومتریک است.

اگر گراف کیلی (G, S) داده شده باشد، تابع رشد حجم $V(n)$ تعداد اعضایی است که درگوی به شعاع n حول عضو همانی e قرار دارند، یعنی تعداد اعضایی از گروه که می‌توان آنها را به‌صورت حاصلضرب حداکثر n مولّد نوشت. نمود برابر محیطی[1] تابع زیر است:

$$I(n) = \inf\{\#\partial A : A \subset G, \#A \geq n\}$$

رفتار تابع رشد حجم V و رفتار نمود برابرمحیطی I در بینهایت، ناورداهایی شبه‌ایزومتریک‌اند. مثالی غیرواضح‌تر از ناوردای شبه‌ایزومتریک، رفتار تابع قدم‌زدن تصادفی ϕ است ([W] را ببینید). این نحوهٔ نگرش به قدم‌زدن تصادفی بسیار ثمربخش از آب درآمده است. یک سؤال طبیعی این است که آیا این سه ناوردا، V، I و ϕ، همگی اطلاعات یکسانی در مورد گروه G می‌دهند یا نه.

بدیهی است که تابع رشد حجم، I یا ϕ را معین نمی‌کند: هر گروه میانگین‌ناپذیر تابع رشد حجم نمایی دارد، اما بسیاری گروههای میانگین‌پذیر هستند که تابع رشد حجمشان چنین است. خواهیم دید که حتی بین گروههای میانگین‌پذیر، تابع V رفتار I یا ϕ را معین نمی‌کند و رابطهٔ بین نمود برابرمحیطی I و احتمال تابع بازگشت ϕ کاملاً شناخته نشده است. مشکلِ مواجهه با این قسم سؤالات از گوناگونی و پیچیدگیِ ساختارهای جبری گروههایِ متناهی‌مولد دلخواه ناشی می‌شود. این است دلیل اهمیت قضیهٔ مشهور گروموف که می‌گوید هرگروهی که رشد حجم آن از بالا به یک چندجمله‌ای محدود باشد شامل یک زیرگروه پوچتوان با شاخص متناهی است. کشف، مهم در زمینهٔ قدم‌زدن تصادفی، قضیهٔ زیر است که به واروپولوس تعلق دارد. [V+] را ببینید.

قضیهٔ ۲. فرض کنید ثابت مثبت cای موجود است، به‌طوری که به‌ازای هر n، $V(n) \geq cn^d$. در این صورت ثابتهای مثبت C_1 و c_1 موجودند به‌طوری که به‌ازای هر n، $\phi(n) \leq C_1 n^{-d/2}$ و $I(n) \geq c_1 n^{1-1/d}$.

توجه کنید که فرض این قضیه محدودیت بسیار اندکی برای گروه ایجاد می‌کند. از یک طرف این بدان معناست که نمی‌توان ابزارهای پیچیده‌ای برای اثبات این چنین نتیجه‌ای به‌کار برد. از طرف دیگر، ساختارگروهی جنبهٔ ضروری

1. isoperimetric profile

دارد چرا که گرافهایی منظم ــ که لزوماً گراف کیلی نیستند ــ موجودند که از هر نقطهٔ مرجع رشد نمایی دارند، هر چند قدم‌زدن تصادفی بازگشتی است. هم کلید اثبات اصلی واروپولوس و هم کلید استدلالی که رئوس آن در زیر می‌آید، یک نابرابری ساده از نوع حسابانی است. روی هر گراف کیلی (G,S) به‌ازای هر $y \in G$ و هر تابع با محمل متناهی f داریم

$$\sum_{x\in G} |f(xy)-f(x)| \le |y| \sum_{x\in G} |df(x)|$$

که در آن $|y|$ طول کلمه‌ای y (کوچکترین k که $y = s_1 \cdots s_k$ و $s_i \in S$)، و $|df(x)| = \sum_{s\in S} |f(xs)-f(x)|$ همتای گسستهٔ گرادیان است. این نابرابری را برای اثبات نابرابری تابعی زیر که شامل وارون تابع V یعنی $w(t) = \inf\{n : V(n) > t\}$ است می‌توان به‌کار برد. با قراردادن $\Psi(t) = Cw^2(8t)$، داریم

$$\|f\|_2^2 \le \Psi(\|f\|_1^2/\|f\|_2^2)\, \|df\|_2^2 \qquad \text{(N)}$$

که برای هر تابع f با محمل متناهی روی G، که در آن ℓ^p-نرمها برحسب اندازهٔ شمارشی‌اند، برقرار است. اگر $V(n) \ge cn^d$، در می‌یابیم که $\Psi(t) \le Ct^{2/d}$ و بنابراین، نابرابری (N) شبیه نابرابری روی $\mathbb{R}^d$ است که توسط نش در مقالهٔ معروفش دربارهٔ پیوستگی هولدری جوابهای معادلات سهموی معرفی شد. نش نابرابریش را برای کنترل رفتار نیم‌گروههای پخش گرمای خاصی به‌کار برد. در این زمینه، (N) به حکم مربوط به ϕ در قضیهٔ ۲ منجر می‌گردد.

قلمرو چندجمله‌ایها

با اندکی کار، از قضیهٔ رشد چندجمله‌ای گروموف و قضیهٔ ۲ تأییدی برای حدس کستن به‌دست می‌آید: تنها گروههای متناهی‌مولدی که قدم‌زدن تصادفی بازگشتی را می‌پذیرند، توسیعهای متناهی $\{0\}$، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}^2$ هستند. کارهای گروموف و واروپولوس همچنین اجزای اصلی نتایج دقیقتر زیرند، که در آنها برای دو تابع مثبت، $f(n) \approx g(n)$ بدین‌معنی است که ثابتهای c و C موجودند که $0 < c \le \frac{f(n)}{g(n)} \le C < +\infty$.

قضیهٔ ۳. برای هر گروه متناهی‌مولد G، خواص زیر معادل‌اند: (۱) $V(n) \approx n^d$؛ (۲) $I(n) \approx n^{1-1/d}$؛ (۳) $\phi(n) \approx n^{-d/2}$؛ (۴) G دارای یک زیرگروه پوچتوان N با شاخص متناهی است، و $d = \sum_i ir_i$ که در آن r_i رتبهٔ بی‌تابی گروه آبلی N_i/N_{i+1} است و (N_i) یک رشتهٔ پایین مرکزی N است که به‌صورت $N_1 = N$ و $N_{i+1} = [N, N_i]$ تعریف می‌شود.

بنابراین، در قلمرو چندجمله‌ای/پوچتوانی، V، I و ϕ اساساً اطلاعات یکسان می‌دهند. ساده‌ترین گروه غیرآبلی با رشد چندجمله‌ای گروه شمارشپذیر هایزنبرگ است

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; x,y,z \in \mathbb{Z} \right\}$$

این گروه به‌وسیلهٔ چهار ماتریسِ حاصل از قراردادن $x = \pm 1$ به‌همراه $z = y = 0$ و $y = \pm 1$ به‌همراه $z = x = 0$ تولید می‌شود. گراف کیلی متناظر در شکل ۲ نشان داده شده است. برای آن، $V(n) \approx n^4$، $I(n) \approx n^{3/4}$ و $\phi(n) \approx n^{-2}$.

رشد فوق‌چندجمله‌ای

گروههای زیادی هستند که حجم آنها سریعتر از هر چندجمله‌ای رشد می‌کند. در حقیقت اکثر گروهها این‌چنین هستند، حتی در میان گروههای میانگین‌پذیر. بنابراین نتیجهٔ زیر مکمل مفیدی برای قضیهٔ ۲ است.

قضیهٔ ۴. $\alpha \in [0,1]$ را ثابت بگیرید، فرض کنید ثابت مثبت cای موجود است که به‌ازای هر n، $\log V(n) \ge cn^\alpha$. در این‌صورت، ثابتهای مثبت c_1 و c_2 موجودند به‌طوری که به‌ازای هر n، $\log\phi(n) \le -c_1 n^{\alpha/(\alpha+2)}$ و $I(n) \ge c_2 n/[\log n]^{1/\alpha}$.

کران ϕ را واروپولوس و کران برابرمحیطی را کولون[1] و نویسندهٔ این مقاله به‌دست آورده‌اند. این قضیه می‌گوید که برای هر گروه با رشد نمایی، $\log\phi(n) \le -c_1 n^{1/3}$ و $I(n) \ge c_2 n/\log n$. در زیر خواهیم دید که این کرانها برای برخی گروهها دقیق‌اند ولی برای همه دقیق نیستند. قضیهٔ ۴ برای گروههای با رشد متوسط نیز که رشد حجمشان از هر چندجمله‌ای سریعتر و از هر نمایی کندتر است، مفید است. وجود چنین گروههایی در اواسط دههٔ ۱۹۸۰ توسط گریگورچوک کشف شد. در مورد قدم‌زدن تصادفی روی چنین گروههایی اطلاعات کمی در دست است، اما تحقیقات فزاینده‌ای در مورد ساختار ردهٔ بزرگی از مثالها انجام می‌شود ([BGS] را ببینید).

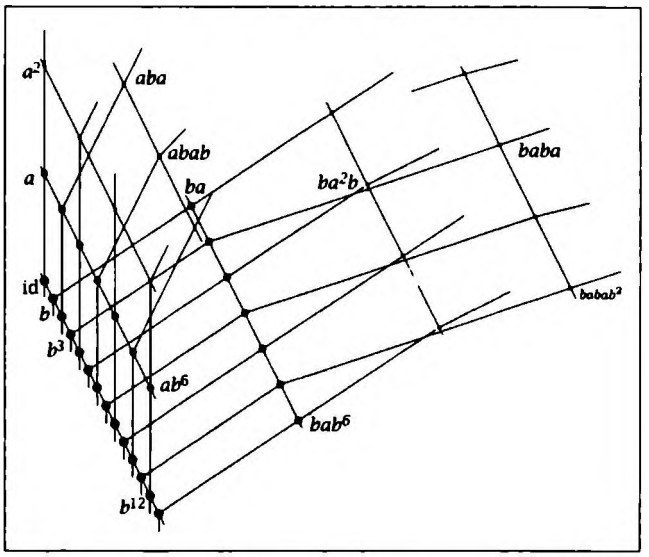
گروههای حل‌پذیر

بنا به قضیه‌ای از میلنر و ولف، گروههای حل‌پذیر یا رشد چندجمله‌ای و یا رشد نمایی دارند. شکل ۳ را ببینید. این بحث را با ذکر نتیجه‌ای بسیار رضایت‌بخش در مورد گروههای چند دوری[2] آغاز می‌کنیم. بنا به یک قضیهٔ ساختاری عمیق، گروههای چنددوری، با تقریب توسیع متناهی، زیرگروههای میانگین‌پذیر گسستهٔ گروههای لی همبند هستند. در اینجا لفظ گسسته به توپولوژیی که زیرگروه از گروه مرجع به ارث برده برمی‌گردد. گروههای چنددوری را به‌دلیل ساختار جبری خاص آنها می‌توان خوب درک کرد، و حاصل آن، نتیجهٔ رضایت‌بخش زیر است.

قضیهٔ ۵. فرض کنید G زیرگروه میانگین‌پذیر گسستهٔ یک گروه لی همبند باشد. در این‌صورت G متناهی‌مولد است و نیز یا عدد صحیح dای موجود است که $V(n) \approx n^d$ یا $V(n) \approx n^d$ رشد نمایی دارد. در حالت دوم، $I(n) \approx n/\log n$، $\log\phi(n) \approx -n^{1/3}$.

کران پایین $\log\phi$ را آلکسوپولوس و کران بالای I را پیت به‌دست آورده است. کرانهای دیگر از قضیهٔ ۴ نتیجه می‌شوند. یکی از ساده‌ترین مثالهای

1. Coulhon 2. polycyclic



شکل۴ بخشی از گراف کیلی $\mathbb{A}_2 = \langle a, b : aba^{-1} = b^2 \rangle$. برای این گراف کیلی داریم: $\log \phi(n) \approx -n^{1/3}$، $I(n) \approx n/\log n$.

گروه چند دوری با رشد نمایی، ضرب نیم‌مستقیم $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}^2$ است که عمل گروه آن برای $(x,u),(y,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2$ به شکل

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{با} \quad (x,u)\cdot(y,v) = (x+y, u + A^x v)$$

تعریف می‌شود. این نسخه‌ای گسسته از گروه لی Sol است که یکی از ۸ هندسهٔ به‌کار برده شده در توصیف خمینه‌های ۳بعدی در برنامهٔ هندسی‌سازی ترستن است.

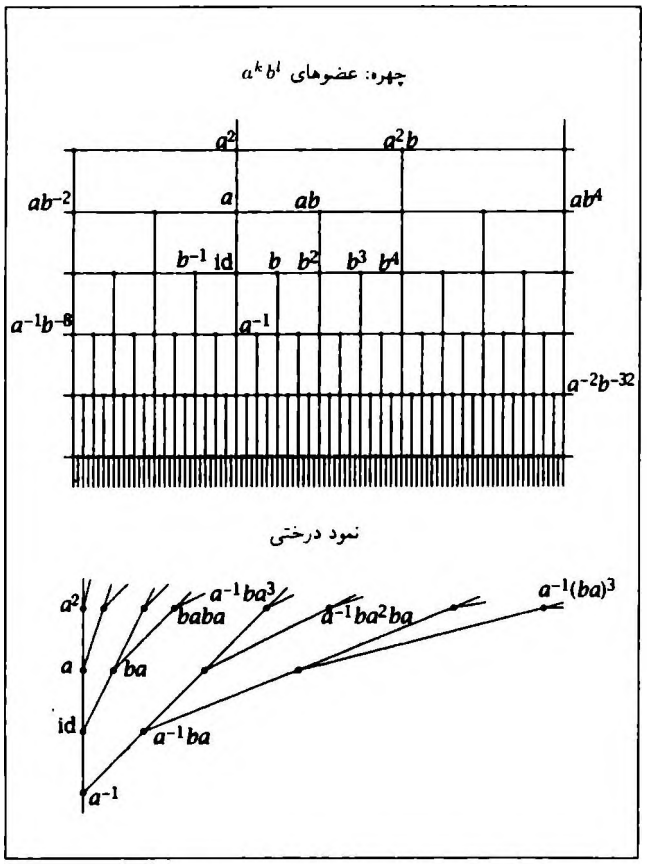
برای گروههای حل‌پذیر کلی با رشد حجم نمایی، اوضاع متفاوت است. ساده‌ترین گروههای حل‌پذیر، گروههای فراآبلی هستند که گروه تعویضگر آنها آبلی است. حتی در این ردهٔ گروهها، رفتار توابع I و ϕ ممکن است تغییرات وسیعی داشته باشد. به‌ازای $\lambda > 1$، فرض کنید $\mathbb{A}_\lambda$ زیرگروهی از گروه آفین $ax+b$ باشد که توسط $u_\pm(x) = x \pm 1$ و $v_\pm^\lambda(x) = \lambda^{\pm 1}x$ تولید می‌شود. این گروهها فراآبلی هستند و رشد حجم نمایی دارند. آنها در $ax+b$ گسسته نیستند و بیشترشان چند دوری نیستند. وقتی λ عدد صحیح است، $\mathbb{A}_\lambda$ را می‌توان به‌صورت $\langle a, b : aba^{-1} = b^\lambda \rangle$ عرضه کرد که در آن $a = v_+$ و $b = u_+$ (اینها به‌نام گروههای بامسلاگ‌سولیتار[1] نیز شهرت دارند).

شکلهای ۴ و ۵ گراف کیلی $\mathbb{A}_2$ را نشان می‌دهند. وقتی λ جبری است، برای $\mathbb{A}_\lambda$ داریم $I(n) \approx n/\log n$ و $\log \phi(n) \approx -n^{1/3}$. وقتی λ متعالی است، $\mathbb{A}_\lambda$ با حاصلضرب تاجی $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ یکریخت است و برای آن، $\log \phi(n) \approx -n^{1/3}(\log n)^{2/3}$.

در مطالعهٔ گروههای فراآبلیْ حاصلضربهای تاجی $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$ نقش مهمی ایفا می‌کنند. اینها را «گروههای چراغ‌دار[2]» نیز می‌نامند. فرض کنید $\mathbb{Z}^d$ نقشهٔ

1. Baumslag-Solitar

۲. lamplighter. در گذشته به شخصی که چراغهای خیابان را روشن می‌کرد اطلاق می‌شد.

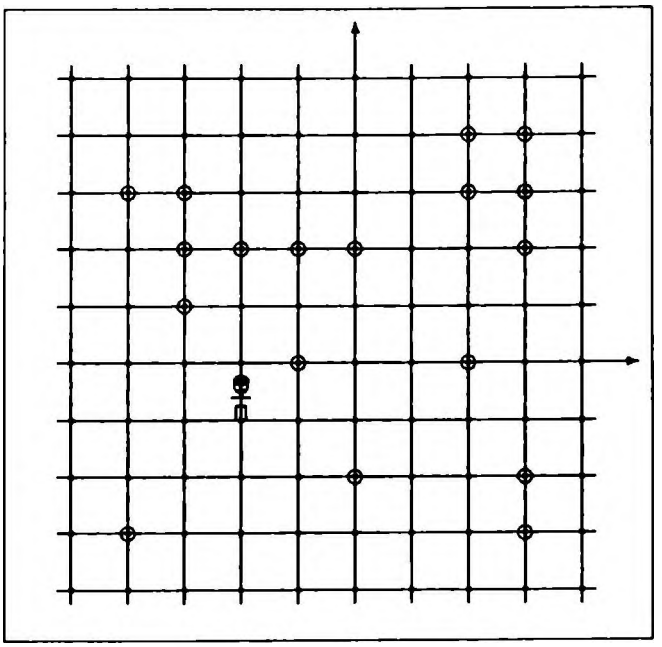


شکل۵ چهره و نمود $\mathbb{A}_2 = \langle a, b : aba^{-1} = b^2 \rangle$.

(چندبعدی و نامتناهی) یک شهر باشد. در هر چهارراه یک، لامپ که می‌تواند خاموش یا روشن باشد وجود دارد (تنها تعدادی متناهی لامپ می‌تواند روشن باشد). به‌علاوه، یک چراغ‌دار با گشتن در شهر چراغها را روشن و خاموش می‌کند. هر عضو $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^d$ را می‌توان به‌صورت «منظرهٔ» تشکیل شده از لامپها و چراغ‌دار که در جایی ایستاده است، تصوّر کرد. شکل ۶ را ببینید. توجه کنید که این توصیف روشن، از نشان‌دادن چگونگی ضرب دو عنصر عاجز است. با این حال، حرکتهای اساسی در قدم‌زدن تصادفی طبیعی روی $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^d$ را می‌توان به‌صورت $2d$ حرکت ممکن چراغ‌دار به رئوس مجاور به‌همراه عملِ خاموش یا روشن‌کردن چراغ در رأسی که در آن قرار می‌گیرد توصیف کرد. قضیه‌ای از دانسکر[1] و وارادان[2] می‌گوید N_n، تعداد نقاطی که با قدم‌زدن تصادفی ساده روی $\mathbb{Z}^d$ تا زمان n فتح می‌شوند، در رابطهٔ $\log \mathbb{E}(e^{-\lambda N_n}) \sim -c(\lambda,d)n^{d/(d+2)}$ وقتی $n \to \infty$ صدق می‌کند که در آن $\mathbb{E}$ امید ریاضی است. معلوم می‌شود تنها چیزی که باید ثابت کرد این است که $\log \phi(n) \approx -n^{d/(d+2)}$ روی گروه چراغ‌دار $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^d$ برقرار است [PSa].

مثالهای فوق نشانگر این است که برای گروههای فراآبلی متناهی‌مولد با رشد نمایی، بینهایت رفتار متفاوت از ϕ سرمی‌زند (در حقیقت، با استدلالهایی اضافی، دیده می‌شود که این امر در مورد گروههای فراآبلیِ متناهیاً عرضه شده صادق است). برای نمود برابرمحیطی I هم اوضاع به همین شکل است و ارشلر (دیوبنیا)[3] در یک تحقیق امیدبخش در حال به‌دست آوردن

1. Donsker 2. Varadhan 3. Erschler (Dyubina)



شکل ۶ یک عضو گروه دوبعدی چراغدار $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^2$.

کرانهای دقیق برابرمحیطی جدیدی برای حاصلضربهای تاجی است. دو مسألهٔ مبارزطلبِ حل‌نشده و مرتبط با هم در مورد گروههای فراآبلی متناهی‌مولد به‌شرح زیرند: (الف) رده‌بندی تمام رفتارهای ممکن ϕ و I؛ (ب) آیا رفتار ϕ رفتار I را معیّن می‌کند و برعکس؟ بنابراین علی‌رغم برخی دستاوردهای قابل توجه، درک کامل رفتار قدم‌زدن تصادفی و برابرمحیطی روی گروههای متناهی‌مولد، حتی در مورد گروههای حل‌پذیر هنوز بسیار دور از دسترس است. این امر در تقابل با نتایجی در مورد پخش ناوردا روی گروههای لی همبند است که می‌خواهیم آنها را توضیح دهیم؛ در مورد اخیر، به یمن وجود نظریهٔ ساختاری ساده‌تر و رضایت‌بخش‌تر، تصویر کاملی پدیدار شده است.

فرایندهای پخش ناوردا

حال بیایید صحنه را قدری تغییر دهیم و فرایندهای پخش ناوردا از چپ را روی گروههای موضعاً فشردهٔ همبند بررسی کنیم. حرکت براونی روی $\mathbb{R}^d$ مثال کلاسیک در این زمینه است و بیشتر مطالعات روی آن انجام گرفته است. این فرایندها را می‌توان به‌طرق مختلف مشخص نمود، ولی خواصِ حیاتیِ آنها داشتنِ نموهای مستقل مانا و پیوستگی مسیر است. به بیانِ دیگر، بنا به قضیه‌ای از هانت[1]، مولّدهای بینهایت کوچک[2] آنها عملگرهای دیفرانسیل مرتبهٔ دومی هستند که به شکل زیر نوشته می‌شوند

$$L = \sum_i X_i^2 + X_0$$

که در آن هر X_i میدان برداری ناوردا از چپ است و بنابراین می‌توان آن‌را عضوی از جبر لی در نظر گرفت. حتی اگر G گروه لی نباشد این امر معنی

1. Hunt 2. infinitesimal generators

دارد، زیرا گروههای همبند موضعاً فشردهٔ حد تصویری گروههای لی هستند (به‌عنوان مثال، [H] را ببینید). تشابه این با قدم‌زدن تصادفی جالب توجه است و نقش مولّدها را در اینجا X_iها ایفا می‌کنند.

خانواده‌ای از اندازه‌های احتمال $(\mu_t)_{t>0}$ نیم‌گروه پیچشی را تشکیل می‌دهد اگر $\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$ و $\mu_t \to \delta_e$ وقتی $t \to 0$. این نیم‌گروه گاوسی است اگر به‌ازای هر همسایگی U از e، وقتی $t \to 0$، $t^{-1}\mu_t(G/U) \to 0$. این خاصیت با پیوستگی مسیرهای نمونه‌ای فرایند تصادفیِ مربوط معادل است. برای هر فرایند بخش ناوردا از چپ $Z = (Z_t)$ روی گروه G، قانونهای μ_t برای Z_t، $t > 0$، یک نیم‌گروه پیچشی گاوسی ایجاد می‌کند که برای آن تابع $u(t,x) = \int_G f(x,y)d\mu_t(y)$ جواب معادلهٔ پخش گرمای $(\partial_t - L)u = 0$، $u(0,x) = f(x)$ است.

برای تکمیل این تصویر با دورنمایی هندسی، یک «تابع فاصلهٔ» طبیعی $d(x,y)$ (با مجازشمردن مقدار ∞) به‌نام فاصلهٔ ذاتی یا فاصلهٔ کارنو-کاراتئودوری، معرفی می‌کنند که به‌صورت

$$d(x,y) = \sup\{f(x) - f(y) : f \in C^\infty(G), \Gamma(f,f) \le 1\}$$

تعریف می‌شود که در آن $\Gamma(f,f) = \frac{1}{2}(Lf^2 - 2fLf) = \sum_i |X_i f|^2$ «مجذور میدان»[1] است. این تعریف کلیتر است ولی اساساً با تعاریف دیگری که برپایهٔ ایدهٔ طول مسیر هستند معادل است. خصوصاً اگر G یک گروه لی باشد و L عملگر لاپلاس-بلترامی یک ساختار ریمانی ناوردا از چپ باشد، آنگاه d فاصلهٔ ریمانی است. تابع رشد حجم $V(t)$ی متناظر با آن به‌صورت حجم هر گوی متری با شعاع t نسبت به اندازهٔ هار ناوردا از چپ روی G تعریف می‌شود.

سؤالهای اصلی در مورد این بخشها عبارت‌اند از: آیا μ_t چگالی همواری برحسب اندازهٔ هار دارد؟ و اگر دارد، رفتار این چگالی چیست؟ رفتار این چگالی چگونه به خواص تابع فاصلهٔ d، به تابع رشد حجم، و به خانوادهٔ میدانهای برداری (X_i) مربوط می‌شود؟ چگونه با ساختار جبری گروه G ارتباط می‌یابد؟ با فرض اینکه $(\mu_t)_{t>0}$ یک چگالی پیوستهٔ $x \mapsto \mu_t(x)$ دارد، مقدار $\mu_t(e)$ در مبدأ دقیقاً جایگزین احتمال بازگشت $\phi(n)$ در قسمت اول مقاله است و اساسیترین سؤال مربوط است به رفتار $\mu_t(e)$ وقتی‌که t به صفر یا بینهایت میل می‌کند.

برای اختصار، توجه خود را به حالتی معطوف می‌کنیم که $L = \sum X_i^2$ یعنی $X_0 = 0$. حالتی که $X_0 \neq 0$، جالب است و هم به استدلالهای اضافی و هم به ایده‌های متفاوتی نیاز دارد، اما این بیشتر یک مسألهٔ تکنیکی است.

نظریهٔ موضعی

G را یک گروه لی همبند با بعد n در نظر بگیرید. فرض طبیعی در این زمینه این است که خانوادهٔ (X_i) جبر لی G را تولید می‌کند. این بدان‌معنی است که X_iها به‌همراه تعویضگرهایشان از هر مرتبه‌ای، به‌طور خطی جبر لی را تولید می‌کنند. ما همواره این فرض را در نظر داریم. برای عملگر دیفرانسیل مرتبهٔ دوم L، این شرط با شرط مشهور «زیربیضوی بودن» هورماندر[2] متناظر

1. carré du champs 2. Hörmander

است. نظریه‌ای موضعی که درصدد بیان آن هستیم می‌تواند (و باید) به‌عنوان مدلی برای بررسی عملگرهای دیفرانسیل مرتبهٔ دوم زیربیضوی عمومی که کار عمیقتر و مشکلاتری است در نظر گرفته شود. هندسهٔ فاصلهٔ d به خودی خود یک عرصهٔ تحقیقاتی به‌نام هندسهٔ زیرریمانی است و ارتباط نزدیکی با نظریهٔ کنترل دارد. از یک جهت ساختار گروه در اینجا بی‌اهمیت است هر چند به ساده‌سازیهای مهمی منجر می‌گردد ([V+] را ببینید).

تحت شرط هورماندر، μ_t به‌ازای هر $t > 0$ یک چگالی مثبت هموار دارد، فاصلهٔ d نسبت به هر فاصلهٔ اقلیدسی موضعی مشخص، پیوستهٔ هولدری است و عملگر L زیربیضوی است. عدد صحیح $m \in [n, 1 + \binom{n}{2}]$، وابسته به خانوادهٔ (X_i)، موجود است که وقتی $t \to 0$، $\mu_t(e) \sim ct^{-m/2}$. این m با این حقیقت نیز که $V(t) \sim bt^m$ وقتی $t \to 0$، مشخص می‌شود. درست مانند حالت توابع همساز در فضای اقلیدسی، ثابت $C = C_L$ موجود است که به‌ازای هر $r \in (0, 1)$ و هر جواب مثبت $Lu = 0$ در d-گوی $B(x, r)$ داریم

$$\sup_{B(x,r/2)} u \le C \inf_{B(x,r/2)} u \qquad \text{(GH)}$$

ماهیت هندسی این نابرابری هارنک آن را به‌صورت یک ابزار قوی درمی‌آورد و نقش ایفاشده توسط فاصلهٔ d را روشن می‌سازد.

پس تحت شرط هورماندر، نیم‌گروههای گاوسی متقارن روی گروههای لی بسیار خوش‌رفتار هستند. قبل از بحث دربارهٔ رفتار آنها در درازمدت و در مقیاس بزرگ، مختصراً در حالتی که G گروه لی نیست، آنچه را به‌طور موضعی رخ می‌دهد بررسی می‌کنیم. این حالت به شکلی بسیار نابدیهی نظریهٔ عمومی آنالیز و هندسه روی فضاهای دیریکله را روشن می‌کند. مثالهای بسیار ساده ولی جالب، حاصلضرب تعداد شمارایی گروه دایره و حاصلضرب تعداد شمارایی گروه متعامد با ابعاد مختلف‌اند. در این حالات، آیا $(\mu_t)_{t>0}$ می‌تواند به‌ازای هر $t > 0$ چگالی پیوستهٔ خوبی داشته باشد؟ با وجود اینکه نظریهٔ این‌گونه نیم‌گروههای گاوسی در [H] عرضه شده است، این پرسش در آنجا پاسخ داده نشده است. طبیعی است که (حداقل در ابتدا) توجهمان را به ناورداهای دوطرفه یعنی نیم‌گروههای گاوسی مرکزی روی گروههای فشرده معطوف کنیم. در حقیقت، در حالت چنبرهٔ بینهایت بعدی $\mathbb{T}^\infty$ مسائل حل‌نشدهٔ جالب و مبارزطلب زیادی وجود دارد؛ در این حالت، مولّد بینهایت کوچک را می‌توان به‌سادگی به‌صورت $L = \sum_{i,j} a_{i,j}\partial_i\partial_j$ نوشت و این مجموع نامتناهی را چنین تعبیر کرد که روی توابعی که فقط به تعدادی متناهی مختص وابسته‌اند، عمل می‌کند.

نتیجه‌ای که اخیراً بندیکف[1] و نویسندهٔ مقاله به‌دست آورده‌اند، این است که هر گروه فشرده، همبند، موضعاً همبند و متریک‌پذیر G تعداد زیادی نیم‌گروه گاوسی مرکزی با یک چگالی مثبت پیوستهٔ هموار نسبت به اندازهٔ هار دارد. کمیت $\mu_t(e)$ با میل‌کردن t به صفر می‌تواند به اشکال متفاوت زیادی، ازجمله با رفتارهایی نظیر $e^{[\log 1/t]^{1+\lambda}}$، $e^{t^{-\lambda}}$ و $e^{e^{t^{-\lambda}}}$ و غیره که $\lambda > 0$، رشد انفجارگونه داشته باشد.

یک شرط کافی (که خیلی با شرط لازم فاصله دارد) برای اینکه $(\mu_t)_{t>0}$ چگالی پیوسته‌ای داشته باشد این است که فاصلهٔ ذاتی وابسته به آن پیوسته باشد. این شرط نیز یک نابرابری بیضوی هارنک را ایجاب می‌کند، به این صورت که اگر d پیوسته باشد آنگاه به‌ازای هر دامنهٔ Ω و هر مجموعهٔ فشردهٔ K در Ω، ثابت $C(\Omega, K)$ موجود است به طوری‌که هر جواب مثبت پیوستهٔ $Lu = 0$ در Ω در شرط

$$\sup_K u \le C(\Omega, K) \inf_K u \qquad \text{(H)}$$

صدق می‌کند.

ببینید که ماهیت هندسی نابرابری در اینجا گم شده است، به این مفهوم که نمی‌دانیم چگونه با انتخاب زوج (Ω, K) به‌صورت گویهای هم‌مرکز مناسبی (نظیر آنچه در (GH) بود)، ثابت $C(\Omega, K)$ را مستقل از مقیاس بکنیم. این حقیقتِ شگفت‌انگیز را که یک چنین نابرابری هارنک در ابعاد نامتناهی می‌تواند وجود داشته باشد، بندیکف و برگ[1] به‌طور مستقل در پایان‌نامه‌های دکتری خود کشف کردند. جالب توجه این است که نابرابری (H) را می‌توان برحسب رفتار $\mu_t(e)$ مشخص کرد.

قضیهٔ ۶. فرض کنید L مولّد بینهایت کوچک یک نیم‌گروه گاوسی مرکزی متقارن $(\mu_t)_{t>0}$ روی یک گروه فشردهٔ همبند G باشد. در این صورت L در نابرابری بیضوی هارنک (H) صادق است اگر و تنها اگر $\log\mu_t(e) = o(1/t)$ وقتی $t \to 0$، [BS].

یکی از اجزای ضروریِ اثبات قضیهٔ ۶، بررسی پخشهای ناوردای دوطرفه روی گروههای لی سادهٔ فشرده است که نقش ایفا شده توسط بعد را آشکار می‌سازد و شامل رفتار در زمان کوتاه، متوسط و طولانی است.

رفتار در درازمدت روی گروههای لی

اکنون به گروههای لیِ همبند نافشرده برمی‌گردیم و رفتار $\mu_t(e)$ را در درازمدت وقتی t به بینهایت میل می‌کند، تحت این شرط ثابت که خانوادهٔ (X_i) جبر لی را تولید کند، مورد بحث قرار می‌دهیم. این رفتارِ در زمان طولانی حقیقتاً قلب مطلب است، زیرا همان جایی است که ساختار گروه مهمترین نقش را ایفا می‌کند.

در آغاز [یادآور می‌شویم که] رفتار رشد حجم V در بینهایت، مستقل از انتخاب خانوادهٔ (X_i) است. گیوارک در اوایل دههٔ ۱۹۷۰ ثابت کرد که رشد حجم در بینهایت یا نمایی است یا با یک تابع توانی قابل مقایسه است که نمای Dی آن عدد صحیحی است که تنها به گروه مورد بحث وابسته است. گروهی که برای آن V رفتار چندجمله‌ای از خود بروز می‌دهد گروه نوع (R) نامیده می‌شود که R نمایندهٔ rigid [صلب] است. نمایش الحاقی G با ارتقاء[2] عمل خودریختی داخلی $x \mapsto axa^{-1}$ به جبر لی به‌دست می‌آید. گروه نوع (R) را می‌توان به‌طور جبری با استفاده از مفاهیم نمایش الحاقی، که ویژه‌مقدارهایش موهومی محض هستند، مشخص کرد. گروه $U(m)$ متشکل از تمام ماتریسهای حقیقی بالا مثلثی تک‌توانِ حقیقی $m \times m$ از نوع (R) است و برای آن، $V(t) \approx t^D$ که $D = \frac{1}{6}(m-1)m(m+1)$.

گروههای نوع (R) میانگین‌پذیر و تک‌مدولی هستند، یعنی، دارای اندازهٔ هار ناوردا از دوطرف‌اند، اما بسیاری گروههای لیِ میانگین‌پذیر تک‌مدولی

1. Bendikov

1. Berg 2. lift

با رشد نمایی (که بنابراین، از نوع (R) نیستند) وجود دارند. ساده‌ترین مثال چنین گروهی، گروه Sol است که در بخش مربوط به قدم‌زدن تصادفی روی گروههای حل‌پذیر معرفی شد. Sol را می‌توان به‌صورت حاصلضرب نیم‌مستقیم $\mathbb{R}^2$ در $\mathbb{R}$ با عمل ضرب در $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ توصیف کرد.

رفتار $\mu_t(e)$ روی گروههای لی میانگین‌پذیر تک‌مدولی با قضیهٔ زیر تشریح می‌شود.

قضیهٔ ۷. برای هر گروه لی همبند تک‌مدولی میانگین‌پذیر، اگر $V(t) \approx t^D$ وقتی $t \to \infty$، آنگاه $\mu_t(e) \approx t^{-D/2}$ وقتی $t \to \infty$. اگر V نمایی باشد آنگاه $\log \mu_t(e) \approx -t^{1/3}$ وقتی $t \to \infty$.

کران دوطرفه تحت رشد چندجمله‌ای از آنِ واروپولوس است. در مورد رشد نمایی، کران پایین از آنِ الکسوپولوس و کران بالا از آنِ واروپولوس است که برای دومی اثباتهای مجزای مستقلی توسط هبیش[1] و رابینسن عرضه شده است. [V+] را ببینید. قضیهٔ ۷ مشابه قضیهٔ ۵ است و می‌توان آن‌را با گزاره‌ای در مورد نمود برابرمحیطی، همانند قضیهٔ ۵، تکمیل کرد. ([P]، [V+] را ببینید). این دو نتیجه، مربوط به قدم‌زدن تصادفی و پخش، همزمان پدیدار شدند و با روشهای مشابه قابل اثبات‌اند. اخیراً در اثری از الکسوپولوس [A] قضیهٔ ۷ با رفتار مجانبی در درازمدت روی گروههای با رشد حجم چندجمله‌ای، یعنی گروههای نوع (R)، تکمیل شده است. رهیافت الکسوپولوس، که با ساختار جبری گروههای نوع (R) ارتباط محکمی دارد، از تکنیکها و ایده‌های حوزه‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE)، به‌نام نظریهٔ همگن‌سازی، گرفته شده است که با رفتار بزرگ، مقیاس عملگرهای دیفرانسیلی با ضرایب دوره‌ای در $\mathbb{R}^n$ سروکار دارد.

البته، برای گروههای میانگین‌ناپذیر، $\mu_t(e)$ با سرعتی نمایی زوال می‌یابد؛ این سرعت با فاصلهٔ طیفی λ ی $L = \sum X_i^2$ توصیف می‌شود که به‌صورت اینفیمم خارج‌قسمت رالی[2]

$$\frac{\int_G \sum |X_i f|^2 dv}{\int_G |f|^2 dv}, f \neq 0, f \in L^2(G, v)$$

تعریف می‌شود و در آن v اندازهٔ هار ناوردا از راست روی G است. فاصلهٔ طیفی صفر می‌شود اگر و تنها اگر G میانگین‌پذیر باشد. باید خاطرنشان کرد که در تقابل صریح با حالتِ گروههای متناهی‌مولد، در ردهٔ گروههای موضعاً فشردهٔ همبند نظریهٔ ساختاری رضایت‌بخشی موجود است که بین گروههای میانگین‌پذیر و میانگین‌ناپذیر تمایز می‌گذارد [Pa]. گروههای لی همبند میانگین‌ناپذیر معمولی، همگی گروههای لی ناافشردهٔ نیم‌ساده هستند مثل $SL_n(\mathbb{R})$، و مؤلفهٔ همبند همانی در $SO(p,q)$. یکی از نتایج اولیهٔ مربوط به پخش روی گروههای لی قضیهٔ حدی مرکزی موضعی بوگرول[3] است که همانند بالا برای گروههای لی نیم‌ساده، یک نتیجهٔ مجانبی دقیق به شکل $\mu_t(e) \sim ct^{-a/2}e^{-\lambda t}$ وقتی $t \to +\infty$ به‌ازای عدد صحیحی چون $a \geq 3$ و $\lambda > 0$ به‌دست می‌دهد. عموماً چنین نتایج دقیقی بسیار سخت حاصل می‌گردند. چه در حالت جابه‌جایی و چه در حالت نیم‌ساده، نظریهٔ نمایش ابزار خوبی برای این مقصود است اما برای گروههای دیگر، ازجمله گروههای حل‌پذیر و پوچتوان، تا حد زیادی در ارائهٔ اطلاعات مفید در مورد رفتار $\mu_t(e)$ ناتوان است.

درک دقیقِ رفتار $\mu_t(e)$ در درازمدت و در کلیترین حالت، علی‌رغم نظریهٔ ساختاری گروههای لی سالها دور از دسترس به‌نظر می‌رسید. اما در ۱۰ سال اخیر واروپولوس نظریه‌ای ارائه کرده است که آنچه را برای هر نیم‌گروه گاوسی متقارن روی گروههای لی حقیقی همبند رخ می‌دهد توصیف می‌کند، چه گروه میانگین‌پذیر باشد چه نباشد، چه تک‌مدولی باشد چه نباشد. شکل نتیجهٔ اصلی شبیه قضیهٔ ۷ است اما اثباتها متفاوت‌اند. ماهیت اثبات قضیهٔ ۷ بیشتر آنالیزی است در حالی‌که اثبات قضیهٔ ۸ که در پایین آمده شامل احتمالات، جبر و هندسه نیز هست.

واروپولوس [Vb] گروههای لی حقیقی همبند را به دو دسته تقسیم کرد، (B) و (NB). این رده‌بندی جبری آنقدر پیچیده است که نمی‌توان در اینجا دقیقاً توصیفش کرد. تمام گروههای نیم‌ساده (غیرفشرده)، مثلاً $SL_n(\mathbb{R})$، در (NB) هستند. در مورد گروههای میانگین‌پذیر، این رده‌بندی به رده‌بندی ساده‌تری تبدیل می‌شود، (C) در مقابل (NC)، که برحسب مفاهیم نمایش الحاقی و هندسهٔ ریشه‌ها(ی تعمیم‌یافته) [Va] قابل درک است. ردهٔ (R) از گروههای صلب دقیقاً با آن رده از گروههای (NC) که تک‌مدولی هستند تطبیق می‌کند. مثالهای دیگری از گروههای (NC) گروههای AN هستند که از تجزیهٔ KAN ایواساوا[1] برای گروههای نیم‌ساده آمده‌اند، مثلاً گروه $ax + b$. برای توصیف ساده‌ترین خانواده از مثالهایی که در آنها گروههای (C) و (NC) هر دو ظاهر می‌گردند، قرار می‌دهیم $\mathbb{S}_\ell = \mathbb{R} \ltimes_\ell \mathbb{R}^2$ که در آن $\ell = (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$ و حاصلضرب به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$(x, u) \cdot (y, v) = (x + y, u + A_\ell^x v)$$

که

$$A_\ell = \begin{pmatrix} e^{\ell_1} & 0 \\ 0 & e^{\ell_2} \end{pmatrix}$$

در این صورت $\mathbb{S}_\ell$ از نوع (C) است اگر $\ell_1\ell_2 < 0$ و از نوع (NC) است اگر $\ell_1\ell_2 > 0$.

نتیجهٔ اصلی واروپولوس، رده‌های (B) و (NB) (و بنابراین (C) و (NC)) را برحسب رفتار $\mu_t(e)$ در درازمدت توصیف، و تمام رفتارهای ممکن را رده‌بندی می‌کند.

قضیهٔ ۸. (۱) به‌ازای هر گروه از نوع (NB) و هر $L = \sum X_i^2$، عدد حقیقی نامنفی a (که ممکن است به L وابسته باشد) موجود است که $\mu_t(e) \approx t^{-a}e^{-t\lambda}$ وقتی $t \to \infty$. (۲) به‌ازای هر گروه از نوع (B)، $\log(e^{t\lambda}\mu_t(e)) \approx -t^{1/3}$ وقتی $t \to \infty$. در اینجا λ فاصلهٔ طیفی عملگر متناظر L است.

عوامل t^{-a} و $e^{-t^{1/3}}$ را که به‌ترتیب در حالات (NB) و (B) ظاهر می‌شوند، می‌توان برحسب احتمال اینکه یک حرکت براونی اقلیدسی خاص در یک ناحیهٔ محدّب خاص تا زمان t باقی بماند تفسیر کرد. ماهیت دقیق

1. Hebisch 2. Raleigh 3. Bougerol

1. KAN Iwasawa decomposition

حرکت براونی (یعنی ماتریس کوواریانس آن) به‌وسیلهٔ ساختار جبری گروه و به‌وسیلهٔ L تعیین می‌شود. ناحیهٔ محدّب توسط هندسهٔ ریشه‌ها تعیین می‌گردد. این ناحیه، فشرده است و به اینکه گروه از نوع (B) یا (NB) باشد بستگی ندارد و این دلیلِ رفتار $e^{-t^{1/2}}$ در مقابل رفتار چندجمله‌ای است. آگاهی دقیقی از ماتریس کوواریانس حرکت براونی و از ناحیهٔ همبند بالا برای تعیین ثابت a در حالت (NB) ضروری است. در حقیقت، محاسبهٔ مقدار دقیق a نوعاً بسیار دشوار است و این مقدار به‌طور پیوسته برحسب L تغییر می‌کند.

ادامهٔ این نتایج به ارائهٔ توصیفی از رفتار توانهای پیچشی هر تابع نامنفی متقارن پیوسته با محمل فشرده منجر می‌شود. این رفتار دقیقاً تقلیدی از رفتار نیم‌گروههای پیچشی گاوسی متقارن است برحسب اینکه گروه از نوع (B) یا (NB) باشد. نتیجه را، هر گاه با استفاده از مفاهیم توان پیچشی بیان شده باشد، می‌توان به‌طور سرراست در قالب گروههای همبند موضعاً فشرده فرمولبندی کرد. محدودیت همبندی G ضروری است، و این را در مورد گروههای متناهی‌مولد $\mathbb{Z}^d$ یا $\mathbb{Z}_2$ که در بخش مربوط به گروههای حل‌پذیر مورد بحث قرار گرفت، دیدیم.

در خاتمه [یادآور می‌شویم که]، شرحی هندسی از رده‌های (B) و (NB) موجود است که نکته‌ای نهایی به این رده‌بندی جالب توجه می‌افزاید [Vc]؛ این شرح شامل ناورداهای پرکردن[1] است که در زمینه‌های متنوعی، خصوصاً توسط گروموف، بررسی شده‌اند. ناوردای پرکردن ۲بعدی $\psi_2(t)$ یک خمینهٔ ریمانی ساده‌ـهمبند به‌صورت زیر تعریف می‌شود. برای هر طوقهٔ مفروض به طول حداکثر t، تمام قرصهای غوطه‌وری را که مرزشان این طوقه باشد در نظر می‌گیریم و اینفیمم مساحت تمام این قرصها را می‌یابیم. آنگاه $\psi_2(t)$ سوپریمم این مساحتهای اینفیممی به‌ازای همهٔ این طوقه‌هاست. به‌ازای هر بعد $k = 2, \ldots, n-1$، که nبعد توپولوژیک خمینه است، یک kـناوردای پرکردن وجود دارد. خصوصاً، $\psi_{n-1}(t)$ بزرگترین حجم ممکن یک مجموعهٔ فشرده با مرز هموار را که حجم $(n-1)$بعدی آن حداکثر t باشد به‌دست می‌دهد و رابطهٔ نزدیکی با نمود برابرمحیطی دارد. اساساً یک گروه (NB) است اگر و تنها اگر همهٔ ناورداهای پرکردن آن از بالا به یک چندجمله‌ای محدود شده باشند، در حالی که یک گروه (B) است اگر و تنها اگر حداقل یکی از ناورداهای پرکردن آن سریعتر از هر چندجمله‌ای رشد کند. بنابراین، برای هر گروه لی حقیقی همبند، سه رده‌بندی معادل موجود است: رده‌بندی آنالیزی/ احتمالاتی بر طبق رفتار نیم‌گروههای گاوسی متقارن در درازمدت، رده‌بندی هندسی برحسب ناوردای پرکردن و رده‌بندی جبری (B) در برابر (NB). شکّی نیست که این نتایج بنیادی به پیشرفتهای بیشتری در زمینهٔ پخشهای ناوردا، آنالیز همساز و هندسه روی گروههای لی منجر خواهد شد.

مراجع

[A] G. ALEXOPOULOS, Centered sub-Laplacians on Lie groups of polynomial volume growth, *Mem. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[BGS] L. BARTHOLDI, R. GRIGORCHUK, and Z. ŠUNIK, *Branch Groups*, Handbook of Algebra, vol. 3 (M. Hazewinkel, ed.), North-Holland, Amsterdam, 2001.

[BS] A. BENDIKOV and L. SALOFF-COSTE, Central Gaussian semigroups of measures with continuous density, *J. Funct. Anal.*, to appear.

[D] P. DIACONIS, *Group Representations in Probability and Statistics*, IMS Lecture Notes Monograph Ser., Hayward, CA, 1986.

[H] H. HEYER, *Probability Measures on Locally Compact Groups*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[Ho] M. HOSTINSKY, *Méthodes Générales du Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.

[L] A. LUBOTZKY, *Discrete Groups, Expanding Graphs* and *Invariant Measures*, Birkhäuser, Basel, 1994.

[Pa] A. PATERSON, *Amenability*, Math. Surveys and Monographs, vol. 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[P] CH. PITTET, The isoperimetric profile of homogeneous Riemannian manifolds, *J. Differential Geom.* **54** (2000), 255-302.

[PSa] CH. PITTET and L. SALOFF-COSTE, Amenable groups, isoperimetric profiles and random walks, *Geometric Group Theory Down Under, Canberra 1996* (J. Cossey et al., eds.), de Gruyter, Berlin, 1999, pp. 293-316.

[Va] N. VAROPOULOS, Diffusion on Lie groups I, II, III, *Canad. J. Math.* **46** (1994), 438-448, 1073-1093; **48** (1996), 641-672.

[Vb] ———, Analysis on Lie groups, *Rev. Mat. Iberoamericana* **12** (1996), 791-917.

[Vc] ———, A geometric classification of Lie groups, *Rev. Mat. Iberoamericana* **16** (2000), 49-136.

[V+] N. VAROPOULOS, L. SALOFF-COSTE, and T. COULHON, *Analysis and Geometry on Groups*, Cambridge Tracts in Math., vol. 100, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[W] W. WOESS, *Random Walks on Infinite Graphs and Groups*, Cambridge Tracts in Math., vol. 138, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

******

• Laurent Saloff-Coste, "Probability on groups: random walks and invariant diffusions", *Notices Amer. Math. Soc.*, (9) **48** (2001) 968-977.

* لوران سلف‌کاست، دانشگاه کورنل، آمریکا

lsc@math.cornell.edu.

1. filling invariants

فرضیهٔ پیوستار، بخش I•

هیو وودین*

ترجمهٔ نفیسه کسروی

مقدمه

به‌احتمال قوی مشهورترین مسألهٔ به لحاظ صوری حل‌ناپذیر ریاضیات مسألهٔ اول هیلبرت است:

فرضیهٔ پیوستار کانتور: فرض کنید که $X \subseteq \mathbb{R}$ مجموعه‌ای نامشمار باشد، در این صورت یک نگاشت دوسویی $\pi : X \to \mathbb{R}$ وجود دارد.

این مسأله به‌فهرست مداوماً بزرگ‌شونده‌ای از مسائل تعلق دارد که معلوم شده‌اند که بر اساس اصول‌موضوع (معمولِ) نگرهٔ مجموعه‌ها حل‌ناپذیرند.

با این حال، بعضی از این مسائل تا اکنون حل شده‌اند. اما این حرف واقعاً به چه معنا است؟ آیا فرضیهٔ پیوستار را هم می‌شد به نحو مشابهی حل کرد؟ این سؤالات موضوع این مقاله‌اند، و بحث در موردشان شامل عناصری از بسیاری از حیطه‌های پژوهشهای فعلی در نگرهٔ مجموعه‌ها خواهد بود. چشمگیرتر از همه، هم اصول‌موضوعِ اعداد اصلی بزرگ و هم اصول‌موضوع ذهنی نقشهای مهمی ایفا خواهند کرد. در مورد مسألهٔ فرضیهٔ پیوستار، توجه به رهیافت خاصی معطوف خواهد بود که طی سالهای اخیر پرورانده شده است. این را نباید به این صورت غلط و چونان این ادعا تعبیر کرد که این یگانه رهیافت است یا حتی بهترین رهیافت است. با این حال، این مطلب نشان می‌دهد که مسیرهای گوناگونِ کاملاً متفاوتِ پژوهش در نگرهٔ نوین مجموعه‌ها می‌توانند، در مورد سؤالات بسیار پایه‌ای همچون فرضیهٔ پیوستار، بصیرتهای تازه بالقوهٔ بنیادینی ایجاد کنند.

اصول‌موضوع عموماً پذیرفته‌شدهٔ نگرهٔ مجموعه‌ها ــ که من آنها را انتخاب قرن بیستم خواهم خواند ــ عبارت‌اند از اصول‌موضوع تسرملو-فرنکل به‌همراه اصل‌موضوع انتخاب ZFC. برای بحثی در مورد این اصول‌موضوع و موضوعات مرتبط با آنها [Kanamori, 1994] را ببینید.

استقلال یک گزارهٔ ϕ از اصول‌موضوع نگرهٔ مجموعه‌ها عبارت است از این حکم حسابی: ZFC ϕ را ثابت نمی‌کند، و ZFC $\neg\phi$ را ثابت نمی‌کند.

البته اگر ZFC ناسازگار باشد آنگاه ZFC هر چیزی را اثبات می‌کند، پس استقلال فقط در صورتی می‌تواند برقرار شود که دست‌کم فرض کنیم که ZFC سازگار است. چنان که خواهیم دید، گاه حتی فرضهای قویتری هم لازم‌اند.

اولین نتیجه در مورد فرضیهٔ پیوستار، CH، را گودل به‌دست آورد.

قضیهٔ (گودل). فرض کنید ZFC سازگار باشد، در این صورت ZFC + CH همچنین است. □

عصر نوین نگرهٔ مجموعه‌ها با کشف روش دحمیل[1] توسط کوهن شروع شد که این روش جدید را به‌کار بست، تا نشان دهد که:

قضیهٔ (کوهن). فرض کنید ZFC سازگار باشد، در این صورت "CH غلط است" + ZFC همچنین است. □

با مرورِ بعضی مفاهیم پایه‌ای منطق ریاضی به‌اختصار در مورد روش‌شناسی اثبات اینکه گزاره‌ای حل‌ناپذیر است بحث می‌کنم. مرسوم است که در درون نگرهٔ مجموعه‌ها کار شود، گرچه این قضایا را ــ که به‌نحوی بنیادی حسابی‌اند ــ نهایتاً می‌توان در نگرهٔ اعداد ثابت کرد.

$\mathcal{L}(\hat{=}, \hat{\in})$ زبان صوری نگرهٔ مجموعه‌ها را نشان می‌دهد؛ این زبان گردایه‌ای شمارا از فرمول‌ها است. جمله‌ها آن فرمولهایی از $\mathcal{L}(\hat{=}, \hat{\in})$ هستند که در آنها هیچ موردِ وقوعی از متغیری نیست که تحت یک سور نیامده باشد. هر دوی $\hat{=}$ و $\hat{\in}$ صرفاً نمادهایی از این زبانِ صوری‌اند بدون هیچ معنای پیشینی دیگری.

مفهوم ساختارهای این زبان را از طریق منطق مقدماتی می‌شناسیم. هر ساختار این زبان یک جفتِ $\mathcal{M} = \langle M, E \rangle$ است، که در آن M مجموعه‌ای ناتهی است و $E \subseteq M \times M$ رابطه‌ای دوتایی روی مجموعهٔ

1. forcing

M است. اگر ϕ جمله‌ای در زبان $\mathcal{L}(\hat{=}, \hat{\in})$ باشد، آنگاه ساختار $\mathcal{M}$ یک مدل ϕ است، و می‌نویسیم "$\mathcal{M} \models \phi$"، اگر این جمله وقتی به‌صورت حکمی درون ساختار $\langle M, E\rangle$ تعبیر شود درست باشد، که در اینجا نماد $\hat{\in}$ با رابطهٔ دوتایی E تعبیر می‌شود و $\hat{=}$ با تساوی روی M تعبیر می‌شود. البته می‌شد ساختارهایی به‌صورت $\langle M, E, \sim\rangle$ را هم در نظر گرفت که در آنها $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی M است که در مقام تعبیر $\hat{=}$ منظور شده است، اما در این صورت می‌توان به‌ساختار خارج‌قسمتی $\langle M/\sim, E/\sim\rangle$ رفت. پس با این تلاش برای کلّیت حقیقتاً چیزی عاید نمی‌شود.

هر نگره مجموعه‌ای از جمله‌ها است، و به‌ازای هر نگرهٔ مفروض T، می‌نویسیم "$\langle M, E\rangle \models T$" تا نشان دهم که به‌ازای هر جملهٔ $\phi \in T$، $\langle M, E\rangle \models \phi$.

ZFC نگرهٔ (نامتناهیِ) خاصی را نشان می‌دهد. هر مدل ZFC صرفاً ساختار $\langle M, E\rangle$ای است که

$$\langle M, E\rangle \models \text{ZFC}.$$

این را می‌توان به‌شکلی کاملاً طبیعی بدون یاری گرفتن از منطق صوری تعریف کرد. مثلاً یکی از اصول‌موضوع ZFC اصل‌موضوع مصداقی بودن است، که به‌لحاظ صوری به‌صورتِ

$$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \hat{=} x_2 \leftrightarrow \forall x_3 (x_3 \hat{\in} x_1 \leftrightarrow x_3 \hat{\in} x_2))$$

قابل بیان است و به‌لحاظ غیر صوری صرفاً این حکم است که دو مجموعه مساوی‌اند اگر اعضای واحدی داشته باشند.

بدین‌ترتیب

$$\langle M, E\rangle \models \text{"اصل‌موضوع مصداقی بودن"}$$

اگر و فقط اگر به‌ازای هر $a \in M$ و به‌ازای هر $b \in M$، اگر

$$\{c \in M | (c, a) \in E\} = \{c \in M | (c, b) \in E\}$$

آنگاه $a = b$.

بنابراین "اصل‌موضوع مصداقی بودن" $\langle \mathbb{R}, <\rangle \models$؛ اما اگر $E \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ را با

$$E = \{(n, m) | \quad p^{n+2} \nmid m \quad \text{و} \quad p^{n+1} | m \text{، به‌ازای } p \text{ی اولی}\}$$

تعریف کنیم آنگاه "اصل‌موضوع مصداقی بودن" $\langle \mathbb{N}, E\rangle \not\models$.

با ادامه دادن و بررسی سایر اصول‌موضوع، به‌نحوی طبیعی می‌توان به‌مفهوم مدل ZFC دست یافت.

نسبتاً به‌سادگی می‌توان مدلی تعریف کرد که همهٔ اصول ZFC غیر از اصل‌موضوع بسیار مهم بینهایت را برآورده کند. مثلاً فرض کنید E_0 رابطه‌ای دوتایی راکه هم‌اکنون مشخص شد نشان دهد، و یک رابطهٔ هم‌ارزی $\sim_0$ را به این صورت تعریف کنید که $i \sim_0 j$ اگر $\{k | (k, i) \in E_0\} = \{k | (k, j) \in E_0\}$. یک رابطهٔ دوتایی E_1 را به‌این صورت تعریف کنید که $(i, k) \in E_1$ اگر به‌ازای یک j، $i \sim_0 j$، $(j, k) \in E_0$، و $\sim_1$ را از روی E_1 به‌همان‌صورتی تعریف کنید که $\sim_0$ از روی E_0 تعریف شد. به‌استقراء ادامه دهید و دنباله‌های صعودی $\langle \sim_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ و $\langle E_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ را تعریف کنید. قرار دهید

$$\sim_\infty = \cup\{\sim_n | n \in \mathbb{N}\},$$

و قرار دهید $E_\infty = \cup\{E_n | n \in \mathbb{N}\}$. ساختار خارج‌قسمتیِ $\langle \mathbb{N}/\sim_\infty, E_\infty/\sim_\infty\rangle$ همهٔ اصول‌موضوع ZFC غیر از اصل‌موضوع بینهایت را برآورده می‌کنند. اصل‌موضوع بینهایت نمی‌تواند برقرار باشد، چون به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$ مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزیِ $\{[j]_\sim | (j, i) \in E_\infty\}$ متناهی است، چرا که مساوی مجموعهٔ $\{[j]_\sim | (j, i) \in E_0\}$ است، که به‌وضوح عدد اصلی‌اش حداکثر i است.

ساختن مدلهای جدید ZFC

آیا ZFC مدلی دارد؟ یک نتیجهٔ قضیهٔ دوم ناتمامیت گودل این است که اگر فقط با اصول‌موضوع ZFC کار کنیم نمی‌توانیم امیدوار باشیم که وجود مدلهای ZFC را ثابت کنیم. با این همه، هنوز می‌توانیم مسألهٔ ساختن مدلهای جدیدی از ZFC را (که امیدواریم جالب هم باشند) از روی مدلهای مفروض ZFC، مطالعه کنیم.

گودل مسألهٔ زیرساختار را در ۱۹۳۸ حل کرد: نشان داد که اگر $\langle M, E\rangle \models \text{ZFC}$، آنگاه یک $M^* \subseteq M$ وجود دارد که

$$\langle M^*, E \cap (M^* \times M^*)\rangle \models \text{ZFC} + \text{CH}.$$

بیش از ۲۵ سال بعد کوهن، که محققاً گالوای نگرهٔ مجموعه‌ها است، مسألهٔ توسیع را حل کرد. ضعیفترین صورت قضیهٔ توسیع کوهن واقعاً به‌لحاظ صوری معادل است با بیانی از قضیهٔ کوهن که در ابتدای این مقاله به‌دست داده شد. این صورت ضعیف صرفاً حکم می‌کند به اینکه اگر $\langle M, E\rangle \models \text{ZFC}$، آنگاه یک ساختارِ

$$\langle M^{**}, E^{**}\rangle \models \text{ZFC} + \text{"CH غلط است"}$$

وجود دارد که $M \subseteq M^{**}$ و $E = E^{**} \cap (M \times M)$.

روش کوهن بسیار نیرومند از کار درآمده است: این روش و تعمیمهایش ابزارهای پایه‌ایِ اثبات استقلال‌اند. به‌علاوه، اساساً هیچ روش کارآمد دیگری برای ساختن توسیعهایی از مدلهای ZFC شناخته نشده است.

یک نکتهٔ مهم آن است که نه روش توسیع کوهن و نه روش تحدید گودل هیچ یک بر احکام حسابی صادق در ساختارها تأثیر نمی‌گذارند، لذا شهود مربوط به یک مدل واقعیِ نگرهٔ اعداد بلامنازع می‌ماند.

به‌نظر می‌رسد که بیشتر ریاضیدانان واقعاً باور دارند که احکام حسابی یا درست‌اند یا غلط. تاکنون هیچ تعمیمی از روش کوهن کشف نشده که این نظر را زیر سؤال ببرد. اما این به این معنا نیست که چنین تعمیمی هرگز پیدا نخواهد شد.

تمامیت تجربی حساب، همراه با عدم تمامیت واضحِ نگرهٔ مجموعه‌ها باعث شده بعضی حدس بزنند که پدیدهٔ استقلال پدیده‌ای بنیادی است ــ علی‌الخصوص مسألهٔ پیوستار ذاتاً مبهم است و راه‌حلی ندارد.

مطابق این نظر مسألهٔ پیوستار سؤالی است که به‌نحوی بنیادی فاقد معنا است، مثل پرسیدن اینکه "π چه رنگی است؟"

حقیقت امر در کجا است؟ من با توصیف بعضی سؤالات کلاسیکِ نگرهٔ مرتبهٔ دوم اعداد ــ که عبارت باشد از نگرهٔ اعداد صحیح به‌اضافهٔ همهٔ مجموعه‌های متشکل از اعداد صحیح ــ شروع می‌کنم که در ZFC حل‌پذیر نیستند. در اینجا اعتقاد من آن است که راه‌حلی هست: اصول‌موضوعی برای نگرهٔ مرتبهٔ دومِ اعدادِ صحیح هستند که نگره‌ای فراهم می‌کنند که به‌اندازهٔ نگرهٔ اعداد کانونیک است. این اصولِ‌موضوعِ نسبتاً جدید بصیرتهایی در مورد نگرهٔ مرتبهٔ دوم اعداد به‌دست می‌دهند که حتی از آنچه ZFC به‌دست می‌دهد هم فراتر می‌روند.

آیا برای حل مسألهٔ پیوستار می‌توان این اصول‌موضوع را به مجموعه‌های پیچیده‌تری گسترش داد؟ این سؤال در مرکز توجه بخش دوم این مقاله خواهد بود.

بعضی پیش‌نیازها

برای اهداف این مقاله مناسب است که در درون نگرهٔ مجموعه‌ها کار کنیم. این ممکن است در ابتدا به لحاظ مفهومی گیج‌کننده باشد، چرا که سعی خواهیم کرد با کار کردن در درون نگرهٔ مجموعه‌ها نگرهٔ مجموعه‌ها را تحلیل کنیم.

پس اجازه دهید فرض کنیم که عالَم مجموعه‌ها وجود دارد و فرض کنیم که اصول‌موضوع احکام درستی دربارهٔ این عالم عرضه می‌کنند. در ابتدا فقط اصول‌موضوع ZFC را مفروض خواهیم گرفت. در نهایت بعضی اصول معمولی عددهای اصلی بزرگ را به این اصول‌موضوع اضافه خواهیم کرد. بحثی که انجام خواهد شد صرفاً به اشیاء این عالم مربوط می‌شوند.

تعریف. مجموعهٔ X متعدی است اگر هر عضو X زیرمجموعه‌ای از X هم باشد. بستار متعدیِ هر مجموعهٔ X عبارت است از

$$\bigcap\{Y \mid X \subseteq Y \text{ و } Y \text{ متعدی است}\}.$$ □

فرض کنید که (M, E) یک مدل ZFC باشد. در این صورت مدل (M, E) متعدی است اگر M متعدی باشد و

$$E = \{(a, b) \mid a \in b \text{ و } b \in M \text{ ، } a \in M\}$$

و لذا $\in$ با عضویتِ واقعی تعبیر شود. مدلهای متعدی ZFC به‌طرز ویژه‌ای مطبوع‌اند، اما رسیدن به‌آنها حتی از مدلهای دلخواه هم سخت‌تر است. وجود یک مدل ZFC وجود یک مدل متعدی ZFC را نتیجه نمی‌دهد.

قضایای کوهن و گودل در مورد مدلهای نگران‌کنندهٔ ZFC وقتی به‌بهترین صورت فهمیده می‌شوند که ساختار اولیهٔ (M, E) متعدی و M شمارا باشد. در حالتی که (M, E) متعدی باشد، ساختار (M^*, E^*)ای که توسط روش ساخت گودل تولید می‌شود هم متعدی است. اگر (M, E) متعدی باشد و M شمارا باشد، آنگاه می‌توان، بدون کاستن از کلیت، فرض کرد که ساختارهای (M^{**}, E^{**})ای که توسط روش کوهن تولید می‌شوند نیز متعدی‌اند.

عددهای ترتیبی آن مجموعه‌های Xای هستند که متعدی‌اند و با رابطهٔ عضویت کاملاً مرتب شده‌اند. پس مجموعهٔ متعدی X یک عدد ترتیبی است اگر و فقط اگر به ازای هر $a \in X$ و $b \in X$، اگر $a \neq b$، آنگاه یا $a \in b$ یا $b \in a$. یک نتیجهٔ اصول‌موضوع آن است که اگر $(L, <)$ مجموعه‌ای کاملاً مرتب باشد که خوش‌ترتیب است (هر زیرمجموعهٔ (ناتهی) L یک $<$-کوچکترین عضو دارد)، آنگاه یک عدد ترتیبی X هست که ترتیبهای کاملِ $(L, <)$ و $(X, \in)$ یکریخت‌اند. گردایهٔ عددهای ترتیبی خوش‌ترتیب است، و این ترتیب دقیقاً ترتیبی است که از مقایسهٔ مرتبه‌ـنوع‌های مجموعه‌های خوش‌ترتیب ناشی می‌شود.

سه‌عدد ترتیبی نخست عبارت‌اند از $\emptyset$، $\{\emptyset\}$، $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. عددهای ترتیبیِ متناهی عددهای صحیح نامنفی هستند؛ ω کوچکترین عدد ترتیبیِ نامتناهی را نشان می‌دهد، و ω_1 کوچکترین عدد ترتیبی ناشمارا را. سرانجام، عدد ترتیبی κ یک عدد اصلی است اگر به ازای هیچ عدد ترتیبی $\alpha < \kappa$ای نگاشتی دوسویی بین κ و α نباشد. عددهای ترتیبی متناهی، و نیز ω و ω_1، عدد اصلی‌اند. این حکم که مجموعهٔ X عدد اصلی $\aleph_1$ دارد عبارت از این حکم است که نگاشتی دوسویی بین X و ω_1 وجود دارد. مشابهاً، X عدد اصلی $2^{\aleph_0}$، یا c، دارد اگر نگاشتی دوسویی بین X و $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ باشد، که $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ مجموعهٔ توانی $\mathbb{N}$ است، یعنی مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$.

عددهای ترتیبی ارتفاع را در عالم مجموعه‌ها اندازه می‌گیرند. فرض کنید که M مجموعه‌ای متعدی باشد و $\langle M, \in\rangle \models \mathrm{ZFC}$. در این صورت نتیجه می‌شود که مجموعهٔ

$$\{a \in M \mid \langle M, \in\rangle \models \text{"یک عدد ترتیبی است"}\}$$

دقیقاً مجموعهٔ عددهای ترتیبی αی متعلق به M است. به‌علاوه، این مجموعه قطعه‌ای آغازین از عددهای ترتیبی است. بدین ترتیب ارتفاع M دقیقاً عدد ترتیبیِ $M \cap \mathrm{Ord}$ است، که Ord ردهٔ همهٔ عددهای ترتیبی را نشان می‌دهد.

تعریف. فرض کنید که κ یک عدد اصلی نامتناهی باشد. $H(\kappa)$ مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های Xای را نشان می‌دهد که بستار متعدی‌شان عدد اصلیِ کمتر از κ دارند. □

هر مجموعه به ازای عددهای اصلی κی به‌اندازهٔ کافی بزرگ به $H(\kappa)$ تعلق دارد. این، در بافت سایر اصول‌موضوع، معادل با اصل‌موضوع انتخاب است.

پاسخ مسألهٔ پیوستار در درک $H(\omega_2)$ قرار دارد، که ω_2 کوچکترین عدد اصلی بزرگتر از ω_1 است. این امر رهیافت فزاینده‌ای را پیش می‌نهد. سعی می‌کنیم که به‌ترتیب ساختارهای $H(\omega)$، $H(\omega_1)$، و سپس $H(\omega_2)$ را بفهمیم. کمی دقیق‌تر: در جست‌وجوی اصول‌موضوع مربوط به این ساختارها هستیم. چون فرضیهٔ پیوستار در مورد ساختار $H(\omega_2)$ است، هر گردایهٔ نسبتاً کاملی از اصول‌موضوع برای $H(\omega_2)$ فرضیهٔ پیوستار را حل و فصل خواهد کرد.

اولین این ساختارها، $H(\omega)$، ساختار آشنایی در لباس مبدّل است: $\langle \mathbb{N}, +, \cdot\rangle$. در واقع، می‌توان نشان داد که ساختارهای $\langle H(\omega), \in\rangle$ و $\langle \mathbb{N}/\sim_\infty, E_\infty/\sim_\infty\rangle$ یکریخت‌اند، که دومی در بحث بلافاصله قبل از بحث ساختن مدلهای جدید ZFC تعریف شده است. بدین‌ترتیب نگرهٔ اعداد صرفاً نگرهٔ مجموعه‌ها است در حضور نقیض اصل‌موضوع بینهایت.

ساختار بعدی، $H(\omega_1)$، هم ساختار آشنایی است. این ساختار اساساً همان ساختار $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in\rangle$ است، که ساختار استاندهٔ نگرهٔ مرتبهٔ دوم اعداد است.

البته نه $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$ و نه $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in \rangle$ ساختاری برای زبان $\mathcal{L}(\hat{=}, \hat{\in})$ نیستند، بلکه هر یک به‌نحوی طبیعی ساختاری برای زبان صوری ویژه‌ای است که به‌سادگی تعریف می‌شود.

سؤالات طبیعی‌ای دربارهٔ $H(\omega_1)$ هستند که بر پایهٔ ZFC حل‌پذیر نیستند. با این حال، اصول‌موضوعی برای $H(\omega_1)$ هستند که به‌وضوح صادق‌اند و، از طریقِ فراهم‌کردنِ نگره‌ای که به‌اندازهٔ نگرهٔ اعدادِ کانونیک است، این سؤالات را حل و فصل می‌کنند. اما صدق این اصول‌موضوع فقط بعد از کار بسیار زیاد است که آشکار می‌شود. در نظر من، یک جنبهٔ برجستهٔ این امر آن است این را مبرهن می‌کند که کشف صدق ریاضی کوشش کاملاً صوری‌ای نیست.

بخش دوم این مقاله بر تلاش برای یافتن تعمیمی از این اصول‌موضوع برای $H(\omega_2)$ متمرکز خواهد بود. این آن جایی است که پاسخ به مسألهٔ پیوستار در آن قرار دارد، چرا که فرضیهٔ پیوستار به‌صورت گزاره‌ای دربارهٔ $H(\omega_2)$ قابل بیان است. پاسخِ شگفت‌آور آن است که تعمیمهایی هستند اما هر تعمیمی که نگره‌ای به‌دست دهد که به‌مفهوم مشخص ویژه‌ای قویاً کانونیک باشد باید نتیجه دهد که CH غلط است.

در طی این بحث باید از این ادعا دفاع کنم که نه $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot, \in \rangle$، که $\langle H(\omega_2), \in \rangle$ تعمیم بلاواسطهٔ ساختار $\langle H(\omega_1), \in \rangle$ (یا، معادلاً تعمیم بلاواسطهٔ $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in \rangle$) است. سنّت بیشتر در این جهت بوده است که ساختار $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot, \in \rangle$، که به نحو طبیعی توسط مجموعهٔ توانی $\mathbb{R}$ به‌دست داده می‌شود، در سفر به ترامتناهی در مقام توقفگاه بعدی تلقی شود. روش به‌کاررفته برای تحلیل امکانات مختلفِ نگره‌های قویاً کانونیک برای $\langle H(\omega_2), \in \rangle$ عملاً نشان می‌دهد که برای $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot, \in \rangle$ نگرهٔ قویاً کانونیکی نمی‌تواند در کار باشد. اگر CH برقرار باشد، آنگاه این دو ساختار، $\langle H(\omega_2), \in \rangle$ و $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot, \in \rangle$، در اساس ساختار واحدی‌اند (هر یک را می‌توان در دیگری تعبیر کرد)، درست همان‌طور که ساختارهای $\langle H(\omega_1), \in \rangle$ و $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in \rangle$ چنین‌اند. اگر CH برقرار نباشد، آنگاه این دو ساختار می‌توانند بسیار متفاوت باشند، که در این حال ساختار اول احتمالاً به‌نحوی بنیادی ساده‌تر از ساختار دومی است.

قدم اول، $H(\omega_1)$

این عملگرهای پایه‌ای برای زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید؛ اینها مجموعه‌های افکنشی را از روی مجموعه‌های بسته تولید می‌کنند:

(افکنش) فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. افکنشِ X به $\mathbb{R}^n$ تصویر X تحت نگاشت افکنشِ

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$$

است که با $\pi(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = (a_1, \ldots, a_n)$ تعریف می‌شود.

(متممها) فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^n$. متممِ X عبارت است از مجموعهٔ

$$X^* = \{(a_1, \ldots, a_n) | (a_1, \ldots, a_n) \notin X\}.$$

تعریف (لوزین). مجموعهٔ $X \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعهٔ افکنشی است اگر به ازای عدد صحیح kای این مجموعه را بتوان در تعداد متناهی مرحله، با اعمال عملگرهای پایه‌ای افکنش و متمم گرفتن، از زیرمجموعهٔ بسته‌ای از $\mathbb{R}^{n+k}$ به‌دست آورد. □

تذکر می‌دهم که چون داریم در فضاهای اقلیدسی کار می‌کنیم، عموماً رسیدن به چیز جالبی محتاج آن است که عملگرهای پایه‌ای‌مان را سه بار به‌کار بندیم. افکنشِ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از $\mathbb{R}^{n+2}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^{n+1}$ به‌دست می‌دهد که به‌سادگی دیده می‌شود که به‌صورت اجتماع شمارایی از مجموعه‌های بسته قابل بیان است. متمم گرفتن و افکنشِ دوباره ما را فراتر از مجموعه‌های بورل و به مجموعه‌های تحلیلی می‌برد. به‌شکلی صوریتر، مجموعهٔ $X \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای تحلیلی است اگر یک مجموعهٔ بستهٔ $C \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ وجود داشته باشد که X افکنشِ $\mathbb{R}^{n+1} \setminus Y$ باشد، که در آن Y افکنش C است.

چرا مجموعه‌های افکنشی را بررسی کنیم؟ پاسخ صرفاً آن است که ساختار $H(\omega_1)$ را می‌توان به‌صورت ساختار مجموعه‌های افکنشی تعبیر کرد. به‌شکلی صوریتر، مجموعه‌های افکنشی متناظرند با آن مجموعه‌های $A \subseteq H(\omega_1)$ که به ازای آنها فرمول $\phi(x_1, x_2)$ای از $\mathcal{L}(\hat{=}, \hat{\in})$ و یک عضو $a \in H(\omega_1)$ هست که

$$A = \{b \in H(\omega_1) | \langle H(\omega_1), \in \rangle \models \phi[a, b]\}.$$

چنین مجموعه‌های Aای در $\langle H(\omega_1), \in \rangle$ به‌وسیلهٔ پارامتر تعریف‌پذیرند. این یک روش معمولِ منطق است: مطالعهٔ یک ساختار از طریق مطالعهٔ مجموعه‌ها و رابطه‌هایی که در آن ساختار می‌توان تعریف کرد.

اصل‌موضوع انتخاب وجود مجموعه‌های عجیب و غریب زیادی را الزام می‌کند. یک مثال معروف پارادوکس باناخ-تارسکی است: افرازی متناهی از گوی واحد $\mathbb{R}^3$ به‌چند قطعه وجود دارد که از آنها می‌توان فقط با استفاده از حرکات صلب دو نسخه از گوی واحد ساخت. چنین افرازی یک افراز پارادوکسی است.

برای راهبردِ بحثمان سؤال ذیل را در نظر بگیرید.

سؤال. آیا افراز پارادوکسی‌ای از گوی واحد $\mathbb{R}^3$ به‌قطعاتی وجود دارد که هر یک مجموعه‌ای افکنشی باشد؟

هر زیر مجموعهٔ تحلیلی $\mathbb{R}^n$ اندازه‌پذیر لبگ است؛ این را اولین بار لوزین در ۱۹۱۷ ثابت کرد. یک نتیجهٔ این مطلب آن است که افراز پارادوکسی‌ای از گوی واحد $\mathbb{R}^3$ به‌قطعاتی که هر یک در σ-جبرِ تولیدشده با مجموعه‌های تحلیلی باشد نمی‌تواند وجود داشته باشد. این به این علّت است که هر افراز پارادوکسی باید حاوی قطعاتی باشد که اندازه‌پذیر لبگ نباشد.

البته سؤال هدایت‌کنندهٔ ما در مورد افرازهای پارادوکسی افکنشی حقیقتاً این سؤال بنیادی‌تر را پیش می‌نهد:

سؤال. آیا مجموعه‌های افکنشی اندازه‌پذیر لبگ‌اند؟

در دههٔ ۱۹۲۰ دیگر دشواری این سؤال آشکار شده بود:

نمی‌دانیم و هرگز نخواهیم دانست [که آیا مجموعه‌های افکنشی اندازه‌پذیر لبگ هستند یا نه.] [Luzin, 1925].

عجیب آنکه روش پایه‌ای گودل برای نشان دادن سازگاریِ (نسبیِ) CH با ZFC مزیت شگفت‌انگیزی در پی داشت که خود گودل برای آن اهمیتی همتراز با اهمیت نتایجش در مورد CH قائل بود.

قضیهٔ (گودل). فرض کنید ZFC سازگار باشد، در این صورت "مجموعهٔ افکنشی اندازه‌ناپذیری وجود دارد" +ZFC هم چنین است. □

در واقع، یک نتیجهٔ فوری اثبات این قضیه سازگاریِ (نسبیِ) این حکم با اصول‌موضوع نگرهٔ مجموعه‌ها است:

افرازی پارادوکسی از گوی واحد $\mathbb{R}^3$ به‌قطعاتی وجود دارد که هر یک افکنشِ متممِ مجموعه‌ای تحلیلی است.

پس قضیهٔ لوزین در مورد اندازه‌پذیر لبگ بودنِ مجموعه‌های تحلیلی در واقع قویترین قضیه‌ای بود که می‌شد آرزو کرد که فقط با کارکردن بر اساس اصول‌موضوع ZFC بتوان ثابت کرد.

سازگاری این مطالب با ZFC که هر مجموعهٔ افکنشی اندازه‌پذیر لبگ است را، گرچه درست است، نمی‌توان با صرف مفروض گرفتن سازگاری ZFC ثابت کرد. با این همه، یک نتیجهٔ فوریِ قضایای سالووی در مورد مسألهٔ اندازه دربارهٔ مجموعه‌های افکنشی آن است که اگر ZFC سازگار باشد، آنگاه ZFC همراه با حکم ذیل هم سازگار است:

افرازی پارادوکسی از گوی واحد $\mathbb{R}^3$ به قطعاتی که هر یک مجموعه‌ای افکنشی باشد وجود ندارد.

بدین ترتیب در خود $H(\omega_1)$ هم سؤالات ساختاری طبیعی‌ای هستند که به‌لحاظ صوری حل‌ناپذیرند. حل و فصل این سؤالات، اگر واقعاً بتوان حل و فصل‌شان کرد، محتاج کشف اصول‌موضوع جدیدی است.

هم روش تحدید گودل و هم روش توسیع کوهن می‌توانند $H(\omega_1)$ را، حتی در حالتی که مدلهای ابتدایی و انتهایی متعدی باشند، از نظر مدلها تغییر دهند. به بیانی غیرصوری، تحدیدْ عموماً مجموعه‌هایی از اعداد صحیح را حذف می‌کند، و مجموعه‌های جدیدی از اعداد صحیح می‌توانند در توسیعی کوهنی ظاهر شوند. بدین ترتیب اصلاً واضح نیست که این سؤالات دربارهٔ مجموعه‌های افکنشی به هیچ صورتی مهارشدنی‌تر از فرضیهٔ پیوستار باشند.

شاید اصول‌موضوعی باشند که نتایج قابل تأییدشان آن‌قدر فراوان باشند، آن‌قدر کل یک مبحث را روشن کنند، و برای حل مسائل داده‌شده روشهایی آن‌قدر نیرومند تدارک ببینند (و حتی، تا حد امکان، آنها را به‌شیوه‌ای ساخت‌گرایانه حل کنند) که کاملاً قطع نظر از ضرورت ذاتی‌شان لازم باشد که مفروض گرفته‌شان ــ دست‌کم به‌همان مفهوم که هر نگرهٔ فیزیکی تثبیت‌شده‌ای را باید مفروض گرفت. [Gödel, 1974].

اکنون در مورد یک کاندیدا برای چنین اصل‌موضوعی بحث می‌کنم.

تعیّن

زیرمجموعهٔ مشخص Aای از $[0,1]$ را در نظر بگیرید. یک بازیِ G_A تعریف می‌کنم، که بازی‌ای نامتناهی است با دو بازیکن.

بازیکن I و بازیکن II به‌نوبت یک

$$\epsilon_i \in \{0,1\}$$

را انتخاب می‌کنند به این صورت که بازیکن I ϵ_i را به‌ازای iهای فرد، و بازیکن II ϵ_iها را به‌ازای iهای زوج انتخاب می‌کنند. بازیکن I با انتخاب ϵ_1 شروع می‌کند؛ بازیکن II ϵ_2 را برمی‌دارد، و به‌همین ترتیب.

بازیکنِ I می‌بَرَد اگر

$$\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i 2^{-i} \in A;$$

در غیر این صورت بازیکن II می‌برد.

فرض کنید SEQ مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های دودوییِ متناهی باشد. هر استراتژی τ یک تابعِ

$$\tau : \mathrm{SEQ} \to \{0,1\}$$

است. دورِ $(\epsilon_i : i \in \mathbf{N})$ از بازی مطابق با τ توسط بازیکن I تولید می‌شود اگر $\epsilon_1 = \tau(\varnothing)$ و به ازای هر $k \in \mathbf{N}$،

$$\epsilon_{2k+1} = \tau(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{2k}).$$

مشابهاً دور مطابق با τ توسط بازیکن II تولید می‌شود اگر به ازای هر $k \in \mathbf{N}$، $\epsilon_{2k} = \tau(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{2k-1})$.

استراتژی τ یک، استراتژی برد برای بازیکن I است اگر بازیکن I هر دور از بازی را که مطابق با τ توسط بازیکن I تولید شود ببرد. مشابهاً، τ یک استراتژی برد برای بازیکن II است اگر بازیکن II هر دور از بازی را که مطابق با τ توسط بازیکن II تولید شود ببرد.

تعریف. فرض کنید که $A \subseteq [0,1]$. بازی G_A معین است ــ به‌اختصار: A معین است ــ اگر استراتژی بردی برای یکی از بازیکنان باشد. □

اصل‌موضوع انتخاب مجموعهٔ Aای به‌دست می‌دهد که G_A معین نیست. این استدلال سادهٔ قطری‌سازی‌ای است. فقط $2^{\aleph_0}$ تا استراتژی ممکن هست، و به ازای هر استراتژی τ این حکم که τ یک استراتژی برد برای یکی از بازیکنان در بازی G_A است عملاً $2^{\aleph_0}$ تا پیش‌بینی دربارهٔ عضویت در A انجام می‌دهد.

با این‌حال، مجموعهٔ نامعینی که اصل‌موضوع انتخاب به‌دست می‌دهد در حالت کلی مجموعه‌ای افکنشی نیست. این (اساساً میتسیلسکی-استینهاوس، ۱۹۶۲) این اصل‌موضوع را پیش می‌نهد:

تعیّن افکنشی: فرض کنید که A یک زیر مجموعهٔ افکنشیِ $[0,1]$ باشد. در این صورت بازی G_A معین است.

در این نقطه از بحث‌مان باید اذعان کرد که اصل‌موضوع تعیّن افکنشی نه فقط این طور نیست که به‌وضوح درست باشد، حتی این‌طور هم نیست که به‌وضوح سازگار باشد. با این حال، اصل‌موضوع ثمربخشی است، اما (و این یک شوخی منطقدانان است) اصل‌موضوع ۱ = ۰ هم چنین است.

در این مقاله، که بخش اولِ مقاله‌ای دو بخشی است، هدف اصلی من عرضهٔ بعضی شواهد قوی برای این مطلب است که اصل‌موضوع تعیّنِ افکنشی "اصل‌موضوع صحیح" برای مجموعه‌های افکنشی است. شواهدی که عرضه می‌کنم حقیقتاً بخش کوچکی است از آنچه اکنون در دسترس است. مبحث مجموعه‌های افکنشی اکنون از جهاتی گسترش یافته است که بنیادگذاران آن پیش‌بینی یا حتی تصور نمی‌کردند.

در ۱۹۶۴ میتسیلسکی و شوپرچکووسکی ثابت کردند که اگر اصل‌موضوع تعیّن افکنشی برقرار باشد، آنگاه هر مجموعهٔ افکنشیْ اندازه‌پذیرِ لبگ است. نتیجتاً، این اصل‌موضوع ایجاب می‌کند که افرازی پارادوکسی از گوی واحد $\mathbb{R}^3$ به‌قطعات افکنشی وجود ندارد.

این اصل‌موضوع همچنین ایجاب می‌کند که هر مجموعهٔ افکنشیِ ناشمارا عدد اصلی $2^{\aleph_0}$ دارد. دیویس، باز هم کمی بعد از آنکه این اصل‌موضوع معرفی شد، ثابت کرد که این اصل‌موضوع ایجاب می‌کند که هر مجموعهٔ افکنشی ناشمارا شامل یک زیرمجموعهٔ بستهٔ ناشمارا است.

این اثبات می‌کند که (با مفروض گرفتن تعیّن افکنشی) هیچ مثال نقضِ صوری‌ای برای CH در میان مجموعه‌های افکنشی یافت نخواهد شد.

با کمال تعجب، رابطهٔ واقعی بین CH و مجموعه‌های افکنشی، حتی با مفروض گرفتن تعیّن افکنشی، کاملاً غامض است. این نقطهٔ شروعِ بخش دوم این مقاله خواهد بود.

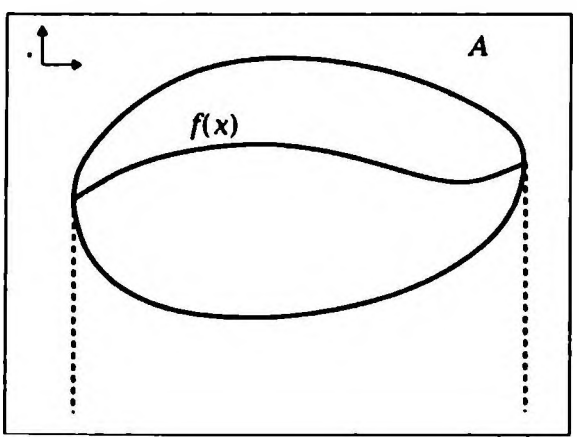
همچنین می‌توانیم به نحوی طبیعی صورتهایی از اصل‌موضوع انتخاب برای مجموعه‌های افکنشی را تحلیل کنیم.

فرض کنید که $A \subseteq \mathbb{R}^2$. به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ مقطعِ A در x را برابرِ

$$A_x = \{y \in \mathbb{R} | (x, y) \in A\}$$

قرار دهید.

فرض کنید B افکنشِ A باشد، $B = \{x | A_x \neq \varnothing\}$.



تابع $f : B \to \mathbb{R}$ مجموعهٔ A را یکنواخت می‌کند اگر به ازای هر $x \in B$، $f(x) \in A_x$؛ شکل را ببینید. تابع f افکنشی است اگر نمودارش زیرمجموعه‌ای افکنشی از $\mathbb{R}^2$ باشد.

در ۱۹۳۰ لوزین این پرسش را مطرح کرد که آیا هر زیرمجموعهٔ افکنشی از صفحه را می‌توان با تابعی افکنشی یکنواخت کرد یا نه. تقریباً نیم قرن بعد موسخوواکیس ثابت کرد که جواب مثبت است اگر که تعیّن افکنشی برقرار باشد.

بدین ترتیب، با مفروض گرفتن تعیّن افکنشی، تحلیل کاملی از اصل‌موضوع انتخاب در سطح افکنشی داریم، که می‌توانیم به این صورت خلاصه‌اش کنیم. برای این خلاصه‌سازی، مناسب است مفهوم زیرمجموعهٔ افکنشی $\mathbb{R}^n$ را به مفهوم مجموعهٔ افکنشی عمومی تعمیم دهیم. پس بیایید بگوییم که مجموعهٔ A یک مجموعهٔ افکنشی عمومی است اگر یک تابع پوشای $\pi : \mathbb{R} \to M$، که در آن M بستار متعددی $\{A\}$ است، وجود داشته باشد که

$$\{(x, y) | \pi(x) \in \pi(y)\}$$

زیرمجموعه‌ای افکنشی از $\mathbb{R}^2$ باشد. این دو مفهوم در مورد زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^n$ با هم مطابقت دارند؛ مجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعهٔ افکنشی عمومی است اگر و فقط اگر یک مجموعهٔ افکنشی باشد. مجموعه‌های افکنشی طبق تعریف زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^n$اند؛ مجموعه‌های افکنشی عمومی می‌توانند عدد اصلی و تابع و غیره باشند. اینک آن خلاصهٔ وعده داده‌شده.

۱. اصل‌موضوع انتخاب به لحاظ افکنشی برقرار نیست، به این مفهوم که خوش‌ترتیبی افکنشی‌ای از اعداد حقیقی وجود ندارد.

۲. اصل‌موضوع انتخاب به لحاظ افکنشی برقرار است به این مفهوم که اگر $F : \mathbb{R} \to V$ یک مجموعهٔ افکنشی عمومی باشد، آنگاه تابع انتخابی برای F وجود دارد که یک مجموعهٔ افکنشی عمومی هم هست.

تعیّن افکنشی و عددهای اصلی بزرگ

می‌شد سعی کرد که تعیّن افکنشی را به‌صورت فزاینده تحلیل کرد.

در ۱۹۵۳ گیل‌استیوارت ثابت کردند که هر زیرمجموعهٔ باز $[0, 1]$ معین است، و این پرسش جسورانه را مطرح کردند که آیا هر مجموعهٔ بورل معین است یا نه. دو دههٔ بعد، در شاهکاری تکنیکی، مارتین ثابت کرد که جواب مثبت است. یک جنبهٔ برجستهٔ اثباتِ مارتین آن است که فریدمن [Friedman, 1971] قبلاً نشان داده بود که تعیّن مجموعه‌های بورل را نمی‌توان در نگرهٔ مجموعه‌های تسرملو همراه با اصل‌موضوع انتخاب ثابت کرد. این نگره عبارت است از نظام ZC از اصول‌موضوع، یعنی ZFC بدون اصلِ (یا اصولِ)موضوع جایگزینی. بیشتر ریاضیدانان با این نظام محدودِ اصول‌موضوع کار می‌کنند، خواه این امر را تشخیص دهند خواه ندهند.

به بیانی تقریبی، روش مارتین این بود که به هر مجموعهٔ بورل A، با استقراء بر رتبهٔ بورل A، یک مجموعهٔ باز $A^* \subset Z^{\mathbb{N}}$ مربوط کند که در آن Z گسسته است. A^* چنان ساخته می‌شود که از معین بودنِ بازی مربوط‌شده به A^* (در اینجا بازیکنان با اعضای Z بازی می‌کنند)، معین بودن A نتیجه شود. قضیهٔ گیل‌استیوارت برای نشان دادن اینکه A^* معین است به کار

بسته می‌شود، و به این صورت تعیّن A حاصل می‌شود. همچنان که A روی مجموعه‌های بورلِ ممکن تغییر می‌کند، مجموعه‌های مربوط‌شدهٔ Z روی

$$\{\mathcal{P}^\alpha(\mathbb{R})|\alpha < \omega_1\}$$

تغییر می‌کنند. و همگام با رتبهٔ بورل A عدد اصلیشان افزایش می‌یابد. در اینجا $\mathcal{P}^\alpha(\mathbb{R})$ مجموعهٔ توانیِ α بار تکرارشدهٔ $\mathbb{R}$ را نشان می‌دهد، که به استقراء به‌صورت ذیل تعریف می‌شود، که در آن به ازای هر مجموعهٔ X، $\mathcal{P}(X) = \{Y|Y \subseteq X\}$. $\mathcal{P}(X)$ مجموعهٔ توانیِ X است. $\mathcal{P}^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$، $\mathcal{P}^{\alpha+1}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^\alpha(\mathbb{R}))$، و

$$\mathcal{P}^\alpha(\mathbb{R}) = \cup\{\mathcal{P}^\beta(\mathbb{R})|\beta < \alpha\}$$

اگر $\alpha > 0$ و α یک عدد ترتیبی حدی باشد.

در نگرهٔ مجموعه‌های تسرملو نمی‌توان ثابت کرد که حتی $\mathcal{P}^\omega(\mathbb{R})$ وجود دارد، و لذا چنان که قضیهٔ فریدمن پیش‌بینی کرده بود، اثبات مارتین را نمی‌توان با مفروض گرفتن فقط اصول‌موضوع ZC به انجام رساند.

تعیّن همهٔ مجموعه‌های تحلیلی $A \subseteq [0,1]$ را نمی‌توان در ZFC ثابت کرد. این به این سبب است که ZFC واقعاً خیلی قوی نیست. بدین ترتیب قضیهٔ مارتین در مورد تعیّن همهٔ مجموعه‌های بورل قویترین قضیه‌ای است که می‌توان آرزو کرد که بدون توسل به اصول‌موضوع جدید ثابت کرد. در اینجا اصول‌موضوع عددهای اصلی بزرگ وارد می‌شوند، که به طور غیرصوری اصول‌موضوعی‌اند که وجود عددهای اصلیِ "بزرگ" را ادعا می‌کنند. عدد اصلی ناشمارای κ یک عدد اصلی اندازه‌پذیر است اگر فراصافی[1] غیراصلی Uای روی زیرمجموعه‌های κ وجود داشته باشد که κ-کامل باشد؛ یعنی اگر $X \subset U$ و X عدد اصلی کمتر از κ داشته باشد، آنگاه $\cap\{A \subset \kappa|A \in X\} \in U$.

مارتین در حوالی ۱۹۷۰، حدوداً پنج سال پیش از آنکه ثابت کند که همهٔ مجموعه‌های بورل معین‌اند، ثابت کرد که اگر عدد اصلی اندازه‌پذیری وجود داشته باشد، آنگاه همهٔ مجموعه‌های تحلیلی معین‌اند (هر مجموعهٔ بورل، مجموعه‌ای تحلیلی است، و لذا این این را هم، گرچه نه در ZFC، اثبات کرد که همهٔ مجموعه‌های بورل معین‌اند).

اما سالووی نشان داد که نمی‌توان امید داشت که صرفاً بر پایهٔ وجود یک عدد اصلی اندازه‌پذیر تعیّن افکنشی را ثابت کرد. دلیل، مثل قبل، کمی قدرت است: "تعیّن افکنشی" +ZFC سازگاریِ "عدد اصلی اندازه‌پذیری هست" +ZFC را ایجاب می‌کند. بنابراین، مطابق قضیهٔ دوم ناتمامیّت گودل نمی‌توان تعیّن افکنشی را از وجود یک عدد اصلی اندازه‌پذیر نتیجه گرفت. اصول‌موضوع باز هم قویتری لازم‌اند، و مورد خاص اثباتِ تعیّنِ همهٔ زیرمجموعه‌های $\underset{\sim}{\Sigma}^1_2$ از $[0,1]$ تبدیل به مسأله‌ای عمده شد (مجموعه‌های $\underset{\sim}{\Sigma}^1_2$ آن مجموعه‌های افکنشی‌ای هستند که می‌توان به‌صورت افکنشِ متمم یک مجموعهٔ تحلیلی نمایش‌شان داد). برخی حدس زدند که هیچ اصل‌موضوع شناخته‌شده‌ای برای عددهای اصلی بزرگ آن‌قدر قوی نیست که این بخش از تعیّن افکنشی را ایجاب کند. در ۱۹۷۸ مارتین با استفاده از آنچه اساساً قویترین فرضیه شناخته‌شدهٔ عددهای اصلی بزرگ در آن زمان بود موفق شد تعیّن همهٔ مجموعه‌های $\underset{\sim}{\Sigma}^1_2$ را ثابت کند. سرانجام، در ۱۹۸۳ من، با استفاده از اصول‌موضوع عددهای اصلی بزرگ، در سلسله‌مراتبی طبیعی که با اصول‌موضوعی برای عددهای اصلی بزرگ شروع می‌شود که مارتین در اثبات تعیین همهٔ مجموعه‌های $\underset{\sim}{\Sigma}^1_2$ از آنها استفاده کرده بود، تعیّن همهٔ مجموعه‌های $\underset{\sim}{\Sigma}^1_2$ را ثابت کردم.

از سرشت طبیعی این اثباتهای تعیّن این‌طور برمی‌آید که فرضهای اساساً بهینهٔ عددهای اصلی بزرگ به کار گرفته شده بوده است. اما این تصویر گرچه بسیار جذاب بود (دست کم برای مارتین و من)، به کلی غلط بود. اصول‌موضوع عددهای اصلی بزرگ که برای اثبات تعیّن افکنشی به کار رفته بود، از جمله اصل‌موضوعی که مارتین برای اثبات تعیّن همهٔ مجموعه‌های $\underset{\sim}{\Sigma}^1_2$ به کار گرفته بود، بسیار قویتر از حدِ لازم بوده‌اند. اولین نشانه‌های اینکه این تصویر نادرست بود از جهتی پدیدار شد که شگفت‌انگیز بود: شواهدی که فورمن-مگیدور-شلاه در اثر دورانسازشان در مورد بیشینهٔ مارتین کشف کردند، که یک اصل‌موضوع حداکثری[1] تحمیل است که در ذیل در موردش بحث می‌کنم. این نهایتاً در ۱۹۸۴ منجر به قضیهٔ ذیل شد.

قضیهٔ (شلاه-وودین). فرض کنید تعدادی نامتناهیِ عدد اصلی وودین وجود داشته باشد، در این صورت هر مجموعهٔ افکنشیِ اندازه‌پذیر لبگ است. □

تعریف عدد اصلی وودین را به‌دست نخواهم داد، بلکه در عوض صرفاً تذکر می‌دهم که این اصل‌موضوع مربوط به عددهای اصلی بسیار ضعیفتر از آنهایی است که در اثباتهای تعیّنی به کار گرفته شدند که هم‌اکنون در موردشان بحث شد.

برنامهٔ مدل درونی می‌کوشد ساختِ زیرساختاریِ گودل را به مدلهایی تعمیم دهد که اصول‌موضوع گوناگون در مورد عددهای اصلی بزرگ در آنها صادق باشند (و هر چه اصل‌موضوع قویتر باشد، مسأله مشکلتر است). به بیانی دقیقتر، با در نظر گرفتن یک اصل‌موضوع مشخص Ψ در مورد عددهای اصلی بزرگ، به ازای هر مدل $\langle M, E\rangle$ برای $\mathrm{ZFC} + \Psi$ در جست و جوی یک زیرساختار $\langle M^*, E \cap (M^* \times M^*)\rangle$ هستیم که یک مدلِ $\mathrm{ZFC} + \Psi$ هم باشد و جملات گوناگونی که در زیرساختار گودل درست‌اند در آن صادق باشند. برای مثال، اگر Ψ این اصل‌موضوع مربوط به عددهای اصلی بزرگ باشد که "یک عدد اصلی وودین وجود دارد"، صرف خواستن اینکه در زیرساختار تولیدشده، جملهٔ "مجموعه‌ای افکنشی هست که اندازه‌پذیر لبگ نیست" برقرار باشد مسألهٔ مشکلی ایجاد می‌کند. در مورد اصول‌موضوع قویتری دربارهٔ عددهای اصلی بزرگ تعمیمهایی از این خواسته هستند که مسائلی ایجاد می‌کنند که همین‌قدر غیربدیهی‌اند.

در مورد این اصل‌موضوع مربوط به عددهای اصلی بزرگ که "عدد اصلی اندازه‌پذیری هست"، تعمیم صحیحِ روشِ ساخت گودل را سالووی کشف کرد و بعداً این تعمیم در آثار کیونن[2] و سیلور بیشتر تحلیل شد. با این قضایا برنامهٔ مدل درونی شروع شد.

1. ultrafilter

1. maximal 2. Kunen

این امر که بر مبنای تعدادی نامتناهی عدد اصلی وودین می‌توان ثابت کرد که مجموعه‌های افکنشی اندازه‌پذیر لبگ‌اند شاهدی است قوی بر اینکه بر مبنای همان فرض باید بتوان تعیّن افکنشی را ثابت کرد. در ۱۹۸۵، با استفاده از تکنیکهایی که در برنامهٔ مدلِ درونی پرورانده شده بود، مارتین-استیل در این کار توفیق یافتند. درکمال تعجب، خاصیتهای ترکیبیاتی عددهای اصلیِ وودین که باعث این اکتشاف شدند ــ مثلاً آن خصوصیاتی که اندازه‌پذیری همهٔ مجموعه‌های افکنشی را نتیجه می‌دهند ــ در این اثبات تعیّن هیچ نقشی ایفا نمی‌کنند.

قضیهٔ (مارتین-استیل). فرض کنید تعدادی نامتناهی عدد اصلیِ وودین وجود داشته باشند، در این صورت هر مجموعهٔ افکنشی معین است. □

در اثباتهای تعیّنْ اصول‌موضوعِ عددهای اصلی بزرگ چگونه به کار گرفته می‌شوند؟ استراتژی پایه همان استراتژی مارتین در اثبات تعیّن همهٔ مجموعه‌های بورل است، گرچه اثبات مارتین برای تعیّن همهٔ مجموعه‌های تحلیلی بر پایهٔ وجود یک عدد اصلیِ اندازه‌پذیر الگوی دقیقتری است. با مفروض بودن یک مجموعهٔ $A \subseteq [0,1]$، در اینجا هم به مجموعهٔ A یک مجموعهٔ باز $A^* \subset Z^{\mathbf{N}}$ مربوط می‌کنیم، که Z مجموعهٔ گسسته‌ای است که با دقت چنان ساخته شده است که از تعیّن بازی‌ای که به نحو طبیعی به A^* مربوط می‌شود تعیّن مجموعهٔ اولیهٔ A حاصل می‌شود. قضیهٔ گیل-استوارت نشان می‌دهد که A^* معین است، و لذا مثل قبل تعیّن A حاصل می‌شود. به ازای یک مجموعهٔ افکنشی نوعیِ A مجموعهٔ مربوط‌شدهٔ Z بسیار بزرگ است ــ عدد اصلی‌اش از مرتبهٔ عددهای اصلی بزرگی است که فرض می‌گیریم که وجود دارند.

ارتباط بین تعیّن افکنشی و اصول‌موضوعِ عددهای اصلی بزرگ بنیادین است. این ادعا را قضیهٔ ذیل تأیید می‌کند که در ۱۹۸۷ اثبات شده و نشان می‌دهد که تصویر این بار صحیح است.

قضیهٔ (وودین). اینها معادل‌اند:

۱. تعیّن افکنشی،

۲. به ازای هر $k \in \mathbf{N}$ یک مجموعهٔ متعددی شمارای M وجود دارد که

$$(M, \in) \models \mathrm{ZFC} + \text{“}k \text{ عدد اصلی وودین وجود دارد”}$$

و M به نحو شمارایی تکرارپذیر است. □

مفهوم اینکه M به نحو شمارایی تکرارپذیر است مفهومی فنی است که از برنامهٔ مدل درونی می‌آید.

برنامهٔ مدل مرکزی[1]، که بلندپروازانه‌تر از برنامهٔ مدل درونی است، از کار دورانساز داد[2] و ینسن[3] سرچشمه می‌گیرد. این برنامه بلندپروازانه‌تر است چون می‌کوشد زیرساختارهای برنامهٔ مدل درونی را بسازد بدون اینکه ضرورتاً فرض کند که اصول‌موضوع مربوطه دربارهٔ عددهای اصلی بزرگ حتی در ساختار اولیه برقرارند.

گسترش برنامهٔ مدل مرکزی به قلمرو عددهای اصلی وودین در وهلهٔ اول کار استیل [Steel, 1996] است، و با این پیشرفت روشن شده است که تعیّن افکنشی واقعاً از تعداد عظیمی گزاره‌های ترکیبیاتیِ ظاهراً نامربوط به هم نتیجه می‌شود. تعیّن افکنشی در نگرهٔ مجموعه‌ها حضور همه‌جایی دارد.

در واقع، این نمونه‌ای است از پدیدهٔ فراگیرتری که در آن گزاره‌ها را، بر مبنای سازگاری، توسط اصول‌موضوعِ عددهای اصلی بزرگ درجه‌بندی می‌کنند. اکنون مثالهای متعددی از این پدیده وجود دارد؛ بسیاری از نتایج اولیهٔ از این نوع با لم پوششی ینسن اثبات شده بودند. در واقع، با استفاده از لم پوششی می‌توان تعیّن همهٔ مجموعه‌های تحلیلی را بر پایهٔ آرایهٔ احتمالاً حیرت‌آوری از گزاره‌ها ثابت کرد. برای جزئیات بیشتر خواننده را به [Kanamori, 1994] ارجاع می‌دهم.

یک مثال متأخر که در آن روشهای برنامهٔ مدل مرکزی برای اثبات تعیّن افکنشی به کار گرفته می‌شود متضمن اصول‌موضوعی است که می‌کوشند مسألهٔ پیوستار را از این طریق حل کنند که فرضیهٔ پیوستار را به صراحت غلط سازند.

اصول‌موضوع تحمیل

اصول‌موضوع تحمیل در اساس اصل‌موضوعهایی‌اند که تعمیمهایی از قضیهٔ رستهٔ بئر را ادعا می‌کنند. این ارتباط در جنبه‌های فنّی روش کوهن برای ساختن توسیعهای مدلهای ZFC نهفته است.

فرض کنید که $\langle M, E\rangle \models \mathrm{ZFC}$. توسیعهای کوهنی مربوط‌شده به ساختار $\langle M, E\rangle$ متناظرند با جبرهای بولی کامل به مفهوم $\langle M, E\rangle$، یعنی متناظرند با آن عضوهای $b \in M$ که

$$\langle M, E\rangle \models \text{“}b \text{ یک جبر بولی کامل است”}.$$

اگر b بدیهی باشد، مثلاً اگر

$$\langle M, E\rangle \models \text{“}b \text{ یک جبر بولی متناهی است”}.$$

آنگاه توسیع مربوط‌شده صرفاً $\langle M, E\rangle$ است. اما اگر

$$\langle M, E\rangle \models \text{“}b \text{ جبر اندازه‌ای[1] فضای حاصل‌ضرب } \prod_{\omega_2}[0,1] \text{ است”},$$

آنگاه در توسیع مربوط‌شده فرضیهٔ پیوستار ضرورتاً غلط است. یک خصوصیت دیگر بسیار جالب این توسیع آن است که در این توسیع یک اندازهٔ به طور شمارا جمعی روی $\mathbf{R}^3$ وجود دارد که اندازهٔ لبگ را گسترش می‌دهد، که نسبت به آن همهٔ مجموعه‌های افکنشی اندازه‌پذیرند و نسبت به حرکات صلب ناوردا است. پس در این توسیع حکم ذیل برقرار است:

> هیچ افراز پارادوکسی‌ای از گوی واحدِ $\mathbf{R}^3$ به قطعات افکنشی وجود ندارد.

این توسیع را، که اولین بار سالووی تعریف و تحلیل‌اش کرد، گاهی توسیع سالووی می‌نامند.

اگر Ω یک فضای هاوسدُرف فشرده باشد، آنگاه جبر باز بقاعدهٔ Ω جبر بولی کامل است که با مشبکهٔ زیرمجموعه‌های باز بقاعدهٔ Ω (آن مجموعه‌های

1. *the Core Model Program* 2. Dodd 3. Jensen

۱. جبر بولی زیرمجموعه‌های بورل به پیمانهٔ مجموعه‌های پوچ.

باز $O \subseteq \Omega$ که مساوی درون بستارشان هستند) به‌دست داده می‌شود. این خصوصیت توسیع اولیهٔ کوهن به نحوی طبیعی انگیزه‌ای است برای اصول‌موضوع تحمیل؛ این توسیع بر مبنای عضوهای bای از M تعریف می‌شود که

$$\langle M, E\rangle \models \text{“}\prod_{\omega_2}[0,1] \text{ است جبر بازِ بقاعدهٔ فضای حاصل‌ضرب } b\text{”}.$$

خصوصیت جالب این توسیع آن است که این تعمیمِ قضیهٔ رستهٔ بئر در آن برقرار است.

بازهٔ واحد $[0,1]$ اجتماع $\aleph_1$ تا مجموعه تُنُک نیست.

فضای هاؤسدُرف فشردهٔ Ω ccc [کوته‌نوشتِ “countable chain condition” ـ م.] است اگر هر گردایه از زیرمجموعه‌های بازِ دوبه‌دو مجزای Ω شمارا باشد.

اصل‌موضوع مارتین (ω_1): فرض کنید که Ω فضای هاؤسدُرف فشرده‌ای باشد که ccc است. در این صورت Ω اجتماع $\aleph_1$ تا زیرمجموعهٔ تنک Ω نیست.

یک انگیزهٔ ساده برای چنین اصل‌موضوعی آن است که اگر بنا باشد CH غلط باشد، آنگاه مجموعه‌های با عدد اصلی $\aleph_1$ باید، تا حد امکان، مثل مجموعه‌های شمارا رفتار کنند.

می‌توان کوشید که، با منظور کردن ردهٔ بزرگتری از فضاهای هاؤسدُرف فشرده، این اصل‌موضوع را قویترکرد. بیشینهٔ ردهٔ ممکن را فورمن‌ـمگیدورـشلاه شناسایی کردند. این تعریف متضمن مفهوم زیرمجموعهٔ بیکرانِ بستهٔ ω_1 است: مجموعهٔ هم‌پایان $C \subset \omega_1$ بسته و بیکران است اگر با توپولوژی ترتیبی ω_1 بسته باشد.

فرض کنید که $\mathbb{B}$ یک جبر بولی کامل باشد. هر مجموعهٔ $S \subseteq \mathbb{B}$ یک بزرگترین کران پایین دارد، که با $\bigwedge S$ نشان داده می‌شود، و یک کوچکترین کران بالا که با $\bigvee S$ نشان داده می‌شود.

تعریف (فورمن‌ـمگیدورـشلاه). فرض کنید که $\mathbb{B}$ یک جبر بولی کامل باشد. جبر بولی $\mathbb{B}$ حافظ مجموعه‌های پایا است اگر که این مطلب درست باشد. فرض کنید که b یک عضو غیرصفر $\mathbb{B}$ باشد و فرض کنید که $(b_\alpha : \alpha < \omega_1)$ دنباله‌ای از اعضای $\mathbb{B}$ باشد. در این صورت یک $0 < c \leq b$ وجود دارد که یا به ازای αهای به حد کافی بزرگ $c \wedge b_\alpha = 0$ یا یک مجموعهٔ بیکران بستهٔ $C \subset \omega_1$ وجود دارد که به ازای هر $\gamma \in C$،

$$c \wedge \left(\bigwedge_{\alpha<\gamma}\left(\bigvee_{\alpha<\eta<\gamma} b_\eta\right)\right) \neq 0. \qquad \square$$

ردهٔ فضاهای هاؤسدُرف فشرده‌ای که جبرهای بازِ بقاعده‌شان حافظ مجموعه‌های پایا است بزرگترین رده‌ای است که در موردش می‌توان امید داشت که اصل‌موضوع مارتین (ω_1) را تعمیم داد.

قضیهٔ (فورمن‌ـمگیدورـشلاه). فرض کنید که Ω یک فضای هاؤسدُرف فشرده باشد و فرض کنید که به ازای هر مجموعهٔ باز ناتهی $O \subseteq \Omega$ مجموعهٔ O اجتماع $\aleph_1$ تا زیرمجموعهٔ تنک Ω نباشد، در این صورت جبر باز بقاعدهٔ Ω حافظ مجموعه‌های پایا است. $\square$

این، تعریفِ بیشینهٔ مارتین را پیش می‌نهد. قضیهٔ اصلیِ [Foreman-Magidor-Shelah, 1988] آن است که سازگاری این اصل‌موضوع با ZFC از سازگاری اصول‌موضوع (مناسبی) مربوط به عددهای اصلی بزرگ با ZFC نتیجه می‌شود؛ به عبارت دیگر، این بیشینه می‌تواند محقق شود.

بیشینهٔ مارتین: فرض کنید که Ω فضای هاؤسدُرف فشرده‌ای باشد که جبر باز بقاعده‌اش حافظ مجموعه‌های پایا است. در این صورت Ω اجتماع $\aleph_1$ تا زیرمجموعهٔ تنکِ Ω نیست.

اصول‌موضوع تحمیل چنان طراحی شده‌اند که ایجاب کنند که فرضیهٔ پیوستار غلط است. در واقع، بیشینهٔ مارتین (بر خلاف صورت ضعیفتر اصل‌موضوع مارتین (ω_1)) دربارهٔ عدد اصلی پیوستار اطلاعات به مراتب بیشتری به دست می‌دهد.

قضیهٔ (فورمن‌ـمگیدورـشلاه). فرض کنید که اصل‌موضوع بیشینهٔ مارتین برقرار باشد، در این صورت $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. $\square$

پژوهشهای بعدی آشکارکرده‌اند که این قضیه واقعاً به ازای هر اصل‌موضوع تحمیل که به نحوی نابدیهی قویتر از اصل‌موضوع مارتین (ω_1) باشد برقرار است. پس، به نحوی غیرعادی، اصرار بر آنکه مجموعه‌های با عدد اصلی $\aleph_1$ به مجموعه‌های شمارا شباهت دارند الزام می‌کند که $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

آن اصول‌موضوعِ عددهای اصلی بزرگ که در اثبات سازگاری بیشینهٔ مارتین به کار گرفته شدند بسیار قویتر از آن اصول‌موضوع عددهای اصلی بزرگ‌اند که در اثبات تعیّن افکنشی به کار گرفته شدند. بنابراین طبیعی است حدس بزنیم که بیشینهٔ مارتین ممکن است تعیّن افکنشی را ایجاب کند، اگر چه بیشینهٔ مارتین، به مفهوم پذیرفته‌شدهٔ عدد اصلی بزرگ، اصل‌موضوعی مربوط به عددهای اصلی بزرگ نیست.

گفتم که کار فورمن‌ـمگیدورـشلاه در مورد بیشینهٔ مارتین الهام‌بخش کشف اصول‌موضوع صحیح مربوط به عددهای اصلی بزرگ برای تعیّن افکنشی بود. بنابراین قضیهٔ بعدی شاید پایان‌بخش مناسبی برای این بخش داستان باشد. من صورتی را بیان می‌کنم که اندکی قویتر است و متضمن شکل ضعیف‌شده‌ای از بیشینهٔ مارتین است. این شکل ضعیف‌شده بیشینهٔ مارتین (c) است، که این اصل‌موضوع است که بیشینهٔ مارتین برای همهٔ فضاهای هاؤسدُرف فشردهٔ Ωای که جبر باز بقاعده‌شان حافظ مجموعه‌های پایا باشد و برایشان پایه‌ای برای توپولوژی Ω با عدد اصلی حداکثر c وجود داشته باشد برقرار است. بدین ترتیب بیشینهٔ مارتین (c) اصل‌موضوعی است که فقط به فضاهای هاؤسدُرف فشردهٔ نسبتاً “کوچک” مربوط می‌شود.

قضیهٔ (وودین). فرض کنید که اصل‌موضوع بیشینهٔ مارتین (c) برقرار باشد، در این صورت تعیّن افکنشی برقرار است. $\square$

هیچ اثبات مستقیمی برای این قضیه دانسته نیست. روش اثبات استفاده از دستگاه به وجود آمده در برنامهٔ مدل مرکزی است برای نشان دادن اینکه، با مفروض گرفتن بیشینهٔ مارتین (c)، به ازای هر $n < \omega$ یک مجموعهٔ متعدی شمارای M وجود دارد که

$$\langle M, \in \rangle \models \mathrm{ZFC} + \text{“}n \text{ تا عدد اصلی وودین وجود دارد”}$$

و چنان است که M (به نحو شمارایی) تکرارپذیر است.

تعیّن افکنشی را اساساً بر پایهٔ وجود این مجموعه‌ها، به توسط قضیه‌ای به دست می‌آوریم که تعیّن افکنشی را با عددهای اصلی بزرگ یکپارچه می‌کند. این روش را می‌توان به کار برد ــ و به کار برده شده است ــ تا تعیّن افکنشی را بر پایهٔ تعداد زیادی از گزاره‌های ترکیبیاتی ثابت کرد، که بسیاری از آنها، مثل بیشینهٔ مارتین، هیچ ارتباط واضحی با مجموعه‌های افکنشی ندارند. این ادعا از این‌جا است که ظاهر می‌شود: تعیّن افکنشی در نگرهٔ مجموعه‌ها حضور همه‌جایی دارد.

وضع موجود در مورد نگرهٔ مجموعه‌های افکنشی را خلاصه کنیم:

- تعیّن افکنشی اصل‌موضوع صحیح در مورد مجموعه‌های افکنشی است؛ اصول‌موضوع ZFC به وضوح ناکامل‌اند و، به نحوی بنیادین ناکامل‌اند.
- با مفروض گرفتن تعیّن افکنشی، در تحلیل ساختار $\langle H(\omega_1), \in \rangle$ (یا، معادلاً، در تحلیل $\langle \mathcal{P}(\mathrm{N}), \mathrm{N}, +, \cdot, \in \rangle$، که ساختار استاندهٔ نگرهٔ مرتبهٔ دوم اعداد است) هیچ استفاده‌ای از اصل‌موضوع انتخاب در کار نخواهد بود.
- در حیطهٔ تعیّن افکنشی، تنها مثالهای شناخته‌شده از مسائل حل‌ناپذیر همانند مثالهای شناخته‌شدهٔ مسائل حل‌ناپذیر در نگرهٔ اعدادند: جمله‌های گودلی و احکام سازگاری.

به طور خلاصه، این همانندی اصول‌موضوع برای ساختارها را داریم:[1]

$$\frac{\text{اصول‌موضوع پئانو}}{\langle \mathrm{N}, +, \cdot \rangle} \sim \frac{\text{تعین افکنشی+اصول‌موضوع پئانو}}{\langle \mathcal{P}(\mathrm{N}), \mathrm{N}, +, \cdot, \in \rangle}$$

آیا درک ساختار $\langle H(\omega_1), \in \rangle$، که از طریق کشف اصول‌موضوع صحیح برای این ساختار حاصل شود، می‌تواند به درک ساختار $\langle H(\omega_2), \in \rangle$ گسترش یابد؟ این سؤال موضوع اصلی بخش دوم و پایانی این مقاله خواهد بود.

مراجع

[Cohen 1966] P. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, New York, 1966.

[Foreman, Magidor, Shelah 1988] M. Foreman, M. Magidor, and S. Shelah, Martin's Maximum, saturated ideals and non-regular ultrafilters I. *Ann. of Math.* **127** (1988), 1-47.

[Friedman 1971] H. Friedman, Higher set theory and mathematical practice, *Ann. of Math. Logic* **2** (1971), 325-357.

[Gale and Stewart 1953] D. Gale and F. Stewart, Infinite games with perfect information *Contributions to the Theory of Games* (Harold W. Kuhn and Alan W. Tucker, eds.) Ann. of Math. Stud., vol. 28, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953, pp. 245-266.

[Gödel 1940] K. Gödel, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Ann. of Math. Stud., vol. 3, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1940, pp. 33-101.

[Godel 1947] K. Gödel, What is Cantor's continuum problem? *Amer. Math. Monthly* **54** (1947), 515-545.

[Kanamori 1994] A. Kanamori, *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*, Perspect. Math. Logic, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Luzin 1925] N. Luzim, Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue, *C. R. Hebdomadaires des Seances Acad. Sci. Paris* **180** (1925). 1572-1574.

[Martin 1975] D. Martin, Borel determinacy, *Ann of Math.* **102** (1975), 363-371.

[Martin and Steel 1989] D. Martin and J. Steel, A proof of projective determinacy, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), 71-125.

[Moschovakis 1980] Y. Moschovakis, *Descriptive Set Theory*, Stud. Logic Found. Math., vol. 100, North Holland, Amsterdam, 1980.

[Mycielski and Steinhaus 1962] J. Mycielski and H. Steinhaus, A Mathematical axiom contradicting the axiom of choice, *Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Sci. Math., Astron. Phys.* **10** (1962), 1-3.

[Solovay 1970] R. Solovay, A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, *Ann. of Math.* **92** (1970), 1-56.

[Steel 1996] J. Steel, *The Core Model Iterability Problem*, Lecture Notes Logic, vol. 8, Springer-Verlag, Heidelberg, 1996.

[Woodin 1999] W. Hugh Woodin, *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal*, Ser. Logic Appl., vol. 1, de Gruyter, Berlin, 1999.

******

- W. Hugh Woodin, “The continuum hypothesis, part I”, *Notices Amer. Math.* Soc., (6) **48** (2001) 567-576.

* هیو وودین، دانشگاه، کالیفرنیا، برکلی، آمریکا

woodin@math.berkeley.edu

۱. در اینجا صورت‌بندی دقیقی تعیّن افکنشی Σـمجموعه‌سازی را در بر می‌گیرد.

مقالهٔ کلاسیک

توپولوژی جبری و عملگرهای بیضوی

مایکل اتیا

ترجمهٔ رضا رضازادگان

مایکل اتیا

در این مقالهٔ کاملاً توصیفی من قصد دارم ارتباط عمیق بین آنالیز عملگرهای بیضوی و توپولوژی گروههای خطی ع‌ا‌م را — با حداقل ریزه‌کاریهای فنی — شرح دهم.

اجازه دهید با چند نکتهٔ تاریخی کوتاه آغاز کنم. نظریهٔ معادلات بیضوی با معادلات کلاسیک لاپلاس و کُشی-ریمان شروع می‌شود و می‌تواند در دو جهت متفاوت تعمیم یابد.

الف) می‌توانیم عملگرهای بیضوی کلیتری را در نظر بگیریم.

ب) می‌توانیم همان عملگرهای کلاسیک را بررسی کنیم ولی روی خمینه‌های کلیتر.

در (ب) می‌توان تمام روشهای توپولوژیک-غیرجبریِ بررسیِ چندگوناهای جبری را در نظر گرفت؛ این روشها توسط هاج ابداع شدند و به دست کُداییرا[1]-اسپنسر و کارتان-سِر، هیرتسبروخ و دیگران توسعهٔ بسیار یافتند. در این برنامه، یکی از هدفهای اصلیْ مطالعهٔ ناورداهای توپولوژیک سراسری خمینه‌ها بود. چون هر خمینه‌ای «در بینهایت کوچک خطی است»، این مطالعات اصولاً با گروههای خطی $GL(n,\mathbf{R})$ و $GL(n,\mathbf{C})$ سر و کار دارند. در واقع قسمت بزرگی از کارهای صورت‌گرفته در توپولوژی جبری و

1. Kodaira

مایکل اتیا از تأثیرگذارترین ریاضیدانان معاصر است. پدرش لبنانی و مادرش اسکاتلندی‌تبار بود. او در سال ۱۹۲۹ به دنیا آمد، تحصیل دانشگاهی خود را در دانشگاه کیمبریج گذراند و سپس در دانشگاه آکسفرد به تدریس پرداخت. پس از یک دورهٔ سه ساله (۱۹۶۹-۱۹۷۲) عضویت رسمی در مؤسسهٔ مطالعات عالی پرینستن، مجدداً به آکسفرد بازگشت و تا سال ۱۹۹۰ استادی آن دانشگاه و ریاست مؤسسهٔ نیوتن در کیمبریج را به عهده داشت. اتیا با همکاری ریاضیدانانی چون هیرتسبروخ، بات، و سینگر در دهه‌های ۶۰ و ۷۰ در پدیدآوردن یک سلسله آثار مهم ریاضی در زمینه‌هایی مشترک بین رشته‌های هندسهٔ جبری، توپولوژی و آنالیز نقش مهمی داشت. از جملهٔ این آثار، نظریهٔ K و قضیهٔ معروف اتیا-سینگر است که این مقالهٔ توصیفی در دوران شکل‌گیری آن به تحریر در آمده است. اتیا پس از این دوران نقش مهمی در پیوند دادن ریاضیات و فیزیک در نظریهٔ پیمانه‌ای و نظریه‌های میدانهای کوانتومی ایفا کرده است.

متن اصلی مقالهٔ حاضر، با اندکی تغییر، متن سخنرانی اتیا در مؤسسهٔ علوم ریاضی کورانت در ماه مارس ۱۹۶۶ است که در

Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. xx (1967) 237-249

به چاپ رسیده است.

دیفرانسیل در ۲۰ سال گذشته اساساً در ارتباط با توپولوژی گروههای خطی بوده است.

اکثر کارهای اولیه در زمینهٔ (الف) در ارتباط با جنبهٔ کیفی بوده است، یعنی تعمیم دادن نتایج تحلیلی پایه به عملگرهای عمومی؛ ولیکن اخیراً ارتباط مشخصی بین (الف) و (ب) به وجود آمده است که از تلاشهای انجام‌شده برای به دست آوردن بعضی نتایج کمی ــ که برای سیستمهای کلاسیک در دسترس هستند ــ در مورد سیستمهای بیضوی عمومی نشأت می‌گیرد. علت آنکه این تلاشها موفقیت‌آمیز بوده است به این واقعیت برمی‌گردد که خواص توپولوژیک گروههای خطی که به تفصیل در (ب) مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، دقیقاً ابزارهای مناسب برای (الف) هستند، و من قصد دارم این موضوع را توضیح دهم.

۱. توپولوژی گروههای خطی

اکنون برخی مطالب اساسی را دربارهٔ توپولوژی گروههای خطی $GL(n,\mathbf{C})$ توضیح می‌دهم. من بیشتر به حالت مختلط می‌پردازم ولی در پایان چند نکته هم در مورد حالت حقیقی بیان خواهم کرد. بحث را با مطلبی از توپولوژی جبری شروع می‌کنم که هر ریاضیدانی بی‌شک از آن اطلاع دارد.

فرض کنید $f : S^1 \to C^*$ یک نگاشت پیوسته از دایرهٔ S^1 به اعداد مختلط ناصفر C^* باشد. به بیان دیگر یک خم بسته در صفحه داریم که از مبدأ نمی‌گذرد. واقعیتهای زیر را همه می‌دانند:

۱. f یک «عدد چرخش» یا درجه دارد (تعداد دفعاتی که خم، مبدأ را «دور می‌زند»).

۲. این درجه (که به صورت $\deg f$ نوشته می‌شود) تحت تغییر شکل پیوسته [هوموتوپی] ناورداست.

۳. $\deg f$ تنها ناوردا در این تغییر شکل است، یعنی f می‌تواند با تغییر شکل به g تبدیل یابد اگر و فقط اگر $\deg f = \deg g$.

۴. برای هر مقدار [صحیح] درجه، نگاشت fای با آن درجه وجود دارد.

راههای مختلفی برای تعریف یا محاسبهٔ $\deg f$، بسته به موقعیت و تکنیکهایی که قصد استفاده از آنها را داریم، وجود دارد. این روشها را می‌توان به طور خلاصه به شکل زیر بیان کرد.

هندسی. f را با $g = f/|f|$ که نگاشتی از S^1 به S^1 است، جایگزین می‌کنیم. سپس آن را با یک نگاشت مشتق‌پذیر تقریب زده تعداد نقاط در تصویر وارون یک نقطهٔ عمومی را (به طور جبری) می‌شماریم.

ترکیبیاتی. با یک خم قطعه به قطعه خطی تقریب می‌زنیم و سپس روشهای ترکیبیاتی را به کار می‌گیریم.

دیفرانسیلی. با یک خم مشتق‌پذیر f تقریب‌زده قرار می‌دهیم $\deg f = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{df}{f}$.

جبری. با یک سری فوریهٔ متناهی $f = \sum_{n=-k}^{k} a_n z^n$ تقریب‌زده قرار می‌دهیم $\deg f = N(f) - P(f)$ که N و P تعداد صفرها و قطبهای f در $|z| < 1$ هستند.

ممکن است بپرسید در ابعاد بالاتر وضعیت چگونه است؟ البته بسته به دیدگاه فرد، تعمیمهای مختلفی از این مسأله امکان‌پذیر است ولی یک تعمیم بسیار زیبا وجود دارد که توسط بات [۱۰] به دست آمده و من اکنون می‌خواهم آن را توضیح دهم.

نگاشتهای پیوستهٔ

$$f : S^{n-1} \to GL(N,\mathbf{C}) \qquad 2N \geqslant n$$

را در نظر می‌گیریم که S^{n-1} کرهٔ واحد در $\mathbf{R}^n$ است. حالت مورد بحث در بالا به $n = 2$ و $N = 1$ مربوط است. قضیهٔ بات از این قرار است.

قضیه. اگر n فرد باشد هر نگاشت f را می‌توان به نگاشتی ثابت تغییر شکل داد، اگر n زوج باشد می‌توانیم یک عدد صحیح به نام $\deg f$ تعریف کنیم و f می‌تواند به نگاشت دیگر g تغییر شکل یابد اگر و فقط اگر $\deg g = \deg f$؛ به علاوه نگاشتهایی با هر درجهٔ دلخواه وجود دارد.

باز مانند حالت $N = 1$ تعریفهای مختلفی از $\deg f$ امکان‌پذیر است. اول یک تعریف هندسی داریم. این تعریف در حالت $n = 2N$ به ساده‌ترین شکل قابل توضیح است. در این حالت ستون اول ماتریس f یک نگاشت

$$f_1 = S^{n-1} \to \mathbf{C}^N - \{0\}$$

تعریف می‌کند و لذا $g = f_1/|f_1|$ نگاشتی از S^{n-1} به S^{n-1} است. این نگاشت یک درجه دارد یعنی تعداد نقاط $h^{-1}(P)$، که h یک تقریب مشتق‌پذیر g و P یک نقطهٔ عمومی است. حال تعریف می‌کنیم

$$\deg f = \frac{(-1)^{N-1}\deg g}{(N-1)!}$$

علت وجود جملهٔ نامنتظرهٔ $(N-1)!$ این است که معلوم شده است که $\deg g$ همیشه بر $(N-1)!$ بخش‌پذیر است. وقتی که $\deg f$ بدین‌گونه بهنجار شود، هر مقدار صحیح را می‌تواند اخذ کند. علامت $(-1)^{N-1}$ به خاطر اندکی سهولت در امور تکنیکی قرار داده شده است. وقتی $2N > n$، همیشه می‌توان f را به یک نگاشت g به صورت

$$g(x) = \begin{pmatrix} h(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تغییر شکل داد که $h(x) \in GL(\frac{n}{2},\mathbf{C})$. پس تعریف می‌کنیم $\deg f = \deg h$ و معلوم می‌شود که این مستقل از انتخاب g است.

یک تعریف دیفرانسیلی هم از $\deg f$ وجود دارد. قرار می‌دهیم

$$\deg f = \int_{S^{n-1}} f^*\omega$$

که ω یک فرم دیفرانسیل ناوردای به طور صریح تعریف‌شده روی $GL(N,\mathbf{C})$ است و $f^*\omega$ فرم القاشده روی S^{n-1}.

تعریف جبری با شمردن صفرها و قطبها، که در حالت $N = 1$ به آن اشاره شد، به هیچ شیوهٔ واضحی تعمیم نمی‌یابد. لیکن به یک معنای بسیار عمیق که بعداً توضیح خواهم داد، تعمیمی دارد، تعمیمی که عمق مسأله را برملا می‌کند.

در اینجا درنگ می‌کنیم تا وضعیف را به دقت بنگریم. فکر می‌کنم درست باشد که بگوییم این قضیهٔ بات را باید یکی از دستاوردهای واقعی توپولوژی تلقی کرد، و این چیزی است که هر کسی باید از آن مطلع باشد. البته وجود درجه موضوع نسبتاً ساده‌ای است ــ این هومولوژی است. اما این واقعیت که نگاشتهای با درجهٔ معادل می‌توانند با تغییر شکل به هم تبدیل شوند کاملاً نابدیهی است ــ این هوموتوپی است. این موضوع قطعاً غیرشهودی است و کافی است فقط چند مورد دیگر از هوموتوپی را در نظر بگیریم تا ببینیم که چقدر در این مورد خوش‌اقبال بوده‌ایم، مثلاً رده‌های هوموتوپی نگاشتهای بین کره‌ها فوق‌العاده پیچیده و هنوز، در حالت کلی، نامعلوم است. برای نگاشتهای $S^{n-1} \to GL(N,\mathbf{C})$ وقتی $2N < n$ هم همین وضعیت برقرار است.

برای بهتر فهمیدن قضیهٔ بات مفید است که رابطهٔ بین بعدهای مختلف را بررسی کنیم. پس فرض کنید نگاشتهای

$$f : S^{n-1} \to GL(N,\mathbf{C}), \qquad g : S^{m-1} \to GL(M,\mathbf{C})$$

داده شده باشند. f را با قرار دادن

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \qquad x \in S^{n-1}, \lambda \geqslant 0$$

به کل $\mathbf{R}^n$ گسترش می‌دهیم، و همین‌طور g را. اکنون f و g توابع پیوسته‌ای با مقدار ماتریسی هستند که به ترتیب روی $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{R}^m$ تعریف شده‌اند. حال یک تابع h با مقدار ماتریسی روی $\mathbf{R}^{n+m}$ تعریف می‌کنیم

$$h(x,y) = \begin{pmatrix} f(x) \otimes 1_N & -1_M \otimes g^*(y) \\ 1_M \otimes g(y) & f^*(x) \otimes 1_N \end{pmatrix}$$

که 1_M تبدیل همانی $\mathbf{C}^M$ را نشان می‌دهد و $f^*(x)$، مزدوج ترانهادهٔ ماتریس $f(x)$ است. پس $h(x,y)$ یک ماتریس $2MN \times 2MN$ می‌باشد. به سادگی می‌توان نشان داد که به ازای $(x,y) \neq (0,0)$، $h(x,y)$ ناتکین است و لذا یک نگاشت پیوستهٔ

$$S^{m+n-1} \to GL(2MN,\mathbf{C})$$

تعریف می‌کند که آن را با $f * g$ نشان می‌دهیم تا مشخص شود که یک نوع «حاصلضرب»[1] f و g است. اگر m و n هر دو زوج باشند فرمول ضربی سادهٔ زیر را داریم

$$\deg(f * g) = (\deg f)(\deg g)$$

پس اگر $a : S^1 \to GL(1,\mathbf{C})$ نگاشت استاندارد از درجهٔ ۱ با معادلهٔ

$$a(z) = z \qquad z \in \mathbf{C}, |z| = 1$$

باشد آنگاه نگاشت $a_n : S^{2n-1} \to GL(2^{n-1},\mathbf{C})$ که با

$$a_n = a * a * \cdots * a \qquad (n \text{ بار})$$

تعریف می‌شود درجهٔ ۱ دارد. بنابراین نگاشت مولد در این بعد است، یعنی مولدی برای گروه (دوری نامتناهی) رده‌های هوموتوپی نگاشتهای $S^{2n-1} \to GL(2^{n-1},\mathbf{C})$ تعریف می‌کند.

در حال حاضر اثباتهای متفاوت زیادی برای قضیهٔ بات وجود دارد. من بعداً در مورد یکی از آنها اظهار نظر خواهم کرد اما اجازه دهید اکنون فقط بگویم که همهٔ این اثباتها با استقرا روی n یا با یک گام استقرایی از n به $n+2$ انجام می‌شوند. چیزی که در این گام باید اثبات کرد این است که $f \to (f * a)$ یکریختیی از گروه هوموتوپی در بعد $2n-1$ به بعد $2n+1$ می‌دهد.

تذکر. اگر $N < n$، درجهٔ نگاشت $S^{2n-1} \to GL(n,\mathbf{C})$ باید صفر تعریف شود، زیرا به سادگی دیده می‌شود که درجهٔ نگاشت ترکیبی

$$S^{2n-1} \to GL(N,\mathbf{C}) \to GL(n,\mathbf{C})$$

برابر صفر است.

۲. عملگرهای بیضوی

در نظریهٔ عملگرهای دیفرانسیل بیضوی، به طور طبیعی به ردهٔ وسیعتر عملگرهای انتگرال‌ـدیفرانسیلی[1] (از جمله، عملگر وارون یا گرین) رهنمون می‌شویم که امروز عملگرهای شبه‌دیفرانسیلی[2] نامیده می‌شوند و از طریق تبدیل فوریه به بهترین وجه قابل مطالعه‌اند. این عملگرها دارای نمایش موضعی انتگرال به شکل زیر هستند.

$$P\phi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} p(x,\xi)\hat{\phi}(\xi)d\xi$$

که $p(x,\xi)$ تابعی است هموار که وقتی ξ (به طور یکنواخت و به ازای x کراندار) به ∞ میل کند، دارای خواص مجانبی مناسبی[2] است، و $\hat{\phi}$ تبدیل فوریهٔ ϕ است. برای یک عملگر دیفرانسیل، p فقط یک چندجمله‌ای برحسب ξ است که ضرایبش توابع همواری از x هستند. اگر ϕ برداری‌ـمقدار باشد، p باید ماتریسی‌ـمقدار باشد.

فرض کنیم p_r جملات با بیشترین مرتبه را در بسط مجانبی p نشان دهد. پس گوییم P بیضوی از مرتبهٔ r است اگر $p_r(x,\xi) \in GL(N,\mathbf{C})$ به ازای هر x و $\xi \neq 0$. بنابراین برای x ثابت، نگاشت پیوستهٔ $S^{n-1} \to GL(N,\mathbf{C})$ با معادلهٔ $\xi \to p_r(x,\xi)$ را داریم. پس اگر n زوج باشد این نگاشت دارای درجه است. این درجه مستقل از x است (اگر خمینهٔ ما همبند باشد) و می‌توان آن را درجهٔ موضعی P نامید. به عنوان مثال درجهٔ موضعی عملگر کُشی‌ـریمان $\frac{d}{dz}$ به وضوح برابر ۱ است در حالی که عملگر لاپلاس درجهٔ موضعی صفر دارد.

برای به دست آوردن یک مسألهٔ سراسری جالب معمولاً مجبوریم که شرایط مرزی مناسبی بر P تحمیل کنیم. البته اگر روی یک خمینهٔ فشردهٔ بدون مرز باشیم دیگر سؤالی در مورد شرایط مرزی وجود ندارد. همچنین است در مورد عملگرهای مرتبهٔ صفر روی $\mathbf{R}^N$ که «در بینهایت برابر همانی هستند» به این معنی که:

1. integro-differential operators 2. psuedo-differential operators

(۱) مجموعهٔ فشردهٔ $K \subset \mathbf{R}^N$ وجود دارد که $\phi P \psi = \phi\psi$ هرگاه محمل ϕ یا ψ در $\mathbf{R}^N - K$ باشد. اگر $P = p(x, D)$، آنگاه شرط (۱) نتیجه می‌دهد که

$$p(x,\xi) = 1 \qquad \text{به ازای } x \notin K، \qquad (۲)$$

در واقع (۱) با (۲) و $(۲)^t$ معادل است که $(۲)^t$ شرط متناظر برای عملگر ترانهاده (یا الحاقی) P یعنی P^t است. چون فضای اقلیدسی ساده‌تر از یک خمینهٔ کلی است، من فعلاً بحث را به این حالت محدود می‌کنم.

فرض کنید P بیضوی از مرتبهٔ صفر است و در (۱) صدق می‌کند. پس اگر k ثابتی باشد به گونه‌ای که

$$|x| \geqq k \Rightarrow x \notin K$$

جملهٔ پیشرو $p_0(x,\xi)$ از $p(x,\xi)$ به ازای هر (x,ξ) با ضابطهٔ $|x|+|\xi| \geqslant k$ یک ماتریس ناتکین خواهد بود. در واقع به ازای $\xi \neq 0$ این نتیجهٔ بیضوی‌بودن است و به ازای $\xi = 0$ داریم $|x| \geqslant k$ پس $x \notin K$ و لذا طبق (۲)، $p_0(x,\xi) = 1$. بنابراین p_0 یک نگاشت پیوستهٔ

$$p_0 : S^{2n-1} \to GL(N, \mathbf{C})$$

تعریف می‌کند که S^{2n-1} کرهٔ واحد در $\mathbf{R}^{2n}$ (فضای x و ξ) است. این درجهٔ p_0 مستقل از k است و می‌توان آن را درجهٔ سراسری عملگر P نامید. این درجه کاملاً با درجهٔ موضعی که قبلاً تعریف شد متفاوت است. اولاً درجهٔ سراسری به ازای هر مقدار n تعریف می‌شود در حالی که درجهٔ موضعی فقط برای n زوج تعریف می‌شود. ثانیاً اگر P از نوعی باشد که هم‌اکنون بررسی می‌کنیم و n زوج باشد، درجهٔ موضعی لزوماً صفر است (زیرا مستقل از x است و به ازای $|x| > k$، $p_0 = 1$). در حقیقت می‌توان گفت که درجهٔ سراسری فقط به دلیل اینکه درجهٔ موضعی صفر است، تعریف می‌شود.

معلوم می‌شود که این مطالب ساده دربارهٔ درجه‌های موضعی و سراسری در فضای اقلیدسیْ نمونهٔ بارز احکامی است که در حالت کاملاً عام شرایط مرزی از نوع شاپیرو-لوپاتینسکی[1] (یا به اصطلاح «قهری[2]»)[۳] در خمینه‌های کلی برقرار است. در واقع برای اینکه یک عملگر بیضوی P در شرطی مرزی از این نوع، حتی به طور موضعی، صدق کند باید درجهٔ موضعی P صفر باشد. به بیان دیگر شرایطی توپولوژیک وجود دارد که P باید در آنها صدق کند تا شرایط مرزی شاپیرو-لوپاتینسکی را بپذیرد. این موضوع برای $n = 2$ دانسته و نسبتاً واضح است: مثلاً $\frac{d}{dz}$ درجهٔ موضعی ۱ دارد و در این شرایط مرزی صدق نمی‌کند. به نظر می‌آید که در متون این مبحث، $n = 2$ یک حالت نسبتاً خاص تلقی می‌شود در حالی که عکس آن درست است: این حالت، عادی است.

یک نکتهٔ جالب در این مورد اینکه، من و بات هنگام تلاش در فهم معنی توپولوژیک شرایط مرزی، قهراً به یک اثبات مقدماتی جدید از قضیهٔ بات رهنمون شدیم [۴]. به عقیدهٔ من این اثبات جدید کلید درک واقعی ارتباط بین عملگرهای بیضوی و گروههای خطی است. به علاوه اهمیت شگرفی در توپولوژی جبری محض دارد و امکان پروراندن قسمتهای بزرگی از توپولوژی جبری را بر پایهٔ جبر خطی ــ به جای نظریهٔ سنتی مجتمعهای سادکی و هومولوژی ــ فراروی ما می‌نهد[۴].

از بحث منحرف شدیم. بیایید به حالت خاص عملگرهای بیضوی P در فضای اقلیدسی که در شرط (۱) صدق می‌کنند برگردیم. یکی از نتایج اولیهٔ نظریه کلاسیک عملگرهای بیضوی که در اینجا هم معتبر می‌ماند این است که فضای جوابهای معادلات $P\phi = 0$ متناهی‌بعد است و چون الحاقی P یعنی P^* از همان نوع P است پس، فضای جوابهای $P^*\psi = 0$ هم متناهی‌بعد است. تفاضل بعد این دو، اندیس P نامیده می‌شود. یعنی

$$\text{index}P = \dim \text{Ker}P - \dim \text{Ker}P^*$$

اهمیت خاص اندیس در این است که تحت تغییر شکل پیوستهٔ P تغییر نمی‌کند. بنابراین معقول است که بپرسیم چه ارتباطی با ناوردای توپولوژیکمان، درجهٔ سراسری، دارد.

فضای همهٔ عملگرهای بیضوی Pی عمل‌کننده روی فضای توابع $\mathbf{R}^n \to \mathbf{C}^N$ را که در شرط (۱) صدق می‌کنند[۵] با $\text{Ell}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^N)$ نشان می‌دهیم. پس فرایند نسبت‌دادن تابع $p_0(x,\xi)$ به هر چنین Pای، تابعی پیوسته چون

$$\sigma : \text{Ell}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^N) \to \text{Map}(S^{2n-1}, GL(N, \mathbf{C}))$$

تعریف می‌کند که $\text{Map}(A, B)$ فضای تمام توابع پیوستهٔ $A \to B$ را نشان می‌دهد. با عملیات مقدماتی می‌توان نشان داد که σ تناظر یک به یکی بین مؤلفه‌های همبند این دو فضا القا می‌کند. به بیان دیگر، رده‌های هوموتوپی عملگرها دقیقاً با اعضای گروه هوموتوپی $(2n-1)$ام $GL(n, \mathbf{C})$ متناظرند. چون

$$\text{index}P = \text{index}(P \oplus I)$$

که I عملگر همانی است، همیشه می‌توانیم N را افزایش دهیم بدون اینکه اندیس (یا درجهٔ سراسری) تغییر کند. بنابراین بدون کاسته‌شدن از کلیت می‌توان فرض کرد $N \geqslant n$. اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم قضیهٔ بات را که می‌گوید $\deg f$ اساساً تنها ناوردای هوموتوپی نگاشت

$$f : S^{2n-1} \to GL(N, \mathbf{C})$$

است به کار بریم. این نتیجه می‌دهد که $\text{index}P$ باید تابعی از $\sigma(P)$، درجهٔ سراسری P، باشد. چون «اندیس» و «درجه» هر دو به طور بدیهی نسبت به جمع مستقیم، جمعی هستند پس به ازای یک عدد صحیح C_n مستقل از P

$$\text{index}P = C_n \text{degree}\, \sigma(P)$$

برای محاسبهٔ این ثابت C_n کافی است اندیس P را برای یک عملگر P که نماد $\sigma(P)$ آن برابر مولد بات، a_n، است محاسبه کنیم. این کار را می‌توان به صورت زیر انجام داد. ابتدا این خاصیت ضربی اندیس را بیان می‌کنیم[۶]:

1. Shapiro-Lopatinskii 2. coercive

اگر $\sigma(R) = \sigma(P) * \sigma(Q)$ آنگاه $\mathrm{index}R = \mathrm{index}P.\mathrm{index}Q$. در اینجا $*$ عملگری است که در بخش ۱ تعریف شد. بنابراین اگر

$$Q \in \mathrm{Ell}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^M)\ ,P \in \mathrm{Ell}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^N)$$

آنگاه $R \in \mathrm{Ell}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^{2NM})$. چون درجهٔ $\sigma(P)$ هم به همان معنی ضربی است و چون

$$a_n = a * a * \cdots * a \qquad (n \text{ بار})$$

نتیجه می‌شود $C_n = (C_1)^n$. پس می‌ماند محاسبهٔ C_1. برای این کار کافی است اندیس یک عملگر P روی $\mathbf{R}^1$ با $\sigma(P) = a_1$ را محاسبه کنیم. در واقع این یک مثال کلاسیک است و مشخص می‌شود که[7] $C_1 = 1$. بنابراین:

قضیه. برای هر عملگر شبه‌دیفرانسیلی بیضوی روی $\mathbf{R}^n$ که در شرط (۱) صدق کند اندیس برابر درجهٔ سراسری است.

با استفاده از هر یک از دو تعریف صریحی که برای درجه داده شد، این قضیه یک فرمول صریح برای اندیس به ما می‌دهد. از طرف دیگر (با در نظر گرفتن قضیهٔ بالا) می‌توانیم اندیس را فراهم‌کنندهٔ یک تعریف تحلیلی برای درجه تلقی کنیم! این موضوع آنقدر که به نظر می‌آید عجیب نیست. اولاً این تنها تعریفی است که طبق آن درجه از پیش عددی صحیح است: در تعریف هندسی [درجه] تقسیم بر $(n-1)!$ داشتیم و در تعریف دیفرانسیلی، فرمول با یک انتگرال داده شد (و لذا از پیش یک عدد حقیقی بود) ثانیاً این تعریف تحلیلی، به یک معنی تعمیم مناسب تعریف جبری درجه (که فقط به ازای $n = 2$ وجود دارد) می‌باشد. شباهتهای سطحی صوری، مشخص‌اند؛ هر دو درجه تفاضل دو عدد صحیح مثبت هستند. در واقع شباهت خیلی عمیقتر از این است زیرا تعداد صفرها و قطبهای یک تابع مرومورف [برخه ریخت] در $|z| < 1$ را می‌توان به شکلی کاملاً طبیعی به عنوان بعد فضای جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل مناسب بیان کرد. بالاخره برای برخی تعمیمهای طبیعی که در بخش ۳ آنها را بررسی خواهیم کرد، این تعریف تحلیلی به گونه‌ای توسعه می‌یابد که دیگر تعریفها نمی‌یابند.

از طرف دیگر باید قبول کرد که محاسبهٔ اندیس یک عملگر معمولاً از محاسبهٔ مثلاً یک انتگرال دشوارتر است اما برای بسیاری مقاصد نظری، محاسبات عملی اهمیت چندانی ندارند و تعریف تحلیلی مزیتهای نظری بسیاری دارد.

شاید اکنون موقعیت مناسبی باشد تا دربارهٔ موارد مختلفی که در متون این مبحث اثباتی از قضیهٔ بالا داده شده توضیح دهم. اولین اثبات برای n کلی در [7] داده شده است[8] که جزئیات آن در [14] شرح و بسط داده شده. ولی چون این مقاله‌ها با حالت خمینه‌های کلی سر و کار داشته‌اند، نمادگذاری و ابزارهای پیچیده‌تری نسبت به حالت فضای اقلیدسی (یا یک کره) لازم داشته‌اند. اگر توجه خود را به یک کره محدود کنیم اثباتهای [7] و [14] اساساً با اثباتی که در بالا شرح دادم یکی می‌شود. فقط در مورد دو تفاوت، توضیح ویژه لازم است. اول آنکه قسمت دشوار [7]، که به ناوردای کوبوردیسم می‌پردازد، برای کره‌ها مورد نیاز نیست. دوم اینکه بین فضای اقلیدسی و کره تفاوت کمی وجود دارد. ایدهٔ مطالعهٔ عملگرهایی در فضای اقلیدسی که «در بینهایت، همانی هستند». از سیلی [15] است.

چون اثبات مذکور در [7] پیچیده به نظر می‌آمد، مؤلفان مختلفی، [15]، [9]، [11]، سعی کرده‌اند که اثباتهایی ساده‌تر یا مقدماتیتر برای حالت فضای اقلیدسی ارائه دهند. این اثباتهای مختلف فقط از لحاظ کاربرد و عرضهٔ توپولوژی جبری متفاوت‌اند و آنالیز در آنها اساساً یکسان است. توپولوژیی که این مؤلفان از آن استفاده کرده‌اند، کلاسیک‌تر است ــ هومولوژی، قضیهٔ هورویچ، قضیهٔ سر در مورد هوموتوپی کره‌ها و غیره ــ گاهی همراه با قضیهٔ بات و نتایج هومولوژیک آن. به نظر من اگر چه این قسمتهای توپولوژی قدیمیترند اما مقدماتیتر از قضیهٔ بات نیستند. خواننده می‌تواند طول [4] را که یک شرح خودکفا از همهٔ چیزهایی است که من در اینجا به کاربرده‌ام با رساله‌های پیشرفتهٔ استاندارد توپولوژی جبری مقایسه کند. و باز هم مهمتر اینکه، من جداً معتقدم که قضیهٔ بات نه تنها مقدماتیتر است بلکه همچنین بیشتر به مسألهٔ اندیس ربط دارد. تأکید کل سخنرانی من بر این نکته بوده است.

۳. پیامدهای گسترده‌تر

بحث من تا اینجا معطوف به عملگرهای بیضوی روی فضای اقلیدسی بوده است زیرا تشریح این حالت ساده‌تر است و نیز به نظر من عمق موضوع را نشان می‌دهد. برای توجیه این گفته، باید نشان داد که مسائلی بسیار کلیتر با روش مشابه حل می‌شوند. این البته درست است و من می‌خواهم چند تا از این مسائل را بررسی کنم.

در ابتدا باید گفت که مسألهٔ عام اندیس برای عملگرهای بیضوی دلخواه روی خمینه‌های بسته[9] حل شده است. علاوه بر اثبات مذکور در [7] و [14]، اثبات دیگری وجود دارد که در [8] خواهد آمد و از جنبه‌های مختلفی که مهم هم هستند برتر از این اثبات است. ایدهٔ اساسی آن را خیلی ساده می‌توان توضیح داد. اگر یک عملگر بیضوی P روی یک خمینهٔ بستهٔ X داده شده باشد، X را در فضای اقلیدسی E می‌نشانیم و یک عملگر Q روی E می‌سازیم که «در بینهایت برابر ۱ باشد» و $\mathrm{index}P = \mathrm{index}Q$؛ در نتیجه مسأله به حالت بررسی‌شده در بخش ۲ تقلیل می‌یابد. ساختن Q را می‌توان، به گونهٔ نادقیق، به شکل زیر توصیف کرد. یک عملگر Aی تعریف‌شده در یک همسایگی لوله‌ای[1] N از X در E در نظر می‌گیریم که نماد مولد در هر صفحهٔ قائم N_x، $x \in X$ را می‌دهد. سپس قرار می‌دهیم $Q = P * A$ که $*$ نشان‌دهندهٔ عملی است مشابه با آنچه در بخش ۱ توصیف شد. با بازبینی دقیقتر خاصیت ضربی اندیس به‌دست می‌آوریم:

$$\mathrm{index}Q = \mathrm{index}P \cdot \mathrm{index}A_x = \mathrm{index}P$$

در مورد خمینه‌های لبه‌دار، مسألهٔ اندیس می‌تواند، آن طور که در [3] نشان داده شده، به مسأله‌ای در مورد خمینه‌های بسته تحویل یابد.

فرمولهای اندیس را که بدین شیوه به دست می‌آیند، همانند درجهٔ سراسری در بخش ۲، می‌توان به شکل انتگرال نوشت یا به شکل هومولوژیک، مشخص کرد. جالب است که بعضی از مهمترین ناورداهای خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر

1. tubular

که توسط توپولوژیدانان کشف شده‌اند، در واقع اندیسهای عملگرهای بیضوی هستند. این امر به توضیح بعضی از خواص آنها کمک می‌کند اما خیلی مسائل در این زمینه باقی مانده است.

حل مسألهٔ عام اندیس را که در بالا توصیف شد می‌توان کاربردی از توپولوژی جبری در یک مسألهٔ آنالیز تلقی کرد. به عکس، همان طور که مثال زیر نشان می‌دهد، می‌توان از آنالیز برای کمک به توپولوژی استفاده کرد.

فرض کنید G یک گروه لی فشرده باشد (مثلاً یک گروه نامتناهی) و V و W دو فضای نمایش مختلط (متناهی بعد) G باشند. پس کرهٔ واحد $S(V)$، در یک متریک ناوردا، و $GL(W)$ هر دو به یک معنای طبیعی Gـفضا هستند: عمل روی $GL(W)$، مزدوج‌سازی است یعنی $T \to gTg^{-1}$. در مورد Gـنگاشتهای پیوستهٔ

$$f : S(V) \to GL(W)$$

چه می‌توانیم بگوییم؟ یعنی نگاشتهایی که در شرط

$$f(gx) = gf(x)g^{-1} \qquad g \in G \ ,x \in V \qquad (۳)$$

صدق می‌کنند؟ رده‌های Gـهوموتوپی[۱۰] چنین نگاشتهایی چیست؟ این مسأله تعمیم طبیعی مسألهٔ حل شده توسط قضیهٔ بات است، حداقل اگر W «بزرگ» باشد. پس «گروه پایدار»

$$A(V) = \lim_{\vec{W}}[S(V), GL(W)]$$

را تعریف می‌کنیم که W روی کلیهٔ فضاهای نمایش تغییر می‌کند. این دستگاه با جزئیت [شمول] جهت داده شده و [,] رده‌های Gـهوموتوپی نگاشتها را نشان می‌دهد. اگر $G = ۱$ آنگاه قضیهٔ بات حاکی است که $A(V) \cong \mathbf{Z}$، که $\mathbf{Z}$ گروه اعداد صحیح است. حال قضیهٔ سراسری زیر برقرار است[۱۱]:

قضیه. هر عضو $A(V)$ به ازای هر سرشت تحویل‌ناپذیر χ از G دارای درجه‌ای است که با $\deg_\chi$ نشان داده می‌شود، دو عضو ϕ و ψ برابرند اگر و فقط اگر

$$\text{به ازای هر } \chi, \qquad \mathrm{dex}_\chi \phi = \deg_\chi \psi$$

و بالاخره، خانواده‌ای مرکب از اعداد صحیح n_χ درجات یک $\phi \in A(V)$ را تشکیل می‌دهد اگر و فقط اگر

(i) به ازای هر χ جز تعدادی متناهی از آنها، $n_\chi = ۰$.

(ii) به ازای هر $g \in G$، $(\sum n_\chi \chi(g))\det(۱ - \rho(g)) = ۰$ که در آن $\rho(g) \in GL(V)$ عمل G روی V را تعریف می‌کند.

تذکر. توجه کنید که اگر G یک بردار ثابت در V داشته باشد،

$$\det(۱ - \rho(g)) = ۰$$

و لذا شرط (ii) در هر حال برقرار است، بنابراین n_χها همانند حالتی که گروهی وجود نداشت، اختیاری هستند.

اثبات قضیهٔ بات را نمی‌توان بلافاصله تعمیم داد چون این اثبات با استقرا روی بعد V پیش می‌رود و برای گروه ناجابه‌جایی عمومی G، نمایش V لزوماً به زیر فضاهای یک بعدی تجزیه نمی‌شود. ولی با استفاده از اندیس عملگرهای بیضوی می‌توان این مشکل را حل کرد. من نمی‌توانم وارد جزئیات شوم و اجازه دهید فقط بگویم که بین تعریفهای گوناگون درجه که قبلاً خاطرنشان شد، تنها موردی که به صورت کاملاً رضایت‌بخش تعمیم می‌یابد، تعریف تحلیلی است. برای سادگی فرض کنید $V = U \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ مختلط‌سازی یک فضای نمایش حقیقی U باشد و $\mathrm{Ell}_G(U, W)$ فضای عملگرهای بیضوی را ــ همانند بخش ۲ ــ نشان دهد که به‌علاوه، Gـناوردا (به مفهومی واضح) هم هستند. پس نماد $\sigma(P)$ی چنین عملگری، Gـنگاشتی از $S(V)$ به $GL(W)$ است. فضاهای $\mathrm{Ker}P$ و $\mathrm{Ker}P^*$ فضاهای نمایش G خواهند بود. پس می‌توان چنین تعریف کرد

$$\mathrm{index}_\chi P = d_\chi(\mathrm{Ker}P) - d_\chi(\mathrm{Ker}P^*)$$

که d_χ تعداد دفعاتی را که نمایش χ روی می‌دهد، نشان می‌دهد. پس می‌توانیم تعریف کنیم

$$\deg_\chi \sigma(P) = \mathrm{index}_\chi P$$

من جداً عقیده دارم که رابطهٔ بین آنالیز و توپولوژی در همهٔ این مسائل کاملاً زیر بنایی است. یکی از دلایل من برای این اعتقاد آن است که بارها و بارها دیده‌ایم که آنالیز، به طرزی اجتناب‌ناپذیر، به ملاحظاتی توپولوژیک انجامیده است که در پایان مشخص‌شده که دقیقاً درست می‌باشند. اجازه دهید بحث را با مثال دیگری که جدیدتر و بسیار آموزنده است خاتمه دهم.

تاکنون من فقط از اعداد مختلط استفاده کرده‌ام ولی ما می‌توانیم عملگرهای حقیقی (یعنی عملگرهای دیفرانسیل با ضرایب حقیقی) وگروههای خطی حقیقی $GL(N, \mathbf{R})$ را در نظر بگیریم. طبیعی است دنبال روابطی بین اینها بگردیم که نتایجی را که در حالت مختلط به دست آورده‌ایم ظریفتر کند. بات [۱۰] گروههای هوموتوپی $\pi_{n-۱}$ از نگاشتهای $S^{n-۱} \to GL(N, \mathbf{R})$ به ازای N بزرگ را هم مشخص کرده است. اینها نسبت به n تناوبی، با دورهٔ تناوب ۸، هستند و مقادیر زیر را می‌گیرند:

$$n = ۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۴ \quad ۵ \quad ۶ \quad ۷ \quad ۸$$

$$\pi_{n-۱} = Z_۲ \quad Z_۲ \quad ۰ \quad \mathbf{Z} \quad ۰ \quad ۰ \quad ۰ \quad \mathbf{Z}$$

که در آن $Z_۲$ گروه مرتبهٔ ۲ است. از اینجا به نظر می‌آید که باید ناورداهای تحلیلی به پیمانهٔ ۲ را جستجو کنیم. پیدا کردن برخی از آنها سخت نیست. فرض کنیم P یک عملگر حقیقی بیضوی و پادالحاقی باشد. در این صورت، $\mathrm{index}P$ برابر ۰ است و لذا جالب نیست اما $\dim(\mathrm{Ker}\,P) \bmod ۲$ تحت تغییر شکل پیوسته ناورداست. زیرا ویژه مقدارهای غیرصفر P به صورت جفتهای مزدوج مختلط ظاهر می‌شوند: پس اگر ویژه مقدار λ به ۰ میل کند، مزدوجش $\bar{\lambda}$ نیز به ۰ میل می‌کند و $\dim \mathrm{Ker}P$ به اندازهٔ ۲ واحد جهش می‌کند.

حال طبیعی است که سعی کنیم این ناوردای به پیمانهٔ ۲ی P را به گروههای از مرتبهٔ ۲ در قضیهٔ بات ربط دهیم. همهٔ تلاشهای اولیه در این زمینه ناموفق از آب درآمدند: علت آن وقتی مشخص شد که سینگر به من خاطرنشان کرد که اگر P حقیقی باشد، $p(x,\xi)$ حقیقی نیست بلکه در

$$p(x,-\xi)=\overline{p(x,\xi)}$$

صدق می‌کند زیرا با تبدیل فوریه تعریف شده است. از اینجا چنین برمی‌آید که باید نماد یک عملگر حقیقی را به صورت نگاشتی چون

$$f : S^{2n-1} \to GL(N,\mathbf{C})$$

با شرط $f(-\xi)=\overline{f(\xi)}$ تعبیر کنیم. معلوم شده است که این روش خیلی کاراست و ارتباط مورد نظر بین ناورداهای تحلیلی و توپولوژیک به پیمانهٔ ۲ از آن به دست می‌آید. به علاوه، به عنوان یک نتیجهٔ فرعی، به رهیافت توپولوژیک جدید و بسیار ساده‌تری به قضیه‌های حقیقی بات رهنمون شدم [۲]. پس آنالیز در این مورد کمک بزرگی بود برای راهیابی به بارآورترین دیدگاه توپولوژیک.

این ناورداهای به پیمانهٔ ۲ توضیحات قبلی مرا مبنی بر اینکه تعریف تحلیلی درجه برتر از تعریف هندسی یا دیفرانسیلی است، تقویت می‌کنند. در واقع هیچ تعریف هندسی یا دیفرانسیلی برای ناورداهای به پیمانهٔ ۲ی بات شناخته‌شده نیست. به علاوه می‌دانیم که این ناوردا از نوع هومولوژیک (حتی با ضرایب به پیمانهٔ ۲) نیست. چون همهٔ فرمولهای انتگرالی شناخته شده در این زمینه اساساً هومولوژیک هستند، بعید به نظر می‌رسد که بتوان ناوردای بات را با روشهای انتگرالی محاسبه کرد. ولی این مسأله به عنوان یک مسأله جالب حل نشده باقی مانده است.

در پایان اجازه بدهید بگویم که آنالیز و توپولوژی اکنون به گونه‌ای ناگسستنی با هم ترکیب شده‌اند و شاید لازم باشد این قسمت ریاضیات را «توپولوژی بیضوی» بنامیم.

پانوشتها

(۱) خواننده‌ای که ظاهر عجیب این حاصلضرب برایش گیج‌کننده است، [۵] را ببیند که در آن این حاصلضرب به گونه‌ای طبیعی ظاهر می‌شود.

(۲) برای ملاحظهٔ تعریفهای دقیق، [۱۲] یا [۱۳] را ببینید.

(۳) برای ملاحظهٔ تعریفهای دقیق و اثبات حکمهایی که در پی می‌آیند، [۳] را ببینید.

(۴) این برنامه در [۱] پیگیری شده است.

(۵) ما در (۱) یک مجموعهٔ فشردهٔ ثابت K در نظر می‌گیریم و با تغییر مقیاس می‌توانیم فرض کنیم که K درگوی واحد جای دارد.

(۶) برای حالت خمینهٔ بسته، [۱۴] را ببینید. فقط تصحیحاتی جزئی برای حالت فضای اقلیدسی مورد نیاز است.

(۷) درواقع، بسته به قرارداد علامت داریم $C_1=\pm 1$، که در اینجا آن را در نظر نمی‌گیریم.

(۸) مقاله‌ای نیز به قلم ولپرت [Vol'pert] در این باره در منبع زیر به چاپ رسیده است:

(Doklady Akad. Nauk SSSR, Vol. 152, 1963, pp. 1292-1293)

این مقاله متأسفانه اشکال دارد. اول اینکه قضیهٔ بات مفروض گرفته شده، چنانکه گویی بدیهی است (هیچ ارجاعی داده نشده). به علاوه، فرمول ذکر شده غلط است، عامل $(n-1)!$ از قلم افتاده است. اگر تصور کنیم که حالت کلی معادل حالت $n=2$ است، هر دوی این خطاها قابل فهم‌اند.

(۹) یعنی فشرده و بدون لبه.

(۱۰) یعنی هوموتوپیهایی که شرط (۳) را حفظ می‌کنند.

(۱۱) خواننده برای ملاحظه اثبات می‌تواند [۶] را ببیند.

مراجع

1. Atiyah, M. F., *Lectures on K-theory*, mimeographed notes, Harvard University, 1964.

2. Atiyah, M. F., *K-theory and reality*, Oxford Quart. J. Math., Vol. 17, 1966, pp. 367-386.

3. Atiyah, M. F., and Bott, R., *The index problem for manifolds with boundary, Bombay Colloquium on Differential Analysis*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1964.

4. Atiyah, M. F., and Bott, R., *On the periodicity theorem for complex vector bundles*, Acta Math., Vol. 112, 1964, pp. 229-247.

5. Atiyah, M. F., Bott, R., and Shapiro, A., *Clifford modules*, Topology, Vol. 3, 1964, Suppl. 1, pp. 3-38.

6. Atiyah, M. F., and Segal, G. B., *Seminar on Equivariant K-theory*, mimeographed notes, Oxford University, 1965.

7. Atiyah, M. F., and Singer, I. M., *The index of elliptic operators on compact manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 69, 1963, pp. 422-433.

8. Atiyah, M. F., and Singer, I. M., *The index of elliptic operators, I*, to appear.

9. Bojarski, B., *On the index problem for systems of singular integral equations, III*, Bull. Acad. Polon. Sci., Vol. 13, 1963, pp. 633-637.

10. Bott, R., *Stable homotopy of the classical groups*, Ann. of Math., Vol. 70, 1959, pp. 313-337.

11. Calderon, A., *Singular integrals*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 72, 1966, pp. 427-465.

12. Hörmander, L., *Pseudo-differential operators*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 18, 1965, pp. 501-517.

13. Kohn, J. J., and Nirenberg, L., *An algebra of pseudo-differential operators*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 18, 1965, pp. 269-305.

14. Palais, R., *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem*, Ann. of Math. Study No. 57, Princeton Univ. Press, Princeton, 1965.

15. Seeley, R. T., *Integro-differential operators on vector bundles*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 117, 1965, pp. 167-204.

آنالیز با پرتاب سکه•

دانیل استروک*

ترجمهٔ روح‌الله جهانی‌پور

این نوشتهٔ کوتاه بر مبنای یک سخنرانی توصیفی تهیه شده است که در ژانویهٔ سال ۱۹۹۹ برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی ریاضی در دانشگاه ام. آی. تی. ارائه دادم. در آن سخنرانی هدفم آن بود که با بیان یک مثال مقدماتی نشان دهم که چگونه ملاحظات طبیعی احتمالاتی، به بینشهای جالب و گاه ژرفی در بارهٔ آنالیز حقیقی منجر می‌شود. برای آنکه همه چیز تا آنجا که ممکن است در سطحی مقدماتی باشد، مثال ارائه‌شده مبتنی بر پرتاب سکه [شیر یا خط] بود. البته اگر به جای پرتاب سکه به مطالعهٔ چیزهای پیچیده‌تری چون مسیرهای براونی بپردازیم، مجموعه‌ای غنیتر از مثالها در اختیار خواهیم داشت[۱].

تقریباً تمام ریاضیدانان در مرحله‌ای از دوران تحصیل خود می‌آموزند که هر تابع یکنوا تقریباً همه‌جا (به مفهوم لبگ) مشتق‌پذیر است[۲]. به دنبال اطلاع از این کشف دلگرم‌کننده، خبر ناراحت‌کننده‌ای می‌رسد حاکی از اینکه توابع غیرثابتِ پیوستهٔ یکنوایی وجود دارند که تکین‌اند به این معنی که مشتق آنها در تقریباً هر نقطه صفر می‌شود[۳]. چون این قبیل توابع درکاربردپذیریِ عام قضیهٔ اساسی حسابان تردید ایجاد می‌کنند، آنها را عجیب و غریب تلقی می‌کنیم، به این معنی که غالب افراد انتظار ندارند این توابع جزء آن دسته‌ای باشند که به‌طور عادی به آنها برمی‌خوریم. بدتر اینکه در ساده‌ترین مثال از این دست توابع، اجتماع بازه‌هایی که تابع روی آنها ثابت است، اندازهٔ کامل دارند. این مرض را می‌شود درمان کرد لکن درمان آن چندان طبیعی نیست.

اگر این نوشته هیچ فایدهٔ دیگری نداشته باشد، دست‌کم امیدوارم وجههٔ بهتری برای توابع پیوستهٔ یکنوای تکین فراهم کند. در واقع نشان خواهیم داد که در بررسی بینهایت بار پرتاب یک سکهٔ نامتعادل، ظهور چنین توابعی اجتناب‌ناپذیر است. بورکل به من یادآور شد که پاتریک بیلینگزلی هم تلاش مشابهی کرده بود تا از طریق پرتاب سکه به توابع تکین برسد [B].

قانون ضعیف اعداد بزرگ

در الگوی ریاضی بازی پرتاب سکه [شیر یا خط] که در آن سکه با احتمال p $(0 < p < 1)$ «شیر» و با احتمال $q = 1 - p$ «خط» می‌آید، برآمدها با دنبالهٔ متغیرهای تصادفی دو به دو مستقل X_1، X_2، ...، X_n، ... نشان داده می‌شوند که در آن $X_n = 1$ اگر نتیجهٔ nامین پرتاب «شیر» و $X_n = 0$ اگر نتیجهٔ nامین پرتاب «خط» باشد. یعنی اگر $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ رشته‌ای از ۰ها و ۱ها باشد، آنگاه[۴]

$$\mathbb{P}_p(X_1 = \epsilon_1, \ldots, X_n = \epsilon_n) = p^{\Sigma_{m=1}^n \epsilon_m} q^{n - \Sigma_{m=1}^n \epsilon_m}$$

حال فرض کنید $S_n = \Sigma_{m=1}^n X_m$ تعداد «شیرها»ی ظاهرشده در n پرتاب اول باشد. چون $\mathbb{E}_p[X_m] = 1p + 0q = p$[۵]، داریم

$$\mathbb{E}_p[S_n] = \mathbb{E}_p\left[\sum_{m=1}^n X_m\right] = \sum_{m=1}^n \mathbb{E}_p[X_m] = np$$

همین‌طور اگر $\overline{X}_m \equiv X_m - \mathbb{E}_p[X_m] = X_m - p$ و $\overline{S}_n = \sum_{m=1}^n \overline{X}_m$، آنگاه

$$E_p[\overline{S}_n] = 0, \qquad \mathbb{E}_p[\overline{S}_n^2] = \sum_{m,m'=1}^n \mathbb{E}_p[\overline{X}_m \overline{X}_{m'}]$$

اما

$$\begin{aligned} m = m' \;&\Rightarrow\; \mathbb{E}_p[\overline{X}_m \overline{X}_{m'}] = \mathbb{E}_p[\overline{X}_m^2] \\ &= q^2 p + p^2 q = pq(p+q) = pq \\ m \neq m' \;&\Rightarrow\; \mathbb{E}_p[\overline{X}_m \overline{X}_{m'}] = q^2 p^2 - 2(pq)^2 + p^2 q^2 = 0 \end{aligned}$$

و بنابراین $\mathbb{E}_p[\overline{S}_n] = 0$ و

$$\mathbb{E}_p[\overline{S}_n^2] = npq = np(1-p)] \leqslant \frac{n}{4} \qquad (1.1)$$

اینجا نکتهٔ ظریفی مطرح می‌شود. چون $\overline{S}_n^2$ شامل n^2 جمله است، به‌طور پیشینی [مقدم بر تجربه] انتظار داریم رشد $\mathbb{E}_p[\overline{S}_n^2]$ نسبت به n از درجهٔ دوم باشد، ولی در واقع به‌جای $\overline{S}_n^2$، برای S_n^2 چنین وضعیتی رخ می‌دهد:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_p[S_n^2] &= \mathbb{E}_p[(\overline{S}_n + np)^2] \\ &= \mathbb{E}_p[\overline{S}_n^2] + np\mathbb{E}_p[\overline{S}_n] + (np)^2 \\ &= npq + n^2p^2\end{aligned}$$

البته دلیل این اختلاف، صفر شدن میانگین $\overline{X}_m$هاست که همراه با فرض استقلال، منجر به صفر شدن جملات غیر قطری در بسط $\mathbb{E}_p[\overline{S}_n^2]$ می‌شود.

چون به‌ازای هر $R > 0$ [۶]

$$\mathbb{E}_p[\overline{S}_n^2] \geqslant \mathbb{E}_p[\overline{S}_n^2, |\overline{S}_n| \geqslant R] \geqslant R^2\mathbb{P}_p(|\overline{S}_n| \geqslant R)$$

از (۱.۱) نتیجه می‌شود

$$\mathbb{P}_p(|\overline{S}_n| \geqslant R) \leqslant R^{-2}\mathbb{E}_p[\overline{S}_n^2] \leqslant \frac{npq}{R^2} \leqslant \frac{n}{4R^2} \qquad (2.1)$$

یکی از کاربردهای این رابطه این است که

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p\left(\left|\frac{S_n}{n} - P\right| \geqslant R\right) &= \mathbb{P}_p(|S_n - np| \geqslant nR) \qquad (3.1)\\ &= \mathbb{P}_p(|\overline{S}_n| \geqslant nR) \leqslant \frac{pq}{nR^2} \leqslant \frac{1}{4nR^2}\end{aligned}$$

یعنی با احتمال حداکثر $\frac{1}{4nR^2}$، اختلاف بین $n^{-1}S_n$ (که متوسط تعداد «شیر»های ظاهر شده است) و p دست‌کم برابر است با R. نتیجهٔ کیفیِ

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_p\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \epsilon\right) = 0 \quad \text{به‌ازای هر } \epsilon > 0 \qquad (4.1)$$

قانون ضعیف اعداد بزرگ نامیده می‌شود.

یک ظریف‌کاری کوچک اما مهم

این سؤال پیش می‌آید که آیا برآورد به‌دست آمده در (۱.۳) برآورد خوبی است؟ به‌ویژه اینکه آیا n^{-1} آهنگ، واقعی همگرایی سمت چپ رابطهٔ (۱.۳) به صفر است؟ به امید اینکه موضوع روشنتر شود، به‌جای $\overline{S}_n^2$، مقدار مورد انتظار $\overline{S}_n^4$ را در نظر می‌گیریم. روشن است که

$$\mathbb{E}_p[\overline{S}_n^4] = \sum_{\mathbf{m}} \mathbb{E}_p[\overline{X}_{m_1} \dots \overline{X}_{m_4}]$$

که در آن مجموع روی همهٔ $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4)$هایی گرفته می‌شود که $1 \leqslant m_i \leqslant n$ به‌ازای $i \in \{1,2,3,4\}$. توجه کنید که با محاسبهٔ مستقیم یا بنا به خاصیت صفر شدن میانگین $\overline{X}_m$ها و استقلال داریم

$$\mathbb{E}_p[\overline{X}_{m_1} \dots \overline{X}_{m_4}] = 0 \qquad (1.2)$$

مگر اینکه به‌ازای جایگشتی چون σ از $\{1,2,3,4\}$ داشته باشیم

$$m_{\sigma_1} = m_{\sigma_2} \quad \text{و} \quad m_{\sigma_3} = m_{\sigma_4}$$

از این رو حداکثر $4!n^2$ جملهٔ ناصفر وجود دارد و هر یک از آنها از $\mathbb{E}_p[\overline{X}_1^4] \leqslant pq(1-pq) \leqslant \frac{3}{16}$ بیشتر نیست. به عبارت دیگر

$$\mathbb{E}_p[\overline{S}_n^4] \leqslant \frac{9}{2}n^2 \qquad (2.2)$$

اکنون با تکرار همان استدلالی که به کمک آن از (۱.۱) و (۱.۲) به (۱.۳) رسیدیم، مشاهده می‌کنیم که

$$\mathbb{P}_p\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant R\right) \leqslant \frac{9}{2n^2R^4} \qquad (3.2)$$

روشن است که در پی این توفیق، انتظار داریم آهنگی بهتر از n^{-2} برای همگرایی بیابیم و واقعاً هم می‌یابیم. در واقع از

$$\mathbb{E}_p[e^{\lambda\overline{S}_n}] = \Pi_{m=1}^n \mathbb{E}_p[e^{\lambda\overline{X}_m}] = (pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n$$

به‌ازای $\lambda \in \mathbb{R}$، ابتدا می‌توان دید که به‌ازای یک $\beta_p \in (0,1]$،

$$\mathbb{E}_p[e^{\lambda\overline{S}_n}] \leqslant e^{n\beta_p\lambda^2}$$

و در نتیجه به‌ازای هر $\lambda > 0$،

$$\mathbb{P}_p\left(\frac{S_n}{n} - p \geqslant R\right) \vee \mathbb{P}_p\left(\frac{S_n}{n} - p \leqslant -R\right) \leqslant \exp[-n(\lambda R + \beta_p\lambda^2)]$$

و بعد با قراردادن $\lambda = \frac{R}{2\beta_p}$، به‌دست می‌آوریم

$$\mathbb{P}_p\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant R\right) \leqslant 2\exp\left[-\frac{nR^2}{4\beta_p}\right]$$

با این حال، برای مقاصدی که ما در این نوشته داریم، (۲.۳) کفایت می‌کند. ما به‌دنبال آنیم که قانون قوی اعداد بزرگ[۷] را جانشین قانون ضعیف (ر.ک. (۴.۱)) کنیم، یعنی می‌خواهیم نشان می‌دهیم که

$$\mathbb{P}_p\left(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = p\right) = 1 \qquad (4.2)$$

به این منظور، مشاهده کنید که بنابر (۲.۳) داریم

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_p\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant n^{-1/8} \quad \text{به‌ازای یک } n \geqslant m\right)\\ &\leqslant \sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}_p\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant n^{-1/8}\right)\\ &\leqslant \frac{9}{2}\sum_{n=m}^{\infty} n^{-3/2} \to 0 \quad \text{وقتی } m \to \infty\end{aligned}$$

از این رو به‌ازای هر $\epsilon \in (0,1)$، با در نظر گرفتن m به‌اندازهٔ کافی بزرگ می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$\mathbb{P}_p\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leqslant n^{-1/8} \quad \text{به‌ازای هر } n \geqslant m\right) \geqslant 1 - \epsilon$$

و لذا با احتمال نزدیک به ۱، $\frac{S_n}{n} \to p$ وقتی $n \to \infty$.

نمایش دیگری از پرتاب سکه

مرحلهٔ بعدی برنامهٔ ما مستلزم کدگذاری برآمدهای بینهایت بار پرتاب یک سکه به‌صورت یک عدد حقیقی است. در واقع می‌خواهیم به متغیرهای تصادفی $\{X_m : m \geqslant ۱\}$ ـ مقداری $\{۰, ۱\}$ به چشم ضرایب بسط دودویی عدد تصادفی

$$Y = \sum_{m=۱}^{\infty} ۲^{-m} X_m \in [۰, ۱] \qquad (۱.۳)$$

نگاه کنیم. البته این شیوهٔ کدگذاری کامل نیست، زیرا گرچه X_mها Y را به‌طور یکتا معلوم می‌کنند، Y همیشه X_mها را به‌طور یکتا مشخص نمی‌کند. مشکلْ مربوط به آن tهایی از $[۰, ۱]$ است که برایشان $n \geqslant ۰$ موجود است به طوری که $۲^n t$ عددی صحیح است. برای رفع ابهامی که از این دست tها پیش می‌آید، قرارداد می‌کنیم که ضریب mام، $\epsilon_m(t)$، در بسط دو دویی $t \in [۰, ۱]$ طوری معین شود که

$$۰ \leqslant t - \sum_{m=۱}^{n} ۲^{-m}\epsilon_m(t) < ۲^{-n} \qquad \text{به‌ازای هر } n \geqslant ۱, \qquad (۲.۳)$$

در این صورت هر $t \in [۰, ۱]$، مجموعهٔ $\{\epsilon_m(t) : m \geqslant ۱\} \subseteq \{۰, ۱\}$ را به‌طور کامل معین می‌کند. در واقع $\epsilon_m(t)$ها به‌طور استقرایی با قواعد

$$\epsilon_۱(t) = \begin{cases} ۰ & ۰ \leqslant t < ۲^{-۱} \\ ۱ & ۲^{-۱} \leqslant x < ۱ \end{cases}$$

و

$$\epsilon_{n+۱}(t) = \begin{cases} ۰ & ۰ \leqslant t - \sum_{m=۱}^{n} ۲^{-m}\epsilon_m(t) < ۲^{-n-۱} \\ ۱ & ۲^{-n-۱} \leqslant t - \sum_{m=۱}^{n} ۲^{-m}\epsilon_m(t) < ۲^{-n} \end{cases}$$

تولید می‌شوند. به‌صورت نموداری داریم

$$\begin{array}{ccccc} [& \epsilon_۱ = ۰ &)[& \epsilon_۱ = ۱ &) \\ ۰ & & \frac{۱}{۲} & & ۱ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} [\epsilon_۱ = ۰,\ \epsilon_۲ = ۰) & [\epsilon_۱ = ۰,\ \epsilon_۲ = ۱) & [\epsilon_۱ = ۱,\ \epsilon_۲ = ۰) & [\epsilon_۱ = ۱,\ \epsilon_۲ = ۱) & \\ ۰ & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۴} & ۱ \end{array}$$

و غیره

اهمیت این ملاحظات به خاطر این است که از آنها نتیجه می‌گیریم

$$\mathbb{P}_p(X_n = \epsilon_n(Y), n \geqslant ۱ \text{ به‌ازای هر}) = ۱ \qquad (۳.۳)$$

برای اثبات درستی این مطلب توجه کنید که

$$Y - \sum_{m=۱}^{n} ۲^{-m} X_m = \sum_{m=n+۱}^{\infty} ۲^{-m} X_m \leqslant ۲^{-n}$$

و تساوی تنها وقتی برقرار است که به‌ازای هر $m \geqslant n+۱$ داشته باشیم $X_m = ۱$. اما

$$\mathbb{P}_p(X_m = ۱, m \geqslant n+۱ \text{ به‌ازای هر}) \leqslant \sum_{m=۱}^{\infty} \mathbb{P}_p(X_n = ۱, n > m \text{ به‌ازای هر}) = ۰$$

$n \geqslant ۱$ی‌موجود است که به‌ازای هر

زیرا

$$\mathbb{P}_p(X_n = ۱ \quad n > m \text{ به‌ازای هر}) = \lim_{M\to\infty} \mathbb{P}_p(X_n = ۱ \quad m < n \leqslant m+M \text{ به‌ازای}) = \lim_{M\to\infty} p^M = ۰$$

از این رو

$$\mathbb{P}_p(Y - \sum_{m=۱}^{n} ۲^{-m} X_m = \sum_{m=n+۱}^{\infty} ۲^{-m} X_m < ۲^{-n}, n \geqslant ۱ \text{ به‌ازای هر}) = ۱$$

و این معادل است با (۳.۳).

یک نتیجهٔ مستقیم (۳.۳) همراه با قانون قوی اعداد بزرگ (رابطهٔ (۲.۴)) این است که

$$\mathbb{P}_p\left(\frac{\Sigma_n(Y)}{n} = \frac{S_n}{n} \to p\right) = ۱ \qquad (۴.۳)$$

که در آن (ر.ک. (۲.۳))

$$\Sigma_n(t) \equiv \sum_{m=۱}^{n} \epsilon_m(t) \qquad t \in [۰, ۱] \text{ به‌ازای هر} \qquad (۵.۳)$$

برای اینکه بفهمید چرا این گزاره جالب است، توجه کنید که به‌ازای هر $n \geqslant ۱$ و $۰ \leqslant m < ۲^n$،

$$\mathbb{P}_p(۲^{-n}m \leqslant Y \leqslant ۲^{-n}(m+۱)) = p^{\Sigma_n(۲^{-n}m)} q^{n-\Sigma_n(۲^{-n}m)} \qquad (۶.۳)$$

از این رو اگر $۰ \leqslant a \leqslant b < ۱$، آنگاه

$$\mathbb{P}_p(a \leqslant Y \leqslant b) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_p(L_n(a) \leqslant Y \leqslant R_n(b)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=۲^n L_n(a)}^{۲^n L_n(b)} p^{\Sigma_n(۲^{-n}m)} q^{n-\Sigma_n(۲^{-n}m)} \qquad (۷.۳)$$

که در آن

$$R_n(t) \equiv L_n(t) + ۲^{-n} \quad \text{و} \quad L_n(t) \equiv \sum_{m=۱}^{n} ۲^{-m}\epsilon_m(t) \qquad (۸.۳)$$

به‌ترتیب عبارت‌اند از نزدیکترین ممیزهای دودویی مرتبهٔ nام چپ و راست $t \in [۰, ۱]$. محاسبهٔ حدِ (۳.۷) در حالت کلی اساساً کار غیرممکنی است، اما اگر $a = b$، مجموع بالا به یک جمله تبدیل می‌شود که آن تک جمله هم

به دلیل اینکه $\max\{p,q\} < 1$، وقتی $n \to \infty$ با سرعت نمایی به صفر میل می‌کند، و درنتیجه

$$\mathbb{P}_p(Y = x) = 0 \quad \text{به‌ازای هر } x \in [0,1] \text{ و هر } p \in (0,1) \qquad (۹.۳)$$

حالت دیگری که در آن محاسبهٔ حد فوق امکان‌پذیر است، وقتی است که سکهٔ پرتاب‌شده متعادل باشد که در این صورت $p = \frac{1}{2}$. در این حالت همهٔ جملات مجموع فوق برابرند با 2^{-n}. لذا، چون تعداد جملات بین $2^n(b-a)$ و $2^n(b-a)+1$ است، نتیجه می‌گیریم که برای $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$،

$$\mathbb{P}_{1/2}(a < Y \leqslant b) = \mathbb{P}_{1/2}(a \leqslant Y \leqslant b) = b - a \qquad (۱۰.۳)$$

یا معادلش

$$p = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{است } [0,1] \text{ متغیر تصادفی یکنواختی روی } Y \qquad (۱۱.۳)$$

اما متغیر تصادفی یکنواخت الگوی معقولی برای نمایش نقطه‌ای است که به تصادف از بازهٔ $[0,1]$ انتخاب می‌شود. لذا وقتی $p = \frac{1}{2}$، رابطهٔ (۳. ۴) حاکی است که نسبت ۰ها به ۱ها در بسط دودویی نقطهٔ نوعی $x \in [0,1]$ برابر ۱ است با ۱. دقیقتر اینکه، اگر یک x تصادفی را به‌طور یکنواخت از بازهٔ $[0,1]$ برگزینیم، آنگاه $\frac{1}{n}\Sigma_n(x) \to \frac{1}{2}$. حوالی ابتدای قرن بیستم بود که امیل بورل این مطلب را عنوان کرد و بعدها مارک کاتس [K] جزئیات آن را به زیبایی توصیف نمود. اخیراً هم گودمن [G] صورتهای جالب دیگری از ایدهٔ بورل و کاتس را ارائه داده است.

مسأله‌ای در نظریهٔ اندازه

با الهام از ملاحظات فوق ممکن است بخواهیم بدانیم که چند تا از اعداد $x \in [0,1]$ غیرتصادفی‌اند. به‌ویژه اینکه اگر (رجوع کنید به (۳. ۵)) تعریف کنیم

$$\Delta_p \equiv \left\{ t \in [0,1] : \lim_{n\to\infty} \frac{\Sigma_n(t)}{n} = p \right\} \qquad (۱.۴)$$

مکمل $\Delta_{1/2}$، یعنی $\Delta^c_{1/2}$ چقدر بزرگ است؟ دادن پاسخ کامل به این پرسش کار خیلی مشکلی است. (برای ملاحظهٔ شرح جالبی از این مطلب از دیدی کاملاً متفاوت رجوع کنید به [DR].) با این حال، چند گزارهٔ کیفی را می‌توان بدون تلاش چندانی به دست داد.

ابتدا نشان می‌دهیم که $\Delta^c_{1/2}$ نسبتاً بزرگ است، به این معنی که شامل تعداد ناشمارایی نقطه است. در واقع به‌ازای هر $p \in (0,1)\setminus\{\frac{1}{2}\}$، داریم $\Delta_p \subseteq \Delta^c_{1/2}$. بنابراین اگر نشان دهیم که مثلاً $\Delta_{1/3}$ ناشماراست، ثابت خواهد شد که $\Delta^c_{1/2}$ نیز ناشماراست. اما فرض کنید نقاط $\Delta_{1/3}$ را بتوانیم بشماریم و $\{x_n\}_1^\infty$ شمارشی از نقاط آن باشد. در این صورت از (۳. ۴) و (۳. ۹) به‌ازای $p = \frac{1}{3}$ تناقض

$$1 = \mathbb{P}_{1/3}(Y \in \Delta_{1/3}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{1/3}(Y = x_n) = 0$$

نتیجه خواهد شد. به این ترتیب $\Delta^c_{1/2}$ ناشماراست. البته، دقیقاً همین استدلال نشان می‌دهد که به‌ازای هر $p \in (0,1)$، Δ_p ناشماراست و واضح است که اگر $p \neq p'$، دو مجموعهٔ Δ_p و $\Delta_{p'}$ جدا از هم‌اند. اینکه $\bigcup_{p\neq\frac{1}{2}} \Delta_p \subseteq \Delta^c_{1/2}$ و Δ_pها مجموعه‌هایی دو به دو جدا از هم و هر یک ناشمارا هستند، این اعتقاد را به‌وجود می‌آورد که $\Delta^c_{1/2}$ نسبتاً بزرگ است.

اما شواهدی بر خلاف این هم وجود دارند که بر مبنای آنها می‌توان نتیجه گرفت که $\Delta^c_{1/2}$ باید خیلی کوچک باشد. در واقع می‌دانیم که یک متغیر تصادفی یکنواخت با احتمال یک در مجموعهٔ $\Delta^c_{1/2}$ مقداری اختیار نمی‌کند. به زبان نظریهٔ اندازهٔ لبگ، $\Delta^c_{1/2}$ مجموعه‌ای با اندازه صفر است، و مجموعه‌های با اندازهٔ صفر با این ویژگی مشخص می‌شوند که می‌توان آنها را با تعداد شمارش‌پذیری بازه که مجموع طولهاشان به دلخواه کوچک است، پوشاند. یعنی به‌ازای هر $\epsilon > 0$، دنبالهٔ $\{I_n\}_1^\infty$ از بازه‌های باز موجود است به طوری که

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \epsilon \quad \text{و} \quad \Delta^c_{1/2} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

که در آن $|I_n|$ طول بازهٔ I_n است. خلاصه اینکه، هر چند $\Delta^c_{1/2}$ شمارا نیست ولی می‌توان آن را با تعداد شمارایی بازه که مجموع طولهاشان به دلخواه کوچک است، پوشاند.

یک دسته تابع صعودیِ نامتعارف

به‌ازای هر $0 < p < 1$، تابع $F_p : [0,1] \to [0,1]$ را در نظر بگیرید که با رابطهٔ

$$F_p(x) = \mathbb{P}_p(Y \leqslant x) \qquad (۱.۵)$$

تعریف می‌شود و Y متغیر تصادفی معرفی شده در (۳. ۱) است. روشن است که F_p ناکاهنده است، $F_p(0) = 0$ و $F_p(1) = 1$. از (۳. ۷) به راحتی نتیجه می‌شود که

$$x < y \;\Rightarrow\; F_p(x) < F_p(y) \qquad (۲.۵)$$

یعنی F_p اکیداً صعودی است. به علاوه چون بنا بر (۳. ۹)

$$\begin{aligned}\lim_{y\searrow x} F_p(y) &= \mathbb{P}_p(Y \leqslant x) = \mathbb{P}_p(Y < x) + \mathbb{P}_p(Y = x)\\ &= \mathbb{P}_p(Y < x) = \lim_{y\nearrow x} F_p(y)\end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم که F_p پیوسته است. به عبارت دیگر می‌توان گفت که به‌ازای هر $p \in (0,1)$، F_p تابعی اکیداً صعودی و پیوسته است که $F_p(0) = 0$ و $F_p(1) = 1$.

وقتی $p = \frac{1}{2}$، بیشتر از اینها می‌توان گفت: بنا بر (۳. ۱۰)، به‌ازای هر $x \in [0,1]$، $F_{1/2}(x) = x$. اما وقتی $p \neq \frac{1}{2}$، تابع F_p تا حدی مرموز است؛ رسم نمودارش مشکل است. مثلاً فرض کنید بخواهیم طول کمان

آن را بیابیم. یادآوری می‌کنیم که برای هر تابع پیوستهٔ $F : [0,1] \to \mathbb{R}$، طول کمان نمودار تابع، $\mathrm{Arc}(F)$، را می‌توان با محاسبهٔ حد[۸]

$$\mathrm{Arc}(F) \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{2^n-1} \sqrt{(2^{-n})^2 + [F((m+1)2^{-n}) - F(m2^{-n})]^2}$$

به‌دست آورد که ممکن است موجود یا $+\infty$ باشد. چون به‌ازای هر دو عدد حقیقی نامنفی a و b داریم $\frac{a+b}{\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{a^2+b^2} \leqslant a+b$، برای هر تابع نازولی F به‌دست می‌آوریم

$$F(1) - F(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \leqslant \mathrm{Arc}(F) \leqslant 2$$

با محاسبهٔ مستقیم (یا به کمک قضیهٔ فیثاغورس) معلوم می‌شود که کران پایین $\sqrt{2}$ به‌ازای $F = F_{1/2}$ کسب می‌شود. از طرف دیگر، به سختی می‌توان تابع پیوستهٔ Fای را تصور کرد که به‌ازای آن کران بالای ۲ در نابرابری فوق به‌دست آید. به نظر می‌رسد که نمودار چنین تابعی باید در هر نقطه یا افقی حرکت کند و یا عمودی؛ و خوب، تابعی که نمودارش این‌گونه است نمی‌تواند پیوسته باشد. اما جالب است که بدانید

$$p \in (0,1)\backslash\{1/2\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Arc}(F_p) = 2 \qquad (3.5)$$

برای اثبات (۵. ۳) می‌توانیم به این صورت عمل کنیم[۹]: می‌خواهیم حدِ

$$L_n \equiv \sum_{m=0}^{2^n-1} \sqrt{4^{-n} + [F_p((m+1)2^{-n}) - F_p(m2^{-n})]^2}$$

را پیدا کنیم. قرار می‌دهیم

$$A_n(R) = \{0 \leqslant m < 2^n : F_p((m+1)2^{-n}) - F_p(m2^{-n}) > 2^{-n}R\}$$

$$B_n(R) = \{0 \leqslant m < 2^n : F_p((m+1)2^{-n}) - F_p(m2^{-n}) \leqslant 2^{-n}R\}$$

روشن است که به‌ازای هر $R > 0$،

$$L_n \geqslant \sum_{m\in A_n(R)} \sqrt{4^{-n} + [F_p((m+1)2^{-n}) - F_p(m2^{-n})]^2} + \sum_{m\in B_n(R)} 2^{-n}$$

بنابراین چون از $x \geqslant R$ نتیجه می‌شود که[۱۰]

$$(1+R^{-1})(1+x^2)^{1/2} \geqslant (1+x)$$

داریم

$$L_n \geqslant (1+R^{-1})^{-1} \sum_{m\in A_n(R)} (2^{-n} + F_p((m+1)2^{-n}) - F_p(m2^{-n})) + \sum_{m\in B_n(R)} 2^{-n}$$

$$\geqslant (1+R^{-1})^{-1}[1 + \sum_{m\in A_n(R)} (F_p((m+1)2^{-n}) - F_p(m2^{-n}))]$$

اما واضح است که

$$\sum_{m\in A_n(R)} [F_p((m+1)2^{-n}) - F_p(m2^{-n})] = 1 - \sum_{m\in B_n(R)} [F_p((m+1)2^{-n}) - F_p(m2^{-n})]$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $R > 0$،

$$L_n \geqslant (1+R^{-1})^{-1}(2 - \sum_{m\in B_n(R)} [F_p((m+1)2^{-n}) - F_p(m2^{-n})])$$

از طرف دیگر بنا بر (۳. ۳) و (۳. ۶)،

$$\sum_{m\in B_n(R)} [F_p((m+1)2^{-n}) - F_p(m2^{-n})] = \mathbb{P}_p(p^{S_n} q^{n-S_n} \leqslant 2^{-n}R) = \mathbb{P}_p\left(((2p)^{n^{-1}S_n}(2q)^{1-n^{-1}S_n})^n \leqslant R\right)$$

که در به‌دست آوردن برابری اول از این واقعیت سود جسته‌ایم که $\bigcup_{m\in B_n(R)}[m2^{-n}, (m+1)2^{-n})$ دقیقاً مجموعهٔ همهٔ آن $x \in [0,1)$هایی است که به‌ازای آنها $p^{\Sigma_n(x)}q^{n-\Sigma_n(x)} \leqslant 2^{-n}R$.

از این رو نتیجه خواهیم گرفت که

$$\mathrm{Arc}(F_p) \geqslant 2(1+R^{-1})^{-1} \qquad \text{به‌ازای هر } R > 0،$$

به شرط اینکه نشان دهیم به‌ازای $R > 0$ به دلخواه بزرگ،

$$\mathbb{P}_p\left(((2p)^{n^{-1}S_n}(2q)^{1-n^{-1}S_n})^n \leqslant R\right) \to 0$$

به‌این منظور ابتدا توجه می‌کنیم که

$$p \in (0,1)\backslash\{1/2\} \quad \Rightarrow \quad (2p)^p(2q)^q > 1 \qquad (4.5)$$

دلیلش این است که (۵. ۴) معادل است با

$$p\log 2p + q\log 2q = \frac{2p\log 2p + 2q\log 2q}{2} > 0$$

و تابع $x \in (0,2) \mapsto x\log x \in \mathbb{R}$ تابعی اکیداً محدب است که در $x = 1$ صفر می‌شود. بالاخره با ترکیب کردن (۲. ۴) و (۵. ۴) به این نتیجه می‌رسیم که

$$\lim_{n\to\infty} ((2p)^{n^{-1}S_n}(2q)^{1-n^{-1}S_n})^n = \infty \qquad \text{با احتمال یک،}$$

و روشن است که با این نتیجه، اثبات حکم $\mathrm{Arc}(F_p) \geqslant 2$ کامل می‌شود. چون از قبل می‌دانیم که این نابرابری در جهت عکس نیز برقرار است، (۵. ۳) به اثبات می‌رسد.

مشتق مرتبهٔ اول F_p

مطالب بالا دلیلی است بر اینکه رفتار نمودار تابع F_p به‌ازای $p \neq \frac{1}{2}$ را خیلی عجیب بشماریم. در حقیقت (۵. ۳) نشان می‌دهد که اساساً در هر نقطه‌ای، مماس بر نمودار تابع F_p یا باید افقی باشد یا عمودی. در این بخش شواهد دیگری حاکی از صحت این تصور ارائه خواهیم داد. دقیقتر اینکه، اگر مجموعه‌های Δ_p را که در (۴. ۱) تعریف شدند به خاطر آورید، آنچه می‌خواهیم در اینجا بررسی کنیم، این است که

$$p\in(0,1)\backslash\{1/2\} \Rightarrow F_p'(x) = \begin{cases} 0 & x \in \Delta_{1/2} \\ \infty & x \in \Delta_p \end{cases} \qquad (1.6)$$

که در آن

$$F_p'(x) \equiv \lim_{h\to 0} \frac{F_p(x+h) - F_p(x)}{h}$$

مشتق F_p در x است (البته بخشی از ادعا این است که این حد در نقاط موردنظر موجود است).

برای اثبات (۶. ۱) کافی است صحت آن را در مورد مشتق چپ تحقیق کنیم، یعنی کافی است نشان دهیم که

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{F_p(x) - F_p(x-h)}{h} = \begin{cases} 0 & x \in \Delta_{1/2} \\ \infty & x \in \Delta_p \end{cases} \qquad (2.6)$$

در واقع اگر (۶. ۲) به‌ازای هر $p \in (0,1)\backslash\{1/2\}$ درست باشد، آنگاه چون

$$\Delta_q = \{1 - x : x \in \Delta_p\} \quad , \quad F_q(x) = 1 - F_p(1-x)$$

نتیجه خواهد شد که

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{F_p(x+h) - F_p(x)}{h} = \begin{cases} 0 & x \in \Delta_{1/2} \\ \infty & x \in \Delta_p \end{cases}$$

به عبارت دیگر همه چیز برمی‌گردد به اثبات (۶. ۲).

اکنون فرض کنید $p \in (0,1)\backslash\{1/2\}$ و $x \in \Delta_{1/2}$ داده شده باشند. بنابر نمادگذاری (۳. ۸) و به کمک (۳. ۶) داریم

$$\begin{aligned} \frac{F_p(R_n(x)) - F_p(L_n(x))}{R_n(x) - L_n(x)} &= 2^n \mathbb{P}_p(L_n(x) < Y \leqslant R_n(x)) \\ &= 2^n p^{\Sigma_n(x)} q^{n-\Sigma_n(x)} \\ &= (2\sqrt{pq})^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\Sigma_n(x) - n/2} \end{aligned}$$

چون $p \neq \frac{1}{2}$، پس $pq < \frac{1}{4}$ و بنابراین $\rho_p \equiv 2\sqrt{pq} < 1$. از این رو، چون $\frac{1}{n}\Sigma_n(x) \to \frac{1}{2}$،

$$\begin{aligned} &\log\left[(2\sqrt{pq})^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\Sigma_n(x) - n/2}\right] \\ &\quad = n\left[\log \rho_p + \left(\frac{\Sigma_n(x)}{n} - \frac{1}{2}\right)\log\frac{p}{q}\right] \to -\infty \end{aligned}$$

که بدین معنی است که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_p(R_n(x)) - F_p(L_n(x))}{R_n(x) - L_n(x)} = 0 \quad \text{با سرعت نمایی} \qquad (3.6)$$

هرچند این محاسبات جای اثبات دقیق را نمی‌گیرد، با این حال قویاً دلالت می‌کند که (۶. ۲) به ازای هر $x \in \Delta_{1/2}$ برقرار است. برای تکمیل اثبات، $n(x)$ را کوچکترین عدد طبیعی $n > 1$ بگیرید که $\Sigma_n(x) \geqslant 2$ و به‌ازای $n \geqslant n(x)$ فرض کنید $M_n(x)$ بزرگترین $1 \leqslant m \leqslant n$ باشد که برای آن $\Sigma_n(x) - \Sigma_m(x) = 1$. ملاحظه کنید که چون

$$n \geqslant n(x) \quad \Rightarrow \quad L_{M_n(x)}(x) \leqslant x - 2^{-n} < x \leqslant R_{M_n(x)}(x)$$

اگر $n \geqslant n(x)$ و $2^{-n-1} < h \leqslant 2^{-n}$، آنگاه

$$\frac{F_p(x) - F_P(x-h)}{h} \leqslant 2^{n - M_n(x) + 1} \frac{F_p(R_{M_n(x)}(x)) - F_p(L_{M_n(x)}(x))}{R_{M_n(x)}(x) - L_{M_n(x)}(x)}$$

بنابراین نتیجه و (۶. ۳)، کافی است ثابت کنیم که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n(x)}{n} = 1 \qquad (*)$$

اما برقرار نبودن (*) به چه معناست؟ در چنین صورتی باید $r < 1$ و بینهایت مقدار از n موجود باشند که به‌ازای آنها آمدن «شیر» در پرتاب $n+1$ام ($\epsilon_{n+1}(x) = 1$) پس از آن رخ دهد که بیش از $(1-r)n$ بار متوالی «خط» آمده است (به‌ازای $rn \leqslant k \leqslant n$، $\epsilon_k(x) = 0$، پس به‌ازای این kها مجموع $\Sigma_k(x)$ ثابت است). اما به‌ازای kی مربوط به شروع این توالی از «خط»ها داریم

$$\frac{\Sigma_k(x)}{k} - \frac{\Sigma_n(x)}{n} \geqslant \frac{\Sigma_n(x)}{n}\left|\frac{1}{r} - 1\right|$$

برای اینکه $n^{-1}\Sigma_n(x)$ همگرا به $\frac{1}{2}$ باشد، که لازمهٔ فرض ما مبنی بر $x \in \Delta_{1/2}$ است، باید طرف چپ به صفر میل کند (محک کوشی) و طرف راست حدی ناصفر داشته باشد که این تناقض است. لذا (*) برقرار است.

پس (۶. ۲) و بنابراین نیمهٔ اول (۶. ۱) را به‌ازای هر $x \in \Delta_{1/2}$ ثابت کرده‌ایم.

برای تکمیل اثبات (۶. ۱) دوباره فرض می‌کنیم $p \in (0,1)\backslash\{1/2\}$ داده شده باشد، اما اکنون $x \in \Delta_p$. به‌ازای هر $n \geqslant 1$، فرض می‌کنیم $N_n(x)$ کوچکترین $m > n$ باشد به طوری که $\Sigma_m(x) - \Sigma_n(x) = 1$ و ملاحظه می‌کنیم که چون

$$x - 2^{-n} \leqslant L_n(x) < L_{N_n(x)}(x) \leqslant x$$

از $2^{-n+1} > h \geqslant 2^{-n}$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{F_p(x) - F_p(x-h)}{h} &\geqslant \frac{F_p(L_{N_n(x)}(x)) - F_p(L_n(x))}{h} \\ &\geqslant 2^{n-1} p^{\Sigma_n(x)} q^{N_n(x) - \Sigma_n(x)} \end{aligned}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم که وقتی $n \to \infty$،

$$2^n p^{\Sigma_n(x)} p^{N_n(x)-\Sigma_n(x)} = \left[(2p)^p(2q)^q\left(\frac{p}{q}\right)^{\Sigma_n(x)/n-p} q^{N_n(x)/n-1}\right]^n \to +\infty$$

چون $n^{-1}\Sigma_n(x) - p \to 0$، اگر درست همانند اثبات رابطهٔ (*) در بالا پیش برویم، می‌توانیم ثابت کنیم که $n^{-1}N_n(x) - 1 \to 0$. در نهایت، همان‌طور که در (۵. ۴) دیدیم، $(2p)^p(2q)^q > 1$ و اکنون حکم موردنظر بدیهی است.

خلاصهٔ کلام اینکه بخش اول (۶. ۱) نشان می‌دهد که اگر $p \neq \frac{1}{2}$، $F_p'(x) = 0$ به‌ازای $x \in \Delta_{1/2}$ (چیزی که آن را در (۳. ۱۱) «به تصادف» انتخاب شده نامیدیم). از طرف دیگر به تلافی قسمت اول و برای اینکه تابع F_p اکیداً صعودی باقی بماند، $F_p'(x) = \infty$ وقتی $x \in \Delta_p$. هر دو مجموعه چگال‌اند.

پیوست

فرض کنید F تابعی پیوسته و نانزولی روی $[0,1]$ باشد که $F(0) = 0$ و $F(1) = 1$. قرار دهید

$$\sum = \left\{x \in [0,1] \ : \ \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = 0\right\}$$

می‌گوییم که تابع F، لبگ‌ـتکین است اگر مجموعهٔ Σ دارای اندازهٔ لبگ ۱ باشد. به عبارت دیگر، اگر μ نشان‌دهندهٔ اندازهٔ بورل روی $[0,1]$ باشد که با

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a) \qquad 0 \leqslant a < b \leqslant 1$$

تعریف می‌شود. لبگ‌ـتکین‌بودنِ F معادل است با اینکه μ نسبت به‌اندازهٔ لبگ، تکین باشد[۱۱]. هدف این پیوست این است که ثابت کنیم

(پ.۱) $\quad \mathrm{Arc}(F) = 2$ اگر و فقط اگر F لبگ‌ـتکین باشد.

کار را با یک نمادگذاری مختصر آغاز می‌کنیم. به‌ازای هر $n \geqslant 0$ و $0 \leqslant m < 2^n$ قرار می‌دهیم

$$\Delta_{m,n} = F((m+1)2^{-n}) - F(m2^{-n})$$

بنا بر تعریف، $\mathrm{Arc}(F) = \lim_{n\to\infty} L_n$ که در آن

$$L_n \equiv \sum_{m=0}^{2^n-1}\sqrt{4^{-n} + \Delta_{m,n}^2}$$

و همان‌طور که قبلاً اشاره شد، $\mathrm{Arc}(F)$ بین $\sqrt{2}$ و ۲ واقع است. حال توجه کنید که

$$2 - L_n = 2^{-n}\sum_{m=0}^{2^n-1}\left[(1+2^n\Delta_{m,n}) - \sqrt{1+(2^n\Delta_{m,n})^2}\right]$$

اما به‌ازای هر عدد نامنفی a داریم

$$(1+a) - \sqrt{1+a^2} = \frac{2a}{(1+a)+\sqrt{1+a^2}} \begin{cases} \geqslant \frac{a}{1+a} \\ \leqslant \frac{2a}{1+a} \end{cases}$$

لذا به‌دست می‌آوریم

$$\frac{2-L_n}{2} \leqslant 2^{-n}\sum_{m=0}^{2^n-1}\frac{2^n\Delta_{m,n}}{1+2^n\Delta_{m,n}} \leqslant 2 - L_n$$

به عبارت دیگر، اگر تابع $f_n : [0,1) \to [0,\infty)$ را به این صورت تعریف کنیم که $f_n(x) = 2^n\Delta_{m,n}$ به‌ازای $m2^{-n} \leqslant x < (m+1)2^{-n}$، آنگاه

$$\frac{2-L_n}{2} \leqslant \int_{[0,1)}\frac{f_n(x)}{1+f_n(x)}dx \leqslant 2 - L_n \qquad \text{(پ.۲)}$$

برای تکمیل برنامه‌مان از (پ.۲) شروع می‌کنیم و قدری هم از نظریهٔ اندازه کمک می‌گیریم. در وهلهٔ اول، یک نتیجهٔ بلاواسطهٔ (پ.۲) این است که

$$L_n \to 2 \iff f_n \to 0 \quad \text{در اندازهٔ لبگ} \qquad \text{(پ.۳)}$$

ثانیاً لازم است از این مطالب استفاده کنیم که f_n در اندازهٔ لبگ به صفر میل می‌کند، اگر و فقط اگر اندازهٔ μ نسبت به اندازهٔ لبگ، تکین باشد. این واقعیت، که مبنای پانوشت ۱۱ نیز هست، نتیجه‌ای است از یکی از صورتهای قضیهٔ مشتق‌گیری لبگ (قضیهٔ ۵. ۲. ۲۶ در مرجع [S1])، یعنی f_n به مفهوم لبگ تقریباً همه‌جا به مشتق رادُن‌ـنیکودیمِ بخش مطلقاً پیوستهٔ اندازهٔ μ همگراست. از این رو، f_n در اندازهٔ لبگ به صفر میل می‌کند اگر و فقط اگر بخش مطلقاً پیوستهٔ μ صفر شود. با دانستن این مطلب، (پ.۱) مستقیماً (پ.۳) نتیجه می‌شود.

پانوشتها

(۱) می‌توانید، مثلاً، رجوع کنید به [D] یا [S2].

(۲) می‌توانید، مثلاً، رجوع کنید به به بخش ۱. ۲ در [RN].

(۳) مثال مشهورش، تابع کانتور‌ـلبگ است. مثلاً تمرین ۸. ۲. ۱۲ در [S1] را ملاحظه کنید.

(۴) اینجا، و در همه جای این مقاله، $\mathbb{P}_p$ برای نشان‌دادن اندازهٔ احتمالی به کار می‌رود که با پرتابهای مستقل یک سکه مشخص می‌شود که در هر پرتاب، با احتمال p شیر می‌آید و اگر Γ پیشامدی بر مبنای این‌گونه پرتاب سکه باشد، آنگاه $\mathbb{P}_p(\Gamma)$ احتمال رخ‌دادن Γ است. از این رو در فرمولی که در پی می‌آید، طرف چپ را باید چنین خواند: «احتمال اینکه $X_1 = \epsilon_1$، $X_2 = \epsilon_2$، ...، $X_n = \epsilon_n$».

(۵) از حرف $\mathbb{E}_p$ برای نشان‌دادن مقدارهای مورد انتظاری که نسبت به $\mathbb{P}_p$ محاسبه می‌شوند، استفاده می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که اگر X یک متغیر تصادفی باشد، مقدار مورد انتظار آن نسبت به اندازهٔ احتمال $\mathbb{P}$ چیزی نیست جز انتگرال $\int XdP$. به ویژه اگر X فقط تعداد شمارایی مقدار داشته باشد، آنگاه $\mathbb{E}[X] = \Sigma_x x\mathbb{P}(X = x)$.

(۶) نماد $\mathbb{E}[X, A]$ به این معنی است که مقادیر موردانتظار [امید] متغیر تصادفی X روی مجموعهٔ A حساب می‌شود. به عبارت دیگر، $\mathbb{E}[X, A] = \int_A XdP$.

(۷) معنای قویتر بودن قانون قوی از قانون ضعیف، قدری ظریف و مستلزم درک تفاوت بین همگرایی در تقریباً همه جا و همگرایی در اندازه، است. مثلاً رجوع کنید به بخش ۳. ۳ در [S1].

(۸) این حد مطمئناً وجود دارد چون عبارت سمت راست با افزایش n، کاهش نمی‌یابد. برای ملاحظهٔ این مطلب، mامین جمعوند در nامین مجموع را طول یک بردار دو بعدی تصور کنید که مؤلفه‌های آن 2^{-n} و $F((m+1)2^{-n}) - F(m2^{-n})$ هستند، و توجه کنید که این بردار، مجموع بردارهای $2m$ام و $(2m+1)$ام در مجموع $(n+1)$ام است. از این رو، یکنوایی مورد ادعا دقیقاً نابرابری مثلثی برای طول بردارها در صفحه است.

(۹) استدلال زیبایی را که در پی می‌آید آلکس، پراین (Perlin) برایم مطرح کرد. برای آنان که اطلاعاتشان از آنالیز کلاسیک قدری بیشتر است، در پیوست مقاله نشان داده‌ام که طول کمان نمودار هر تابع پیوستهٔ نانزولی F روی $[0,1]$ برابر است با $1 + F(1) - F(0)$ اگر و فقط اگر F ایگدتکین باشد.

(۱۰) برای بررسی صحت این مدعا، دو طرف را به توان دو برسانید.

(۱۱) در واقع می‌توان نشان داد که بخش مطلقاً پیوستهٔ μ به مجموعهٔ Σ اندازهٔ ۰ نسبت می‌دهد.

مراجع

[B] Billingsley, P., *The singular function of bold play*, American Scientist 71 (1983), 392-397.

[DR] de Rham, G., *Sur certaines équations fonctionnelles*, l'Ouvrage publié á i'occasion de son centenaire par l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne, pp. 95-97.

[D] Durrett, R., *Brownian Motion and Martingales in Analysis*, Wadsworth, Belmont, CA, 1984.

[G] Goodman, G., *Statistical independence and normal numbers, an aftermath to Mark Kac's Carus monograph*, American Math. Monthly (1999), 112-126.

[K] Kac, M., *Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory*, Carus Math. Monograph Series #12, J. Wiley, NY, 1959.

[RN] Riesz, F. & Sz-Nagy, B., *Functional Analysis*, translated from the 2nd French edition, Frederick Ungar, New York, 1955.

[S1] Stroock, D., *A Concise Introduction to the Theory of Integration*, 3rd Edition, Birkhäuser, Boston, 1999.

[S2] _____, *Probability Theory, an Analytic View*, Cambridge U. Press, Cambridge, UK and NY, USA, 1991.

* * * * * *

• Daniel W. Stroock, "Doing analysis by tossing a coin", *The Math. Intelligencer*, (2) **22** (2000) 66-72.

* دانیل استروک، دانشگاه ام. آی. تی.، آمریکا

dws@math.mit.edu.

... در رساله‌های مربوط به مکانیک فرق واضحی بین تجربه، استدلال ریاضی، قرار داد، و فرضیه نمی‌گذارند. ولی همهٔ مطلب این نیست.

۱. فضای مطلق وجود ندارد، و ما فقط حرکت نسبی را درک می‌کنیم؛ با این حال، واقعیتهای مکانیکی اغلب چنان بیان می‌شوند که گویی فضای مطلقی هست که آنها در چارچوبِ آن قرار دارند.

۲. زمان مطلق وجود ندارد. وقتی می‌گوییم دو دورهٔ زمانی با هم برابرند، این حرف هیچ معنایی ندارد مگر اینکه معنایی بنا به قرارداد برای آن قائل شویم.

۳. ما نه تنها ادراک شهودی مستقیمی از برابریِ دو دورهٔ زمانی نداریم، بلکه حتی ادراک شهودی مستقیمی از همزمانیِ دو رویداد که در دو مکان مختلف به‌وقوع می‌پیوندند نداریم. من این موضوع را در مقاله‌ای با عنوان سنجش زمان (Mesure du Temps) تشریح کرده‌ام.

۴. و بالاخره، آیا هندسهٔ اقلیدسی ما در حقیقت یک نوع قرارداد زبانی نیست؟ واقعیتهای مکانیکی ممکن بود در چارچوب یک فضای نااقلیدسی بیان شوند که کمتر مناسب می‌بود اما به اندازهٔ فضای معمولی ما مشروعیت داشت؛ چنین کاری پیچیده‌تر، اما امکان‌پذیر، بود.

هانری پوانکاره

نقل از

Henry Poincaré, *Science and Hypothesis*, Dover (1952) 89-90.

این کتاب ترجمهٔ انگلیسی اثری از پوانکاره با عنوان *La Science et l'Hypothèse* است؛ اصل فرانسوی اثر در سال ۱۹۰۳ انتشار یافته است.

آموزش و مسأله

یادگیری و یاددهی ریاضیات در سطح دانشگاه

مسائل اساسی تحقیقات نوین در زمینهٔ آموزش •

میشل آرتیگ*

ترجمهٔ سپیده چمن‌آرا

بیش از سی سال است که هدف تحقیق در آموزش ریاضیات، روشن ساختن فرایندهای یادگیری ریاضیات از طریق بررسیهای نظری و عملی بوده است. همچنین سعی می‌کرده‌اند راهبردهایی برای تدریس تدوین کنند که نتایج این تحقیقات در آنها ملحوظ شده باشد، و سپس آنها را بیازمایند. تحقیقات نخست معطوف به اولین سطح یادگیری، یعنی سطح دبستان، بود و آموزش فراتر از تعلیمات اجباری، یعنی دبیرستان و دانشگاه، در حاشیه قرار داشت. اما افزایش تعداد دانشجویانی که امروزه در این سطوح پیشرفته‌تر درس ریاضی می‌گیرند موجب بروز مشکلاتی آموزشی شده است که چالشهای جدیدی را برای تحقیق [در زمینهٔ آموزش] به‌وجود آورده است. در این مقاله قصد داریم به این مشکلات و مسائل بپردازیم و سعی خواهیم کرد قابلیتها و محدودیتهای کارهایی را که در این راستا انجام شده‌اند دقیقتر بررسی کنیم.

این بحث حاوی دیدگاه شخصی و متأثر از فرهنگ اروپایی و فرانسوی من است. بی‌شک محققان دیگر نظرهای بسیار متفاوتی دارند. درواقع، ارائهٔ یک تصویر کلی از وضعیت پیشرفتِ تحقیقات در یک حوزهٔ مفروض و مشخص‌کردن نتایج به‌دست آمده در آن، در آموزش ریاضیات به‌سادگیِ خودِ ریاضیات نیست. این امر، ابتدائاً از این واقعیت ناشی می‌شود که این زمینه از تحقیقات از وحدتی برخوردار نیست. رویکردهای مختلفی که همزمان وجود دارند، تعمیم‌دادن را مشکل می‌سازند، و تحقیق اخیر ICMI [کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی] که توسط شیرپینسکا[1] و کیل‌پاتریک[2] تدوین‌شده و به آموزش ریاضیات به‌عنوان یک حوزهٔ تحقیقاتی اختصاص دارد، مؤید این نکته است. این تنوع بی‌شک به‌دلیل جوانی نسبی این زمینه است، امّا از پیچیدگی پدیده‌های مورد بررسی نیز ناشی می‌شود؛ یک دیدگاه خاص به‌تنهایی نمی‌تواند این پیچیدگی را ملحوظ کند. این اختلاف دیدگاهها همچنین از آنجا ناشی می‌شود که فرایندهای یاددهی و یادگیری، تا حدی وابسته به شرایط اجتماعی و فرهنگی است و همیشه تعیین دقیق قلمرو اعتبار آنها کار ساده‌ای نیست؛ و بالاخره، یکی از علل این اختلافات آن است که گرچه معیارهای به‌دست آمده از تحقیقاتْ امکان درک بهتر مشکلات محصلان و نارساییهای آموزش را فراهم می‌کنند، به‌ندرت ابزارهای مناسبی برای بهسازی آموزش به‌شیوه‌ای فوری و عملی در اختیار ما قرار می‌دهند.

با وجود چنین مشکلاتی، نمی‌توان انکار کرد که این تحقیقات به پیش می‌رود و به‌طور همزمان چارچوبهایی نظری برای مسائل یادگیری و یاددهی، اسلوبهایی برای مطالعهٔ آنها و نتایجی در مورد یادگیری در قلمروهای گوناگون فراهم می‌آورد. در ادامهٔ این مقاله، پس از مطرح‌کردن مسألهٔ بنیادی این تحقیقات، بر دو نمونه از نتایج که به نظر من پلی است بین رهیافتهای مختلف، تمرکز می‌کنم: یکی از آنها مربوط به ناپیوستگیها و گسستهای یادگیری است و دیگری مربوط به مسائل انعطاف‌پذیریِ شناختی[1]. آنها را با آوردن مثالهای دقیقی از دو حوزهٔ مناسب برای تحقیق در سطح دانشگاه ــ یعنی حسابان و جبر خطی ــ توضیح خواهم داد. در بخش آخر [مقاله] به بعضی از مسائلی اشاره می‌کنم که به نظر من آن‌طور که باید و شاید در تحقیقات به آنها پرداخته نشده است.

صورت مفصلتری از مقالهٔ حاضر با ذکر مراجع بیشتر تحت عنوانِ «از تحقیقات آموزشی که در سطح دانشگاه انجام می‌شود، چه می‌توان آموخت» در مجموعهٔ گزارشهای ICMI که توسط کلوور[2] چاپ خواهد شد، خواهد آمد. برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ سطوح یاددهی که در این مقاله مورد بحث است، می‌توانید به [۱] و [۲] و [۳] و [۴] مراجعه کنید.

مبانی تحقیقات آموزشی

طی بیست سال اخیر، نگرشهای ساختن‌گرایانه[3] مبتنی بر کارهای پیاژه بر تحقیقات آموزش ریاضی سلطه داشته است. در این نگرشها، یادگیری به‌عنوان یک فرایند سازگاری[4] به مفهوم زیست‌شناختی آن محسوب می‌شود که بر پایهٔ فرایندهای جذب[5] و انطباق[6] صورت می‌گیرد: جذب زمانی رخ می‌دهد که در مواجهه با موقعیتهای جدید، بتوان آنها را به‌سادگی با طرحهایِ شناختیِ از پیش‌ساخته‌شده تطابق داد و به این نحو از عهده‌شان برآمد؛ انطباق زمانی

1. A. Sierpinska 2. J. Kilpatrick

1. cognitive flexibility 2. Kluwer 3. constructivist
4. adaptation 5. assimilation 6. accommodation

صورت می‌گیرد که عدم تعادل مهمی رُخ می‌دهد و تجدید آرایش دانش قبلی لازم می‌آید. این نگرشهای ساختن‌گرایانه با نشان‌دادن اینکه [فرایند] یادگیری را نمی‌توان به انتقال سادهٔ واقعیتها فرو کاست، به ما امکان داده‌اند که دید جدیدی نسبت به یادگیری داشته باشیم. اینکه چه چیزی می‌توان یاد گرفت، خیلی به پیشداوریهای یادگیرندگان وابسته است ــ به موقعیتهایی که در آنها قرار می‌گیرند و ابزارهای عملی که برای رویارویی با این موقعیتها در اختیارشان گذاشته می‌شود. این عوامل به تبیین محدودیتهای گزارش‌شدهٔ راهبردهای آموزشی که در آنها حرف معلم نقش مسلط را دارد، کمک کرده‌اند.

همان‌طور که پیش از این گفته شد، از آنجا که بُعدِ اجتماعی و فرهنگیِ یادگیری ریاضیات در نگرشهای ساختن‌گرایانه مورد توجه قرار نمی‌گیرد، این نگرشها بیش از پیش برای مدلسازیِ یادگیری ریاضیات ناکافی به نظر می‌رسند. همان‌گونه که شیرپینسکا و لرمن[1] در مقاله‌ای در بارهٔ این مسائل در سال ۱۹۹۶ تاکید کرده‌اند، آگاهی از این محدودیتها منجر به ساختهای متفاوتی می‌شود که تمایز آنها عمدتاً در نحوهٔ در نظر گرفتن روابط بین فرد، جامعه و فرهنگ است. قصد ندارم این تمایز را تحلیل کنم، لیکن مایلم با دو مثال نشان دهم که چگونه این دخالت عوامل اجتماعی و فرهنگی باعث می‌شود تحلیل شناختیِ کلاسیک را مطلق نگیریم. این‌کار را با اتّکا بر دو چارچوب نظری که بالاخص به آنها احاطه دارم، انجام می‌دهم: نظریهٔ موقعیتهای تعلیمی[2] [۵] که بنیانگذار آن بروسو[3] است، و نظریهٔ مردم‌شناختیِ آموزش که اخیراً توسط شوالار عرضه شده است [۶].

در نظریهٔ موقعیتهای تعلیمی، یادگیری به‌صورت یک فرایند سازگارشدن [با محیط] دیده می‌شود، اما باید توجه داشت که فرایند سازگارشدن که در موقعیت تعلیمی خاصی توسط محصل صورت می‌گیرد، کاملاً ماهیت ریاضی ندارد. محصل بر اتکا بر دانش ریاضی و با اتکا بر اطلاعات خود از نظام تدریس، هنجارها، عادتها، و حدسهایی که در بارهٔ انتظارت معلم می‌زند، عمل سازگاری را انجام می‌دهد ــ این همان چیزی است که بروسو شناسایی کرد و آن را به‌عنوان «قرارداد تعلیمی» تعریف نمود. موفقیت عدهٔ زیادی از محصلان، حتی در سطح دانشگاه، بیشتر مرهون دریافتنِ رمزِ این قرارداد تعلیمی است تا یادگیری واقعی ریاضیات. به‌سبب اثرات شدید قرارداد تعلیمی نمی‌توان به‌سادگی موقعیتهای آموزشییِ پدید آورد که در آنها مطمئن باشیم موفقیت محصل واقعاً نتیجهٔ اشتغال ذهنی او به ریاضیات است. تحقیقات مختلف نشان داده است که ارزیابی در این شرایط از این هم دشوارتر است. در نظریهٔ موقعیتهای تعلیمی، مجموعه‌ای از ابزارها و تکنیکهای مفهومی به‌وجود آمده است تا موقعیتهای آموزشی از این دیدگاه تحلیل شود و رهنمودهایی به‌دست آید برای فراهم‌ساختن موقعیتهایی که در آنها روابط بهینه‌ای میان فعالیتهای ریاضی معلم و فعالیتهایی که می‌توان برعهدهٔ محصل گذاشت، برقرار باشد. کمی جلوتر، مثالی مربوط به انتگرالگیری در حسابان خواهم آورد.

نظریهٔ مردم‌شناختی با نگرش غالبِ ساختن‌گرایی کاملاً متفاوت است و در آن، تأکید روی بعد نهادی [سازمانی] یادگیری است. طبق این نظریه، روابط ما با اشیای ریاضی از روابط نهادیِ حاکم در مکان مواجههٔ ما با آنها نشأت می‌گیرد؛ در اینجا «نهاد» به‌مفهومی بسیار گسترده در نظر است. تحقیقات مختلف نشان می‌دهد که این روابط برای یک شیء خاص مطلق

1. S. Lerman 2. didactic situations 3. G. Brousseau

نیستند و از نهادی به نهاد دیگر تغییر می‌کنند.

این تفاوتها، به‌ویژه در مطالعهٔ مسائل مربوط به گذر از یک نهاد به نهاد دیگر اهمیت دارند، مثل انتقال از نهاد دبیرستان به نهاد دانشگاه که در اینجا مدنظر ماست. برای اینکه بخشی از مشکلات این گذر را بهتر درک کنیم، باید توجه کنیم که در دبیرستان و دانشگاه صرف‌نظر از واژگان مشترک و شباهت ظاهری تکلیفها و روشها، روابط عمیقاً متفاوتی با اشیای ریاضی متداول در حسابان مانند حد و مشتق مدنظر قرار می‌گیرد. به همین دلیل، برای استادان دانشگاه مشکل است که معلومات دانشجویان را به ظهور برسانند و ناچار تصور می‌کنند که دانشجویان چیزی نمی‌دانند. به‌علاوه مشکلات مربوط به فاصلهٔ فرهنگی به‌وسیلهٔ پدیده‌ای از نوع دیگر که از طریق تحقیقات آموزشی شناخته شده است، تشدید می‌شوند: این واقعیت که بخش عمده‌ای از دانش ما قویاً «وابسته به چارچوب»[1] یعنی وابسته به موقعیت و زمینه‌ای است که از آن پدید آمده است. بعضی از معلمان، به‌خوبی از این پدیده آگاه‌اند و قادرند با یک کلمه، یک موقعیت یا تکه‌ای از سوابق مشترکشان با محصلان را به یاد آنها بیاورند تا این نوع از دانش را در یک چارچوب جدید متجلّی سازند. ولی تغییر کلاس و به طریق اولی تغییر نهاد، رشته‌های این حافظهٔ مشترک را قطع می‌کند، و میزان دانشِ قابل استفاده را به آنچه مستقل از چارچوب است محدود می‌کند. تحقیقات اخیر، ازجمله رسالهٔ در حال تدوین پراسلون[2] در بارهٔ مفهوم مشتق، مربوط به درک چنین پدیده‌هایی است. در این تحقیقات، سازوکاری برای تدریس دانشگاهی طراحی می‌شود که به‌وسیلهٔ آن بتوان به دانشجویان کمک کرد تا «خلاءهای آموزشی» حاصل از انتقال را پر کنند، کاری که تنها معدودی از دانشجویانِ امروزی قادرند خودشان بدون کمک انجام دهند.

در این بخش، رویکردهای مختلف به آموزش ریاضیات را در پرتو شناخت روزافزونِ بُعد فرهنگی و اجتماعی فرایند یادگیری شرح دادیم. تحولات دیگری نیز، که برخی از آنها با موارد بالا تداخل دارند، در این زمینه نقش دارند. مثلاً، بیش از بیست سال است که تحقیقات نشان داده است یادگیری ریاضیات یک فرایند پیوسته نیست، به این معنی که نیازمند بازسازی، تجدید آرایش، و حتی بعضی وقتها گسست واقعی از دانش و شیوه‌های تفکر پیشین است. این واقعیت، اغلب یک دید سلسله‌مراتبی[3] را در یادگیری تقویت می‌کند، که به‌صورت پیشرفت طی یک سلسله مراحل یعنی پیشروی در جهت بالارفتن سطح تجرید، تصور می‌شود. مطالعات هر روز بیشتر نشان می‌دهد که یادگیری قطعاً به قابلیت انعطاف در عملکرد ریاضی از طریق ایجاد ارتباط(۱) بین دیدگاهها، بین «فهرستهای نمایش»[4] و بین «موقعیتهای عملکرد ریاضی» بستگی دارد. مفهوم‌سازی نیز بیش از پیش به ابزارهای عینی و ملموس کارِ ریاضی بستگی پیدا می‌کند. این وابستگی، که هم به آنچه آموخته می‌شود و هم به روشهای یادگیری مربوط می‌شود، امروزه به‌دلیل تغییرات سریع ابزارها که نتیجهٔ پیشرفتهای فناوری است، اهمیت خاصی دارد.

حتی اگر بعضی از محققان نگرشهای خاصی داشته باشند، همچون نظریهٔ APOS که توسط دوبینسکی[5] پایه‌گذاری شده است، در این دیدِ کلّی است که تحقیق در بارهٔ تدریس دانشگاهی جا می‌گیرد. درواقع حتی اگر

1. contextual 2. F. Praslon 3. hierarchy
4. registers of representation 5. Ed Dubinsky

دانشجویان مورد بحث از نظر ادراکی و عاطفی پخته‌تر باشند، ارتباط آنها با ریاضیات سابقه‌ای طولانی داشته باشد، و اگر دانشی که در پی آن هستند پیچیده‌تر و مجردتر باشد، امروز دلیلی نیست که تصور کنیم قراردادهای خاصی برای تدریس در سطح دانشگاه وجود دارند یا مدلهای ساخته‌شده برای آن نامناسب‌اند. به همین علّت است که در ادامهٔ مقاله قصد داریم مطالب را حول دو مسأله بپرورانیم که به نظر من هم فراتر از رویکردهای مختلف به آموزش هستند و هم به سطح خاصی بستگی ندارند، یعنی مسألهٔ بازسازی و گسست از یک‌سو و مسألهٔ انعطاف از سوی دیگر.

بازسازی و گسست در یادگیری ریاضیات

ممکن است نیاز به بازسازی و گسست در یادگیری ریاضیات بدیهی به نظر برسد. ولی ظاهراً تدریس بر این پندار استوار است که فرایند یادگیری، پیوسته است. این، تصور بی‌شک برای جداکردن وظایف دانش‌آموزان از مسؤولیتهای معلمان، مفید است. امّا موجب مشکلات واقعی نیز می‌شود.

مثال حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌خوبی تنوع ناپیوستگیهایی را که باید مدنظر داشت نشان می‌دهد. برای سازمان دادن به این تنوع، سه نوع اصلی بازسازی را مشخص می‌کنیم.

بازسازی رابطه با اشیای آشنا

یادگیری حساب دیفرانسیل و انتگرال نخست با پیش‌فرضِ بازسازی رابطه با اشیایی ریاضی که برای دانشجویان ما حتی پیش از تدریس رسمی حسابان وجود داشته‌اند، آغاز می‌شود. مفهومی مانند مماس را در نظر بگیرید. در این مورد، تحقیقات انجام‌شده حاکی از مشکلات ناشی از روشهای متداول تدریس در دبیرستان است که به این بازسازی اقدام نمی‌کنند، و در عین حال نشان‌دهندهٔ هزینهٔ معقول و کارایی این اقدام در آن سطح است [۷]. اعداد حقیقی مثال دیگری است که در آن بازسازی لازم به این آسانی نیست. اعداد حقیقی در برنامهٔ درسی متوسطه به‌عنوان اشیایی جبری با ترتیبی چگال و با نمایشی هندسی به‌صورت محور اعداد ظاهر می‌شوند که تقریبهای اعشاری آنها را می‌توان با ماشین‌حساب جیبی به‌دست آورد. مع‌هذا، بسیاری تحقیقات نشان می‌دهد که زمانی که دانشجو وارد دانشگاه می‌شود، مفاهیم مبهم و نامشخصی در ذهن دارد که انسجام چندانی ندارند و متناسب با نیاز حساب دیفرانسیل و انتگرال نیستند [۸] مثلاً، اعداد حقیقی را این‌طور می‌شناسد که هیچ شکافی بین آنها وجود ندارد، ولی در عمل، دانشجویان این خاصیت را با وجود عددهایی درست قبل و بعد از یک، عدد مفروض آشتی می‌دهند (مثلاً ...۹۹۹ر۰ را ماقبلِ ...۰۰۰ر۱ می‌بینند). بیش از ۴۰ درصد دانشجویان ورودی دانشگاههای فرانسه گمان می‌کنند که اگر به‌ازای هر عدد طبیعیِ N، فاصلهٔ دو عدد A و B با یکدیگر از $\frac{1}{N}$ کمتر باشد، این دو عدد لزوماً برابر نیستند و فقط بینهایت به‌هم نزدیک‌اند. رابطهٔ بین عددهای گنگ، و تقریب اعشاری آنها نیز مبهم می‌ماند. بی‌شک، برای فهم «تفکر به‌شیوهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال»، بازسازی لازم است. تحقیقات ثابت می‌کند که این بازسازی به‌سادگی از آن نوع تحلیل شهودی و جبری، که عمدتاً در سطح دبیرستان معمول است، حاصل نمی‌شود و اگر دانشجویان در موقعیتهایی قرار داده نشوند که متوجه بدفهمی‌هایشان از مفاهیم و تعارضاتِ شناختیِ آنها شوند، ساختن میدان اعداد حقیقی که در دانشگاه مطرح می‌شود چندان ثمربخش نخواهد بود.

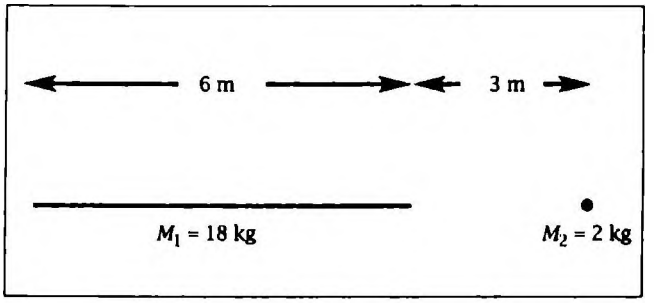
تلفیق ابعاد جدید یک مفهوم

لزوم بازسازی [مفاهیم]، تنها به اشیای آشنایی که پیش از ورود به این حوزه از ریاضیات وجود داشته‌اند، محدود نمی‌شود، بازسازیهای دیگری نیز لازم می‌آید، چرا که در نخستین مرحلهٔ ارائهٔ یک مفهوم، تنها جوانب خاصی از آن را می‌توان مطرح کرد. به نظر می‌رسد که موردِ انتگرال، مثالی از این وضعیت است. در فرانسه هم مانند بسیاری از کشورهای دیگر، مفهوم انتگرال در پایان دورهٔ دبیرستان به‌صورت انتگرال نامعین، یعنی فرایندی که وارونِ مشتقگیری است، معرفی می‌شود، و بلافاصله در محاسبات سادهٔ سطح و حجم، برپایهٔ رویکردی شهودی به این مفاهیم، و نیز در ارائهٔ عملی قضیهٔ بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال، از آن استفاده می‌شود. در سطح دانشگاه است که نظریه‌ای در باب انتگرال‌گیری، در قالب انتگرال ریمان، و پس از آن در سطوح پیشرفته‌تر، انتگرال لبگ، معرفی می‌شود. بنابراین، رابطه با مفهوم انتگرال مورد بازساییهای متوالی قرار می‌گیرد.

طی بیست سال اخیر، تحقیقات آموزشی متعددی در زمینهٔ مفاهیم مشتق و انتگرال شده است، که نتایج حاصل از آنها، مستقل از کشور مربوطه، همسویی زیادی داشته‌اند. این تحقیقات نشان می‌دهد که دانشجویان در به‌کارگیری روشهای استاندارد، به‌ویژه روشهایی که ماهیت محاسباتی دارند، به سطح قابل قبولی از عملکرد دست می‌یابند، امّا چیز بیشتری نصیب آنها نمی‌شود. همان‌طور که به‌وضوح در [۹] دیده می‌شود، اگر مثلاً از دانشجویان بخواهیم که خودشان تعیین کنند که آیا فلان وضعیت در یک مسألهٔ مدلسازی در چارچوب انتگرالگیری قرار می‌گیرد یا نه، دست و پای خود را کاملاً گم می‌کنند. آنها نجات خود را تنها در سرنخهایی کلامی می‌بینند که صورت مسائل معمولاً مملو از آن هستند و دانشجویان آنها را شناسایی کرده‌اند (کلماتی مانند برش، جزء سطح، کار، نیرو، تجزیهٔ نامتناهی، و غیره). حتی بدتر از این، از تعداد قابل‌توجهی از آنها که بهترین دانشجویان نیز در میانشان بودند، مستقیماً سؤال شد، و آنها ابایی نداشتند از اینکه بگویند مطمئنترین کار در این حوزه، فهمیدن نیست بلکه عملکرد مکانیکی است. لازم نیست که این وضعیت را نوعی فاجعهٔ شناختی تلقی کنیم. آنچه مشاهده می‌کنیم، روشهای باصرفه‌ای برای سازگارشدن با محیط است که دانشجویان هنگام مواجهه با روشهای نارسای آموزشی اتخاذ می‌کنند.

خوشبختانه، تحقیقات انجام‌شده به این گزارشهای منفی محدود نمی‌شود. اینک به طرحی می‌پردازیم که لگران[1] عرضه کرده تا دانشجویان سال اول دانشگاه خود به لزوم مفهوم انتگرال پی ببرند. این طرح مبتنی بر مسألهٔ به ظاهر سادهٔ زیر است. میله‌ای راست به جرم M_1 و جرم نقطه‌ای M_2 در وضعیت شکل ۱ قرار گرفته‌اند، و از دانشجویان خواسته می‌شود که اندازهٔ نیروی جاذبهٔ بین این دو جرم را به‌دست آورند. با آزمایشهای متفاوتی که در شرایط مختلف صورت گرفته، ثابت شده است که این طرحْ ثمربخش است. چه چیزی آن را ثمربخش می‌سازد؟ برای پاسخ به این پرسش، باید به‌طور خلاصه به تحلیل تعلیمی مسأله بپردازیم.

1. M. Legrand



شکل۱

زمانی که این مسأله را بدون هیچ راهنمایی کلامی مطرح می‌کنیم، دانشجویان سال اول متوجه ماهیت انتگرالی مسأله نمی‌شوند. امّا متوقف هم نمی‌شوند، چرا که می‌توانند به راهبردی که بسیاری اوقات در فیزیک به‌کار می‌رود تکیه کنند: تمرکز جرم میله در مرکز گرانش آن و استفاده از قانون جاذبهٔ بین دو جرم نقطه‌ای، که با آن آشنا هستند. در آزمایشهایی که با دانشجویان صورت گرفت، این راهبرد همواره روش غالب بود. امّا در میان گروه به نسبت بزرگی از دانشجویان، همچنان که در دانشگاه معمول است، همواره دانشجویانی هستند که شک می‌کنند: «آیا اصل گرانش در این حالت خاص نیز صادق است؟» یک نقطهٔ قوت این طرح این است که می‌توان صحت اصل گرانش را به‌روش دیگری نیز آزمود. دانشجویان عموماً پیشنهاد می‌کنند که میله به دونیم شود و اصل گرانش برای هر یک از دو قسمت به‌کار رود. البته با این کار به همان نتیجه نمی‌رسیم و در این حالت خاص، ثابت می‌شود که اصل گرانش نادرست است. امّا این پاسخ منفی، نتیجهٔ مثبتی نیز دارد زیرا یک واقعیت اساسی و مهم را آشکار می‌کند: سهم قطعه‌ای از میله، در نیروی جاذبه، به فاصلهٔ آن تا جرم نقطه‌ای وابسته است، و این امر تخمین کرانهای بالا و پایین برای شدت نیروی جاذبه را برای دانشجویان میّسر می‌سازد. به‌علاوه، از تکنیکی که منجر به مردودشناختن اصل گرانش شد می‌توان به‌عنوان یک فرایند اصلاح تدریجی استفاده کرد، و از این طریق دانشجو قانع می‌شود که می‌توان مفهوم نیرو را که وجود فیزیکی آن محسوس است به‌دقت لازم مورد تحلیل قرار داد. آنچه در اینجا به‌طور ضمنی صورت می‌گیرد، فرایند بنیادی انتگرال‌گیری است. البته، در طرح آموزشیی که اکنون تدوین کرده است، این تازه آغاز کار است. پس از آن دانشجویان با وضعیتها و چارچوبهای دیگری مواجه می‌شوند که نیازمند همین عملیات هستند. سپس باید شباهتهای میان آنها را بیابند و تشریح کنند تا فرایند انتگرال‌گیری را به‌صورت یک ابزار مشخص بسازند (در اینجا «ابزار» را در مقابل «شیء» در نظر داریم، مطابق با تمایزی که دوادی بین جنبه‌های ابزاری و شیئی مفاهیم ریاضی مطرح کرده است [۱۰]). تنها در اینجاست که معلم، این کارِ ریاضی را به نظریهٔ انتگرال ریمان مربوط می‌کند و مفهوم انتگرال‌گیری را به‌عنوان یک شیء ریاضی که می‌توان در موقعیتهای پیچیده‌تری دوباره روی آن سرمایه‌گذاری کرد، مطرح می‌سازد.

پیش از کنارگذاشتن این مثال می‌خواهم بر نکته‌ای تأکید کنم: کارایی این طرح فقط به ویژگیهای مسأله‌ای که هم‌اینک آن را توصیف کردیم مربوط نمی‌شود بلکه قویاً به نوع سناریویی وابسته است که به منظور ترتیب‌دادن مواجههٔ دانشجویان با این جنبهٔ جدید مفهوم انتگرال طراحی شده است. این سناریو وابستگی قاطعی به ویژگیهای اجتماعی فرایندهای یادگیری دارد: در بحث گروهی است که مشخص می‌شود راهبرد اولیه غلط است؛ در کار گروهی است که فرد می‌تواند در زمان معقولی به راه‌حل برسد؛ در کار کلاسی است که الگوهای تحوّل یادگیری ظاهر می‌شود، وضعیتی که در کار انفرادی یا در گروههای کوچک پیش نمی‌آید. بدون شک، اگر معلم این مثال خاص را در یک جلسهٔ کلاس شرح دهد، اثر آن نیز متفاوت خواهد بود.

ممکن است این مثال استثنایی و ایده‌آل به نظر برسد. متأسفانه، تحقیقات آموزشی این امکان را در اختیار ما نمی‌گذارد که به‌آسانی از عهدهٔ همهٔ بازسازیهای مورد نیاز برآییم. به‌عنوان مثال، اگر مفهوم حد را که در قلب این مبحث قرار دارد بررسی کنیم، تفاوتهایی آشکار خواهد شد. در مثال حد، وارد سومین ردهٔ بازسازیها می‌شویم، بازسازیهایی که لازم‌اند زیرا همان‌طور که هانری پوانکاره در آغاز این قرن اشاره کرده است. همیشه نمی‌توان مفاهیم را از آغاز به شکل نهایی آنها تدریس کرد [۱۱].

تحولِ سطح مفهوم‌سازی

اینکه شروع آموزش حساب دیفرانسیل و انتگرال در سطح دبیرستان به‌صورت مجرّد غیرممکن است، امروزه در بیشتر کشورها تأیید شده است. این آموزش از یک سو به ادراکی پویا از مفهوم حد بر اساس جستجوهای تصویری و محاسباتی، و از سوی دیگر به روشهایی با ماهیت جبری متکّی است. این رویکرد به دانش‌آموزان امکان می‌دهد که مسائل ساده اما جالب‌توجهی از وردش و بهینه‌سازی را حل کنند. گذر به رویکردهای صوریتر، که در دانشگاه صورت می‌گیرد، جهش بزرگی هم از نظر مفهومی و هم از نظر تکنیکی است.

از دیدگاه مفهومی، یک نکتهٔ حساس و مهم این است که صوری‌سازی مفهوم حد برای بررسی مبانی، وحدت‌بخشی، و تعمیم لازم است. صوری‌سازی، مفهوم حد را به «مفهوم برخاسته از اثبات» به‌همان معنی که لاکاتوس توصیف کرده است [۱۲] تبدیل می‌کند. حساس‌کردن دانشجویان تازه‌وارد به این قبیل نکته‌ها، کار چندان ساده‌ای نیست؛ این دغدغه‌ها جزو فرهنگ ریاضی آنها نیست، و یافتن مسأله‌هایی مشابه با مسألهٔ جرم میله‌ای (که در بالا توصیف شد) برای زمینه‌سازیِ بروز چنین دغدغه‌هایی کار آسانی نیست. به همین دلیل محققانی همچون رابرت[1] (در [۳]) برای این بازسازیها، طرحهای آموزشی ویژه‌ای را پیشنهاد می‌کنند که در آنها جنبهٔ فرهنگی بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرد.

مع‌هذا، نباید مشکلات فنّی این بازسازی را دست‌کم گرفت. از دیدگاه فنی، یک نکتهٔ مهم این است که در روایت جبری حساب دیفرانسیل و انتگرال که افراد در اولین برخورد با این درس با آن مواجه می‌شوند، عملیات تکنیکی از عملیات جبری عادی منفک نیست. این تا زمانی است که شخص به جنبه‌های صوریتر موضوع می‌رسد. مثلاً دانشجویان باید مفهوم برابری را بازسازی کنند و بفهمند که لزومی ندارد که مثل جبر، از برابریهای متوالی، یک برابری نتیجه شود، بلکه از ϵـنزدیکی‌ها، به‌ازای هر ϵ مثبت، لزوماً برابری به‌دست می‌آید. در ابتدای این بخش به مشکلاتی اشاره کردیم که دانشجویان در یادگیری اینکه ϵـنزدیکی‌ها، به‌ازای هر ϵ مثبت، برابری را نتیجه می‌دهند، دارند.

نکتهٔ دیگر این است که تعداد نابرابریها بر تعداد برابریها فزونی می‌یابد. این تغییر، موجب افزایش قابل‌توجهی در پیچیدگیهای تکنیکی می‌شود، به‌خصوص

1. A. Robert

اینکه بسیاری اوقات، شیوه‌های استدلال در این حالت بر شرطهایی متکی هستند که «کافی» هستند ولی «لازم» نیستند. این روشهای جدید استنتاج، نیازمند حذف اطلاعات به‌نحوی کنترل‌شده هستند که بر مبنای آگاهی درست از مراتب بزرگیِ اجزای مختلف عباراتی که دانشجو با آنها کار می‌کند، صورت می‌گیرد. به‌طور خلاصه، دانشجو باید دنیای تکنیکی کاملاً جدیدی را بشناسد و بر آن تسلط پیدا کند. این، کار چندان ساده‌ای نیست و لزوماً فرایندی طولانی است.

به اعتقاد من، ضرورتهای ریاضیاتیِ بازسازی که در بالا به آنها اشاره شد، به ما کمک می‌کند که دریابیم چرا توانایی ارائهٔ معنای شهودی حد ــ حتی توصیف آن با مثال و مثال ناقض ــ با توانایی کارکردن با این مفهوم به‌عنوان یک شیء ساخته‌شده، تحت اثباتهای صوری، تفاوت دارد. در شرایطی که تعداد دانش‌آموزان دبیرستانی رو به افزایش است، این بازسازی، در حدی که دانشگاه آن را ضروری می‌داند، بر عهدهٔ آموزش دانشگاهی است. اما بازسازی باید در طول زمانی که درس مربوط تدریس می‌شود انجام گردد.

در این بخش، موضوع را در چارچوب بازسازی روابط با اشیای ریاضی، با تمیزدادن سه نوع متفاوت بازسازی، تشریح کردیم. البته باید این نکته را روشن کنیم که هر چند محققان به اهمیت تغییرات کیفی بازسازی که در بالا بر آنها تأکید شد واقف‌اند، لکن آن را معمولاً به این صراحت و با این عبارات بازگو نمی‌کنند. بعضی محققان موضوع را با استفاده از مفهوم گسست با اشاره به ایدهٔ «مانع معرفت‌شناختی» که از باشلار فیلسوف [۱۳] اقتباس کرده‌اند بیان می‌کنند. این وضعیت مثلاً درکارهای مختلف مربوط به مفهوم حد که در مقالهٔ مروری کورنو[1] [۱] به آن اشاره شده است دیده می‌شود. دیگران، مانند دوبینسکی و اسفارد[2] مطالعات خود را بیشتر بر اهمیت و مشکلات گذار از فرایندها به اشیا متمرکز می‌کنند. در نزد دستهٔ اول، مفاهیم ریاضی فرایندهایی پویا هستند که از «درونی‌سازی»[3] اعمال کارساز ناشی می‌شوند. در نزد دستهٔ دوم، مفاهیم ریاضی به‌عنوان اشیای ایستایی تلقی می‌شوند که می‌توانند به‌نوبهٔ خود در فرایندهای پیچیده‌تری قرار گیرند. کاری که آنها روی مفهوم تابع انجام داده‌اند، به‌نوعی نمونهٔ الگووار این رویکرد است [۱۴]. آنها به خوبی نوع رابطه‌ای با تابع را که فرایندسازی ممکن می‌سازد تشریح می‌کنند و به قابلیت استفاده از آن در سطح دبیرستان می‌پردازند. در ضمن آنها محدودیتهای این رویکرد در حساب دیفرانسیل و انتگرال دانشگاهی را نشان می‌دهند که در آنجا دیگر لزوماً تابعهای خاص موردنظر نیستند بلکه رده‌هایی از توابع که برحسب ویژگیهایی چون شرایط خوش‌رفتاربودن[4] تعریف شده‌اند درنظرند و برای آنها باید از نو فرایندسازیهایی را پیش‌بینی کرد. همچنین این تحقیقات نشان داده‌اند که راهبردهای آموزشیی که می‌خواهند خیلی زود به تعاریف ثابت نظریهٔ مجموعه‌ای از اشیای تابعی برسند بدون اینکه وقت کافی برای مرحلهٔ «فرایندسازی» در نظر بگیرند، اثرات فاجعه‌باری دارند. بالاخره، آنها نشان داده‌اند که برنامه‌سازی به زبانهای خاص مانند زبان ISETL، می‌تواند به درونی‌سازی عملها به‌صورت فرایندها و، حتی دقیقتر، به شیئی‌سازی فرایندها کمک کند.

نتایج حاصل از تحقیقات در بارهٔ بازسازیهای لازم برای یادگیری ریاضی، در بارهٔ موانع معرفت‌شناختی که در ذات یادگیریهای گوناگون قرار دارند، و در بارهٔ دشواریهای گذار بین فرایندها و اشیا، قطعاً ما را از مشکلاتی که محصلان با آنها مواجه هستند آگاهتر می‌کنند و به مسؤولیت خود در از میان برداشتن این مشکلات در کار تدریس، واقفتر می‌سازند. البته، همان‌طور که در ابتدای این مقاله نیز گفتیم، این نتایج مؤید نگرش «قائم» و سلسله‌مراتبی به یادگیری ریاضیات است و اهمیت چیزی را که تمایل داریم بعد «افقی» بخوانیم استتار می‌کند. برای ایجاد نوعی تعادل بین این دو بُعد است که در بخش بعدی توجه خود را به مسائل انعطاف‌پذیری شناختی معطوف می‌کنیم.

1. Cornu 2. A. Sfard 3. internalize 4. regularity

انعطاف‌پذیری و یادگیری ریاضیات

شناخت نقش انعطاف‌پذیریِ شناختی در پیشبرد فعالیتهای ریاضی، چیز جدیدی نیست. همان‌طورکه درفوس[1] و آیزنبرگ[2] در مقاله‌ای در سال ۱۹۹۶ در بارهٔ وجوه چندگانهٔ فعالیتهای ریاضی، خاطرنشان می‌کنند، کتاب پولیا با عنوان چگونه مسأله حل کنیم؟، شاهدی است بر این واقعیت. تحقیقات آموزشی، به این کارهای اولیه چه چیزی اضافه می‌کند؟ بی‌شک، این چیزها را اضافه می‌کند:

- شناخت بهتری از انواع مختلف انعطاف‌پذیری که در فعالیتهای ریاضی نقش دارند.
- اثباتِ محدودیتهای موجود در راهبردهای آموزشیی که هدفشان پرورش این انعطاف‌پذیری‌ها به‌عنوان مهارتهایی مستقل از حوزه‌های خاص است ولی توجّه جدّی به مشخصات ویژهٔ دانشی که تکیه‌گاه این انواع انعطاف‌پذیری در حوزه‌های موردنظر هستند، ندارند [۱۵].
- پروراندن و آزمایش طرحهای آموزشی با هدف رفع مشکلاتی که در برابر انعطاف آموزشی در موضوعهای موردنظر وجود دارد.

برای تشریح این موضوع، این بار به حوزهٔ جبر خطی توجه می‌کنیم که اخیراً در تحقیقات آموزشی در مورد آن بررسیهایی انجام شده است. در این تحقیقات، این قبیل مسائل در قلب پروژه‌های مختلف تحقیقی قرار دارند. صحبت ما به‌خصوص، متکّی بر ترکیبی است که در [۴] توسط دوریه فراهم شده است. همان‌طورکه این محقق اشاره کرده است، ریشه‌های جبر خطی در زمینه‌های مختلف ریاضی یافت می‌شود و این امکان را فراهم کرده است که به مفهومی، وحدتی میان چارچوبهای زیر ایجاد کنیم: زمینهٔ هندسی، زمینهٔ دستگاه معادله‌های خطی (با بعد متناهی یا نامتناهی)، زمینهٔ محاسبات ماتریسی، زمینهٔ معادله‌های دیفرانسیل، و غیره. بدین‌ترتیب، ایجاد یک ارتباط انعطاف‌پذیر میان این زمینه‌های مختلف، و نیز میان جبر خطی مجرّد و هر یک از آنها، یک مؤلفه اساسی یادگیری در این مبحث است. این کار نیز متکّی است به برقراری ارتباط بین سطوح زبان و توصیف، بین شیوه‌های استدلال، بین «فهرستهای نمایش»، و بین دیدگاههای مختلف.

انعطاف در به‌کارگیری سطوح زبان و شیوه‌های استدلال

هیلل در [۴]، زبانهای مختلف و روشهای نمایش وابسته به آنها را که در مبحث جبر خطی مورد استفاده قرار می‌گیرند و نیز تعامل بین آنها را تحلیل می‌کند. وی عمدتاً سه تا از این زبانها را متمایز می‌کند: زبان نظریهٔ عمومی،

1. T. Dreyffus 2. T. Eisenberg

زبانِ $\mathbb{R}^n$، و زبان هندسی فضای دو و سه‌بُعدی، که به‌طور استعاری در فضاهای با ابعاد بالاتر نیز قابل استفاده است. او مشخصه‌ها و شیوه‌های تعامل آنها را با فهرست‌کردن مشکلاتی که ممکن است پدید آورند و هنگام تدریس باید نسبت به آنها حساسیت به خرج داد بیان می‌کند. به‌علاوه، با تحلیل نوارهای ویدئویی کلاسهای پنج مدرس باتجربه در بارهٔ ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارها، شواهدی از تغییرات دائمی در زبان و نمادگذاری می‌آورد، که غالباً بی‌توقف و بدون هیچ اخطاری به دانشجویان در بارهٔ اینکه تغییری در حال رُخ‌دادن است انجام می‌شوند.

همچنین شیرپینسکا، دفنس[1]، کاچریان[2] و سالدانها[3] در [۴] سه شیوهٔ استدلال را در جبر خطی را تمیز می‌دهند: شیوهٔ ترکیبی-هندسی، که در آن وجود اشیا مستقیماً احساس می‌شود، و دو شیوهٔ تحلیلی که در آنها اشیا به‌طور غیرمستقیم ارائه می‌شوند. در دو روش اخیر، اشیا فقط با تعاریف و ویژگیهای عناصر آنها ساخته می‌شوند. در شیوهٔ تحلیلی-حسابی، شیء توسط فرمولی تعریف می‌شود که محاسبهٔ آن را ممکن می‌سازد، و در شیوهٔ تحلیلی-ساختاری شیء توسط مجموعه‌ای از ویژگیهایش تعریف می‌شود. مطابق نظر این نویسندگان، اگر در بارهٔ جوابهای ممکن یک دستگاه سه معادلهٔ سه‌مجهولی خطی در قالب موقعیت سه صفحه در فضا فکر کنیم، در واقع به‌روش ترکیبی-هندسی فکر کرده‌ایم. اگر در بارهٔ این مسأله در قالب نتایج حاصل از تحویل یک ماتریس ۳ × ۳ بیندیشیم، درواقع به شیوهٔ تحلیلی-حسابی اندیشیده‌ایم، و اگر مثلاً با استفاده از ماتریسهای تکین و وارون‌پذیر به مسأله نگاه کنیم، به شیوهٔ تحلیلی-ساختاری اندیشیده‌ایم.

همان‌طور که این نویسندگان نیز به آن اشاره کرده‌اند، از نظر تاریخی پیشرفتِ جبر خطی تا حد زیادی به تعامل این سه روش وابسته بوده است. ولی، چنانکه تحلیل دقیق موقعیتهای آموزشی در دانشگاه که این تحقیق در آنجا انجام شده، نشان داده است، هم تکالیفی که بر عهدهٔ دانش‌آموزان گذاشته می‌شود و هم تعامل مشاهده‌شده بین دانشجویان و استادان، همه به خوبی نشان می‌دهند که به‌کارگیری این سه شیوهٔ متفاوت به‌صورتی انعطاف‌پذیر، اصلاً کار ساده‌ای نیست. دانشجویان خودشان نظامهای بدیعی مرکب از شکلهای بینابینی این سه روش را به‌کار می‌برند، و به دلیل کمبود وقت، صورتهایی که آمیزه‌ای از شیوه‌های مختلف و شامل شیوهٔ تحلیلی-ساختاری است ظاهر می‌شود. به‌زعم نویسندگان، این ابداع می‌تواند منبع الهامی برای تدریس باشد. مسألهٔ آموزشیی که باید حل شود، یافتن وسایلی برای کنترل آگاهانهٔ این سه روش مختلف و ارتباط آنها با یکدیگر است. داده‌های جمع‌آوری‌شده به‌وضوح نشان می‌دهند که اگر محصل به حال خود رها شود، با وجود خلاقیت بارزی که از خودشان می‌دهد، این امر به‌وقوع نخواهد پیوست.

انعطاف در به‌کارگیری فهرستهای نمایش

در جبر خطی، چند فهرست نمایش نمادین[۲]، ازجمله نمودارها، شکلها، نوشتنِ نمادین، زبان طبیعی و غیره به‌کار گرفته می‌شود. همان‌طور که دوال [۱۶]، و دیگران گفته‌اند، نمایشهای نمادین کاملاً در فعالیتهای ریاضی لازم‌اند چرا که اشیای ریاضی مستقیماً قابل ادراک نیستند. نقش فهرستهای نمادین تنها «برونی‌سازی» نمایشهای ذهنی و ایجاد ارتباط نیست بلکه آنها در عملکردِ شناختی و در مفهوم‌سازی نیز نقش اساسی دارند. ولی به نظر دوال، آموزش معمولاً نقش آنها را به برونی‌سازی و ایجاد ارتباط تقلیل می‌دهد. پس در آموزشْ توانایی شناختِ نمایشهای نمادین، شکل‌گیری آنها، رفتار با آنها، یا تبدیل آنها به‌صورت دیگری از نمایش، به عنوان محصول فرعی عمل مفهوم‌سازی تلقّی می‌شود. تحقیق پاولوپولو[1] در پایان‌نامهٔ ۱۹۹۴ او در استراسبورگ (ر.ک. [۳]) در بارهٔ هماهنگی فهرستهای نمایش در جبر خطی به‌خوبی نشان می‌دهد که رابطهٔ بین یادگیری مفهومی و یادگیری نمادین بسیار پیچیده است. واحد آموزش تجربی که برای دانشجویان ورودی در چارچوب این تحقیق طراحی شده است، دوباره حاکی از این امر است که وقتی در آموزش نسبت به این بُعد نمادینِ کارهای ریاضی حساسیت وجود داشته باشد، فائق‌آمدن بر مشکلات، هر چند پیچیده و غامض به نظر رسند، میسر می‌شود.

انعطاف در به‌کارگیری دیدگاههای مختلف

ارتباط انعطاف‌پذیر بین دیدگاههای مختلف ریاضی توسط نویسندگان متعددی مطرح شده است که از آن جمله است الوز دیاز[2] که در پایان‌نامهٔ خود در سال ۱۹۹۸ در دانشگاه پاریس VII، (ر.ک. [۴]) به این موضوع پرداخته است. چنین انعطافی در جبر خطی در رابطهٔ بین دیدگاههای «ضمنی» و «پارامتری»[۳] مطرح می‌شود. در جبر خطی اغلب باید از یک دیدگاه به دیدگاه دیگری گذر کنیم ــ نخست به‌صورت محاسباتی، سپس به‌صورت استعاری‌تر. پایان‌نامهٔ الوز دیاز که شامل مطالعهٔ همزمان روی دانشجویان فرانسوی و برزیلی در سطوح مختلف است، مشکلات بزرگی را که دانشجویان در ایجاد یک ارتباط انعطاف‌پذیر بین دو دیدگاه دارند، نشان می‌دهد. درصد کمِ موفقیت در حل تمرین سادهٔ زیر در کلیهٔ سطوح، گویای این واقعیت است.

> در $\mathbb{R}^3$، فرض کنید $a = (2, 3, -1)$، $b = (1, -1, 2)$، $c = (5, 0, 7)$ و $d = (0, 0, 1)$. نمایشی ضمنی برای اشتراک فضاهای برداری E و F که به‌ترتیب به‌وسیلهٔ $\{a, b\}$ و $\{c, d\}$ تولید شده‌اند، بیابید.

حل این تمرین به سبکی که این دانشجویان آموزش دیده‌اند، نیازمند گذار از نمایش پارامتری به نمایش ضمنی هر یک از فضاهای E و F از طریق روش حذفی گاوس، و سپس تشکیل اجتماع مجموعه‌های معادله‌های هر کدام از آنهاست[۴].

در حل این تکلیف به‌ویژه اشتباهات صوری متعددی پیش می‌آید. دانشجویانْ مختصات را با پارامترها اشتباه می‌کنند و اشتراک را به جای $\mathbb{R}^3$ در $\mathbb{R}^2$ یا در $\mathbb{R}^4$ به‌دست می‌آورند. آنها بی‌ملاحظه معادله‌هایی به بردارها نسبت می‌دهند، و غیره. کاملاً مشهود است که سرنخ‌های هندسی مسأله، که استفاده از آنها قاعدتاً باید آسان باشد، به‌ندرت، مورد توجه محصلان قرار می‌گیرد. استفاده از شهود هندسی وقتی هم که انجام می‌گیرد به‌صورت چندان مؤثری انجام نمی‌شود. بالاخره، برخلاف انتظار، درصد موفقیت در میان دانشجویان پیشرفته‌تر هم بهتر نیست.

این تحقیق همچنین از طریق تحلیل گزارشهای نمونهٔ تدریس در این دو کشور نشان می‌دهد که در آموزشْ چندان حساسیتی نسبت به این مشکلات

1. A. Defence 2. T. Khatcherian 3. L. Saldanha

1. K. Pavlopoulou 2. M. Alves Diaz

وجود ندارد. قطعاً محصلان این توانایی را دارند که از راههایی برای حل استفاده کنند که برقراری ارتباط [بین روشها یا دیدگاهها] را به‌طور فنی برایشان امکان‌پذیر سازد ولی این به تنهایی برای معنادادن به این ارتباط و استفاده و کنترل مؤثر آن کافی نیست.

بعدها که مفهوم دوگانی[1] مطرح می‌شود، باید به دانشجو توانایی تفکر مجدد در مورد این ارتباط و نیز درکِ بهتر نقشی را که انتساب معادله به بردار در آن دارد بدهد. ولی اینکه سنتاً جهان دستگاه معادلات به‌صورت تکنیکی و جهان دوگانی به‌صورت نظری ارائه می‌شود، باعث می‌گردد که دانشجوی امروزی ارتباط ضعیفی بین این دو جهان ببیند.

بی‌شک لزوم ایجاد یک گفتمان واسطه، که به محصل امکان دهد که سرنخ‌هایِ فنی ارتباط را به‌طور خودبه‌خود در جای درست قرار دهد، احساس می‌شود. تاریخچهٔ پیدایش مفهوم رتبه[2]، آن‌طور که در [۴] بررسی شده است، بینش جالب‌توجهی در بارهٔ موضوع به‌دست می‌دهد و به ما کمک می‌کند که پیچیدگی لازم را به این ارتباط بازگردانیم، پیچیدگیی که سادگی ظاهری متون جدید ما را از آن غافل می‌کند. این پیچیدگیها در کتابهای درسی ظاهر نمی‌شوند و فرض می‌شود که وقتی تکنیکهای لازم فراهم شده باشند، ایجاد ارتباط بین دیدگاههای مختلف خود به خود انجام می‌گیرد.

ضعیف‌بودن اثر روشهای متداول تدریس در ایجاد ارتباط پدیده‌ای دور از انتظار نیست، خواه ارتباطِ بین موقعیتها مورد نظر باشد یا فهرستهای نمایش و یا دیدگاهها. تحقیقات نشان می‌دهد که [روشهای متداول] تدریس مشکل می‌تواند وظیفه آموزش تفکر مستقل را به‌عنوان چیزی که به ارتباط کمک کند، به‌عهده گیرد. ظاهراً فرض بر این است که انعطاف‌پذیری، به محض اینکه شخص مفهومی را «می‌فهمد»، به‌صورت خودکار درونی می‌شود، انگار مثل مسألهٔ ساده‌ای است که می‌توان آن‌را به‌عنوان تکلیف به دانشجو داد. تحقیق نشان می‌دهد که متأسفانه چنین نیست. تحقیق همچنین نشان می‌دهد که آموزش انعطاف‌پذیری، اگر جداً مورد توجه قرار گیرد، امکان‌پذیر است. کارهایی که در بالا به آنها اشاره کردیم این موضوع را در جبر خطی نشان می‌دهند ولی در حساب دیفرانسیل و انتگرال نیز وضع همین‌طور است. تحقیقات زیادی که در مبحث اخیر انجام شده است. به‌ویژه نشان می‌دهد که کاربرد فناوری رایانه‌ای، اگر به‌دقت طرح‌ریزی شود، می‌تواند نقش تعیین‌کننده‌ای در ایجاد یک ارتباط انعطاف‌پذیر بین صورتهای جبری و گرافیکی بازی کند و می‌تواند از این ارتباط، یک ابزار واقعی و مؤثر برای فعالیتهای ریاضی بسازد [۲]. تحقیق خودِ من در بارهٔ تدریس معادلات دیفرانسیل در همین راستاست [۱۴]، و نشان می‌دهد که استفاده از فناوری رایانه‌ای می‌تواند رویکردی عملی به معادلات دیفرانسیل از طریق جوابهای کیفی ارائه دهد که حتی برای دانشجویان مبتدی مناسب است و آموزش ریاضی را به پیشرفتهای امروزی این مبحث نزدیکتر می‌کند. امّا همچنین تحقیق نشان می‌دهد که قابلیت این رهیافتهای جدید یاددهی مستلزم تغییرات مهم در وضعیت فهرست گرافیکی است. درواقع، قابلیت استفاده از این روشها برای دانشجویان سال اول، نیازمند پذیرش اثباتهای کیفی بر مبنای استدلالهای گرافیکی خاص است. مذاکره و توافق در این موضوع با استادان دانشگاهها، حداقل در فرانسه، مشکل است زیرا در این کشور چنین اثباتهایی در سطح دانشگاه عموم، مقبول نیستند.

1. duality 2. rank

امکانات و محدودیتهای کارِ تحقیق

در این مقاله سعی کردیم نشان دهیم که تحقیقات انجام شده در سطح دانشگاه به فهم بهتر مشکلات یادگیری که دانشجویان ما با آن مواجه هستند، مقاومتهای غیرقابلِ انتظاری که در برابر حل بعضی از این مشکلات وجود دارد، و محدودیتها و نقائص روشهای تدریس ما، کمک می‌کند. در موارد متعددی، تحقیق ما را به سوی عرضهٔ برخی طرحهای آموزشی راهنمایی کرده است که حداقل در محیطهای آزمایشی مؤثر واقع شده‌اند. این مقاله تنها چشم‌انداز ناقصی از تحقیقات متنوع انجام شده و نتایج حاصل از آنها به‌دست می‌دهد. به دلیل محدودیت جا، ما فقط روی بعضی نکته‌ها تمرکز کردیم و بقیه را که مطمئناً بسیار مهم نیز هستند، نادیده گرفتیم، امّا آنچه در اینجا ارائه شد، هر چند ناقص، از مایهٔ کافی برخوردار هست که به من اجازه دهد بعضی محدودیتهای اقدامات تحقیقی در وضعیت حاضر را شرح دهم و طرحهایی برای پیشرفتهای آینده پیشنهاد کنم.

اعتقاد من این است که تحقیقاتی که تاکنون صورت گرفته است، تنها محدود به مباحث اندکی، به نسبتِ تعداد مباحث متنوع ریاضی که در سطح دانشگاه تدریس می‌شوند، بوده است. همان‌طور که در بالا گفتم، عمدهٔ تلاشها در مبحث حساب دیفرانسیل و انتگرال صورت گرفته است، حوزه‌ای از ریاضیات که منبع اصلی ناکامیها در سطح دورهٔ کارشناسی شناخته شده است. در سالهای اخیر، محققان مبحث جبر خطی را مورد بررسی قرار داده‌اند، و پروژه‌های مهمی اینک در این زمینه در حال انجام است. اما به حوزه‌های مهمی مانند احتمال و آمار کمتر پرداخته شده است. به‌علاوه، احساس من این است که روی‌هم‌رفته تحقیقات در آموزش ریاضی، کم‌وبیش آگاهانه، معطوف به تربیت ریاضیدانان آینده از میان انبوه دانشجویانی که دروس دانشگاهی ریاضی می‌گیرند، بوده است. بی‌شک، تحقیق در زمینهٔ آموزش ریاضیات باید تا حدی تغییر جهت دهد تا مسائل مربوط به تربیت آموزگار و دبیر و به‌طورکلی آموزش ریاضیِ همه نوع متخصص را شامل شود.

به نظر من راهی که تاکنون در مورد فناوری رایانه‌ای در پیش گرفته شده است شاهدی بر این محدودیتهاست. در حال حاضر فقط به کمک گرفتن از فناوری رایانه‌ای در مفهوم‌سازی و انعطاف‌پذیری شناختی به‌عنوان مؤلفهٔ مهّمی از آن توجه شده است. ولی در این تحقیقات همین میزان توجه به اینکه فعالیت حرفه‌ای ریاضی به‌کمک رایانه واقعاً چیست و نیازهای ریاضی خاص و عام آن کدام است مبذول نشده است. اگر بخواهیم از موقعیت یک استفاده‌کنندهٔ چشم‌بسته به موقعیتِ استفاده‌کننده‌ای کارامد و صاحب‌نظر ارتقاء یابیم، این نیازها وابسته به تخصصهای حرفه‌ای خاص می‌شوند. در نتیجه، تحقیقات به راههای ارائهٔ دانش متناظر در دروس ریاضی عادی یا دروس ریاضی سرویس توجه کافی نداشته است. مع‌هذا، این یک چالش واقعی است که ما امروز با آن مواجهیم، با توجه به این واقعیت که در دانشگاه، وظیفهٔ ما دیگر توسعهٔ نوعی فرهنگ عمومی ریاضی نیست.

محدودیتهای کار تحقیق تنها آن چیزهایی نیستند که در بالا به آنها اشاره شد و همگی مرتبط با وضعیت فعلی این رشته هستند. ما به‌عنوان مدرسان دانشگاه، با مشکلات اساسیتری مواجه هستیم. انتظار داریم که تحقیقات، [در زمینهٔ آموزش] ابزارهای ساده و کم‌خرجی برای ارتقای رهیافتهای آموزشی در اختیار ما قرار دهد. ولی به‌عنوان محقق اعتراف می‌کنم که این تحقیقات

به‌ندرت راهی پیش پای ما گذاشته است که با جرح و تعدیلهای اندک و کم‌خرج به پیشرفت قابل‌توجهی در آموزش دست یابیم و به‌عکس، بیشتر طرحهای تحقیقاتی که مؤثربودن آنها به اثبات رسیده است مستلزم تعهد و تخصص بیشتری از جانب مدرّسان و تغییرات قابل ملاحظه‌ای در روشها هستند. یک دلیل مهم آن این است که مشکل فقط محتوای تدریس نیست (فقط نوشتن یا انتخاب کتابهای درسی جدید، کافی نیست)؛ بلکه مشکلات به نوع تکالیف دانشجویان، به شیوه‌های تعامل بین استادان و دانشجویان، و به شکل و مضمون ارزیابی از دانشجویان نیز بستگی دارد. تغییر به‌سادگی صورت نمی‌گیرد، نیازمند زمان و نیازمند حمایتهای سازمانی است، و صرفاً با نیت خوب شخصی برآورده نمی‌شود.

نکتهٔ حساس دیگر، پیچیدگی سیستمهایی است که فرایندهای یاددهی و یادگیری درآنها صورت می‌گیرند. به دلیل این پیچیدگی، اطلاعاتی که می‌توانیم از تحقیقات آموزشی دریافت کنیم، هر چند مفید است، لزوماً بسیار ناقص است. مدلهایی که می‌توانیم بررسی کنیم لزوماً ساده‌انگارانه هستند. به‌عنوان ریاضیدان می‌دانیم که می‌توان حتی از مدلهای ساده‌انگارانه نیز چیزهای زیادی آموخت، ولی نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که از آنها ابزارهای لازم برای کنترل نظامهای آموزشی به‌دست آید. بنابراین باید در انتظاراتمان واقع‌بین باشیم، و در تعمیمهایمان محتاط. به اعتقاد من، این بدان معنی نیست که دنیای تحقیقات و دنیای عمل، باید به‌صورت دو دنیای مجزا — دور از هم — زیست و رشد کنند. اما من عقیده دارم که نمی‌توان یافتن راههایِ استفادهٔ مفید از نتایج تحقیقات [آموزشی] را در خارج از جوامع آموزشی و محیطهای آزمایشیی که در آنجا این نتایج به‌دست آمده است صرفاً به‌عهدهٔ محققان [آموزشی] گذاشت. این وظیفهٔ مشترک همهٔ ماست.

پانوشتها

(۱) منظور از «ارتباط»، علاوه بر روابط بین اجزاء هر دسته، گذر از یک جزء به جزء دیگر و نیز وسایل فنی برقراری روابط بین آنها نیز هست.

(۲) دوال [۱۶] «فهرست نمایش نمادین» (register of semiotic representation) را به‌عنوان نظامی از نمایشها به‌وسیلهٔ علائم معرفی می‌کند که سه کار اساسیِ مربوط به استفاده از نمادها را امکان‌پذیر می‌سازد: تشکیل یک نمایش، شیوهٔ برخورد با آن در این فهرست، و تبدیل آن به فهرستهای دیگر.

(۳) در مورد فضای برداری، اگر آن را به صورت مجموعه‌ای از جوابهای یک دستگاه معادله‌های خطی در نظر بگیریم، به‌صورت ضمنی در بارهٔ آن اندیشیده‌ایم، و اگر مجموعهٔ مولدهای آن را در نظر بگیریم، به‌صورت پارامتری در بارهٔ آن فکر کرده‌ایم.

(۴) ولی باید به آشفتگیی که در اینجا با به‌کاربردن تکنیک متداول پدید می‌آید اشاره کنیم: معادلهٔ زیرفضای F عبارت است از $y = 0$ که می‌توان آن را بدون هیچ محاسبه‌ای نیز به‌دست آورد.

مراجع

1. D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht, 1991.

2. _____, Functions and calculus, *International Handbook of Mathematics Education* (A. J. Bishop et al., eds.), Kluwer, Dordrecht, 1996, pp. 289-325.

3. M. Rogalski (ed.), Analyse épistémologique et didactique des connaissances à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Special issue **18** (1998).

4. J. L. Dorier (ed.), *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1997.

5. G. Brousseau, *The Theory of Didactic Situations*, Kluwer, Dordrecht, 1997.

6. Y. Chevallard, Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **12** (1992), 73-128.

7. C. Castela, Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures: le cas de la notion de tangente, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **15** (1995), 7-47.

8. M. Artigue, Learning and teaching elementary analysis, *8th International Congress on Mathematics Education–Selected Lectures* (C. Alsina et al., eds.), S.A.E.M. Thalès, Sevilla, 1996, pp. 15-30.

9. _____ et al., *Procédures Différentielles dans les Enseignements de Mathématiques et de Physique au Niveau du Premier Cycle Universitaire*, preprint, IREM Paris VII, Paris, 1989.

10. R. Douady, Dialectique outil/objet et jeux de cadres, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7** (1987), 5-32.

11. H. Poincaré Les définitions en mathématiques, *L'Enseignement des Mathématiques* **6** (1904), 255-283.

12. I. Lakatos, *Proofs and Refutations, the Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, and Melbourne, 1976.

13. G. Bachelard, *La Formation de l'Esprit Scientifique*, J. Vrin, Paris, 1938.

14. E. Dubinski and G. Harel (eds.), *The Concept of Function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, vol. 25, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1992.

15. A. H. Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, 1985.

16. R. Duval, *Semiosis et Pensée Humaine*, Peter Lang, Paris, 1996.

******

• Michèle Artigue, "The teaching and learning of mathematics at the university level, crucial questions for contemporary research in education", *Notices Amer. Math. Soc.*, (11) **46** (1999) 1377-1385.

* میشل آرتیگ، دانشگاه پاریس VII، فرانسه.
Michele.Artigue@gauss.math.Jussieu.fr.

نشر ریاضی، سال ۱۳، شمارهٔ ۲، صص. ۵۷-۶۰

چگونه می‌توان مسأله طرح کرد؟

امید نقشینه ارجمند*

اگر این سؤال را از من بپرسند جواب می‌دهم: نمی‌دانم!

ولی با توجه به اینکه هیچ‌کس این یک خط را به‌عنوان مقاله از من نمی‌پذیرد قصد دارم دو مثال به این جواب کوتاه اضافه کنم. امیدوارم دو مسأله‌ای که می‌خواهم ایدهٔ طرح آنها را بیان کنم برای شما هم جالب باشد.

نکته‌ای که دوست دارم بر آن تأکید کنم این است که دو مسأله‌ای که در پی خواهند آمد به نحو «صادقانه»ای طرح شده‌اند. به این معنی که روش من این نبوده که با پیچاندن یک موضوع ساده و مخفی‌کردن نکات روشن‌کنندهٔ آن در نهایت به معمایی برسم که به محض طرح‌شدن، راه‌حل آن برای خودم روشن باشد. بلکه با بررسی تعدادی از شواهد به حدسی رسیده‌ام و سعی کرده‌ام آن را اثبات کنم.

مسألهٔ اول. فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد صحیح است و $b_1, b_2, \ldots, b_n$ و $c_1, c_2, \ldots, c_n$ اعدادی صحیح‌اند به طوری‌که هیچ‌کدام از b_iها صفر نیستند. می‌دانیم که به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$، مجموعه‌های $b_iA + c_i = \{b_ia + c_i | a \in A\}$، n زیرمجموعهٔ دوبه‌دو مجزای A هستند. ثابت کنید $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|b_i|} \leqslant 1$.

ایدهٔ طرح مسأله اول

برای اینکه بگوییم ایدهٔ طرح این مسأله از کجا آمده باید کمی راجع به فرکتال [برخال]ها و بعد فرکتالی [برخالی] صحبت کنم.

قصد ندارم فرکتال را تعریف کنم زیرا اصولاً کسانی هم که به‌طور حرفه‌ای با این مفهوم سروکار دارند تعریفی ریاضی از آن نداده‌اند. آنچه موردنظر من است، دستهٔ خاصی از فرکتال‌هاست که به آنها اشکال خودمتشابه گفته می‌شود. یک شکل خودمتشابه را می‌توان به صورت اجتماع دوبه‌دو مجزا (یا تقریباً مجزا) n شکل نوشت به طوری‌که هر کدام از این اشکال، متجانس با شکل اصلی باشند. البته n باید دست‌کم دو باشد. مجموعهٔ کانتور چنین شکلی است. این مجموعه را می‌توان به دو مجموعهٔ شبیه کانتور که هر کدام $\frac{1}{2}$ مجموعهٔ کانتور اصلی هستند افراز کرد.

می‌خواهیم به هر مجموعهٔ خودمتشابه کراندار، عددی حقیقی به عنوان بعد نسبت دهیم. فرض کنید X یک فضای متری کراندارِ خودمتشابه باشد که به اجتماع n زیرفضای متشابه با خودش افراز شده است، یعنی $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ و به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$، X_i با $\lambda_i X$ ایزومتریک است.

اگر X، αبعدی باشد می‌توان برای آن یک اندازهٔ αبعدی نیز در نظر گرفت. با تصوری که از بعد و اندازه داریم، انتظار داریم که اگر اندازهٔ αبعدی X، S باشد، آنگاه اندازهٔ αبعدی X_i، $\lambda_i^\alpha S$ باشد. در این صورت

$$S = \lambda_1^\alpha S + \lambda_2^\alpha S + \cdots + \lambda_n^\alpha S$$

با فرض اینکه $S \neq 0$، $1 = \lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha + \cdots + \lambda_n^\alpha$. حال توجه کنید که طرف راست معادلهٔ اخیر نسبت به α اکیداً نزولی است (با این فرض که $0 < \lambda_i < 1$). در ضمن به ازای $\alpha = 0$، مقدار آن n و به ازای $\alpha = \infty$ مقدار آن صفر است. در نتیجه این معادله دقیقاً یک جواب دارد. بعد فرکتالی برابر جواب این معادله تعریف می‌شود.

البته با توجه به اینکه یک شکل خودمتشابه را به بیش از یک روش می‌توان به اشکال شبیه خودش افراز کرد، خوش‌تعریفیِ بعد فرکتالی نیز باید بررسی شود (به عنوان مثال مجموعهٔ کانتور را می‌توان به یک $\frac{1}{2}$ کانتور و دو $\frac{1}{9}$ کانتور هم افراز کرد.) در حالتی که فرکتال مورد بحث فشرده باشد، می‌توان ثابت کرد که بعد فرکتالی با بعد جعبه‌ای و بعد هاوسدُرف برابر است و در نتیجه، بعد فرکتالی خوش‌تعریف است. در حالت کلی، جواب این سؤال را نمی‌دانم.

نکتهٔ دیگری که در مورد بعد فرکتالی مطرح است این است که اگر یک شکل خودمتشابه شامل شکل خودمتشابه دیگری باشد، آیا بعد فرکتالی اولی بزرگتر یا مساوی بعد فرکتالی دومی است؟

قصد ندارم به این نکات بپردازم. هدفم این بود که بگویم مسألهٔ اول از کجا آمده است.

اکنون توجه کنید که $\mathbb{Z}$ نیز فضایی خودمتشابه است. به عنوان مثال آن را می‌توان به مجموعهٔ اعداد زوج و مجموعهٔ اعداد فرد افراز کرد که هر کدام دو برابر $\mathbb{Z}$ هستند! ($\mathbb{Z} = (2\mathbb{Z}) \cup (2\mathbb{Z}+1)$) اگر برای محاسبهٔ بُعد مانند قبل عمل کنیم باید معادلهٔ زیر را حل کنیم

$$1 = 2^{\alpha} + 2^{\alpha}$$

یعنی بعد فرکتالی $\mathbb{Z}$، $1-$ است!

ناهنجاربودن این جواب از اینجا ناشی می‌شود که $\mathbb{Z}$ فضایی بیکران است و به‌جای استفاده از مفهوم «اندازهٔ αبعدی» برای تعریف بعد باید از «چگالی α بعدی» استفاده کرد. اگر $A \subseteq \mathbb{Z}$، αبعدی باشد و $\lambda \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$، انتظار داریم چگالی αبعدی λA، $\lambda^{-\alpha}$ برابر چگالی αبعدی A باشد. پس برای زیرمجموعه‌های خودمتشابه $\mathbb{Z}$، تعریف بعد به گونه‌ای دیگر است. اگر $\phi \neq A \subseteq \mathbb{Z}$ و $\{b_iA + c_i\}_{i=1}^{n}$ یک افراز آن باشد ($n \geqslant 2$)، جواب معادلهٔ $\sum_{i=1}^{n}|b_i|^{-\alpha} = 1$ را بعد A می‌نامیم.

در اینجا هم دو نکتهٔ مهم وجود دارد، اول خوش‌تعریفی و دوم اینکه اگر $A \subseteq B$ هر دو خودمتشابه باشند آیا بعد A کوچکتر یا مساوی بعد B است؟ اگر کمی صبرکنید، جواب این سؤال را در قسمت «ایدهٔ حل مسألهٔ اول» خواهید دید.

مثال. فرض کنید

$$\Phi = \{n \geqslant 0 \mid \text{بسط دودویی } n \text{ شامل دو یک متوالی نیست}\}$$

به راحتی می‌توان دید که 2Φ و $4\Phi + 1$، Φ را افراز می‌کنند و لذا بعد Φ جواب معادلهٔ زیر است

$$1 = 2^{-\alpha} + 4^{-\alpha}$$

و اگر قرار دهیم $x = 2^{-\alpha}$، داریم، $x > 0$ و $1 = x + x^2$ که به راحتی قابل حل است و خواهیم داشت $\alpha = \frac{\ln\varphi}{\ln 2} \simeq 0{,}694$ بعد Φ، که $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

مسألهٔ اول با همین ایده‌ها تعریف شده است. در واقع اگر Aای که در مسأله آمده αبعدی باشد و ρ چگالی αبعدی آن، امیدواریم که رابطهٔ زیر را داشته باشیم

$$\rho \geqslant \sum_{i=1}^{n}|b_i|^{-\alpha}\rho$$

و با حذف ρ از دو طرف داریم $1 \geqslant \sum_{i=1}^{n}|b_i|^{-\alpha}$. این نامعادله هم‌ارز با این است که بگوییم $\alpha \geqslant \alpha_0$ که α_0 جواب معادلهٔ $1 = \sum_{i=1}^{n}|b_i|^{-\alpha_0}$ است. بعد $\mathbb{Z}$ یک است و با توجه به اینکه $A \subseteq \mathbb{Z}$، احساس می‌کنیم که بعد A نمی‌تواند بیشتر از یک باشد؛ و این یعنی اینکه $\alpha_0 \leqslant 1$. نابرابری اخیر هم دقیقاً هنگامی برقرار است که $1 \geqslant \sum_{i=1}^{n}|b_i|^{-1}$؛ و می‌بینید که مسألهٔ اول طرح شد. تنها کاری که باقی‌مانده، این است که آن را حل کنیم. این قسمت را هم به بعد از مطرح‌کردن مسألهٔ دوم موکول می‌کنم.

مسألهٔ دوم ...

ببخشید! ترجیح می‌دهم برخلاف مسألهٔ اول، صورت مسألهٔ دوم را بعد از طرح ایده‌هایش بیان کنم.

ایدهٔ طرح مسألهٔ دوم

اگر X یک متغیر تصادفی باشد، می‌دانیم که $E(X^2) \geqslant E(X)^2$ (منظور از E، امید ریاضی است). یک برهان ساده برای این نابرابری این است: $0 \leqslant E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$.

قبل از ادامهٔ بحث شاید لازم باشد که بگویم موضوع مسألهٔ دوم ربطی به احتمال ندارد و استفاده از نماد E تنها برای ساده‌نویسیِ نابرابریهایی است که می‌خواهم در مورد آنها صحبت کنم.

نابرابری‌ای را که در ابتدا مطرح کردم می‌توان به صورت زیر هم نوشت

$$E(X)^{-2}E(X^2) \geqslant 1$$

و با این کار این مسأله مطرح می‌شود که تمام نابرابریهای به شکل زیر شناسایی شوند

$$E(X)^{a_1}E(X^2)^{a_2}\dots E(X^n)^{a_n} \geqslant 1$$

که a_iها اعدادی حقیقی‌اند. برای اینکه مشکل به‌توان رساندن عدد منفی پیش نیاید فرض می‌کنیم که X متغیری همیشه مثبت است.

پس هدف ما یافتن همه دنباله‌های nتایی $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ از اعداد حقیقی است که برای هر متغیر تصادفی مثبت X داشته باشیم: $\prod_{i=1}^{n} E(X^i)^{a_i} \geqslant 1$ (البته با این فرض که $E(X^i)$ به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ تعریف شده باشد.)

صورت واقعی مسألهٔ دوم همین است که ذکر شد، ولی با توجه به اینکه چنین مسأله‌ای حاوی هیچ حکمی برای اثبات نیست، بهتر است جواب سؤال را پیدا کنیم و سپس مسأله، اثبات‌کردن حکمی مشخص باشد.

تعریف می‌کنیم

$$V = \left\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \text{برای هر } X > 0\text{،} \prod_{i=1}^{n} E(X^i)^{a_i} \geqslant 1\right\}$$

به‌راحتی می‌توان دید که V دارای دو خاصیت زیر است:

i) اگر $a, b \in V$ آنگاه $a + b \in V$.

ii) اگر $a \in V$ و $\lambda \geqslant 0$ آنگاه $\lambda a \in V$.

خاصیت اول از اینجا ناشی می‌شود که حاصلضرب دو عدد بزرگتر از یک، بزرگتر از یک است و خاصیت دوم به این دلیل برقرار است که اگر عددی بزرگتر از یک به توانی مثبت برسد باز هم بزرگتر از یک خواهد بود.

این دو خاصیت نشان می‌دهد که V مخروطی محدب در $\mathbb{R}^n$ است. اگر مقطع این مخروط چندضلعی باشد آنگاه اعضای V همه به‌صورت ترکیب خطی مثبت تعدادی متناهی از اعضای V خواهند بود. در هر صورت، مشخص‌کردن نقاط لبه‌ای V مفید است.

به کمک نابرابری کوشی-شوارتس می‌توان دید که به‌ازای هر $k \in \mathbb{N}$ و هر $X > 0$ نابرابری زیر برقرار است

$$E(X^{k-1})E(X^{k+1}) \geqslant E(X^k)^2$$

یعنی اگر u_k را برابر بردار $(0, 0, \ldots, 0, 1, -2, 1, 0, \ldots, 0, 0)$ بگیریم داریم $u_k \in V$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$، و u_1 را برابر $(-2, 1, 0, \ldots, 0, 0)$ تعریف می‌کنیم).

اکنون ادعا می‌کنم که این $n-1$ بردار در واقع مولد V هستند، یعنی اگر $a \in V$ آنگاه $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1} \geqslant 0$ وجود دارد که $a = \Sigma_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i$.

بهتر است ابتدا بررسی کنیم که تحت چه شرایطی a را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی نامنفی‌ای از u_iها نوشت. به‌راحتی می‌توان دید که $\{u_i\}_{i=1}^{n-1}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی است. این مجموعهٔ مستقل در واقع پایه‌ای برای فضای عمود بر بردار $(1, 2, 3, \ldots, n)$ است. پس شرط لازم برای اینکه a ترکیب خطی نامنفی u_iها باشد این است که بر این بردار عمود باشد، یعنی $\Sigma_{i=1}^{n-1} i a_i = 0$. اگر دستگاه $a = \lambda u$ را حل کنیم، جوابها به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$\lambda_{n-1} = a_n$$

$$\lambda_{n-2} = a_{n-1} + 2a_n$$

$$\lambda_{n-3} = a_{n-2} + 2a_{n-1} + 3a_n$$

و به همین ترتیب $\lambda_{n-k} = a_{n-k+1} + 2a_{n-k+2} + \cdots + ka_n$.

مسألهٔ دوم. اگر $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$، نشان دهید دو گزارهٔ زیر معادل‌اند.

i) برای هر متغیر تصادفی مثبت و متناهی X، $\prod_{i=1}^{n} E(X^i)^{a_i} \geqslant 1$.

ii) $\Sigma_{i=1}^{n} i a_i = 0$ و به‌ازای $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$

$$\sum_{i=1}^{k} i a_{n-k+i} \geqslant 0$$

در واقع نه تنها تمام نابرابریهای به‌صورت $\prod E(X^i)^{a_i} \geqslant 1$ شناسایی شدند بلکه هر نابرابری به این صورت را می‌توان با ضرب توانهای مثبت مناسبی از نابرابریهای سادهٔ $E(X^{k-1})E(X^{k+1}) \geqslant E(X^k)^2$ به‌دست آورد.

حل مسأله‌ها

ایدهٔ حل مسألهٔ اول. به‌ازای هر $S \subseteq \mathbb{Z}$، تابع $N_S : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{Z}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$N_S(x) = \#(S \cap [-x, x])$$

(منظور از $\#A$، تعداد اعضای مجموعهٔ A است.)

با توجه به سرعت رشد تابع N_S می‌توان برای S، بعد تعریف کرد. یعنی اگر $N_S(x) = O(x^\alpha)$، α را برابر بعد S می‌گیریم. به طور دقیقتر

$$\text{بعد}\, S := \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\ln N_S(x)}{\ln x}$$

واضح است که به ازای هر $S \subseteq \mathbb{Z}$ و هر $x \in \mathbb{R}^+$، $N_S(x) \leqslant 2x + 1$. در نتیجه $\text{بعد}\, S \leqslant 1$. می‌توان ثابت کرد که این تعریف بعد، با بعد فرکتالی سازگار است.

حل مسألهٔ اول. گیریم $A_i = b_i A + c_i$، $N(x) = N_A(x)$ و $N_i(x) = N_{A_i}(x)$. با توجه به فرض مسأله داریم

$$N(x) \geqslant \sum_{i=1}^{n} N_i(x)$$

به راحتی می‌توان دید که

$$N_i(x) \geqslant N\left(\frac{x - |c_i|}{|b_i|}\right)$$

و اگر u را عددی بزرگتر از $\frac{|c_i|}{|b_i|}$ بگیریم خواهیم داشت

$$N(x) \geqslant \sum_{i=1}^{n} N\left(\frac{x}{|b_i|} - u\right) \qquad (*)$$

اکنون فرض کنید حکم مسأله غلط باشد، یعنی $\Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{|b_i|} > 1$. در این صورت $\alpha > 1$ای وجود دارد که $\Sigma \frac{1}{|b_i|^\alpha} > 1$. تابع $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(x) = x^{-\alpha} N(x)$$

با جایگذاری در $(*)$ خواهیم داشت

$$f(x) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{|b_i|} - \frac{u}{x}\right)^\alpha f\left(\frac{x}{|b_i|} - x\right) \qquad (**)$$

$M > 0$ وجود دارد که برای هر $x \geqslant M$، $N(x) \geqslant 1$، $\Sigma_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{|b_i|} - \frac{u}{x}\right)^\alpha > 1$ و برای هر i داشته باشیم، $\frac{x}{|b_i|} - u > 0$.

بدون از دست دادن کلیت، می‌توان فرض کرد $|b_1| \leqslant |b_2| \leqslant \ldots \leqslant |b_n|$. دنبالهٔ $\{x_m\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x_0 = |b_n|(M + u)$$

$$x_{m+1} = |b_1|(x_m + u), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

به کمک استقرا نشان می‌دهیم به ازای هر $x \in [M, x_m]$، $f(x) \geqslant x_0^{-\alpha}$. به ازای $m = 0$، $x \in [M, x_0]$،

$$f(x) = x^{-\alpha} N(x) \geqslant x^{-\alpha} \geqslant x_0^{-\alpha}$$

اکنون فرض کنید حکم برای m درست است و $x \in [x_m, x_{m+1}]$. به ازای هر i

$$\frac{x}{|b_i|} - u \in \left[\frac{x_m}{|b_i|} - u, \frac{x_{m+1}}{|b_i|} - u\right]$$

و این در حالی است که

$$\left[\frac{x_m}{|b_i|} - u, \frac{x_{m+1}}{|b_i|} - u\right] \subseteq \left[\frac{x_0}{|b_n|} - u, \frac{x_{m+1}}{|b_1|} - u\right]$$
$$= \left[\frac{x_0}{|b_n|} - u, x_m\right] \subseteq [M, x_m]$$

و با توجه به فرض استقرا، به‌ازای هر i داریم

$$f\left(\frac{x}{|b_i|} - u\right) \geqslant x_0^{-\alpha}$$

این نابرابریها به علاوهٔ (**) نتیجه می‌دهد که

$$f(x) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{|b_i|} - \frac{u}{x}\right)^{\alpha} x_0^{-\alpha} \geqslant x_0^{-\alpha}$$

و با توجه به اینکه $\{x_m\}$ یک دنبالهٔ بیکران است، به‌ازای هر $x \geqslant M$ داریم $f(x) \geqslant x_0^{-\alpha}$ و در نتیجه $2x + 1 \geqslant N(x) \geqslant x_0^{-\alpha} x^{\alpha}$. این نابرابری تنها در صورتی می‌تواند درست باشد که $\alpha \leqslant 1$ و این تناقض است.

حل مسألهٔ دوم. ابتدا نشان می‌دهیم که a در فضای تولیدشده توسط $\{u_i\}_{i=1}^{n-1}$ است. برای این کار کافی است X را ثابت و دارای مقدار $t > 0$ فرض کنیم. در این صورت به ازای هر i داریم $E(X^i) = t^i$ و نابرابری به ازای هر $t > 0$ به صورت زیر در می‌آید

$$\prod_{i=1}^{n} (t^i)^{a_i} = t^{\sum_{i=1}^{n} i a_i} \geqslant 1$$

و این نابرابری تنها در صورتی می‌تواند برقرار باشد که توان t یعنی $\Sigma_{i=1}^{n} i a_i$ صفر باشد. در نتیجه a بر بردار $(1, 2, 3, \ldots, n)$ عمود است و لذا اعداد حقیقی λ_1، λ_2، ...، λ_{n-1} موجودند که $a = \Sigma_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i$. پس نابرابری، به صورت زیر در می‌آید

$$\prod_{i=1}^{n-1} (E(X^{i-1}) E(X^i)^{-2} E(X^{i+1}))^{\lambda_i} \geqslant 1$$

باید نشان دهیم همه λ_iها نامنفی‌اند. فرض کنید چنین نباشد، مثلاً $\lambda_k < 0$. λ را بزرگتر از همهٔ λ_iها بگیرید. با توجه به اینکه برای هر i $E(X^{i-1}) E(X^i)^{-2} E(X^{i+1}) \geqslant 1$، نابرابری زیر هم برقرار است.

$$\prod_{i \neq k} (E(X^{i-1}) E(x^i)^{-2} E(X^{i+1}))^{\lambda} \geqslant$$
$$(E(X^{k-1}) E(X^k)^{-2}) E(X^{k+1}))^{-\lambda_k}$$

و به عبارت دیگر

$$\left[\prod_{i=1}^{n-1} (E(X^{i-1}) E(X^i)^{-2} E(X^{i+1}))\right]^{\lambda} \geqslant$$
$$(E(X^{k-1}) E(X^k)^{-2} E(X^{k+1}))^{\lambda - \lambda_k}$$

عبارت داخل کروشه ساده می‌شود و اگر α را برابر $\frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda}$ بگیریم، خواهیم داشت $\alpha > 1$ (زیرا $\lambda_k < 0$) و

$$E(X)^{-1} E(X^{n-1})^{-1} E(X^n) \geqslant$$
$$(E(X^{k-1}) E(X^k)^{-2} E(X^{k+1}))^{\alpha}$$

طرفین نابرابری هر دو بزرگتر از یک هستند مگر اینکه X ثابت باشد. از دو طرف لگاریتم می‌گیریم و تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{\ln(E(X)^{-1} E(X^{n-1})^{-1} E(X^n))}{\ln(E(X^{k-1}) E(X^k)^{-2} E(X^{k+1}))} \geqslant \alpha > 1$$

اکنون به جای X متغیری تصادفی به صورت زیر قرار می‌دهیم

$$X = \begin{cases} t & \text{به احتمال } p \\ 1 & \text{به احتمال } 1 - p \end{cases}$$

که $t > 2$ و $0 < p < 1$. در این صورت $E(X^i) = pt^i + 1 - p$. اگر p را برابر $\frac{1}{t^k - 2}$ قرار دهیم آنگاه $0 < p < 1$ و درضمن $E(X^k) = 2$. اکنون نابرابری (*) را به ازای X تعریف‌شده در بالا می‌نویسیم و کمی آن را ساده می‌کنیم.

$$\ln\left(\frac{(t^n + t^k - 2)(t^n - 1)}{(t + t^k - 2)(t^{n-1} + t^k - 2)}\right) /$$
$$\ln\left(\frac{(t^{k+1} + t^k - 2)(t^{k-1} + t^k - 2)}{4(t^k - 1)^2}\right) \geqslant \alpha > 1 \qquad (**)$$

عبارت سمت چپ را از بالا تقریب می‌زنیم:

$$\ln\left(\frac{(t^n + t^k - 2)(t^k - 1)}{(t + t^k - 2)(t^{n-1} + t^k - 2)}\right) /$$
$$\ln\left(\frac{(t^{k-1} + t^k - 2)(t^{k+1} + t^k - 2)}{4(t^k - 1)^2}\right)$$
$$\leqslant \ln\left(\frac{(2t^n)(t^k)}{(t^k)(t^{n-1})}\right) / \ln\left(\frac{(t^k)(t^{k+1})}{4t^{2k}}\right) = \ln(2t) / \ln\left(\frac{t}{4}\right)$$

پس طبق (**) به‌ازای هر $t > 2$ داریم

$$\ln(2t) / \ln\left(\frac{t}{4}\right) \geqslant \alpha > 1$$

و این نابرابری به وضوح به ازای tهای به اندازهٔ کافی بزرگ غلط است. زیرا حد سمت چپ وقتی $t \to \infty$، برابر یک است.

******

* امید نقشینه ارجمند، دانشگاه صنعتی شریف

Naghshineh@mehr.sharif.edu

نشر ریاضی، سال ۱۳، شمارهٔ ۲، صص. ۶۱-۶۴

نقد و بررسی

دنیا از نگاه «ذهنی زیبا»

پدرام صفری*

در چند سال اخیر تعدادی فیلم سینمایی، نمایش و آثار هنری دیگر در مورد دانشمندان و به‌ویژه ریاضیدانان بر فهرست این‌گونه آثار افزوده شده‌اند که نسبت به آثار قبلی در مجموع از کیفیت بهتری نیز برخوردارند. نمایشهای Copenhagen، QED و Proof، که برخی هنوز برروی صحنه‌اند، و فیلمهای Good Will Hunting و A Beautiful Mind از این جمله‌اند. این آثار، به‌خصوص فیلمها، از آنجا که مخاطبان عام دارند، حساسیتهای ویژه‌ای را در میان اهل فن برمی‌انگیزند. موافقان این‌گونه آثار از عمومی‌سازی و مردمی‌ترشدن حرفهٔ تخصصی خود ــ که زبان بسیار پیچیده‌ای برای عوام دارد ــ ابراز رضایت می‌کنند. از نظر این عده، ساده‌سازیهای ریاضی رایج در فیلمها امری است مطلوب که باعث شکسته‌شدن «تابو»ی ریاضی و جذابتر کردن این علم می‌شود. از سوی دیگر، الگوسازی ساده‌انگارانه و نادقیق از ریاضیدانان و حرفهٔ ریاضی مورد اعتراض مخالفان است و ــ اگر پیش بیاید ــ اشتباهات ریاضی فیلم را هم به رخ سازندگان آن می‌کشند.

جان نَش، بازیگر نقش او و کارگردان فیلم

در این میان، فیلم «ذهن زیبا» به دلیل چهار جایزهٔ اسکاری که به دست آورده، بیش از دیگر فیلمها مورد بحث و تضارب آرا قرار گرفته است. در این فیلم، جان نَش که دانشجوی دورهٔ دکتری ریاضی در دانشگاه پرینستن است، پس از کشف ناگهانی ایده‌ای جذاب که به رسالهٔ دکتری او منجر می‌شود، به همکاری با وزارت دفاع امریکا برای گشودن رمز پیامهای سری روسها (در دوران جنگ سرد) دعوت می‌شود و با یک مأمور سری در تماس مداوم قرار می‌گیرد. این همکاری با جزئیات در فیلم تشریح می‌شود و در طی فیلم تعمیق پیدا می‌کند. در این حین، جان با یکی از دانشجویانش به نام آلیشیا آشنا می‌شود و ازدواج می‌کند. بیننده با دیدن حادثه‌ای که برای جان نَش اتفاق می‌افتد بالاخره درمی‌یابد که همکاری او با وزارت دفاع امریکا در واقع محصول اوهام نش بوده است. مابقی فیلم به مراحل درمان، کشمکشهای درونی نش برای مبارزه با بیماری روانی خود و نقش مؤثر آلیشیا در درمان و کمک به خود آگاهی جان اختصاص دارد.

پس از مشاهدهٔ فیلم مشخص می‌شود که فیلم به زندگانی جان نش، نه

برخی از مشخصات فیلم

نام فیلم: ذهن زیبا	A Beautiful Mind
کارگردان: ران هوارد	Ron Howard
فیلمنامه‌نویس: آکیوا گُلدسمن	Akiva Goldsman
براساس کتاب ذهن زیبا اثر سیلویا نَسَر	*A Beautiful Mind* by Sylvia Nasar
مشاور علمی (ریاضی): دیوید بیر	David Bayer
بازیگر نقش اول مرد: راسل کرو (نش)	Russell Crowe (John Nash)
بازیگر نقش دوم زن: جنیفر کانلی (آلیشیا)	Jennifer Connelly (Alicia Larde)
تهیه‌کننده: برایان گریزر	Brian Grazer
محصول یونیورسال استودیوز و دریم‌وورکز	Universal Studios & Dreamworks
نشانی اینترنتی:	http://www.abeautifulmind.com/
سایت مربوط:	http://www.countingdown.com/beautifulmind/
گونهٔ هنری: درام	drama
زیر ۱۳ سال، همراه با والدین	Rating: PG-13

به عنوان یک ریاضیدان و از منظر ریاضی، بلکه به عنوان موردی از بیماری اسکیزوفرنی و از منظر روانشناسانه پرداخته است. بیننده دنیا را از چشمان جان نش می‌بیند و تمام اوهامش را همچون خود او واقعی می‌پندارد: تنها چشمان تیزبین یک بینندهٔ دقیق و موشکاف ممکن است نشانه‌های بیماری او را که کارگردان عمداً و به طور بسیار ظریفی در طول فیلم جاسازی کرده است برداشت کند؛ دیدن مجدد فیلم این نکات ریز تصویری را نمایان می‌کند.

نکتهٔ قابل توجه دیگر این است که این فیلم چندان بر اساس واقعیات زندگی نش نیست، بلکه فقط روح و سیر کلی زندگی او را در بر دارد. به قول آکیوا گُلدسمَن نویسندهٔ فیلمنامه:

> «آنچه در اینجا [ارائه] می‌کنیم نمایش مو به‌موی زندگی جان نَش نیست، داستانی است که از زندگی جان نَش الهام گرفته است. پس به این امیدیم که نوعی سیر روحی را بازآفرینیم که یادآور سیر روحی جان و آلیشیا باشد. به این معنی، این [داستان] حقیقی است ــ امیدواریم این طور باشد ــ ولی بر مبنای اتفاقات واقعی نیست. از نظر من این به منزلهٔ اخذِ خط کلی زندگی او و فراز و نشیبهای آن بود، و استفاده از آن به عنوان نوعی استخوان‌بندی، و پوشاندن آن با صحنه‌ها و روابط ساختگی، تا داستانی حقیقی ولی تا حدودی استعاری را روایت کنیم.» [۲]

و این نظر گُلدسمن به واقع در فیلمنامه منعکس شده است. قسمتی از اتفاقات فیلم واقعیت تاریخی یا مبنای علمی ندارند. دوران همکاری نش با مؤسسهٔ رَند[1] در رمزگشایی برای وزارت دفاع امریکا دورانی بسیار کوتاه بوده و چنین نقش عمده‌ای را که در فیلم دیده می‌شود در زندگانی نَش ایفا نکرده است. علاوه بر این گرچه نش هوادار کمونیسم نبوده ولی طرفدار جنگ سرد هم نبوده و بیشتر به تحقیقات ریاضی خود علاقه‌مند بوده است. وی حتی زمانی معتقد به «دولت جهانی» بوده و سعی در مهاجرت به اروپا و سلب تابعیت امریکا از خود کرده است. بنابراین همکاری نش با وزارت دفاع امریکا علیه روسها (حتی در اوهام) غیر محتمل به نظر می‌رسد.

از نظر علم روانشناسی، نشانهٔ بیماری اسکیزوفرنی، عمدتاً توهمات شنوایی است نه بینایی. نَش در دوران بیماری خود صداهایی را می‌شنیده است و از آنها به عنوان پیامهای موجودات ماوراء طبیعی تعبیر می‌کرده است. فیلم با ابداع شخصیتها و اتفاقات ساختگی، تجربهٔ بیماری نَش را دگرگون کرده است. همچنین، بر اساس کتاب سیلویا نَسَر، نَش شخصیتی غیرعادی، مغرور و خودمحور داشته است، در حالی که فیلم تنها شخصیت غیر اجتماعی، دارای اعتمادبه‌نفس و خودآگاه او را ارائه می‌دهد. از سوی دیگر، فیلم به بسیاری از دستاوردهای ریاضی جان نش یا حتی برخی وقایع قابل توجه زندگی او اشاره نکرده است. (معرفی جان نَش در صفحهٔ بعد را ببینید.)

اظهارنظر گُلدسمَن پاسخی به تمام این ایرادهاست. این درست است که فیلم فقط به جنبهٔ روحی و روانشناسانهٔ زندگی نَش پرداخته است، و حتی در این مورد هم رعایت دقت تاریخی را نکرده است، اما ادعای مستند بودن را هم نکرده است. اتفاقاً این فیلم سینمایی در ارتباط با مخاطب موفق بوده است. برخلاف غالب فیلمهای هالیوودی، کشش فیلم به خاطر سکس، خشونت یا جلوه‌های ویژه نیست، بلکه ماهیتی انسانی دارد. تماشاگر در جایگاه شخصیتهای داستان قرار می‌گیرد، با آنان همدلی می‌کند و با احساسات آنها شریک می‌شود. بیننده همانند خودِ جان نش و اطرافیانش از بیماری او بی‌خبر است، مانند او مرزی بین توهمات و واقعیات قایل نیست، و با کشف

1. RAND

نگاهی به زندگی جان نَش

جان نش در سال ۱۹۲۸ در شهر کوچک بلومفیلد در ایالت وِست ویرجینیای آمریکا به‌دنیا آمد. وی تحصیلات پیش از دانشگاهی خود را در آن شهر گذراند و برای تحصیل دانشگاهی به مؤسسهٔ تکنولوژی کارنگی (امروز دانشگاه کارنگی‌ـملون) در شهر پیتسبرگ وارد شد. نخست به تحصیل در رشتهٔ مهندسی شیمی پرداخت، سپس به شیمی و بالاخره، به تشویق استادان، به رشتهٔ ریاضی روی آورد. نش برای ادامهٔ تحصیل در دورهٔ دکتری به دانشگاه پرینستن رفت. رسالهٔ دکتری او در زمینهٔ بازیهای «ناهمدستانه» آغاز فصل جدیدی در نظریهٔ بازیها و کاربرد ریاضیات در مسائل اقتصاد، زیست‌شناسی تکاملی و سایر مباحثی است که در آنها رقابت میان بیش از دو عامل سیر تحول دستگاه را معین می‌کند. به خاطر اهمیت این کار بود که نش در سال ۱۹۹۴ جایزهٔ نوبل اقتصاد را به اشتراک دریافت کرد. وی همزمان قضیهٔ مهمی در توپولوژی خمینه‌ها ثابت کرد حاکی از آنکه هر خمینهٔ kبعدی هموار فشرده با یک مؤلفهٔ همبندی از یک واریتهٔ جبری حقیقی در $\mathbb{R}^{2k+1}$ به‌طور هموار همسانریخت است. در دورهٔ هشت‌سالهٔ ۵۸ـ۱۹۵۰، شامل دوران دانشجویی در پرینستن و سپس اشتغال در ام. آی. تی، نش چند اثر بسیار عمیق و دورانساز پدید آورد که او را به‌عنوان یکی از درخشانترین چهره‌های جوانِ ریاضیاتِ آن زمان مشهور ساخت. از آخر این دوره یعنی در سن سی سالگی، به‌علت شدت بیماری روانی به‌مدت حدود سی و پنج سال به بیمارستان و انزوا کشانده شد هر چند که چند بار بهبود موقت به وی فرصت داد سه اثر قابل‌توجه دیگر عرضه کند. از اوایل دههٔ ۱۹۹۰ بهبود قابل ملاحظه‌ای در وضعیت روانی نش پدید آمد و به نظر می‌رسد اکنون از سلامت کامل برخوردار باشد.

به‌زعم اکثر ریاضیدانان، مهمترین و دشوارترین کار ریاضی نش قضیهٔ نشاندن هموار ایزومتریک خمینه‌ها در فضای اقلیدسی است که در سال ۱۹۵۶ به‌چاپ رسید و سپس با همکاری نش با یورگن موزر، این قضیه به قضیهٔ کلی تابع ضمنی نش‌ـموزر منجر شد. کارِ تاریخساز دیگرِ نش، اثبات قضایای اساسی معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی از نوع سهموی و بیضوی است که همزمان و به‌طور مستقل، به روشهایی کاملاً متفاوت، به دست نش در آمریکا و دی جُرجیْ در ایتالیا صورت گرفت. نش در زندگینامهٔ خودنوشتش به مناسبت دریافت جایزهٔ نوبل [۸، انتهای مقاله] می‌گوید که اگر یکی از این دو ریاضیدان در این کار شکست‌خورده بود، احتمالاً آن دیگری به‌خاطر این‌کار مدال فیلدز را دریافت می‌کرد. گویا ناخشنودی نش از دریافت‌نکردن مدال فیلدز در سال ۱۹۵۸، به تعویق افتادن ارتقای او به استادی کامل در ام. آی. تی. به‌سبب نارضایی دانشجویان از شیوهٔ تدریس وی، و نیز ماجراها و تلاطمهای متعدد در زندگی شخصی او، همه در بروز بیماری روانیش نقش داشته‌اند.

فهرست آثار نَش

1. "Equilibrium points in n-person games", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **36** (1950) 48-49.
2. "The bargaining problem", *Econometrica* **18** (1950) 155-162. (در دورهٔ دانشجویی کارشناسی در مؤسسهٔ تکنولوژی کارنگی نوشته است.)
3. "Non-cooperative games", *Ann. Math.* **54** (1951) 286-295.
4. "Real algebraic manifolds", *Ann. Math.* **56** (1952) 405-421.
5. "Two-person cooperative games", *Econometrica* **21** (1953) 128-140.
6. "Some experimental n-person games" (with C. Kalisch, J. Milnor and E. Nering), *Decision Processes* (R. M. Thrall, C. H. Coombs, and R. L. Davis, eds.), New York: Wiley (1954).
7. "C^1-isometric imbeddings", *Ann. Math.* **60** (1954) 383-396. [نیز → *Bull. Amer. Math. Soc.* **60** (1954) 157.]
8. "Results on continuation and uniqueness of fluid flow", *Bull. Am. Math. Soc.* **60** (1954) 165-166.
9. "A path space and the Stiefel-Whitney classes", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **41** (1955) 320-321.
10. "The imbedding problem for Riemannian manifolds", *Ann. Math.* **63** (1956) 20-63. [نیز → *Bull. Am. Math. Soc.* **60** (1954) 480.]
11. "Parabolic equations", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **43** (1937) 754-758.
12. "Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations", *Am. J. Math.* **80** (1958) 931-954.
13. "Le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'un fluide général", *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962) 487-497.
14. "Analyticity of the solutions of implicit function problems with analytic data", *Ann. Math.* **84** (1966) 345-355.
15. "Arc structure of singularities", *Duke Math. J.* (1) **81** (1995) 31-38.

س. ش.

بیماری مانندِ خودِ نش به مرورِ گذشته و سعی در تشخیص واقعی از غیر واقعی می‌پردازد، در درمان او با دکتر همراهی و با آلیشیا همدردی می‌کند، در رنج جان شریک می‌شود و با استدلال خردمندانهٔ او در رد توهماتش ــ «اینها پیر نمی‌شوند» ــ به وجد می‌آید. اینها انصافاً تصویری (گرچه استعاری) از آنچه را واقع شده به نمایش می‌گذارد. به قول لین باتلر، فیلم «ذهن زیبا» دوگانی و تعامل ذهن و دل را در زندگی نش نشان می‌دهد: عشق ماجرای دو موفقیت در زندگی جان را به هم مرتبط می‌سازد: در اولی [موفقیت در دورهٔ دکتری] تفکر از احساس [باندپروازی] نیرو می‌گیرد؛ در دومی [نجات از اسکیزوفرنی] احساس به وسیلهٔ تفکر [ارزیابی صادقانه از خود] هدایت می‌شود [۱]. بازی روزگار در زندگانی جان نش کاملاً قابل توجه است. او که در رسالهٔ دکتری خود، استراتژیهای بهینهٔ بازیگران هوشمند و عاقل را در بازیهای «ناهمدستانه[1]» مورد بررسی قرار می‌دهد، خود در معرض بازی روزگار قرار می‌گیرد، ولی نه به عنوان یک بازیگر دارای قوهٔ تعقل. نظریهٔ او در چنین شرایطی قادر به تدوین یک استراتژی برای نظریه‌پردازش نیست. بالاخره ریاضتِ ذهنی نش و بازگشت قوهٔ عقلانی است که به نجات او می‌آید و او را به بازی زندگی بر می‌گرداند.

زحمات زیادی برای ساختن فیلم «ذهن زیبا» کشیده شده است. فیلمنامه به قلم یک فیلمنامه‌نویس با تجربه و با اقتباس از اثر محققانهٔ سیلویا نَسَر با همین عنوان نوشته شده است. صحنه‌های فیلم با وسواس و برداشتهای فراوان فیلم‌برداری شده‌اند. نورپردازی فیلم هنرمندانه و بازی درخشان راسل کرو در نقش جان نش قابل توجه است. راسل کرو برای درونی کردن نقشِ خود، حتی لازم دیده قضیه‌های نش را از زبان خود او بشنود و بفهمد. با وجود اینکه فیلم، کشف نظریهٔ بازیهای ناهمدستانه را به جرقه‌ای آنی در ذهن نَش در جریان رقابت برای جلب دختران تقلیل داده است، ولی در عین حال در بیان ساده و همه فهم این نظریه برای مخاطبان عام موفق بوده است، بی‌آنکه دچار بی‌دقتیهای معمول و عوامانه شود. علاوه بر این، تصور عمومی از ریاضیدان ــ یعنی موجود حواس‌پرتی که ذهنش فقط با ارقام و اعداد مشغول است ــ را در هم می‌ریزد و نشان می‌دهد که ریاضیات می‌تواند به جنبه‌های دیگری از زندگی هم مربوط باشد. همچنین فیلم، با وجود تحریف واقعیات بیماری اسکیزوفرنی، درکی همدلانه از آن ایجاد می‌کند بدون آنکه به طور مبتذلی ترحم بیننده را برانگیزد. از این لحاظ فیلم رسالتی فراتر از روایت زندگی یک فرد را ایفا می‌کند، به بیننده نسبت به این بیماری آگاهی می‌دهد و سؤالات فلسفی برمی‌انگیزد.

با تمام این تفاصیل، به این فیلم ــ همان‌طور که جان میلنر در نقد خود بر کتاب نَسَر اشاره کرده است [۶] ــ یک ایراد اساسی وارد است. فیلم جنبه‌هایی کاملاً شخصی از زندگی فردی را به تصویر کشیده است که حتی خود او صراحتاً از بیان جزئیات آن در زندگینامهٔ خودنوشت کوتاه ولی خواندنی خود ابا می‌ورزد [۸]. با وجودی که فیلمسازان از همکاری خود جان نَش برای ساختن فیلمشان بهره برده‌اند و حقوق مادیش را پرداخته‌اند، اما اصولاً موافقت او را برای اینکه فیلمی درباره‌اش بسازند جلب نکرده‌اند. هرچند هم که کارگردان و فیلمنامه‌نویس بر تخیلی‌بودن این داستان تأکید کنند، باز صدای فیلم بلندتر از صدای فیلمساز آن است. بیننده پیش‌فرضی دارد مبنی بر اینکه داستان زندگی جان نَش برای او روایت می‌شود و در هیچ جای فیلم این فرض رد نمی‌شود. بنابراین فیلمساز مسلماً از شهرت جان نش به عنوان ریاضیدانی معروف و برندهٔ جایزهٔ نوبل استفاده کرده است.

1. non-cooperative

در پایان، نظر خود جان نش را دربارهٔ این فیلم بخوانیم. او پس از دیدن پیش‌ـنمایش فیلم (قبل از اکران عمومی) دربارهٔ آن می‌گوید:

> «این من نیستم. اما از سوی دیگر، چیزهای زیادی [در این فیلم] هست که به تاریخ زندگی من مربوط است .... [این فیلم] خیلی تخیلی است، و این به نوعی مرا آسوده‌تر می‌کند .... در مجموع از نظر روانی پریشان‌کننده بود، اما وقتی توانستم با کمی «فاصله» [به عنوان ناظر] به آن فکر کنم چیزی متفاوت بود .... اکنون که [فیلم] ساخته شده است، می‌خواهم که موفق باشد ... فکر می‌کنم که سرگرم‌کننده و جالب خواهد بود.» [۹]

مراجع

1. Lynne M. Butler, "A beautiful mind" (film review), *Notices Amer. Math. Soc.*, (4) **49** (April 2002) 455-457.
2. Keith Devlin, "A beautiful mind" (film review), Devlin's Angle, (Dec. 2001).
   http://www.maa.org/devlin/devlin_12_01.html
3. Harold Kuhn and Sylvia Nasar (eds.), *The Essential John Nash*, Princeton University Press (2002).
4. Dennis Lim, "The rules of the game" (film review), *The Village Voice*, (Dec. 19-25, 2001).
   http://www.villagevoice.com/issues/0151/lim.php
5. John Milnor, "A Nobel prize for John Nash", *Math. Intelligencer*, (3) **17** (1995) 11-17.
6. John Milnor, "John Nash and 'A beautiful mind' " (book review), *Notices Amer. Math. Soc.*, (10) **45** (Nov. 1998) 1329-1332.
7. Sylvia Nasar, *A Beautiful Mind*, Simon and Schuster (1998).
8. John F. Nash, Jr., "Autobiography", Les Prix Nobel 1994.
   http://www.nobel.se/economics/laureates/1994/nash-autobio.html
9. Steven Schultz, "Second career begins where movie ends for John Nash", *Princeton Weekly Bulletin*, (12) **91** (Dec. 10, 2001).
   http://www.princeton.edu/pr/pwb/01/1210/1b.shtml
10. A. O. Scott, "From math to madness, and back" (movie review), *New York Times* (Dec. 21, 2001).
    http://www.nytimes.com/2001/12/21/movies/21MIND.html
11. Simon Singh, "Between genius and madness" (book review), *New York Times* (June 14,1998).
    http://www.nytimes.com/books/98/06/14/reviews/980614.14singht.html

* * * * * *

* پدرام صفری، پژوهشگاه دانشهای بنیادی
safari@ipm.ir

NASHR-E RIYĀZI

Volume 13, Numbers 2, October 2002

Nashr-e Riyāzi **is a Persian-language, expository mathematics journal published biannually (in April and October) by Iran University Press.**

Annual subscription rates (including airmail postage) are: Middle East £ 19, Europe & Asia £ 21, North America & Far East £ 26.

For more information write to Iran University Press, 85 Park Avenue, Tehrān 15134, Iran, or contact (nashriaz@acnet.ir).

CONTENTS

* An asterisk indicates that the article was originally published elsewhere. Complete address of the original article appears at the end of the article.

ISSN: 1015-2857

کتابهای آنالیزی مرکز نشر دانشگاهی

- **آنالیز مختلط و کاربردهای آن (چاپ سوم)**
  ریچارد ا. سیلورمن
  ترجمهٔ علی عمیدی، خلیل پاریاب
- **توابع متغیر مختلط**
  د. ا. تال
  ترجمهٔ مجید محمدزاده
- **متغیرهای مختلط و کاربردها**
  جیمز وارد براون، روئل و. چرچیل
  ترجمهٔ امیر خسروی
- **اصول آنالیز حقیقی (چاپ سوم)**
  روبرت جی. بارتل
  ترجمهٔ جعفر زعفرانی
- **روشهای آنالیز حقیقی**
  ریچارد گولدبرگ
  ترجمهٔ محمدعلی پورعبدالله‌نژاد، باقر نشوادیان
- **تابع گاما**
  امیل آرتین
  ترجمهٔ سعید ذاکری