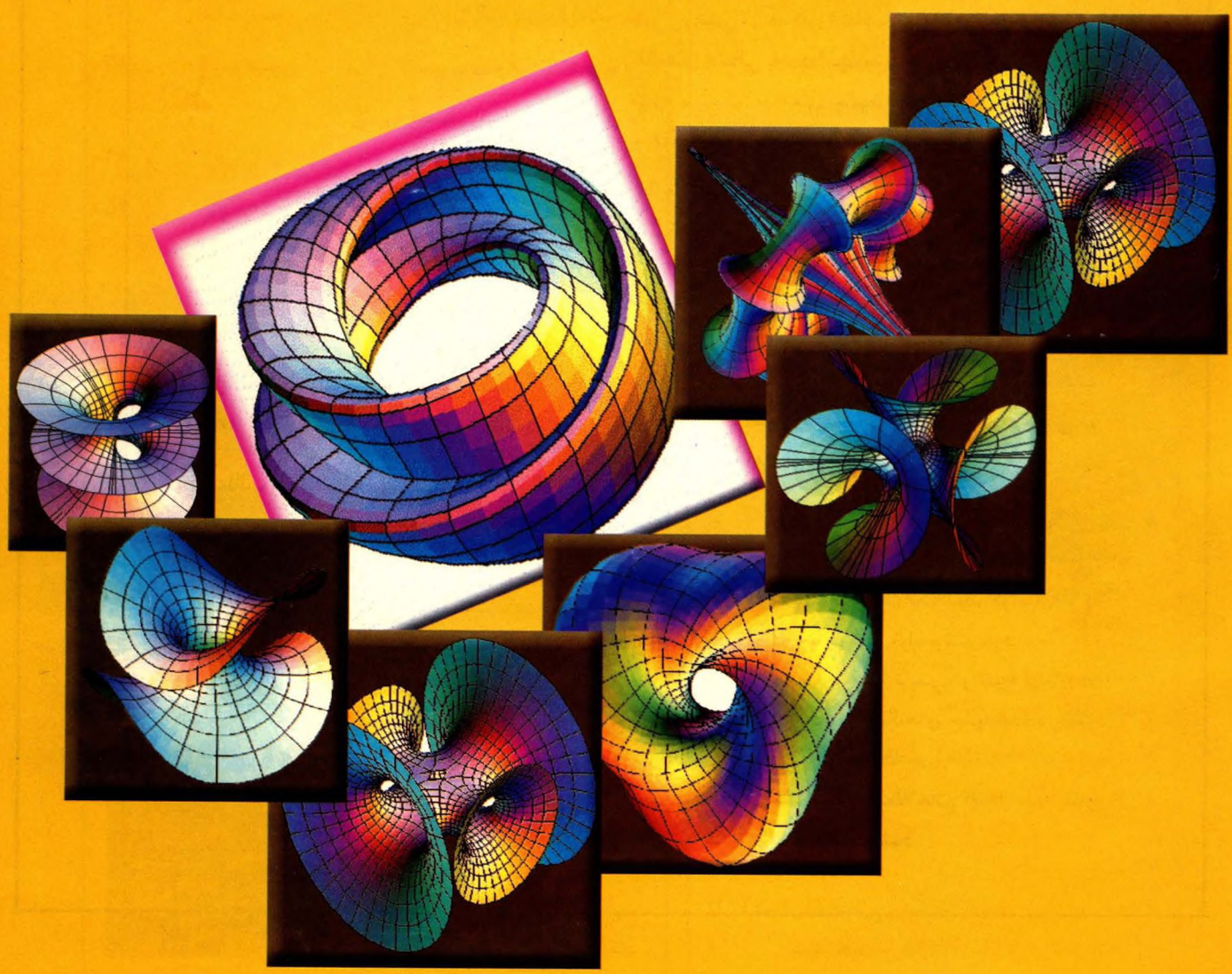
سیمرغ

سال ۱۱، شمارهٔ ۱
شمارهٔ پیاپی ۲۱



بسم‌الله الرحمن الرحیم

مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

شمارهٔ ۸۵ خیابان پارک خیابان دکتر بهشتی، تهران ۱۵۱۳۴

نقل مطالب با ذکر مأخذ مجاز است.

بهای این شماره ۴۰۰۰ ریال؛ حق اشتراک سالانه برای داخل کشور ۸۰۰۰ ریال.
(برای دانشجویان با ۳۰٪ تخفیف)

وجه اشتراک به حساب شمارهٔ ۹۰۰۰۹ بانک ملی شعبهٔ خیابان پارک تهران به نام مرکز نشر دانشگاهی واریز شود.

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر شش ماه یک بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجّه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی پژوهان فارسی زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چهارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبک مقاله‌های چاپ‌شده در ***نشر ریاضی*** باشد. به همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حک و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک، خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ شدهٔ در ***نشر ریاضی*** باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۱۱، شمارهٔ ۱

تاریخ انتشار: اسفند ۱۳۷۸

شمارهٔ پیاپی: ۲۱

nashriaz@rose.ipm.ac.ir

صاحب امتیاز: مرکز نشر دانشگاهی

مدیر مسؤول: سیاوش شهشهانی

- **هیأت ویراستاران:**

محمد اردشیر

یحیی تابش

سیاوش شهشهانی

سیامک کاظمی

امیدعلی کرمزاده

کاوه لاجوردی

- **مشاوران این شماره:**

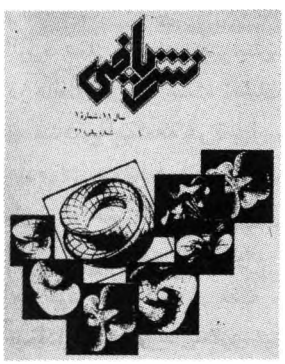
محمدهادی شفیعیها، علی عمیدی، فرامرز فامیل سمواتی، همایون معین، منوچهر وصال

- دستیارفنی: زهرا دلاوری
- طراح: شکوه پیله‌فروشها
- حروفچین و صفحه‌آرا: سیده مریم طاهریان
- ناظر چاپ: علی صادقی

- لیتوگرافی: ساحل
- چاپ و صحافی: منفرد (میدان شهدا، خ شهید کفایی، شمارهٔ ۳۶)

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست



روی جلد

نمونه‌هایی از آثار نگارخانهٔ پَله

رک. «مجسم‌سازی ریاضیات ...»

گزارش

از آغاز تأسیس مجلهٔ نشر ریاضی، تأثیر فزایندهٔ کامپیوتر بر ریاضیات، چه بر بدنهٔ اصلی آن و چه بر سبک و شیوهٔ کاربرد ریاضیات، در مقاله‌ها، گفتگوها و اظهارنظرهای گوناگون منعکس شده است. در طول عمر کوتاه نشر ریاضی شاهد ظهور و فراگیرشدن پدیدهٔ جدیدی به‌نام اینترنت بوده‌ایم که به آن نیز در صفحات مجله پرداخته شده است. در این شماره، این رشته مباحث در دو مقالهٔ «مجسم‌سازی ریاضیات ...» و «تأثیر اینترنت بر ریاضیات» پیگیری می‌شود. کانون توجه هر دو مقاله اثراتی است که کامپیوتر و اینترنت بر تحقیقات جاری ریاضی گذاشته‌اند. به نظر می‌رسد که با این ابزارها و تحت تأثیر مسائلی که استفاده از آنها پدید آورده است، در آستانهٔ تحولات عمیق و شگرفی هم در روشهای پژوهش ریاضی و هم در موضوعهای مورد تحقیق قرارگرفته‌ایم. در مقالهٔ «مجسم‌سازی ریاضیات ...»، ابزارهای آزمایشگاهی جدیدی برای آزمایشهای هندسی مطرح می‌شوند. استفاده از این نوع ابزارها در بیست سال اخیر رو به افزایش بوده است و همچنان که با مطالعهٔ مقاله معلوم خواهد شد هم‌اکنون منجر به کشفیات قابل ملاحظه‌ای در زمینه‌های مربوط شده است. آنچه تحولات جدید را اهمیت تازه می‌بخشد دسترسی آسان به این ابزارها به برکت استفادهٔ همگانی از شبکهٔ الکترونیک است. در مقالهٔ «تأثیر اینترنت بر ریاضیات»، این واقعیت شگفت‌آور بیان شده است که علی‌رغم کارکرد عملی اعجاب‌انگیز اینترنت، مبنای نظری و ریاضی کارایی این شبکه در هاله‌ای از ابهام است. تحلیلهای متداول مبتنی بر نظریهٔ احتمال و فرایندهای تصادفی است که در تحلیل سیستمهای تلفن کارایی ثابت شده و قابل اعتمادی دارند ولی در اتصالات پیچیده‌تر و غیرمتمرکز شبکهٔ اینترنت توان پاسخگویی به حتی ساده‌ترین مسائل را ندارند. جهان اینترنت مملو از مسائل ریاضی بکری است که می‌تواند تا سالیان دراز توجه نظریه‌پردازان ریاضی را به خود جلب کند. در مقالهٔ جدیدی تحت عنوان «طلوع عصر پدیده‌های تصادفی» که دیوید مامفرد رئیس اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان و برندهٔ مدال فیلدز ۱۹۷۴ به مناسبت سال جهانی ریاضیات به رشتهٔ تحریر درآورده است به تعدادی از مسائل علمی عمدهٔ عصر حاضر اشاره می‌شود که همگی پیشرفتهای عظیمی را در ریاضیات پدیده‌های تصادفی می‌طلبند.

یورگن موزر

یورگن موزر (Jürgen Moser) که در سالهای ۱۹۸۳ تا ۱۹۸۶ ریاست اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان را به عهده داشت در ۱۷ دسامبر ۱۹۹۹ در نزدیکی شهر زوریخ درگذشت. موزر در سال ۱۹۲۸ در شهر کونیکسبرگ متولد شد که در آن زمان جزو خاک آلمان بود و بعداً با منضم‌شدن به روسیه، کالینینگراد نام گرفت. نام کونیکسبرگ با نام کانت، هیلبرت، و مینکوفسکی درآمیخته است، و پُلهای آن در نظریهٔ گراف شهرت دارند. موزر بیشتر دوران علمی پربار خود را در مؤسسهٔ ریاضی کورانت آمریکا گذراند و از سال ۱۹۸۰ به اروپا بازگشت و در زوریخ مقیم شد. او دارای آثار مهمی در آنالیز غیرخطی، معادلات دیفرانسیل، دستگاههای دینامیکی، و هندسهٔ دیفرانسیل حقیقی و مختلط است. نظریهٔ معروف کولموگوروف-آرنولد-موزر (به اختصار KAM) از ابزارهای بسیار مهم در بررسی مسائل غیرخطی معادلات دیفرانسیل، دستگاههای دینامیکی و فیزیک ریاضی است.

نیتان جیکوبسن

نیتان جیکوبسن (Nathan Jacobson) یکی از تأثیرگذارترین جبردانان معاصر در دسامبر ۱۹۹۹ درگذشت. او در سال ۱۹۱۰ در ورشو لهستان متولد شد و در هشت سالگی با خانوادهٔ خود به آمریکا مهاجرت کرد. کتاب سه‌جلدی درسهایی در جبر مجرد او سالیان دراز همراه با کتاب دوجلدی معروف جبر نوین اثر وان در وردن مرجع اصلی جبر مجرد محسوب می‌شد. این اثر سه‌جلدی بعداً با تغییرات عمده‌ای زیرعنوان جبر I و II منتشر شد که اکنون نیز از مراجع مهم عمومی جبر به‌شمار می‌آید. نام جیکوبسن با مفاهیم متعددی در جبر مانند «رادیکال جیکوبسن» آمیخته است. او حدود ۳۰ دانشجوی دکتری تربیت کرد، ۱۷ جلد کتاب و تعداد بسیاری مقالهٔ تحقیقاتی به رشتهٔ تحریر درآورد، به عضویت چند آکادمی دعوت شد، ریاست انجمن ریاضی آمریکا را در سالهای ۱۹۷۱-۱۹۷۳ به‌عهده داشت و یکی از معاونان اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان بود.

س. ش

قدردانی

یحیی تابش که نقش فعالی در تأسیس مجلهٔ نشر ریاضی داشت و از آغاز عضو هیأت ویراستاران مجله بود از شمارهٔ آینده به‌عنوان عضو این هیأت در مجله فعالیت نخواهد داشت. تابش در هر سه دورهٔ عمر مجله، به قول خودش «دورهٔ اول که دورهٔ راه‌اندازی بود، دورهٔ دوم که دورهٔ تلاش برای بقا بود، و دورهٔ سوم که دورهٔ ... پختگی ... است» همواره با ذهن خلاق و کوشش بی‌دریغ خود بر جریان انتشار مجله اثرگذار بود. هیأت ویراستاران مجله امیدوار است در آینده نیز از همکاری یحیی تابش در هر حدّی که مسؤولیتهای متعدد او اجازه دهد بهره‌مند گردد.

ضمناً آقای دکتر احمد شفیعی‌ده‌آباد پذیرفته‌اند که از شمارهٔ آینده به‌عنوان عضو هیأت ویراستاران با مجلهٔ نشر ریاضی همکاری کنند که به این وسیله از ایشان سپاسگزاری می‌شود.

اعضای پیشین و کنونی هیأت ویراستاران نشر ریاضی

(عکس از مجید زمانی)

در تاریخ ۷۸/۱۱/۲۷ اعضای پیشین و کنونی هیأت ویراستاران نشر ریاضی گرد هم آمدند و عکسی که ملاحظه می‌کنید در این گردهمایی گرفته شده است. از اعضای سابق، آقایان حسین معصومی‌همدانی و عطاءالله تقاء که در این تاریخ درکشور نبودند، در عکس حاضر نیستند. اسامی حاضران از این قرار است:

نشسته از راست به چپ: احمد شفیعی‌ده‌آباد، غلامرضا خسروشاهی، مهدی بهزاد، امیدعلی کرمزاده، سیاوش شهشهانی.

ایستاده از راست به چپ: کاوه لاجوردی، یحیی تابش، محمد جلوداری ممقانی، سیامک کاظمی، مهدی رجبعلی‌پور، محمدرضا درفشه، محمد اردشیر.

[عکس در محل پژوهشگاه دانشهای بنیادی گرفته شده است. از مساعدتهای مستمر این پژوهشگاه ــ به‌خصوص کتابخانهٔ آن ــ به نشر ریاضی سپاسگزاری می‌شود.]

نشر ریاضی، سال ۱۱، شمارهٔ ۱، صص ۴-۷

خروشوفسکی و حدس زیلبر

سید محمد باقری*

۱. مقدمه

در این گزارش، آشنایی مختصری با نظریهٔ مدلها را مفروض می‌گیریم و فقط به یادآوری چند نکته می‌پردازیم. در یک زبان $\mathcal{L}$، دو مدل M و N را هم‌ارز مقدماتی می‌نامند، $M \equiv N$، هرگاه جملات یکسانی را صادق کنند. نظریهٔ T را کامل می‌گویند هرگاه تمام مدلهای آن هم‌ارز مقدماتی باشند. فرض کنیم T کامل است. اگر M مدلی از T و $\varphi(\overline{x})$ فرمولی (با پارامتر) باشد، مجموعهٔ $\varphi(M) = \{\overline{a} : M \models \varphi[\overline{a}]\}$ را تعریف‌پذیر (با پارامتر) می‌نامند. مثلاً در $(\mathbb{N}, +, .)$، مجموعهٔ اعداد اول تعریف‌پذیر است. فرض کنیم M و N دو مدل در نظریه‌های متفاوت باشند و $n \geq 1$ عددی طبیعی باشد. مفهوم تعبیر را در ۳ مرحله تعریف می‌کنیم:

ــ اگر $f : M^n \to N$ پوشا باشد و تصویر معکوس هر مجموعهٔ تعریف‌پذیر در N، در M هم تعریف‌پذیر باشد، می‌گوییم N در M تعبیر می‌شود (توجه کنید که تصویر معکوس تساوی، یک رابطهٔ هم‌ارزیِ تعریف‌پذیر است).

ــ اگر $N \subseteq M$ تعریف‌پذیر باشد و ساختار N تحدیدی از ساختار M باشد، می‌گوییم N در M تعبیر می‌شود.

ــ اگر N از ترکیبی از دو نوع فوق به‌دست آمده باشد می‌گوییم N در M تعبیر می‌شود. در حالت کلی ممکن است پارامترهایی از M هم به‌کار رود.

پس ساختار N در M تعبیر می‌شود هرگاه با تغییرات مرتبهٔ اول در M، بتوان N را به دست آورد (خود N و ساختارش را). به‌عنوان مثال $\mathbb{C}$ در $\mathbb{R}$ و نیز برای هر حوزهٔ صحیح A، هیأت کسرهای آن در A تعبیر می‌شوند، ولی توجه کنید که $A[x]$ در A تعبیر نمی‌شود. خواننده را برای مطالعهٔ جزئیات بیشتر در این مورد به [۲] ارجاع می‌دهیم، ولی عمدهٔ مطالب این مقاله به‌طور مفصلتر در [۶] آمده است.

۲. قضیهٔ مورلی و نظریهٔ پایداری

در ابتدای شکل‌گیریِ مبانی منطق ریاضی، تصور بر این بود که رابطهٔ زبان و ساختار چنان است که زبان قادر است ساختار را در حد یکریختی تعیین کند (چنین ساختاری را جالب می‌نامند). نمونهٔ چنین تفکری را به‌خوبی می‌توان در برنامهٔ هیلبرت مشاهده کرد. از بعد از سالهای ۱۹۳۰ (با کارهای لونهایم، اسکولم، مالتسف، و تارسکی) معلوم شد که این تصور حداقل برای زبانهای مرتبهٔ اول غلط است مگر اینکه ساختار متناهی باشد.

با این‌حال مسألهٔ جازمیت به‌کلی بی‌اعتبار نشد. در سال ۱۹۶۵ مورلی [۷] اثباتی از حدسی از ووش[1] ارائه داد که امروزه به قضیهٔ جازمیت مورلی شهرت دارد. طبق این قضیه، یک نظریهٔ جازم از کاردینال ناشمارای λ، از هر کاردینال ناشمارای دیگر نیز جازم است. این قضیه به همراه کارهای دیگر مورلی در باب «رتبهٔ مورلی» سرآغاز تحول عمیقی در نظریهٔ عمومی مدلها شد. این تحول تقریباً به‌دست یک تن صورت گرفت: شلاه[2] ایده‌های مورلی را به ردهٔ وسیعی از نظریه‌ها به‌نام «پایدار» تعمیم داد و نظریهٔ پایداری (یا به قول خودش نظریهٔ رده‌بندی) را به‌وجود آورد. اساس نظریهٔ پایداری مفهوم فورکینگ[3] (انشعاب) است که در نهایت همان مفهوم استقلال (درواقع وابستگی) است. به بیان دیگر، نظریهٔ پایداری عبارت است از نظریهٔ ابعاد یا رتبه‌ها روی ساختارهای مرتبهٔ اول.

1. Łoś 2. Shelah 3. forking

مثال نوعیِ آن را در نظر بگیریم. فرض کنیم k هیأتی جبری‌ـبسته باشد. می‌دانیم که هندسهٔ گسترده‌ای روی k وجود دارد و یکی از ملزومات هر هندسه، مفهوم بُعد است. در اینجا بعد هر تک نقطه و یا زیرمجموعهٔ متناهی صفر است ولی بعد k حداقل یک است زیرا که نامتناهی است! از طرف دیگر k^2 حداقل دوبعدی است زیرا حاوی بینهایت نسخهٔ مجزا از k است. به‌طور کلی اگر $A \subseteq k^n$ چندگونا[1]یی باشد (که لزوماً تعریف‌پذیر است)، بعد آن حداقل $t+1$ است هرگاه حاوی تعداد نامتناهی چندگونای دوبه‌دو مجزا از بعد t باشد. آبراهام رابینسن اولین کسی بود که متوجه شد موضوع مورد مطالعهٔ هندسهٔ جبری و نظریهٔ مدلها (در صورتی‌که به هیأتها محدود شود) یکی است: طبق قضیهٔ معروف حذف سور روی k، هر زیرمجموعهٔ تعریف‌پذیر از k^n ترکیبی بولی از چندگوناهاست.

در حالت کلی هر ساختار M (درواقع گسترش مقدماتی بزرگی از آن) که تعریف فوق (با تعریف‌پذیرها به جای چندگوناها) در مورد آن به‌کار آید به‌طوری که بعد M یک اردینال شود، کاملاً متعالی یا شبه‌پایدار نامیده می‌شود (همین اصطلاح برای $\mathrm{Th}(M)$ که $\mathrm{Th}(M) = \{\sigma : M \models \sigma\}$ به‌کار می‌رود) و بعد مربوطه را رتبهٔ مورلی می‌نامند. مثلاً اگر E رابطه‌ای هم‌ارزی با بینهایت ردهٔ نامتناهی روی M باشد، هر رده رتبهٔ ۱، ولی خود M رتبهٔ ۲ دارد.

با اندک تغییراتی در تعریف فوق، به رتبهٔ لاسکار[2] می‌رسیم که متناظر با نظریه‌های فوقِ پایدار است و نیز با تغییراتی در رتبهٔ لاسکار به رتبه‌های موضعی شلاه می‌رسیم که متناظر با نظریه‌های پایدار است. (در این مقاله نیازی به این مفاهیم نداریم).

رابطهٔ بین این مفاهیم به‌صورت زیر است:

پایدار $\rightarrow$ فوق پایدار $\rightarrow$ شبه‌پایدار $\rightarrow$ $\aleph_1$ـجازم

یک نتیجهٔ مهم این تقسیم‌بندی، نزدیک شدن به حل نهایی حدس وُت[3] است. طبق این حدس تعداد مدلهای شمارای هر نظریهٔ کامل، یا حداکثر $\aleph_0$ و یا دقیقاً $2^{\aleph_0}$ است. مورلی (در ۱۹۷۰) ثابت کرد که تنها حالت احتمالی دیگر $\aleph_1$ است. این حدس برای برخی حالات ثابت شده است ولی تکلیف آن در حالت کلی هنوز روشن نشده است.

۳. مجموعه‌های قویاً مینیمال

نتیجهٔ نهایی قضیهٔ مورلی این است که نظریه‌های جازم (از یک کاردینال نامتناهیِ λ_0) بر سه دستهٔ زیرند:

۱. کاملاً جازم (از هر کاردینال نامتناهی)

۲. $\aleph_0$ـجازم و غیر $\aleph_1$ـجازم

۳. $\aleph_1$ـجازم و غیر $\aleph_0$ـجازم

همچنین بی‌مناسبت نیست قضیهٔ اساسی دیگری را در همین زمینه یادآوری کنیم:

قضیه (بالدوین‌ـلاخلان[4]). یک نظریهٔ $\aleph_1$ـجازم و غیر $\aleph_0$ـجازم دارای دقیقاً $\aleph_0$ مدل شمارای غیریکریخت (و همگی همگن) است.

به‌عنوان مثال، در نظریهٔ هیأتهای جبری‌ـبستهٔ با مشخصهٔ ثابت p، هر مدل به‌طور یکتا با درجهٔ تعالی‌اش تعیین می‌شود. بنابراین به‌ازای هر n که $0 \leq n \leq \omega$، هیأت شمارای k_n و دنبالهٔ گسترشهای مقدماتی زیر را داریم: $k_0 \prec k_1 \prec \cdots \prec k_\omega$.

وضعیت مشابهی برای فضاهای برداری روی هیأت ثابت F برقرار است. اطلاعات موجود نشان می‌دهد که نظریه‌های نوع سوم از محتوای ریاضی عمیقتری برخوردارند و بحث حاضر درواقع گزارشی مختصر در این مورد یا به‌طور کلیتر در مورد $\aleph_1$ـجازم‌هاست.

نوع مهمی از نظریه‌های $\aleph_1$ـجازم، نظریه‌های «قویاً مینیمال» است.

تعریف. فرض می‌کنیم T کامل و $M \models T$ به‌قدر کافی اشباع شده باشد. همچنین $A \subseteq M$ را تعریف‌پذیر می‌گیریم. A را قویاً مینیمال می‌نامند هر گاه هر زیرمجموعهٔ تعریف‌پذیر (با پارامتر) از A متناهی و یا مکمل متناهی باشد. اگر خود M قویاً مینیمال باشد، این خاصیت به هر $N \equiv M$ که حداقل ωـاشباع شده باشد سرایت می‌کند و در این‌صورت می‌گویند که $\mathrm{Th}(M)$ قویاً مینیمال است.

به‌عنوان مثال، اگر k جبری‌ـبسته باشد، آن را نمی‌توان به دو بخش تعریف‌پذیر نامتناهی تقسیم کرد (هر زیرچندگونای k متناهی یا مکمل متناهی است). بنابراین $\mathrm{Th}(k)$ قویاً مینیمال است. همچنین هر فضای برداری نامتناهی روی هیأت F در زبان $\mathcal{L} = \{+, \circ, r\}_{r \in F}$ که در آن r نمایانگر ضرب اسکالر در r است، قویاً مینیمال است. و بالاخره ساده‌ترین مثال اینکه هر مجموعهٔ نامتناهیِ فاقد ساختار (بجز تساوی) قویاً مینیمال است.

محتوای ریاضی یک ساختارِ قویاً مینیمال در «بستار جبری» آن که با acl نشان داده می‌شود نهفته است. علت آن این است که رتبهٔ مورلی (بعد) یک مجموعهٔ قویاً مینیمال ۱ است و بنابراین فورکینگ روی آن پیچیده نیست. درواقع، موضوع اساسی این است که acl در اصل «تعویض» صدق می‌کند. این مطالب را توضیح می‌دهیم.

یک پیش‌هندسه به معنیِ موردنظرِ وان دِر وردن‌ـویتنی روی مجموعهٔ X عبارت است از عملگری بستاری چون $\mathrm{cl} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ به‌طوری که

۱. (یکنوایی) به‌ازای هر $A \subseteq X$، $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$؛

۲. (تعدی) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$؛

۳. (موضعاً متناهی‌بودن) اگر $a \in \mathrm{cl}(A)$، آنگاه $A_0 \subseteq A$ متناهی وجود دارد که $a \in \mathrm{cl}(A_0)$؛

۴. (تعویض) اگر $a \in \mathrm{cl}(A \cup \{b\}) - \mathrm{cl}(A)$ آنگاه $b \in \mathrm{cl}(A \cup \{a\})$.

روی هر ساختار مرتبهٔ اول M یک عملگر بستاری طبیعی وجود دارد: اگر $A \subseteq M$، آنگاه می‌گوییم $a \in \mathrm{acl}(A)$ هرگاه فرمول $\varphi(x)$ با پارامترهای احتمالی در A موجود باشد به‌طوری که $\varphi(M)$ متناهی و شامل a باشد (این مطلب در مورد هیأتها به این شکل درمی‌آید: $a \in \mathrm{acl}(A)$ هر گاه a ریشهٔ یک چندجمله‌ای با ضرایب در A باشد). در این صورت، عملگر $A \rightarrow \mathrm{acl}(A)$ در تمام اصول فوق بجز اصل تعویض صدق می‌کند. اگر برحسب اتفاق M قویاً مینیمال باشد، acl در تعویض هم صادق خواهد بود و بنابراین (M, acl) تشکیل یک پیش‌هندسه خواهد داد. (همین حکم در مورد نظریه‌های موسوم به oـمینیمال که هیأتهای بستهٔ حقیقی نمونه‌ای از آن است، برقرار است).

1. variety 2. Lascar 3. Vought 4. Baldwin-Lachlan

پیش‌هندسهٔ X را هندسه می‌گویند هرگاه $\mathrm{cl}(\varphi) = \varphi$ و برای هر تک نقطهٔ a داشته باشیم $\mathrm{cl}(a) = \{a\}$. با زدودن $\mathrm{cl}(\varphi)$ از مجموعهٔ X و یکی گرفتن عناصر $\mathrm{cl}(a)$، می‌توان از هر پیش‌هندسه یک هندسه درست کرد. همچنین برای هر a، عملگر $\mathrm{cl}_a(A) = \mathrm{cl}(A \cup \{a\})$ یک پیش‌هندسهٔ دیگر روی X تعریف می‌کند.

یادآوری می‌کنیم که با معرفی نمادهای محمولی مناسب می‌توان هر پیش‌هندسه را به ساختاری مرتبهٔ اول تبدیل کرد که هندسهٔ منتج از خود را در خود تعبیر می‌کند. با داشتن یک پیش‌هندسه می‌توان مفاهیمی چون استقلال، زیرمجموعهٔ بسته، پایه و بعد را تعریف کرد و دقیقاً همین جاست که می‌توان ثابت کرد که هر نظریهٔ قویاً مینیمال ازوماً $\aleph_1$ـجازم است.

هندسهٔ X را تباهیده می‌نامند هرگاه به‌ازای هر $A \subseteq X$ داشته باشیم $\mathrm{cl}(A) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{cl}(a)$، و مدولار می‌نامند هرگاه به‌ازای هر $A, B \subseteq X$ بسته و با بعد متناهی داشته باشیم

$$\dim(A) + \dim(B) = \dim(A \cup B) + \dim(A \cap B)$$

و بالاخره X را موضعاً مدولار می‌گوییم هرگاه به‌ازای a ای متعلق به X، (X, cl_a) مدولار باشد.

چند مثال:

۱. (هندسهٔ تباهیده) اگر X مجموعه‌ای نامتناهی باشد، قرار می‌دهیم

$$\mathrm{cl}(A) = A$$

۲. (پیش‌هندسهٔ مدولار) اگر V یک فضای برداری باشد و $A \subseteq V$، قرار می‌دهیم

$$\mathrm{cl}(A) = A \quad \text{زیرفضای برداری تولید شده توسط}$$

۳. (هندسهٔ موضعاً مدولار) در مثال ۲ قرار می‌دهیم

$$\mathrm{cl}(A) = A \quad \text{فضای آفین تولید شده توسط}$$

۴. اگر k هیأتی جبری‌ـبسته باشد، قرار می‌دهیم

$$\mathrm{cl}(A) = A \quad \text{بستار جبری}$$

همان‌طور که گفتیم acl روی هر ساختار قویاً مینیمال تشکیل یک پیش‌هندسه می‌دهد. از قضا نوع هندسهٔ این ساختارها در رده‌بندی نظریه‌های $\aleph_1$ـجازم نقش تعیین کننده دارد. این مطالب به‌خوبی در دو قضیهٔ تثلیث[1] و نردبان[2] بازتاب یافته است. فرض کنیم M ساختاری $\aleph_1$ـجازم باشد و $A \subseteq M$ تعریف‌پذیر (با پارامتر). به‌طور طبیعی می‌توان ساختار M را به A تحدید کرد و A را فی‌نفسه در نظر گرفت.

قضیه (تثلیث زیلبر). فرض کنیم M ساختاری $\aleph_1$ـجازم است، در این صورت دقیقاً یکی از سه حالت زیر پیش می‌آید:

۱. (تباهیده) هندسهٔ یک، یا هر زیرمجموعهٔ (تعریف‌پذیر) قویاً مینیمال از M تباهیده است،

۲. (شبه‌مدول) هندسهٔ یک، یا هر زیرمجموعهٔ قویاً مینیمال از M موضعاً مدولار است،

۳. (شبه‌هیأت) شبه‌صفحه‌ای در M یافت می‌شود (تعبیر می‌شود).

(در بیشتر متون، نوع اول و دوم را مدولار می‌نامند.) سومی نیاز به توضیح دارد. فرض کنیم F یک هیأت است. می‌توان روی F^{*3} یک صفحهٔ تصویری ساخت (تعبیرکرد). $x, y \in F^3$ ناصفر را هم‌ارز می‌گوییم هرگاه aی ناصفری موجود باشد که $y = ax$. حال هر زیرفضای دوبعدی از F^3 را یک خط و هر $[x]$ را یک نقطه می‌نامیم. همچنین می‌گوییم نقطهٔ p در خط l است هر گاه l شامل p باشد. حال:

الف) ازهر دو نقطهٔ متمایز خط یکتایی می‌گذرد.

ب) هر دو خط متمایز در نقطهٔ یکتایی متقاطع‌اند.

تقریباً همین کار را می‌توان در یک ساختار قویاً مینیمال غیرمدولار انجام داد. فرض کنیم P مجموعه‌ای از نقاط، L مجموعه‌ای از خطوط و ϵ زیرمجموعه‌ای از $P \times L$ باشد. اگر $a \in l$، می‌گوییم l شامل a است یا l از a می‌گذرد. سه‌تایی (P, L, ϵ) را شبه‌صفحه می‌گویند هرگاه

۱. هر خط شامل بینهایت نقطه باشد.

۲. از هر نقطه بینهایت خط بگذرد.

۳. هر دو خط متمایز تقاطع متناهی داشته باشند.

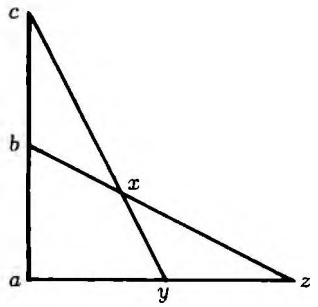
۴. از هر دو نقطه تعداد متناهی خط بگذرد.

بدین ترتیب در هر ساختار $\aleph_1$ـجازم غیرمدولار می‌توان شبه‌صفحه ای نامتناهی ساخت. اصولاً مدولاربودن یک ساختار به‌معنی مسطح بودن یا شبیه مدول بودن آن است در حالی که وجود شبه‌صفحه بیانگر ساختار غیرخطی و فرامدولی آن است. قضیهٔ دیگر زیلبر (قضیهٔ نردبان) [۹] بیان می‌کند که چگونه مجموعه‌های قویاً مینیمال یک ساختار $\aleph_1$ـجازم داخواه را بنا می‌کنند. نهایت اینکه مجموعه‌های قویاً مینیمال اجزاء سازندهٔ ساختارهای $\aleph_1$ـجازم‌اند و بنابراین مطالعهٔ $\aleph_1$ـجازمیت به مطالعهٔ ساختارهای قویاً مینیمال موکول می‌شود.

مسألهٔ در نهایت رده‌بندی ساختارهای قویاً مینیمال در سه حالتِ بدیهی، مدولار و دارای شبه‌صفحه است، اما قبلاً باید مشخص کنیم که منظور از رده‌بندی چیست و در چه حدی است. مسلماً رده‌بندی در حد یکریختیْ مشکل و حتی بی‌مورد است زیرا به‌راحتی می‌توان تغییراتِ جزئیِ متنوعی در ساختار داد که قویاً مینیمال بماند. انتخاب درست، «هم‌تعبیرپذیری» است. دو ساختار داخواه M و N را هم‌تعبیرپذیر[1] می‌گویند هرگاه هر یک در دیگری تعبیر شود (احتمالاً با استفاده از پارامترها). مثلاً $(\mathbb{Q}, +, .)$ و $(\mathbb{Z}, +, .)$ هم‌تعبیرپذیرند زیرا $\mathbb{Q}$ هیأت کسرهای $\mathbb{Z}$ است و درواقع $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Q}$ تابعی ساختاری است. از طرف دیگر، چنانکه معروف است $\mathbb{Z}$ در $\mathbb{Q}$ قابل تعریف است (در زبان حلقه‌ها) ولی توجه کنید که دو هیأت $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ هم‌تعبیرپذیر نیستند و فقط $\mathbb{C}$ در $\mathbb{R}$ تعبیر می‌شود. هم‌تعبیرپذیری را می‌توان به هوموتوپی تشبیه کرد زیرا طی آن خواص اساسی ساختار محفوظ می‌ماند. بنابراین مثلاً

1. trichotomy 2. ladder

1. bi-interpretable



به دنبال این هستیم که ببینیم در هر یک از سه مقولهٔ فوق چه ساختار متعارفی (مثل گروه، حلقه، ...) قابل تعبیر است.

یکی از زیباترین نتایج در این باب، قضیهٔ «پیکربندی گروهی» خروشوفسکی است. فرض کنیم a، b، c، x، y، z عناصری در ساختار M باشند که همگی دارای بعد (رتبهٔ مورلی) یک باشند ولی هر زوج از آنها و همچنین $\{a,b,c\}$، $\{a,y,z\}$، $\{b,x,z\}$ و $\{c,x,y\}$ دارای بعد ۲ باشند و نیز بعد هر سه تایی دیگر ۳ باشد (به نمودار بالا توجه کنید).

مثلاً اگر G گروهی نامتناهی و آبلی باشد و $a,b,x \neq 0$ عناصر متمایزی باشند، می‌گیریم $c = ab$، $y = cx$، و $z = bx$ (و در نتیجه $y = az$). در این صورت شرایط فوق صادق‌اند.

قضیه (خروشوفسکی). فرض کنیم M قویاً مینیمال باشد و یک پیکربندی گروهی در آن یافت شود، در این صورت M قادر است یک گروه آبلی قویاً مینیمال را تعبیر کند.

همچنین قضیهٔ مشابهی دربارهٔ پیکربندی هیأتی وجود دارد.

تحقیقات بیشتر نشان می‌دهد که یک مجموعهٔ قویاً مینیمال تباهیده نمی‌تواند هیچ گروه نامتناهی را در خود تعبیر کند در حالی‌که مجموعهٔ قویاً مینیمال مدولار می‌تواند گروهی نامتناهی و آبلی (و نه بیشتر!) را در خود تعبیر کند [۱]. در مورد ساختارهای قویاً مینیمال غیرمدولار چیزی نمی‌توان گفت. فقط تعدادی مثال در اختیار داریم: هیأتهای جبری‌ـبسته. بدین‌سان زیلبر حدس زیر را مطرح کرد:

حدس زیلبر: هر ساختار قویاً مینیمال و غیرمدولار با یک هیأت جبری‌ـبسته هم‌تعبیرپذیر است.

این حدس نه تنها از جهت ریاضی بلکه از دید فلسفی ریاضی هم حائز اهمیت است زیرا مدعی است در ریاضیات هیچ ساختار هندسی (از دید جبری) بجز هیأتها وجود ندارد. این حدس سرانجام توسط خروشوفسکی رد شد [۳]. (و البته این ردشدن باعث نجات نظریهٔ مدلها شد!) وی مثالی از یک ساختار قویاً مینیمالِ غیرمدولار ارائه داد که قادر نیست حتی یک گروه نامتناهی را در خود تعبیر کند (چه رسد به یک هیأت). یعنی حدس زیلبر به بدترین وجه ممکن نقض شد. وی همچنین نشان داد که تعدادی ناشمارا مجموعهٔ قویاً مینیمال وجود دارد که در یکدیگر تعبیر نمی‌شوند.

از سوی دیگر وی نشان داد [۴] که چگونه می‌توان دو ساختار قویاً مینیمال را در هم آمیخت (بر پایهٔ مجموعه‌ای واحد) و ساختار قویاً مینیمال دیگری به‌دست آورد. مثلاً می‌توان نشان داد که ساختار $(F,+,.,\oplus,\odot)$ وجود دارد که قویاً مینیمال است و $(F,+,.)$ و $(F,\oplus,\odot)$ هیأتهایی جبری‌ـبسته با مشخصه‌های متفاوت‌اند. البته چون گسترش فوق از $(F,+,.)$ غیربدیهی است حتماً acl را عوض می‌کند.

دنیای ساختارهای قویاً مینیمال بسیار شلوغ است، با این‌حال حدس زیلبر کلاً کنار گذاشته نشد بلکه برعکس، معلوم شد تحت شرایط مناسب می‌توان آن‌را ثابت کرد. درواقع خروشوفسکی و زیلبر تجریدی از توپولوژی زاریسکی روی هیأتهای جبری‌ـبسته ابداع کردند که آن‌را هندسهٔ زاریسکی نامیدند. سپس با نهادن شرطهای وافر[1] و بسیار وافر[2] توانستند حدس را ثابت کنند. بی‌شک حدس زیلبر یکی از مهمترین سرچشمه‌های تحقیقات در سالهای اخیر بوده است. در این رابطه حدس دیگری از زیلبر وجود دارد که هنوز حل و فصل نشده است و آن مدعی است که هر گروه نامتناهی ساده‌ـهمبند و با رتبهٔ مورلی متناهی، با هیأتی جبری‌ـبسته هم‌تعبیرپذیر است (درواقع مدعی است که با گروهی جبری یکریخت است). حالات خاصی از این حدس (مثل حالت گروههای زاریسکی) حل شده است. حل کامل آن تأیید محکمتری است بر اینکه ابزارهای منطقی قادرند ماهیت بسیاری از ساختارهای جبری مهم را تعیین کنند.

مراجع

1. E. Bouscaren, and E. Hrushovski, "On one based theories", *The Journal of Symbolic Logic*, **59** (1994) 579-95.
2. W. A. Hodges, *Model Theory*, Cambridge University Press (1993).
3. E. Hrushovski, "A new strongly minimal set", *Annals of Pure and Applied Logic*, **62** (1993) 147-166.
4. _____, "Strongly minimal expansions of algebraically closed fields", *Israel Journal of Mathematics*, **79** (1992) 129-151.
5. E. Hrushovski, and B. Zilber, "Zariski geometries", *J. Amer. Math. Soc.*, **9** (1996) 1-50.
6. D. Marker, "Strong minimal sets and geometry", in *Springer Lecture Notes in Logic* (1998).
7. M. Morley, "Categoricity in power", *Transactions of the American Mathematical Society*, **114** (1965) 514-538.
8. A. Pillay, "Stable theories, pseudoplanes and the number of countable models", *Annals of Pure and Applied Logic*, **43** (1989) 147-160.
9. B. I. Zilber, *Uncountably Categorical Theories*, AMS Translations of Mathematical Monographs, vol. 117.

******

* سیدمحمد باقری، دانشگاه اصفهان

bagheri@karun.ipm.ac.ir

1. ample 2. very ample

مجسم‌سازی ریاضیات:
راهی به‌سوی یک کاوشکدهٔ ریاضی•

ریچارد پِله*
ترجمهٔ سیدعلی کتان‌فروش

«بیایید یکدیگر را در بهتر دیدن اشیاء کمک کنیم»
کلودمونه

مقدمه

ریاضیدانان همیشه برای تجسم موجودات و فرایندهای انتزاعی که در همهٔ شعب تحقیقات ریاضی مطرح می‌شوند، از «چشم ذهن»شان استفاده می‌کرده‌اند. اما پیشرفتهای قابل توجه در فن‌آوری کامپیوتری در همین سالهای اخیر باعث شده است این تصاویر مبهم و ذهنی که آنها را در مغزمان «می‌بینیم» به راحتی وجود خارجی پیدا کنند و جای آنها را مجسم‌سازیهای واضح و عینی بگیرد که می‌توان در مورد آنها با دیگران اتفاق‌نظر داشت. این پیوند بین ریاضیات و علوم کامپیوتر، موضوع بحثی است، که در ادامه می‌آید و از آن با عنوان «مجسم‌سازی ریاضی» یاد خواهم کرد.

این موضوع آنقدر نو و آنچنان در تغییر و تحول است که تشریح جزئیات مراحل پیشرفت و یا وضعیت فعلی آن مشکل می‌نماید. ولی دو مبحث تحقیقاتی مهم را می‌توان نام برد که شهرت و اعتبار مجسم‌سازی کامپیوتری را به عنوان ابزاری جدی در تحقیقات ریاضی تثبیت کرده‌اند. این دو مبحث عبارت‌اند از پشت‌وروسازیِ صریح کره و ساختنِ صریح رویه‌های نشانده شدهٔ مینیمال کامل با گوناهای بالاتر. مستندات خوبی از تاریخچهٔ هر دوی اینها در دست است که بخشی از آنها را بعداً در همین مقاله بازگو خواهم کرد.

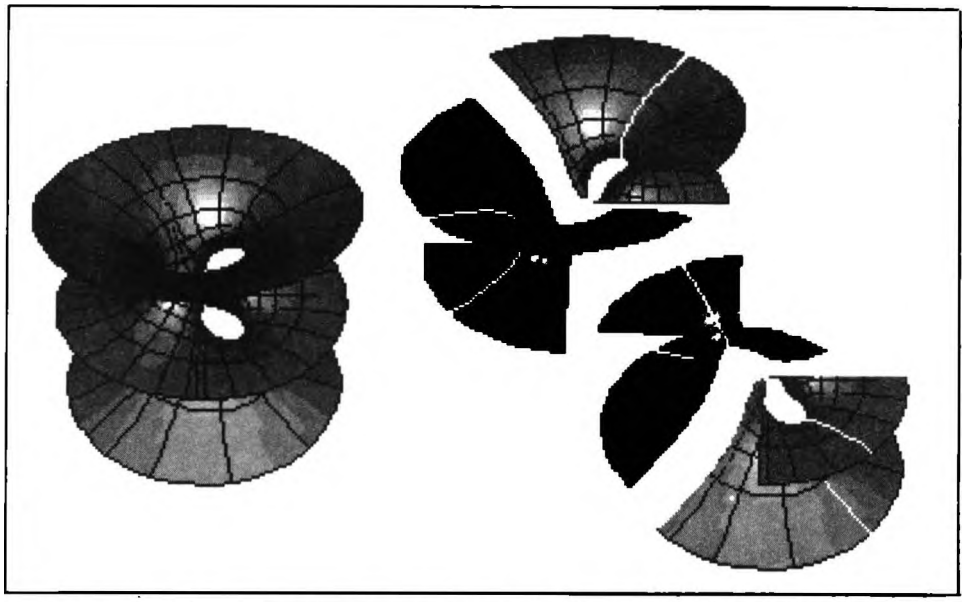
با این حال، دلیل اصلی من برای نوشتن این مقاله شرح و تفصیل موفقیتهای پیشین مجسم‌سازی ریاضی نیست، بلکه بررسی این مسأله است که، «از اینجا به کجا می‌رویم؟». من اکنون بیش از پنج سال است که روی یک برنامهٔ مجسم‌سازی ریاضی کار می‌کنم [۱]. در حین ساخت این برنامه، بینشها و مشاهداتی به‌دست آورده‌ام که فکر می‌کنم برای خوانندهٔ عادی جالب باشد. سعی می‌کنم بعضی از آنها را در این مقاله تشریح کنم. کار بر روی این برنامه، به‌خصوص مرا واداشت تا به‌طور جدی در بارهٔ امکان کاربردهایی جدید و جالب توجه از مجسم‌سازی ریاضی بیاندیشم. مایلم در اینجا یکی از آنها را به‌طور خاص نام ببرم و امیدوارم در نظر دیگران نیز مانند من، دورنمایی مهیج از مجسم‌سازی ریاضی باشد: ایجاد یک نگارخانهٔ تعاملی[1] از هنر و مجسم‌سازی ریاضی روی شبکه، که آن‌را «کاوشکدهٔ ریاضی» می‌نامم.

صحبت را با مرور برخی از کاربردهای آشنای تکنیکهای مجسم‌سازی ریاضی شروع می‌کنم. یک کاربرد بدیهی این تکنیکها استفاده از آنها به‌عنوان وسیله و ابزاری آموزشی برای افزایش و تکمیل مدلهای گچی ظریفی از رویه‌های ریاضی است که در بسیاری از مراکز ریاضی در جایگاههای نمایشی جای گرفته‌اند [Fi] و نیز اشکال و نمودارهای ترسیمی در کتابهای درسی، حتی در کتابهای کلاسیک بسیار عالی چون هندسه و تخیل [HC]. مزیت استفاده از تصاویر کامپیوتری برای توسعه و تکمیل این مدلها و سایر شیوه‌های قدیمی نمایش موجودات ریاضی، در این است که کامپیوتر نه تنها امکان تولید سریع چنین تصاویر ثابت و بی‌تحرکی را فراهم می‌کند، بلکه علاوه بر آن، مستقیماً برای تولید تصاویر متحرکی که دوران و یا دگرریختی مدل را نمایش می‌دهند، به‌کار می‌آید. این تصاویر متحرک می‌توانند منظرهٔ شناخته شدهٔ ریاضیات را از راههایی تازه و بدیع، به صورت زنده و جاندار مجسم سازند.

موضوع مهیج‌تر حتی برای ریاضیدانان محقق، این است که اکنون می‌توان از نرم‌افزارهای مجسم‌سازی ریاضی برای کسب بینش و اطلاعات نو در بارهٔ موجودات پیچیده و خوبْ شناخته نشدهٔ ریاضی استفاده کرد. برای مثال،

1. interactive gallery

با نسبت دادن نمایش هندسی به یک موجود مجرد ریاضی و سپس با نمایش آن به‌طور بصری، گاه می‌توان وجود یک تقارن جدید را که از طریق بحث نظری کشف نشده، آشکار ساخت. دقیقاً یک چنین تقارنِ پنهان مانده‌ای که با مجسم‌سازی هویدا شد، نقشی اساسی در اثبات هافمن-میکس برای نشاندنی بودن رویهٔ مینیمال کاستا[1] ایفا کرد [H] (شکل ۱ را ببینید). همین‌طور، نمایشی متحرک از دگرریختی که در آن یک مشخصهٔ بصری در حین تغییر پارامترها ثابت باقی می‌ماند، ممکن است حاکی از وجود یک ناوردای غیربدیهی باشد. دگرریختی بین پیچوار و زنجیره‌وار که بعداً درباره‌شان بحث می‌کنیم، مثالی از این دست است. (شکل ۲ را ببینید).



شکل ۱ تقارنهای رویهٔ کاستا. رویهٔ کاستا (سمت چپ) توسط سه صفحهٔ مختصات بریده شده و به هشت قطعهٔ همنهشت، ناحیه‌های بنیادی گروه تقارنها، تفکیک شده است. صفحهٔ افقی رویهٔ کاستا را در امتداد دو خط مستقیم قطع می‌کند. نیمهٔ بالایی و پایینی کمی از هم جدا شده‌اند تا روی‌هم‌افتادگی نداشته باشند. صفحات عمودی، صفحات تقارن انعکاسی هستند و خطوط تقارن به‌صورت شکافهایی در دو نیمهٔ بالایی و پایین مشخص شده‌اند. هشت ناحیهٔ بنیادی، هر یک در یک‌هشتم از فضا، می‌توانند به‌صورت یک گراف نمایش داده شوند و بدین‌ترتیب قضیهٔ هافمن-میکس مبنی بر اینکه رویهٔ کاستا نشاندنی است، از این واقعیت، به‌سادگی به‌دست می‌آید.

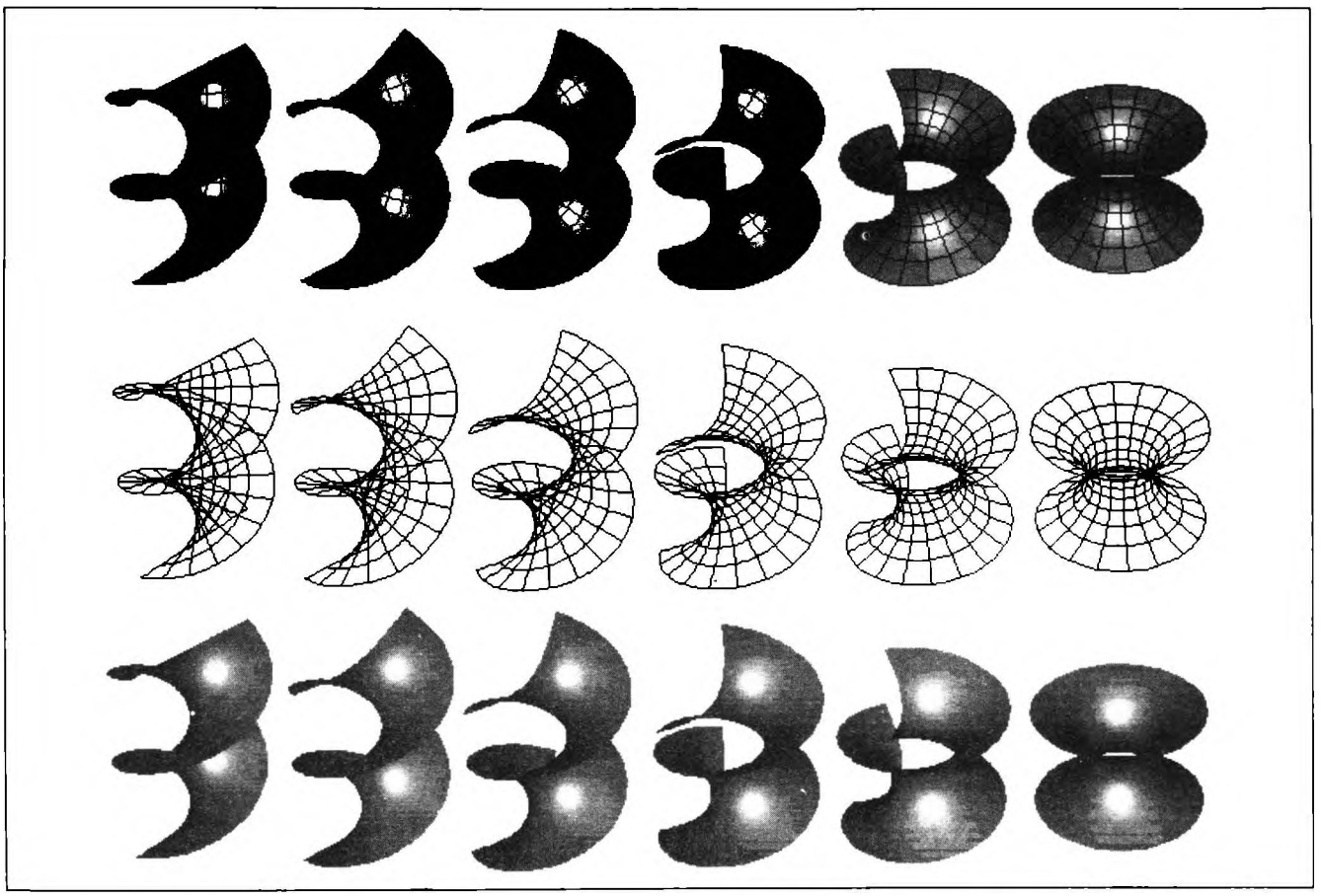
ریاضیدانان کاربردی درمی‌یابند که ماهیتِ به‌شدت تعاملیِ تصاویر تولید شده با نرم‌افزارهای اخیر مجسم‌سازی ریاضی، به آنها امکان می‌دهد که با سهولتی که تا پیش از این هرگز ممکن نبود، دست به تجربیات ریاضی بزنند. از آنجا که تعداد بسیار کمی از دستگاههایی [از معادلات] که ایشان روی آنها کار می‌کنند، جوابهای صریح و در فرم بسته می‌پذیرند، توانایی بررسی جوابها به صورت بصری در بسیاری از حوزه‌ها ضرورت یافته است. برای مثال، در مطالعهٔ جریان شاره‌ها در نزدیکی زمان پیدایش تلاطم، توصیف یک میدان سرعت در ناحیهٔ کوچکی از فضای سه‌بعدی، آن هم به‌ازای یک بازهٔ زمانی چندثانیه‌ای می‌تواند تریلیونها عدد در سیستم نقطهٔ شناور تولید کند. روشهایی آماری برای برآورد چنین مقدار بزرگی از داده‌ها وجود دارد؛ با این حال، نمایش عینی میدان سرعت برای آگاهی یافتن از آنچه در جریان است، ضروری است.

همین‌طور، دانشمندانی که به ریاضیات نیاز دارند و آن‌را به‌کار می‌گیرند، لکن کارکردن با نمادها و روابط مجرد ریاضی کاملاً برایشان راحت نیست، بسیاری اوقات خواهند توانست مفاهیم ریاضی را که با آنها سروکار دارند بهتر بفهمند اگر بتوان این مفاهیم را به‌صورت عینی مجسم کرد. و بالاخره، قابل انکار نیست که مجسم‌سازی ریاضی جاذبهٔ زیبایی شناسانهٔ قوی حتی برای مردم عامی دارد؛ فروش چشمگیر کتابهای مصور بسیار بزرگِ رومیزی حاوی اشکال فرکتالی [برخالی] که برای مطالعهٔ تفننی مورد استفاده قرار می‌گیرند، شاهد این مدعاست.

مجسم‌سازی ریاضی $\not\supseteq$ گرافیک کامپیوتری

درس مهمی که من از تجربیات شخصی‌ام آموخته‌ام، این است که برنامه‌نویسی مجسم‌سازی ریاضی را نباید صرفاً حالت خاصی از برنامه‌نویسی گرافیک سه‌بعدی (3D) در نظر گرفت. این دو با آنکه در مفاهیم و الگوریتمها اشتراک دارند ولی اهداف و شیوه‌هایشان کاملاً از یکدیگر متمایز است. درواقع در نمایش فرایندها و موجودات ریاضی، ویژگیهای ذاتی خاصی وجود دارد که اگر به درستی به حساب آورده شود، می‌تواند وظایف برنامه‌نویسی را بسیار ساده‌تر کند و به الگوریتمهایی منجر شود که نسبت به تکنیکهای استاندارد برنامه‌نویسی گرافیک سه‌بعدی کارامدتر باشد. برعکس، اگر این جنبه‌های خاص نادیده انگاشته شود، مثلاً یک رویهٔ ریاضی با تکنیکهای نرم‌افزاریی نمایش داده شود که [به‌طور کلی] به‌منظور نمایش مرز اشیاء جامد در دنیای واقعی، طراحی شده‌اند، در پایان کار، بسیاری از ویژگیهای اساسی این رویه که ریاضیدان به مشاهدهٔ آنها علاقه‌مند است، پوشیده و پنهان می‌مانند. طبقه‌بندی روشن و ظریف رویه‌ها از دید ریاضیدانان و تفکیک آنها به رویه‌های پارامتری، ضمنی، جبری، شبه‌کروی، مینیمال. رویه‌های با انحنای میانگین ثابت، رویه‌های ریمانی و ... ، با برداشتی که در گرافیک کامپیوتری از رویه وجود دارد، مغشوش و مبهم می‌شود و شخص سریعاً درمی‌یابد که نه تنها شیوه‌های رایج گرافیک کامپیوتری برای خلق و نمایش همهٔ انواع گوناگون رویه ناکافی و نامناسب هستند بلکه روشی که با هدف بهینه‌کردن نمایش یک نوع خاص از رویه‌های ریاضی طراحی شده است، ممکن است برای دیگر انواع رویه مناسب نباشد. یک نتیجهٔ این بحث آن است که خط‌مشی خوب این نیست که مجسم‌سازی ریاضی براساس تعداد کم و مشخصی از روالهای گرافیکی سطح بالای از پیش تعیین شده، پایه‌ریزی شود و توقع داشته باشیم که بتوان آنها را برای همهٔ اقسام موجودات ریاضی به کار برد. البته برای شروع کار به تعدادی روال گرافیکی سطح پایین و قدیمی نیاز است، اما

1. Costa



شکل۲ دکرریختی پیچوار و زنجیره‌وار. در اینجا (به‌کمک سه روش تصویرسازی)، شش پرده از دگرریختی خانوادهٔ وابسته‌ای که رویه‌های مینیمال پیچوار و زنجیره‌وار را به‌هم مربوط می‌کند، نشان داده شده است. تصویرسازی وصله‌ای (بالا) و سیمی (وسط) ویژگی ایزومتریک دگردیسی را به نمایش می‌گذارد، حال آنکه تصویرسازی سرامیکی آن‌را پنهان می‌سازد. توجه کنید که چگونه خاصیت خودبه‌خودیِ پنهان‌سازی خطوط در الگوریتم نقاش باعث می‌شود که نمونهٔ وصله‌ای از حیث بصری برتر از نمونهٔ سیمی باشد.

به‌جای در پیش گرفتن رهیافت قالبی، یعنی کوشش برای قراردادن هر یک از موجودات ریاضی در قالب یکی از شیوه‌های معدود سطح بالای نمایش، بهتر است برای هر نوع وضعیت خاص ریاضی از روالهای سطح پایین برای طراحی الگوریتمهای بهینهٔ نمایش استفاده شود. این کار، تلاش بیشتری را از برنامه‌نویس می‌طلبد. لکن به‌دست آوردن نتایج برتر این تلاش اضافی را توجیه‌پذیر می‌کند. دومین نتیجه این است که یک یا چند ریاضیدان باید نقشی محوری و پیش‌برنده در طراحی و ایجاد هر پروژهٔ جدی نرم‌افزار مجسم‌سازی ریاضی ایفا کنند. من خود را در هندسهٔ دیفرانسیل به‌نسبت مطلع می‌دانم و برای برنامه‌نویسی مقدماتی بخشهای زیادی از برنامه‌ام که به خمها و رویه‌ها مربوط می‌شد، هم به‌عنوان برنامه‌نویس و هم به‌عنوان مشاور ریاضی ایفای نقش کردم. اما در هنگام برنامه‌نویسیِ ساخت و نمایش رویه‌های مینیمال و شبه‌کروی دریافتم که برای انجام یک کار حرفه‌ای، قطعاً ضروری است که با متخصصان (هرمان کارچر[1] و چوایان ترنگ[2]) همکاری نزدیک داشته باشم.

در آنچه در ادامه می‌آید، همچون فوق، اغلب با مراجعه به مجسم‌سازی موجودات هندسی مثل خمها، رویه‌ها و چندوجهیها، برخی نکات را توضیح خواهم داد. چنین مثالهایی را بیشتر به این دلیل انتخاب می‌کنم که آنها از جنبهٔ شهودیِ نیرومندی برخوردارند و بنابراین به توضیح کمتری نیاز دارند. اما درک این واقعیت مهم است که تقریباً همهٔ این نکات را می‌توان در ارتباط با نمایش نگاشتهای همدیس، جوابهای معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی و یا مجسم‌سازی مربوط به تقریباً هر ردهٔ دیگری از موجودات ریاضی مطرح کرد.

دنیای گرافیک چندشیئی در برابر دنیای گرافیک تک‌شیئی. من در بالا ادعا کردم که مجسم‌سازی ریاضی دارای ویژگیهایی است که آن‌را از گرافیک معمول کامپیوتری جدا می‌سازد و به برخی تکنیکها و الگوریتمهای خاص نیاز دارد. در این بخش و بخش بعدی دو مثال ساده خواهم آورد که این نکته را نشان می‌دهد.

اگر یک نمایش تصویریِ نوعی که توسط یک برنامهٔ گرافیک سه‌بعدی تولید شده است مورد بررسی قرار گیرد، مثلاً، پیش‌درآمد برنامهٔ اخبار شب تلویزیون، تعداد زیادی اشیاء متفاوت در حال حرکت به طرق متفاوت دیده می‌شوند. یک گوی کروی که کرهٔ زمین را نشان می‌دهد، حول یک محور

1. Hermann Karcher 2. Chuu-Lian Terng

عمودی می‌چرخد، در حالی که یک آرم در همان زمان که حول یک محور افقی می‌گردد، به سمت مرکز دید نزدیک می‌شود و . . . . این نمونه‌ای است از آنچه من از آن با عنوان دنیای گرافیک چندشیئی یاد می‌کنم. روش طبیعی برای متحرک‌سازی تصاویر در چنین دنیایی، خلق هر یک از اشیاء سه‌بعدی در یک موقعیت و با یک جهت «مبنایی» و سپس انتساب یک «ماتریس به‌هنگام‌سازی» ۴ × ۴ به این شئ است. برای هر پرده از نمایش متحرک، این ماتریس مقادیر مورد نیاز را برای انتقال و دوران شئ از وضعیت اولیه‌اش [مبنایی‌اش] به وضعیت مطلوب در این پرده، دربر دارد. برای ایجاد یک پرده از یک چنین نمایش متحرک، لازم است که هر نقطه از شئ واقع در این دنیای چندشیئی به‌وسیلهٔ ماتریس تبدیل متناظرش تغییر وضعیت داده شود. برای یک نمایش متحرک بی‌درنگ[1] از صحنه‌ای با هر میزان پیچیدگی به‌وسیلهٔ این روش، به کامپیوتری بسیار قوی، معمولاً همراه با سخت‌افزار گرافیکی ویژه، نیاز است.

از طرف دیگر، اگر یک مجسم‌سازی ریاضیِ نوعی مورد بررسی قرار گیرد، ملاحظه می‌شود که متشکل از یک شئ تنها (مثل خم، رویه، چندوجهی و . . .) است که معمولاً در مرکز صفحه قرار گرفته است و تحرک دورانی تقریباً همیشه حول مرکز صفحه صورت می‌گیرد. از یک چنین ترکیب گرافیکی با عنوان دنیای گرافیکی تک‌شیئی یاد می‌کنیم. حال البته می‌توان با نادیده گرفتن این واقعیت که $n = ۱$، با یک چنین ترکیبی دقیقاً مثل یک حالت خاص دنیای n شیئی رفتار کرد. اما ۱ عدد صحیحی به مراتب خاصتر است و درواقع به‌جای به‌کارگیری ماتریس دوران M برای هر یک از نقاط شکل‌دهندهٔ شئ، یک راه کارامدتر برای دوران دادن دنیای تک‌شیئی حول یک محور وجود دارد؛ بدین‌ترتیب که وارون ماتریس M برای تعیین موقعیت دوربین تصویربرداری و سه برداری که جهتهای [اصلی] را برای آن تعریف می‌کنند، به‌کار برده می‌شود. از حیث بصری این عمل همان اثر قبلی را خواهد داشت، اما در حالت کلی، به میزان قابل توجهی کارامدتر خواهد بود و می‌تواند امکان نمایش متحرک دورانی بی‌درنگ را بر روی کامپیوترهای سادهٔ رومیزی، بدون نیاز به سخت‌افزار گرافیکی خاص فراهم کند.

ترسیم روی پرده در برابر ترسیم پشت پرده. یک تکنیک استاندارد تصویرسازی برای نمایش یک رویه بر روی صفحهٔ نمایش کامپیوتر، «الگوریتم نقاش» است. رویه به‌صورت مجموعه‌ای از «خرده وجوه» (چندضلعیهای رنگ شده، اغلب مثلث یا مستطیل) نمایانده می‌شود. این خرده وجوه برحسب فاصله‌شان تا دوربین تصویربرداری، مرتب می‌شوند و بعد، از عقب تصویر تا جلوی آن [از دورترین خرده وجه تا نزدیکترین خرده وجه به دوربین] بر روی صفحه نمایش «نقاشی» می‌شوند. این روش، این مزیت آشکار را دارد که خرده وجه‌هایی که پشت سر دیگر خرده وجه‌ها قرار دارند، خودبه‌خود پنهان می‌شوند.

متخصصان گرافیک کامپیوتری تقریباً همیشه الگوریتم نقاش را با تکنیک دیگری به نام «میانگیری دوگانهٔ حافظه[2]» یا «ترسیم پشت پرده[3]» توأم می‌کنند، و آن به این ترتیب است که ابتدا کل رویه را در جایی موسوم به «میانگیر پشت پرده» ترسیم می‌کنند. این مکان بخشی از حافظهٔ کامپیوتر است که درست همانند حافظهٔ صفحهٔ نمایش است. فقط هنگامی‌که رویه کامل گردد، این میانگیر به حافظهٔ صفحهٔ نمایش برگردان می‌شود. نتیجه آن است که رویهٔ تکمیل شده ناگهان روی صفحه نمایش ظاهر می‌شود. علت استفاده از میانگیری دوگانه این است که در اکثر مواقع، گمان نمی‌رود که کاربر بخواهد نمای نازیبای یک رویهٔ ناقص رنگ‌آمیزی شده را ببیند.

اما در موارد خاصی، به‌کار بردن ترسیم پشت پرده برای نمایش یک رویهٔ ریاضی، یک جرم برنامه‌نویسی است که تا حد جنایت پیش می‌رود! بیشتر رویه‌های جالب توجه، بسیار پیچیده‌اند و غالباً غوطه‌ور شده‌اند نه نشانده شده. از هر موضعی که به آنها نگریسته شود، چندین «لایه» [از روی هم گذر کرده] وجود خواهد داشت که باعث می‌شود جزئیات مهم لایه‌های دورتر توسط لایه‌های نزدیکتر از نظر پوشیده شوند. تماشای رویه همچنان که به‌تدریج توسط الگوریتم نقاش ساخته می‌شود، می‌تواند تجربهٔ فوق‌العاده روشنگری باشد، آن‌گونه که برای هندسه‌دان همان نقشی را ایفا کند که کالبد شکافی برای کالبدشناس ایفا می‌کند.

با این حال، گهگاه پیامهایی از سر حسن‌نیت از اشخاص غیرریاضیدانِ آشنا به گرافیک سه‌بعدی کامپیوتر، از طریق پست الکترونیک دریافت می‌کنم که به‌طور اتفاقی برنامه‌ام را مشاهده کرده‌اند. مضمون این پیام همیشه یکسان است: برنامه‌ات خیلی خوب است، ولی جداً باید یک کتاب مقدماتی در مورد گرافیک کامپیوتری به‌دست آوری و تکنیک میانگیری دوگانه را بیاموزی تا از دست این رویه‌های نیمه‌کاره رسم شده، خلاص شوی! (معمولاً پاسخ می‌دهم که من هم از این تکنیک استفاده می‌کنم، بدین‌ترتیب که پس از آنکه رویه کاملاً به‌صورتِ روی پرده ترسیم می‌شود، حافظهٔ تصویریِ RAM را در یک میانگیر پشت پرده که از آن برای به‌هنگام‌سازی صفحهٔ نمایش استفاده می‌کنم، کپی می‌کنم. [البته] گمان می‌کنم که این طریقهٔ قهقرایی برای انجام کارها ایشان را متقاعد کرده است که وضع من [در گرافیک کامپیوتری] خراب است، چون مکاتبات ایشان معمولاً در همین جا قطع می‌شود.)

فرایندها

مجسم‌سازی فرایندها همان‌قدر مهم است که مجسم‌سازی اشیاء. وقتی ساخت برنامه‌ام را شروع کردم، احساس می‌کردم که وظیفهٔ اصلی هر برنامهٔ مجسم‌سازی، نمایش اشیاء گوناگون ریاضی است. اما با گذشت زمان متوجه شدم که این تنها یک بخش از داستان است و شاید امر بسیار مهمتر، نمایش فرایندهای ریاضی باشد. می‌دانم که ارائهٔ یک تعریف ریاضی دقیق برای مقصودی که من از «فرایند» در اینجا دارم، مشکل است؛ تعریفی که تمام موارد مهمی را که ممکن است پیش آید، شامل شود. ولی به بیان نادقیق، منظورم از فرایند، نمایش متحرکی است که در آن خانواده‌ای از موجودات ریاضیِ مرتبط با هم و یا شئ حاصل از فرایندی که به‌طور طبیعی به شئ دیگری مربوط است، نشان داده می‌شوند. شاید بهترین کار، توضیح موضوع با چند مثال باشد.

دگرریختی. دگرریختی یکی از مهمترین فرایندهاست، پس ابتدا به تشریح آن می‌پردازم. بیشتر موجودات ریاضی در خانواده‌هایی طبیعی واقع می‌شوند که برحسب پارامترهای معینی توصیف می‌شوند ــ که اگر ابتدا مجموعهٔ

1. real-time animation
2. double-buffering
3. offscreen drawing

پارامترها به گروه مناسبی از خودریختیها تقسیم شود، آنها را پیمانه[1] نیز می‌خوانند. برای مثال، هر بیضی را می‌توان با پنج پارامتر ــ ضرایب معادلهٔ ضمنی بیضی ــ توصیف کرد و اگر [این مجموعه را] به [خودریختیهای] حرکات صلب صفحه، تقسیم کنیم، می‌توان آن را با دو پیمانه یعنی طول نیمقطرهایش توصیف کرد. یک هدف اولیه در هر نظریهٔ ریاضی در بارهٔ نوع جدیدی از موجودات، معمولاً ارائهٔ یک «قضیهٔ رده‌بندی» یا به بیان نه چندان دقیق، یافتن فضای پیمانه‌ای است. گام بعدی، بررسی موشکافانهٔ این فضای پیمانه‌ای است برای پی بردن به اینکه خواص گوناگون این موجود چگونه به پیمانه‌ها وابسته هستند و اینکه کدام مقادیر پیمانه سبب پیدایش موجوداتی با خواص ویژه و قابل توجه می‌شوند. برای مثال، هنگامی‌که دو نیمقطر بیضی برابر باشد، بیضی یک دایره است و یک گروه پیوسته از تقارنها دارد، در حالی‌که بیضی در حالت کلی، تنها یک گروه متناهی از تقارنها دارد.

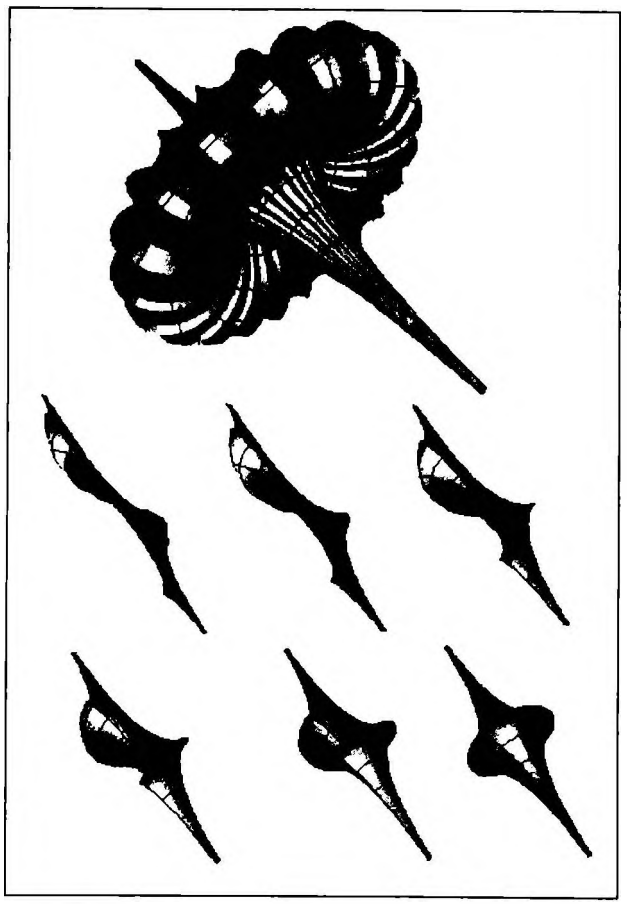
اگر بتوانیم روش خوبی برای نمایش گرافیکی یک شیء طرح کنیم که از جمله، شامل وابستگی آن شیء به پیمانه باشد، آنگاه می‌توانیم در امتداد خمی در فضای پیمانه‌ای حرکت کنیم و پرده‌هایی را که حاوی نمایش گرافیکی این شیء در نقاط مختلف این خم‌اند ترسیم کنیم. حال اگر این پرده‌ها را به‌سرعت و پشت سرهم نمایش دهیم، فیلمی از چگونگی تغییر شیء، متناظر با تغییر پیمانه‌ها در امتداد خم، به‌دست می‌آوریم. این چیزی است که آن‌را دگرریختی می‌نامم. این کار به‌وضوح می‌تواند ابزاری قوی در بررسی فضای پیمانه‌ای باشد. بسیاری اوقات، حتی وقتی‌که فضای پیمانه‌ای نامتناهیْ بعد است، خمهای ویژه‌ای وجود دارند که دگرریختیهای جالبی به‌دست می‌دهند.

برای مثال، رویه‌های مینیمال در خانواده‌هایی یک‌پارامتری (موسوم به خانواده‌های وابسته) قرار می‌گیرند که در هر یک از این خانواده‌ها، همهٔ اعضا ایزومتریک هستند، گرچه معمولاً همنهشت نیستند. با استفاده از پارامتر خانوادهٔ وابسته به‌عنوان یک پارامتر دگرریختی، یک نمایش متحرک بسیار زیبا پدید می‌آید که آن‌را اصولاً می‌توان برروی صفحات فلزی مدلسازی کرد. پیچوار و زنجیره‌وار به یک خانوادهٔ وابسته متعلق‌اند و کتابهای هندسهٔ دیفرانسیل غالباً چندین پرده از یک دگرریختی بین آنها را نشان می‌دهند. (شکل ۲ را ببینید.)

همین‌طور، فضای پیمانه‌ای برای رویه‌های شبه‌کروی را می‌توان با فضای جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل جزئی سینوسی گوردون یکی گرفت. فضای دوم، شامل خانواده‌های nپارامتری معینی است (جوابهای nـسولیتون ناب)، که متناظر با رویه‌های بسیار جالب توجهی هستند. ۱ـسولیتون‌ها متناظرند با خانوادهٔ معروف دینی[2] که شبه‌کره را شامل می‌شود. تمایل چولیان ترنگ[3] به اینکه ببینیم چه خواصی از رویه‌های متناظر با خانوادهٔ ۲ـسولیتون‌ها حین دگرریختی درون این فضا، تغییر می‌کنند، انگیزهٔ اولیهٔ من برای شروع به‌کار روی برنامه‌ام بود. (شکل ۳ را ببینید).

فرایند دگرریختی آنچنان ابزار قوی و آشکارکننده‌ای است که هر گاه رده‌ای جدید از موجودات ریاضی را به مجموعهٔ برنامه‌ام اضافه می‌کنم، مدت زمان زیادی را صرف فکرکردن و انجام آزمایشهای مبتکرانه برای بهره‌گیری از دگرریختیهای کاملاً مناسب برای آن رده می‌کنم. برای مثال فهمیدم که در نمایش نگاشتهای همدیس، دگرریختی بین یک نگاشت مفروض و نگاشت

1. modulus 2. Dini 3. Chuu-Lian Terng



شکل ۳ رویه‌های شبه‌کروی. جوابهای معادلهٔ سینوسی‌گوردون (SGE)، $u_{tt}-u_{xx}=\sin(u)$، در تناظر یک‌به‌یک با رویه‌هایی در R^3 هستند که مدلهایی از هندسهٔ هذلولوی لوباچفسکی‌اند. SGE یک معادلهٔ سولیتونی است و در بالا رویهٔ متناظر با یک جواب زمان‌ـمتناوب با عدد سولیتون ۲، موسوم به [رویهٔ] Breather دیده می‌شود. در پایین، شش پرده از دگرریختی میان خانوادهٔ دینی از رویه‌ها دیده می‌شود که با خانوادهٔ یک‌پارامتری SGEهای ۱ـسولیتون در تناظرند.

همانی در امتداد یک مسیر به‌دقت انتخاب شده راه بسیار مناسبی برای آشکارکردن ساختار نگاشت است. و بالاخره اینکه، دگرریختی روشی بدیهی برای نمایش‌دادن انشعابهای جوابهای معادلات دیفرانسیل عادی و نیز مشاهدهٔ لحظهٔ آغازین آشوب در هنگام تغییر پارامتری اساسی است. نمونهٔ بارزی از موضوع اخیر، معادلهٔ معروف لورنتس است که یکی از انگیزه‌ها را برای کارهای اولیه در مبحث آشوب فراهم کرد. درواقع لورنتس از تکنیکهای اولیهٔ کامپیوتری که در آن زمان در دسترس داشت، برای تغییردادن عدد رنولدز و مشاهدهٔ اینکه چگونه یک نقطهٔ ثابت جاذب به «جاذب لورنتس» تبدیل می‌شود، استفاده کرد.

فرایندهای دیگر. در اینجا به سرعت به چند «فرایند» دیگر اشاره می‌کنم تا حوزهٔ این مفهوم روشنتر شود.

اگر یک خم مسطح داده شده باشد، نمایش متحرکی که در آن «دایره‌های بوسان» به‌ازای نقطه‌ای در حال حرکت در امتداد خم ترسیم می‌شوند، اطلاعاتی به‌دست می‌دهد؛ در این حال، مرکز انحنای خم در حین اجرای

نمایش، گستردهٔ خم را ترسیم می‌کند. در حقیقت تعداد زیادی از چنین فرایندهای کلاسیک وجود دارد که خمهای دیگری را به یک خم مفروض ارتباط می‌دهند (مثل خمهای پدالی [پادکی]، استروفوییدها، برون‌چرخزادها، خمهای موازی و . . .)، که بیشترشان به‌کمک یک کامپیوتر با سادگی بیشتری فهمیده و تصویر می‌شوند.

برای خم فضایی، یک فرایند جالب، ساختن «لوله»ای غلافی است که خم را دربرگیرد. این کار نیاز به انتخاب یک کنج برای کلافِ قائم بر خم دارد. معمولاً «کنج فرنه» انتخاب می‌شود و لوله برای آشکارکردن این کنج مهم (ولی معمولاً غیرقابل رؤیت) به‌کار می‌رود. به دلایل زیبایی‌شناسی، ابتدا به‌نظر می‌رسد که باید لوله‌ای با مقطع عرضی گردْ انتخاب گردد. اما برای اینکه کنج به‌طور واضح دیده شود، مقطع عرضی لوله باید مربع شکل باشد. ریاضیدانان اگر این نحوهٔ نمایش را ببینند، تقریباً همیشه آن را ترجیح خواهند داد. بیشتر اشخاص معمولاً از دیدن اینکه کنج فرنه در جاهایی که انحنای منحنی کوچک است، این‌قدر سریع می‌پیچد، خیلی متعجب می‌شوند. تعویض دستگاه فرنه با یک کنج متوازی برای کلاف قائم بر خم نیز می‌تواند جالب باشد. در این حالت هیچ پیچشی وجود ندارد و کنج، حقیقتاً متوازی به‌نظر می‌رسد. اما حالا هولونومی[1] به‌وضوح قابل رؤیت می‌شود: با دورزدن در امتداد یک خم بسته، کنج معمولاً به مقدار اولیه‌اش [در شروع حرکت] باز نمی‌گردد. (شکل ۴ را ببینید).

برای رویه، فرایندهای با اهمیت عبارت‌اند از ساختن مجموعه‌های کانونی آن و رویه‌های موازی.

برای چندوجهی، دو فرایند جالب توجه عبارت‌اند از ستاره‌بندی[2] و دیگری برش گوشه‌های چندوجهی (این فرایند همان است که یک بیست‌وجهی را به یک «توپ دندانه‌دار»[3] تبدیل می‌کند). در اینجا اجرای یک دگرریختی را بین صورتهای برش زده شده و برش نخورده، آموزنده می‌دانم.

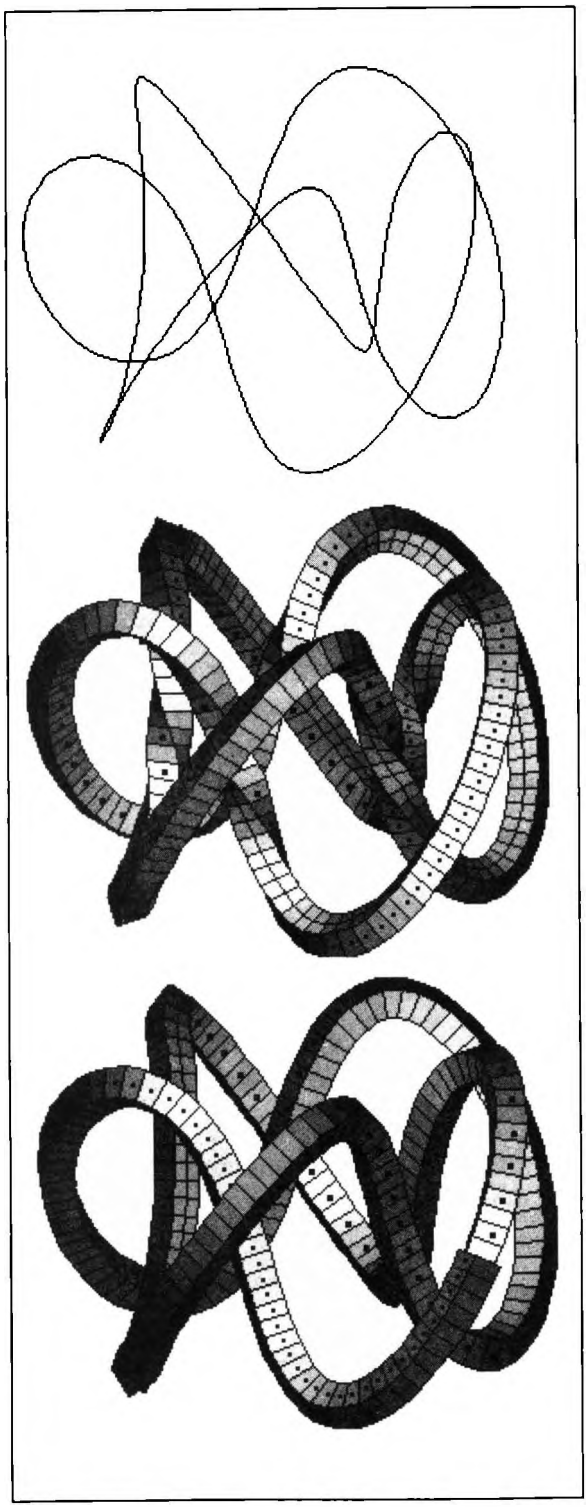
ریاضیات در برابر هنر

نباید بین مجسم‌سازی ریاضی و هنر ریاضی خلط مبحث شود. منظور من از هنر ریاضی، کارهای هنرمندان خوش‌ذوق گرافیست و مجسمه‌سازی است که موضوع اصلی کارشان از دنیای ریاضیات نشأت می‌گیرد. همه کس ترسیمات ریاضی زیبا و مجذوب‌کنندهٔ اِشِر [Sc]، گرافیست معروف هلندی نیمهٔ اول قرن حاضر را دیده‌اند. در زمانی متأخرتر نیز هنرمند و ریاضیدان روسی، آناتولی فومنکو، موزهٔ هنری ریاضی ما را با تصاویری تماشایی از مناظر فراواقع‌گرایانه، غنا بخشید، تصاویری برخاسته از اعماق تخیلات هوشمندانهٔ او که مفاهیم پیچیدهٔ ریاضی را مصور می‌کنند و روشن می‌سازند [Fo]. در حال حاضر، نسلی جدید از هنرمندان از دنیای افلاطونی ریاضیات الهام می‌گیرند. پیشتازان این جمع مجسمه‌سازانی چون هلامان فرگوسن[4]، چارلز پِری[5] و برنت کالینز[6] هستند. تمام آنها از نرم‌افزارهای مجسم‌سازی ریاضی برای خلق اشیائی که شالودهٔ مجسمه‌هایشان را تشکیل می‌دهند استفاده می‌کنند ولی همچون اِشِر، بعد از این کار، دید هنرمندانهٔ خویش را برروی این مادهٔ ریاضیِ پرداخت نشده که مبنای کارشان است، متجلی می‌کنند.

یکی از تمایزهایی که بین یک محصول گرافیکی مجسم‌سازی ریاضی و یک قطعهٔ اثر هنر ریاضی به‌نظر می‌آید، تفاوت آشکار در مدت و دشواری

1. holonomy 2. stellation 3. buckyball

4. Helaman Ferguson 5. Charles Perry 6. Brent Collins



شکل ۴ لوله‌هایی غلافی حول یک گره چنبره‌ای. یک نما از گره ۲، ۵ـچنبره‌ای و دو لولهٔ دربرگیرندهٔ آن با مقطع عرضی مربعی. لولهٔ بالایی از کنج فرنه برای کلاف قائم استفاده می‌کند، و دیگری از کنج متوازی. توجه کنید که چگونه این لوله‌ها طبیعت سه‌بعدی گره را به نمایش می‌گذارند. می‌توان دید که کنج فرنه بسیار سریع در درون چنبره می‌پیچد و چشم هولونومی نابدیهیِ کنج متوازی را کشف می‌کند؛ آن‌طور که دیده می‌شود لوله در انتهای سمت راست و پایین گره بر خودش منطبق نمی‌شود.

تولید آنهاست. اولی معمولاً به‌طور کاملاً خودکار و اغلب ظرف تنها چند ثانیه از وقت کامپیوتر تولید می‌شود، حال آنکه دومی غالباً روزها و یا حتی هفته‌ها کار دستیِ ماهرانهٔ شخص هنرمند را لازم دارد و شاید پیش از آن، مدت زمانی بس طولانیتر صرف اندیشیدن در بارهٔ طرح و نقشهٔ آن شود. اما این طریقهٔ نگریستن به موضوعات، حقیقت عمیقتری را بد جلوه می‌دهد. کار جدی برای طرح و خلق یک اثر گرافیکی مجسم‌سازی ریاضی واقعاً وقتی محقق می‌شود که الگوریتمها، پیاده‌سازی و برنامه‌نویسی شوند. این عمل برای موجودات پیچیده ممکن است بخشی طولانی و صعب‌العبور از مسیر تحقیق باشد. در اصل، خلاقیت در مجسم‌سازی ریاضی از آنِ برنامه‌نویس است، نه کامپیوتر.

تفاوت واقعی بین این دو، در اهداف غایی آنهاست. در خلق آثار هنر ریاضی، ریاضیات یک نقطهٔ شروع است، ولی مسیر را هنر هدایت می‌کند. «مجوز هنری»، این آزادی را به هنرمند می‌بخشد که از وفاداری کامل به ریاضیات چشم بپوشد و از دیگر اصول زیبایی‌شناسی به منظور تأکید بر وجوهی از واقعیت که هنرمند سعی در نشان‌دادن آنها به ما دارد، استفاده کند.

اما در مجسم‌سازی ریاضی، اصل کنترل‌کننده همیشه باید این باشد که کیفیات و خواص اصولی موجوداتی که مجسم می‌شوند به آشکارترین وجه ممکن نشان داده شوند. در برابر وسوسهٔ «خوشگل‌کاری» در مجسم‌سازی باید مقاومت شود، به‌خصوص اگر اطلاعات ریاضی در آن میان از دست بروند. یک نمونهٔ این قاعده پیشتر ذکر شد، یعنی، به‌کارگیری مربع به‌جای دایره به‌عنوان مقطع عرضی لولهٔ غلافی حول خمهای فضایی به منظور مجسم ساختن کنج کلاف قائم.

در اینجا مثالی دیگر، این بار از نظریهٔ رویه‌ها، می‌آوریم. بررسی تعداد زیادی از مجسم‌سازیهای رویه که توسط کامپیوتر انجام شده‌اند، نشان می‌دهد که تقریباً همهٔ آنها در یکی از سه نوعی که از آنها به‌عنوان رویهٔ با قالب سیمی، رویهٔ وصله‌ای و رویهٔ سرامیکی یاد خواهم کرد، قرار می‌گیرند. عبارت «رویهٔ با قالب سیمی» بی‌نیاز از توضیح است. در تصویرسازی وصله‌ای، اسکلت قالب سیمی [آن‌گونه که در تصویرسازی رویهٔ سیمی هست]، باز هم نمایش داده می‌شود ولی علاوه بر آن داخل هر یک از وصله‌های مستطیل شکل با رنگ خاصی پر می‌شود. این رنگ، مشابه اثر بازتابش نورِ چندین منبع نور از سطح سفیدرنگ رویه است که آن منابع در مکانهای متفاوت و به رنگهای متفاوت هستند. اگر این مکانها و رنگها با دقت انتخاب شوند، تصویرسازی وصله‌ای، جلوهٔ سه‌بعدی واقع‌نمایانه‌ای از رویه ارائه می‌کند. در تصویرسازی سرامیکیِ رویه، قالب سیمی حذف می‌شود و فقط وصله‌های رنگ شده نمایش داده می‌شوند. اگر وصله‌ها به‌قدر کافی کوچک باشند، به‌نظر می‌رسد رنگ سطح رویه به همواری تغییر می‌کند. در این حالت، نتیجهٔ تصویرسازی باز هم واقع‌نمایانه است.

اکنون، شخص غیرریاضیدان ممکن است احساس کند که قالب سیمی، بی‌ربط است و نمونهٔ سرامیکی زیباتر به چشم می‌آید. اما زیبایی به نظر بیننده بستگی دارد. در چشم هندسه‌دان، نمونهٔ سیمی [۲] و یا وصله‌ای غالباً زیباتر به‌نظر می‌رسد چون، حاوی اطلاعات ریاضی بیشتری است که با حذف شبکهٔ سیمی از بین می‌روند. درواقع، اگر شبکه‌بندی سیمی با دقت انتخاب شده باشد، شبکه‌ای متعامد خواهد بود که می‌تواند ساختار همدیس یا حتی متریک ریمانی القاءشده از غوطه‌وریِ رویه در R^3 را نمایش دهد. با مشاهدهٔ مرحله به مرحلهٔ سه نمونه از دگرریختی بین پیچوار و زنجیره‌وار که به‌ترتیب به‌صورت سیمی، وصله‌ای و سرامیکی تصویرسازی شده‌اند، این موضوع به طرز نمایانی آشکار می‌گردد. حقیقت مهمی که بناست با این اشکال نشان داده شود، یعنی، ایزومتریک بودن یک دگرریختی در خانواده‌ای وابسته، در دو نمونهٔ اول به‌خوبی به چشم می‌آید اما در تصویرسازی سرامیکی کاملاً از دید مخفی شده است (شکل ۲). منظور این نیست که تصویرسازی وصله‌ای ضرورتاً همیشه بهتر از حالت سرامیکی است بلکه این است که هنگام استفاده از نرم‌افزار برای مجسم‌سازی ریاضی، هدف آرمانی باید این باشد که با تنظیم دقیق تمام گزینه‌های موجود، آن دسته از ویژگیهای ریاضی که در موردی خاص باید مورد توجه قرار گیرند، به بهترین صورت نمایش داده شوند، و نباید اجازه داد تا مفاهیم زیبایی‌شناسی، ملاحظات ریاضی را تحت‌الشعاع قرار دهند.

کاوشکدهٔ ریاضیات

بر کسی پوشیده نیست که مقدار غیرقابل باوری از اطلاعات روی شبکهٔ جهانی وب هنوز سازماندهی ضعیفی دارند و به‌راحتی در یک طبقه‌بندی برحسب ربط و کیفیت قرار نمی‌گیرند. تلاش برای جداکردن قطعه‌های پربها از این تودهٔ درهم و برهم ممکن است کاری بی‌ثمر باشد. با به‌کارگیری هر کدام از برنامه‌های جستجوی شبکهٔ وب برای تهیهٔ فهرستی از پایگاههای وب که شامل ارجاعات به تقریباً هر مبحث قابل تصور باشد، شبکه‌هایی از آدرسهای اینترنتی (یعنی URLها)، که احتمالاً با موضوع مورد جستجو در ارتباط‌اند، به‌دست می‌آید. ولی وارسی دقیق در میان آنها برای یافتن معدودی که اهمیت جدی دارند، معمولاً کاری سخت و وقت‌گیر است.

طی سال گذشته، به‌طور پیگیر، اینترنت را برای یافتن منابعی برای مجسم‌سازی ریاضی جستجو می‌کردم [۳]، هم برای تدارک نوشتن این مقاله و هم برای استفاده در پروژه دیگری که مشغول به آن هستم. شگفت‌آور و خوشحال‌کننده آن بود که، می‌دیدم چه مطالب زیادی در این زمینه می‌توان یافت و این مجموعه از مطالب با چه سرعتی در حال رشد است. البته کیفیت آنها یکدست نیست؛ برخی آماتوری هستند و سرسری تهیه شده‌اند. اما مقدار زیادی کارِ با کیفیت حرفه‌ای نیز وجود دارد. همان‌طور که به‌تدریج این مطالب را برای اهداف فوری خود مرتب می‌کردم، به این فکر افتادم که می‌توان با سازماندهی دقیقِ بهترین مجسم‌سازیها و نمایشهای متحرکِ موجودات و فرایندهای ریاضی، منبعی مفید فراهم کرد و با فهرست‌بندی و مستندسازی آنها یک موزهٔ ریاضیِ آماده به کار روی شبکه تشکیل داد که من از آن به‌عنوان کاوشکدهٔ ریاضی یاد می‌کنم. اجازه دهید آنچه را در فکر دارم با جزئیات بیشتری تشریح کنم.

کاوشکدهٔ ریاضی به «شاخه‌ها»یی تقسیم می‌شود. در آنجا شاخه‌ای برای رویه‌ها، شاخه‌ای برای چندوجهیها، شاخه‌ای برای فرکتالها، شاخه‌ای برای کاشیکاریها، شاخه‌ای برای معادلات دیفرانسیل عادی و ... وجود دارد. شاخه‌ای نیز به یک مدرسهٔ موزه‌ای اختصاص داده می‌شود. در این شاخه، بسته‌های نرم‌افزاری برای مجسم‌سازیها و نیز مستندات و خودآموزهایی که

نحوهٔ به‌کارگیری این نرم‌افزارها را تشریح می‌کنند وجود دارد. هر شاخه به نگارخانه‌هایی تقسیم می‌شود. برای مثال، شاخهٔ رویه‌ها، نگارخانه‌ای برای رویه‌های شبه‌کروی، نگارخانه‌ای برای رویه‌های مینیمال و امثال آنها، دارد. برخی نگارخانه‌ها نیز به غرفه‌هایی تقسیم می‌شوند.

در آنجا یک فهرست راهنمای اصلی وجود خواهد داشت که فهرست تمام «موجودی» کاوشکده به‌صورت خلاصه در آن می‌آید. هر شاخه و نگارخانه، فهرست راهنمای مفصلتر مربوط به خود را دارد که همراه با پیش‌پرده‌های کوتاه از همهٔ موجودات نگارخانه است. البته این فهرستهای راهنما به زبان html[1] نوشته می‌شوند و یک موجود یا یک نمایش متحرک، با کلیک کردن روی نام آن بر صفحهٔ نمایش کامپیوتر ظاهر می‌شود.

هر محصول مجسم‌سازی با یک عنوان کوتاه همراه است، که دربردارندهٔ شناسه، نام فرد خلق‌کننده و سایر مشخصه‌های کتابنامه‌ای آن است. به‌علاوه، این عنوان شامل یک رشتهٔ ارتباطی به مستندات ریاضی شیئی که مجسم‌سازی شده است، می‌باشد. این مستندات شامل اطلاعاتی در بارهٔ شخص ابداع‌کننده، خواص ویژه، قضایای ریاضی مرتبط با آن ، روابطش با دیگر اشیاء، راههای جالب برای دگرریختی آن و ... می‌باشد. همین‌طور، هر شاخه و نگارخانه مستنداتی دارد که چشم‌اندازی کلی و سریع از حوزهٔ ریاضی مربوطه و ارجاعاتی به یک یا چند مقالهٔ تخصصی که موضوع را به تفصیل بررسی کرده‌اند، در اختیار قرار می‌دهد.

تاریخچه

دو مسأله در ریاضیات به پیشبرد مجسم‌سازی ریاضی کمک کرده‌اند: مسألهٔ پشت و رو کردن کرهٔ دوبعدی و مسألهٔ ساختن رویه‌های مینیمالِ کاملِ نشانده شدهٔ جدید، به‌خصوص نمونه‌هایی با گونای بالا. در مورد پشت و رو کردن، هدفْ روشن ساختن چنان فرایند پیچیده‌ای بود که تنها تعداد بسیار اندکی از اشخاص و حتی متخصصان می‌توانستند آن‌را با تمام جزئیاتش، در ذهن مجسم کنند. در مورد رویه‌های مینیمال، مجسم‌سازی عملاً به ترسیم مسیر اثباتهای دقیق ریاضی کمک کرد.

پشت و رو کردن کره. فرض کنید $f : S^n \to R^{n+1}$ یک نگاشت هموار از کرهٔ nبعدی به‌توی فضای اقلیدسی $(n+1)$بعدی است. به یاد آوریم که f یک غوطه‌ورسازی است اگر به‌طور موضعی یک نشانندهٔ ناتکین باشد یا به‌طور معادل (براساس قضیهٔ تابع ضمنی)، اگر در هر نقطهٔ p ازکره، دیفرانسیل Df_p، یک به یک باشد. در این وضعیت، می‌توانیم یک خودنگاشت G_f روی S^n (موسوم به نگاشت گاوسی f) را به طریق زیر به f نسبت دهیم. فضای مماس (جهتدار) بر S^n در p، توسط Df_p به‌روی یک زیرفضای nبعدی جهتدار از R^{n+1}، مثل V، نگاشته می‌شود. در این حال $G_f(p)$، یکی از دو بردار یکّهٔ قائم بر V است که جهت V را به جهت استاندارد R^{n+1} توسعه می‌دهد. درجهٔ G_f را عدد چرخش f می‌نامیم.

هوموتوپیِ f_t از $f = f_0$، یک هوموتوپی منتظم است اگر هر مرحلهٔ آن یک غوطه‌ورسازی باشد و به‌علاوه $f_t(x)$ توأماً نسبت به t و x هموار باشد. در این وضعیت، Df_t یک هوموتوپی است و به‌سادگی دیده می‌شود که یک هوموتوپی، G_{f_t}، از نگاشت گاوسی القاء می‌کند به‌نحوی که عددهای چرخش f_0 و f_1 برابرند. با محاسبهٔ ساده‌ای می‌توان نشان داد که عدد چرخش نگاشت همانی ۱ و عددچرخش نگاشت متقاطر $(-1)^n$ است.

هر پشت‌وروسازیِ کرهٔ nبعدی طبق تعریف عبارت است از یک هوموتوپی منتظم بین نگاشت همانی و نگاشت متقاطر. با این هوموتوپی درواقع کرهٔ nبعدی پشت و رو می‌شود، بدون آنکه در حین این فرایند، کره تا بخورد. طبق آنچه هم‌اکنون دیدیم، هیچ‌گونه پشت‌وروسازی برای دایره (یا هر کره‌ای با بعد فرد) نمی‌تواند وجود داشته باشد. ولی در مورد کرهٔ ۲بعدی چطور؟ عدد چرخش، مانع این کار نیست، اما آیا می‌توانیم واقعاً آن‌را پشت و رو کنیم؟ برای بیشتر متخصصان توپولوژی دیفرانسیل در اواسط دههٔ ۱۹۵۰ این‌گونه به‌نظر می‌رسید که جواب باید منفی باشد. به این دلیل وقتی استیون اِسمیل در رسالهٔ دکترایش [Sm] قضیه‌ای کلی ثابت کرد که طبق یکی از نتایج آن، هر دو غوطه‌ورسازی کرهٔ دوبعدی در R^3 به‌طور منتظم هوموتوپیک هستند، باعث شگفت‌زدگی زیاد و حتی قدری ناباوری شد. اثبات اسمیل اصولاً ساختنی بود اما آنچنان پیچیده بود که عملاً روشی کارا برای به‌دست آوردن یک پشت‌وروسازی صریح فراهم نمی‌کرد. اولین پشت‌وروسازی صریح، ظاهراً توسط آرنولد شاپیرو در ۱۹۶۱ کشف شد. شاپیرو هرگز آن را منتشر نکرد اما آنتونی فیلیپس آن‌را در مقاله‌ای (همراه با تصاویر) در مجلهٔ ساینتیفیک آمریکن [Ph] در سال ۱۹۶۶ توصیف کرد که برای اولین بار مسألهٔ پشت‌وروسازی کره را در معرض توجه عموم قرار داد.

تمام پشت‌وروسازیهای صریحی که مطرح شده‌اند، آنچنان پیچیده‌اند که بیشتر اشخاص تنها با بارها تماشای یک مجسم‌سازی متحرک قادرند چگونگی عملکرد آنها را دریابند. اولین پشت‌وروسازی نسبتاً ساده، توسط برنار مورن[1] در سال ۱۹۶۷ کشف شد. تعدادی از مراحل پشت‌وروسازی مورن به‌صورت مدلهایی از توری سیمی توسط چارلز پیو[2] به تصویر درآمد. نلسن ماکس [MC] با اندازه‌گیری دقیق دستی، مکان گرههای این مدل مشبکه‌ای را به اطلاعات رقمی برای کامپیوتر تبدیل کرد. سپس با استفاده از یک کامپیوتر برای درونیابی گرههای سه‌بعدی به‌دست آمده، یک نمایش متحرک دگرریختی را به صورت یک فیلم (پشت و روکردن یک کره) تولید کرد و با اقامهٔ این استدلال قطعی که «دیدن باورکردن است»، همهٔ شکاکان باقیمانده را متقاعد کرد که کرهٔ ۲بعدی را به‌راستی می‌توان پشت و رو کرد. ماکس در دو فیلم دیگر (هوموتوپی منتظم در صفحه، قسمت اول و دوم)، از تکنیکهای مجسم‌سازی برای تشریح صورت و اثبات قضیهٔ مشهور به ویتنی-گراوشتاین[3] استفاده کرد، که حاکی است از اینکه برابربودن عددهای چرخش دو غوطه‌ورسازی هموار دایره در صفحه برای وجود هوموتوپی منتظم بین آنها نه تنها لازم بلکه کافی نیز هست.

بعد از اولین مجسم‌سازی کامپیوتریِ پشت و روکردن کره، مجسم‌سازیهای بسیارِ دیگری مطرح شده‌اند. یکی از آنها را ویلیام ترستن معرفی کرد و به شکل فیلم زیبایی به نام پشت و رو کردن، ساخته شد [L]. این فیلم به‌همراه یک بروشور بسیار خواندنی به نام ابجاد حرکت که سیلویو لِوی آن‌را نوشته است، در دسترس است. این بروشور گزارش مستندی از ساخت فیلم و ریاضیات مربوط به آن و همین‌طور جزئیات بیشتری در بارهٔ تاریخچهٔ

1. hypertext markup language

1. Bernard Morin 2. Charles Pugh 3. Whitney-Graustein

پشت‌وروسازی کره تا سال ۱۹۹۵ است. یکی از پشت‌وروسازیهای جدید و بسیار جالب که از نرم‌افزار Surface Evolver نوشتهٔ براکی استفاده می‌کند در [Sc] و [FSKB] توصیف شده است.

ساختن رویه‌های مینیمالِ نشانده شده. نظریهٔ رویه‌های مینیمال، آمیزه‌ای جذاب از نظریهٔ توابع مختلط، معادلات دیفرانسیل جزئی و هندسهٔ دیفرانسیل است و طی قریب به یک قرن، تلاش خلاقانهٔ نسلهای متوالی از ریاضیدانان صرف آن شده است. فعالیتهای اخیر، بر مطالعهٔ رویه‌های مینیمالِ کاملِ نشانده شده با «توپولوژی متناهی» (یعنی، رویه‌های همدیس با یک رویهٔ ریمانی فشرده با تعداد متناهی نقطهٔ حذف شده) متمرکز شده است. تا دو دههٔ پیش، تنها نمونه‌های شناخته شده از چنین رویه‌هایی، صفحه، زنجیره‌وار و پیچوار بودند که همه‌شان برای مونیه[1]، هندسه‌دانِ هم‌عصر با انقلاب آمریکا، شناخته شده بودند. این واقعیت که در مدت زمانی این چنین طولانی، نمونه‌های بیشتری از این‌گونه رویه‌ها کشف نشده بودند، به این حدس [به ظاهر] بدیهی منجر شده که حقیقتاً هیچ رویهٔ دیگری از این نوع وجود ندارد. در حدود ۳۰ سال پیش رابرت آسرمن[2] بررسی ردهٔ نسبتاً محدودتری از رویه‌های مینیمال کامل را آغاز کرد، یعنی رویه‌هایی که انحنای کل (انتگرال انحنای گاوسی) شان متناهی است. با بررسیهای آسرمن عاقبت قیود بسیار محکمی برای هر نمونهٔ جدید ممکن از چنین رویه‌های نشانده‌شده‌ای ارائه شد. دههٔ دیگری گذشت تا سلسو کاستا[3] در رساله‌اش مثالی از یک غوطه‌وری مینیمال با انحنای متناهی از چنبرهٔ مربعیِ سه‌سوراخه کشف کرد. این رویه تمام قیود شناخته‌شده [لازم] برای نشانده‌شدن را براورده می‌کرد. ولی معادلات چنان پیچیده بودند که به نظر رسید هیچ راه‌حلی برای فراهم کردن جزئیات تحلیلی مورد نیاز برای اثبات دقیقِ این قضیه که رویهٔ کاستا هیچ تقاطعی با خود ندارد، وجود ندارد.

دیوید هافمن در یک مکالمهٔ تلفنی با آسرمن، مطالبی در بارهٔ رویهٔ کاستا شنید و به سرعت تصمیم گرفت از تکنیکهای گرافیک کامپیوتری برای مجسم‌ساختن رویهٔ کاستا استفاده کند، تا همین اندازه که تعیین کند آیا لااقل به نظر می‌رسد رویه نشانده شده هست یا نه؛ و اگر چنین بود آنگاه برخی سرنخهای بصری نیز ممکن است دیده شود که امکان دارد به اثباتِ دقیقِ نشاندنی‌بودن این رویه کمک کند. هافمن ایده‌هایش را با ویلیام میکس در میان گذاشت. او نیز از امکان به‌کارگیری روشهای کامپیوتری به طریقی این چنین بدیع به هیجان آمده بود. آنها به‌همراه جیمز هافمن، متخصصی در برنامه‌نویسی گرافیک کامپیوتری، مشغول کار شدند و توانستند این برنامه را به‌مدت چندین هفته اجرا کنند. در این حین آنها متناوباً یا به تصاویر تولید شده توسط کامپیوتر خیره می‌شدند و یا به جستجوی اثباتهای دقیقی برای حدسهای شگفتی‌آوری که این تصاویر به ذهن متبادر می‌کرد، می‌پرداختند. (شکل ۱ را ببینید.) مقالهٔ خوب دیوید هافمن [H] که این پروژه را توصیف می‌کند، مطالبی فوق‌العاده خواندنی است. نمی‌توانم کاری بهتر از این انجام دهم که بخش کوچکی از روایت او را از این داستان نقل کنم:

> ... توانستیم تصاویری از رویه را خلق کنیم. آنها ناقص بودند ... با این حال، جیم هافمن و من توانستیم بعد از یک شب طولانی خیره شدن به نماهای تصویر قائمی از رویه از دیدگاههای مختلف، بفهمیم که رویه هیچ تقاطعی با خود ندارد. خیلی هم متقارن بود. معلوم شد این تقارن کلیدی برای اثبات نشاندنی‌بودن رویه است. در مدت یک هفته، مسیر اثباتِ نشاندنی‌بودن رویه به‌دست آمد. در آن مدت، از گرافیک کامپیوتری به‌عنوان راهنمایی برای «تحقیق در صحت» حدسهای معینی در بارهٔ هندسهٔ این رویه، استفاده می‌کردیم. می‌توانستیم بین معادلات و تصاویر رفت‌وآمد کنیم. تصاویر به‌عنوان راهنمای تحلیل، بینهایت مفید بودند.

1. J. Meusnier 2. Osserman 3. Celsoe Costa

مقاله با این عبارات پایان می‌یابد:

> وظیفهٔ مدلهای خلق شده توسط کامپیوتر — برخلاف مدلهای گچی — به مصورسازی فرآورده‌های نهایی فهم ریاضی محدود نمی‌شود. آنها می‌توانند بخشی از فرایندِ کارِ ریاضی باشند.

نرم‌افزارهای مجسم‌سازی ریاضی

برنامهٔ من، 3D-Filmstrip، یک ابزار مجسم‌سازی ریاضی برای کامپیوترهای مکینتاش است که به زبان Object Pascal نوشته شده است. هدف عمده‌ای که راهنمای من در ساخت این برنامه بود، در دسترس قراردادن گسترهٔ متنوعی از مجسم‌سازیهای ریاضی جالب توجه، از بسیاری از حوزه‌های ریاضیات، به‌وسیلهٔ رابطی[1] بوده است که حتی برای کاربران جدید و غیر برنامه‌نویسان نیز به‌سادگی قابل استفاده باشد. تنها کافی است شیئی از یک منوی پایین‌رونده[2] انتخاب شود (یا با واردکردن تعدادی فرمول جبری، یک «شئ کاربر» توصیف گردد)، آنگاه بلافاصله یک نمای پیش‌فرض از آن شئ مشاهده می‌شود. چندین منو برای تنظیم دلخواه نما به طرق گوناگون وجود دارد. منویی نیز برای نمایش متحرک، وجود دارد. برای توضیحات کاملتر، شامل مستندات جامع در قالب فرامتنی (HTML)، صفحهٔ خانگی برنامهٔ 3D-Filmstrip را روی شبکهٔ وب [۴] مشاهده کنید {۳dfs}. این صفحه همچنین شامل یک رشتهٔ ارتباطی به نگارخانه‌ای از مجسم‌سازیها و نمایشهای متحرک در قالبِ QuickTime است که به‌وسیلهٔ این برنامه ساخته شده‌اند. کاربران مکینتاش می‌توانند یک کپی از برنامه‌ام را برای استفادهٔ شخصیشان، با انتقال آن از طریق یک رشتهٔ ارتباطی واقع در صفحهٔ خانگی برنامه و یا به‌وسیلهٔ یک ایستگاه‌کاری ftp با اتصال به `ftp://rsp.math.brandeis.edu/pub/` دریافت کنند.

من به‌عنوان تولیدکنندهٔ یک بستهٔ نرم‌افزاری خاص برای مجسم‌سازی ریاضی، فکر می‌کنم شایسته نیست که در مقاله‌ای چون این، به بررسی دیگر نرم‌افزارهای «رقیب» بپردازم، بنابراین، به ارائهٔ فهرستی از برخی از آنها که شناخته‌شده‌تر از دیگران هستند، همراه با توصیف مختصری از هر یک، بسنده می‌کنم.

تعدادی بستهٔ نرم‌افزاری تجاری با قابلیتهایی برای مجسم‌سازی ریاضی وجود دارد که شاید شناخته‌شده‌ترینِ آنها عبارت‌اند از «سه M»: متلب[3] {MLb}، مِی‌پل[4] {Mpl} و متمتیکا[5] {Wri}. مجوزهای

1. interface 2. pull-down menu 3. Matlab 4. Maple 5. Mathematica

نرم‌افزارهای آماده به کار مجسم‌سازی ریاضی

{3dfs} 3D-Filmstrip Home Page, http://rsp.math.brandeis.edu/public_html
{Evol} Ken Brakke's Surface Evolver Home Page, http://www.susqu.edu/facstaff/b/brakke/evolver/evolver.html
{Geom} Geomview Home Page, http://www.geom.umn.edu/software/download/geomview.html
{Grp} Grape Home Page, http://www-sfb288.math.tu-berlin.de/~konrad/grape/grape.html
{Oor} Oorange Home Page, http://www-sfb288.math.tu-berlin.de/oorange
{Snap} SnapPea Home Page, http://www.geom.umn.edu/software/download/snappea.html
{Sup} Superficies FTP Site, ftp://topologia.geomet.uv.es/pub/montesin/Superficies_Folder/
{Surf} Surf Home Page, http://www.mathematik.uni-mainz.de/AlgebraischeGeometrie/surf/surf.shtml
{MLb} Mathworks (Matlab) Home Page, http://www.mathworks.com/products/matlab/
{Mpl} Maple Home Page, http://www.maplesoft.on.ca/
{Wri} Wolfram Research (Mathematica) Home Page, http://www.wri.com/

استاندارد این برنامه‌ها گرانقیمت است ولی نسخه‌های دانشجویی کم‌بهای آنها نیز در دسترس است و بسیاری از دانشگاهها مجوز درون سازمانی آنها را دارند. اینها در وهلهٔ اول برای مجسم‌سازی ریاضی تهیه نشده‌اند. مِی‌پل و متمتیکا برنامه‌هایی برای محاسبات نمادی هستند و مَتلب، برنامه‌ای برای آنالیز عددی است. اما هر سه زمینه‌های بسیار خوب گرافیکی برای نمایش نتایج محاسباتشان دارند که آنها را به محیطی [پایگاهی] بسیار عالی برای مجسم‌سازی ریاضی تبدیل می‌کند. یک مشکل جزئی این برنامه‌ها این است که هر یک از آنها زبان برنامه‌نویسی مربوط به خود را دارد که کاربر برای انجام‌دادن هر کاری که پیش‌پاافتاده نباشد باید آن‌را بیاموزد. اما این زبانهای برنامه‌نویسی، زبانهای تفسیری بسیار سطح بالا هستند و یادگیری و به‌کارگیری آنها به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساده‌تر از زبانهای ترجمه‌ای استاندارد است. یک امتیاز مهم اینها آن است که نسخه‌های مناسبی از هر یک از این برنامه‌ها برای مکینتاش، وینتل[1] و نگارشهای گوناگون یونیکس[2]، موجود است، و نرم‌افزار تولیدشده برای هر یک از این محیطها به سهولت قابل انتقال به دیگر سیستمهاست.

برنامهٔ Geomview {Geom}، به خودی خود یک برنامهٔ مجسم‌سازی ریاضی نیست. بلکه، آنچنان‌که نامش تداعی می‌کند، یک برنامهٔ نمایش‌دهنده است. برای استفاده از آن، کاربر باید یک شیء دوبعدی یا سه‌بعدی را در یک قالب از پیش تعیین‌شده، یا با نوشتن برنامه‌ای برای انجام چنین کاری و یا با استفاده از برخی برنامه‌های دیگر (مثل Surface Evolver؛ ادامهٔ مطلب را ببینید.) که یک رابط توکار برای Geomview دارند، ایجاد کند. Grape {Grp} و Oorange {Oor} مشابه Geomview هستند اما آنها امکانات به‌مراتب مجتمع‌تری برای خلق مضامین ریاضی که بناست

1. Wintel 2. UNIX

نمایش داده شوند، فراهم می‌کنند. برنامه‌نویسان شایستهٔ C که به کار روی یک ایستگاه کاری یونیکس عادت دارند احتمالاً درمی‌یابند که به‌کارگیری یکی از این برنامه‌ها، ساده‌ترین رهیافت است برای اینکه خودشان به تنهایی مجسم‌سازیهای ریاضی استادانه‌ای انجام دهند. اما کاربران مکینتاش یا وینتل و آنهایی که تجربهٔ برنامه‌نویسی با یک زبان برنامه‌نویسی ترجمه‌ای را ندارند، احتمالاً با یکی از نرم‌افزارهای تجاری که در بالا ذکرشان رفت، راحت‌تر کار خواهند کرد.

باید همچنین از برخی برنامه‌های مجسم‌سازی ریاضی یاد کنم که برای اهداف خاص نوشته شده‌اند. برنامه‌های زیادی برای نمایش جوابهای معادلات دیفرانسیل عادی و تحلیل آنها به‌ازای ویژگیهای گوناگونی که در مباحث دستگاههای دینامیکی مطرح می‌شوند (مثل مدارهای بسته، دورهای حدی و ...) وجود دارد. به‌راستی، استفاده از چنین برنامه‌هایی به‌سرعت به‌صورت یک جزء ضروری در آموزش این موضوع درمی‌آید. برخی از این برنامه‌ها مستقل هستند، در حالی که برخی دیگر به‌منظور آنکه همراه با مَتلب، مِی‌پل یا متمتیکا به‌کار روند نوشته شده‌اند.

مجسم‌سازی خمها و رویه‌هایی که به‌صورت ضمنی تعریف شده‌اند به مسائل جالب زیادی، هم برای ریاضیدان و هم برای برنامه‌نویس، منجر می‌شود. ضرورت حل عددی معادلات مربوطه، مشکلی بزرگ است. ساختن الگوریتمهایی کارامد و قابل اعتماد برای یافتن تمام جوابها، وقتی‌که هیچ قیدی روی تکنیکی‌های مجاز وجود ندارد، مسأله‌ای کاملاً حل شده نیست. همین وضعیت حتی برای موارد خاص و پراهمیتی نیز که مورد توجه متخصصان هندسهٔ جبری است وجود دارد، یعنی در مواردی که موجودات مورد بررسی به‌عنوان جوابهای معادلات چندجمله‌ای تعریف شده‌اند. مشکل دیگر این است که رویه‌هایی که به‌طور ضمنی تعریف شده‌اند، فاقد یک شبکه‌بندی طبیعی [براساس پارامتر] هستند و بنابراین باید از تکنیکهای ویژه‌ای (مثل روش موسوم به «پویش شعاعی[1]») برای تصویرکردن آنها استفاده کرد. به‌واسطهٔ همین مشکلات (و به‌واسطهٔ اهمیت هندسه جبری)، چندان عجیب نخواهد بود اگر تعدادی برنامهٔ ویژه ساخته‌شده برای نمایش رویه‌های ضمنی وجود داشته باشد. برای کامپیوترهای مکینتاش برنامهٔ آنجل مونته‌سینوس آمیلیبیا[2] با نام Superficies{Sup} وجود دارد. این برنامه از آن نوع رابط شهودی برای کاربر برخوردار است که از یک برنامهٔ مکینتاش انتظار می‌رود. این برنامه علاوه بر نمایش رویه‌ای که معادلهٔ ضمنی آن از طریق کاربر تأمین می‌شود، خمهای ژئودزیک، خطوط مجانبی و خطوط انحنا را برروی رویه ترسیم می‌کند. در عالم یونیکس، برنامه‌ای با نام Surf، {Surf}، وجود دارد که توسط استیون اندراس[3] نوشته شده است. (اندراس متن برنامه‌اش را تحت مجوز GNU قابل دسترس ساخته است).

دو برنامهٔ قابل ذکر دیگر با اهداف خاص عبارت‌اند از SnapPea، {Snap}، نوشتهٔ جف ویکس[4] برای تولید و بررسی هندسه‌های هذلولوی سه‌بعدی و برنامهٔ Surface Evolver، {Evol}، نوشتهٔ کِن براکی[5]، برای بررسی تحول رویه‌ها تحت شاره‌های گوناگونِ مینیمم‌سازندهٔ «انرژی».

1. ray-tracing 2. Angel Montesinos Amilibia 3. Endrass
4. Jeff Weeks 5. Ken Brakke

چرا نرم‌افزار مجسم‌سازی ریاضی بنویسیم؟

در این مورد باید اعتراف کنم که یکی از اهدافم، تشویق دیگران به مشارکت در ساخت کاوشکدهٔ ریاضی است. تولید نرم‌افزار و مضامین مجسم‌سازی ریاضی، عرصه‌ای نسبتاً جدید و در حال رشد است و زمینه‌های بسیاری برای عرضهٔ مقالات بکر و پرمعنی دارد. من عمدتاً به این خاطر روی مجسم‌سازی ریاضی کار می‌کنم که از مبارزه برای «زنده‌کردن» مفاهیم مجرد ریاضی، با پیاده‌سازیشان در قالب نرم‌افزارها، لذت می‌برم. اما بیش از آن، این‌کار را شکل جدیدی از نشر [ریاضیات] می‌دانم. بخشی از مسؤولیت (و لذت) زندگی دانشگاهی، دادن نوعی صورت ماندگار به ایده‌هایی است که سخت در بارهٔ آنها اندیشیده‌ایم؛ و منظور ما از نشر به هر حال همین است.

معمول چنین بوده است که ریاضیدانان این مسؤولیت را با نوشتن کتابها و مقالات تحقیقی به انجام می‌رسانده‌اند و بی‌شک به این شیوهٔ ابتدایی نشر ریاضیات ادامه خواهند داد. برنامه، جایگزینی برای قضیه نیست و استادیاری که نگران کافی بودن مقالاتش برای احراز شرایط استخدام رسمی در دانشگاه است احتمالاً پیش از درگیرکردن خود در یک پروژهٔ نرم‌افزاری وقت‌گیر، باید دوچندان تأمل کند. با وجود این، از آنجا که ریاضیات روزبه‌روز پیچیده‌تر می‌شود، داشتن ابزارهای مناسب برای تکمیل و تجهیز ادراک شهودیمان و برای انتقال ایده‌های شهودیمان به دیگران، مرتباً بااهمیت‌تر می‌شود.

تا پیش از رواج سیستمهای گرافیکی جدید که برای مدلسازیهای هندسیِ جالب توجه، به قدر کافی قدرتمند هستند، تنها تعداد اندکی از مراکز وجود داشتند که استطاعت تهیهٔ مجموعهٔ گران‌قیمت سخت‌افزار و نرم‌افزار مورد نیاز برای چنین سیستمهایی را داشتند. به‌علاوه این سیستمها به ملحقات و گردانندههای سخت‌افزاری ویژه‌ای نیاز داشتند، به‌طوری که نمی‌شد آن برنامه‌ها را حتی به‌کندی برروی ایستگاههای کاری استانداردی از نوع PC یا Mac، که در همهٔ مؤسسات دانشگاهی فراگیر شده بودند، اجرا کرد. اما ابرکامپیوترهای یک دههٔ پیش نیز چندان قویتر از آخرین نسل PCها و Macهای امروزی نبودند و بسیاری از برنامه‌های آبرومند مجسم‌سازی ریاضی را اکنون می‌توان برای این دستگاههای جدید نوشت. اکنون به‌وضوح زمان آن فرا رسیده است که الگوریتمهای مدلسازی هندسی نیرومندی که در سالهای اخیر تهیه شده‌اند به‌طور گسترده‌تر در دسترس تمام جامعهٔ ریاضی قرار گیرند. این کار ساده‌ای نیست. مسأله تنها این نیست که الگوریتمها به یک زبان برنامه‌نویسی برگردانده شوند، بلکه موضوع، ایجاد برنامه‌هایی است با رابط خوب برای کاربر، آن‌طور که شخص دیگری بجز خود برنامه‌نویس نیز بتواند با آن کار کند. امیدوارم که برنامهٔ 3D-Filmstrip نمونهٔ آغازینی از این نوع برنامه‌های مجسم‌سازی ریاضی باشد، برنامه‌ای که دیگران را به خلق برنامه‌های هر چه بهتری برای جان‌بخشیدن به تصورات ریاضیمان برانگیزاند.

یادداشتها

۱. این برنامه 3D-Filmstrip نام دارد. اما من در این مقاله، برای سادگی، از آن با عنوان «برنامهٔ من» یاد می‌کنم. بعداً در این مقاله توضیح خواهم داد که چگونه کپی آن را برای استفادهٔ شخصیتان به‌دست آورید.

۲. مسلماً تصویرسازی به‌صورت شبکهٔ سیمی، تصور سه‌بعدی بودن را از بین می‌برد. [به علت عدم وجود خرده‌وجه‌هایی که «سایه‌روشنها» را نشان دهند]. اما این نقیصه با استفاده از روشهای گوناگون تصویر نمایی استریو می‌تواند برطرف شود. نام 3D-Filmstrip را به این دلیل برای برنامه‌ام انتخاب کردم که بر تصویرسازی موجودات سه‌بعدی به‌صورت استریو و استفاده از روش آناگلیف تأکید شود. (منظور از آناگلیف استفاده از عینکهای قرمز/سبز است که باعث سه‌بعدی نمایی تصویر می‌شوند)

۳. من نگارخانه‌ای از مجسم‌سازیها و نمایشهای متحرک سه‌بعدی ساخته‌ام و روی وب قرار داده‌ام. فهرست راهنمای اصلی در آدرس

`http://rsp.math.brandeis.edu/3D-Filmstrip-html/Galleries/Catalogs/Maincatalog.html`

قرار دارد و این کاتالوگ همچنین شامل رشته‌های ارتباط‌دهنده به تعداد زیادی از بهترین نمونه‌های مجسم‌سازی ریاضی است که بر روی وب می‌شناسم.

۴. مراجع داخل آکولاد به آدرسهای منابع جهانی (URLها) اشاره دارند که مشخصاتشان در فهرست مراجع آمده است.

مراجع

مقاله‌ها

[Ab] J. Abouaf, Variations of perfection: The Séquin-Collins sculpture generator, *IEEE Computer Graphics and Applications* **18** (1998).

[CHH] M. Callahan, D. Hoffman, and J. Hoffman, Computer graphics tools for the study of minimal surfaces, *Comm. ACM* **31** (1988), 641-661.

[FSKB] G. Francis, J. Sullivan, R. Kusner, K. Brakke, C. Hartman, and G. Chappell, The minimax sphere eversion, *Visualization and Mathematics* (Berlin-Dahlem, 1995), Springer, 1997, pp. 3-20.

[HMF] A. Hanson, T. Munzner, and G. Francis, Interactive methods for visualizable geometry, *IEEE Computer* **27** (1994), 78-83; `http://graphics.stanford.edu/papers/visgeom/`.

[H] D. Hoffman, Computer-aided discovery of new embedded minimal surfaces, *Mathematical Intelligencer* **9** (1987).

[HWK] D. Hoffman, F. Wei, and H. Karcher, The genus one helicoid and the minimal surfaces that led to its discovery, *Global Analysis in Modern Mathematics* (K. Uhlenbeck, ed.), Publish or Perish Press, Houston, TX, 1993, pp. 119-170.

[MC] N. Max and W. Clifford, Computer animation of the sphere eversion, *ACM J. of Comput. Graphics* **9** (1975), 32-39; films available from International Film Bureau, 332 S. Michigan Ave., Chicago, IL 60604.

[Ph] A. Phillips, Turning a surface inside out, *Scientific American* (May 1966), 112-120.

[PLM] M. Phillips, S. Levy, and T. Munzner, Geomview: An interactive geometry viewer, *Notices* **40** (October 1993).

[PP] U. Pinkall and K. Polthier, Computing discrete minimal surfaces and their conjugates, *Experimental Mathematics* **2** (1993).

[Sc] Sphere does elegant gymnastics in new video, *Science* **281** (July 31, 1998), 634.

[Sm] S. SMALE, A classification of immersions of the twosphere, *Trans. Amer. Math. Soc.* **90** (1958), 281-290.

کتابها

[B] T. F. BANCHOFF, *Beyond the Third Dimension*, Scientific American Library, New York, 1990.

[DHKW] U. DIERKES, S. HILDEBRANDT, A. KÜSTER, and O. WOHLRAB, *Minimal Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1992, two volumes.

[EG] D. EPSTEIN and C. GUNN, *Supplement to Not Knot*, Jones and Bartlett, 1991.

[Fe] C. FERGUSON, *Helaman Ferguson: Mathematics in Stone and Bronze*, Meridian Creative Group, 1994.

[Fi] G. FISCHER, *Mathematical Models*, Vols. *I and II*, Vieweg, Braunschweig and Wiesbaden, 1986.

[Fo] A. FOMENKO, *Mathematical Impressions*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[Fr] G. K. FRANCIS, *A Topological Picturebook*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[G] A. GRAY, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.

[HC] D. HILBERT and S. COHN-VOSSEN, *Geometry and the Imagination*, Chelsea, New York, 1952. Translation of *Anshauliche Geometrie* (1932).

[L] S. LEVY, *Making Waves*, A. K. Peters, 1995.

[Sc] D. SCHATTSCHNEIDER, *Visions of Symmetry*, Freeman, San Francisco, CA, 1990.

[W] J. WEEKS, *The Shape of Space*, Marcel Dekker, New York, 1985.

* * * * * *

• Richard S. Palais, "The visualization of mathematics: towards a mathematical exploratorium", *Notices Amer. Math. Soc.*, (6) **46** (1999) 647-658.

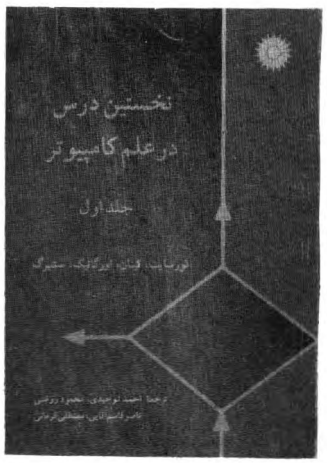
چون برخی از شکلهای این مقاله اگر به‌صورت رنگی یا تصویر متحرک نمایش داده شوند، روشنتر و تأثیرگذارتر خواهند بود، مؤلف یک نسخهٔ وِبی [اینترنتی] از این مقاله به‌همراه آدرسهای ارتباط با این گونه تصاویر با کیفیت تهیه کرده است. این مقاله از طریق آدرس زیر قابل دسترس است

`http://rsp.math.brandeis.edu/VisualizationOfMath.html.`

* ریچارد پَلِه، استاد بازنشستهٔ دانشگاه برندایس، آمریکا

`palais@math.brandeis.edu.`

مرکز نشر دانشگاهی منتشر کرده است



تأثیر اینترنت بر ریاضیات•

والتر ویاینجر و ورن پاکسن*
ترجمهٔ افرا علیشاهی

مقدمه

اینترنت در سالهای اخیر و به‌ویژه از نخستین روزهای پیدایش وِب[1]، تحولی شگفت‌انگیز یافته است. این واقعیت نه تنها در مجلات تخصصی، بلکه در نشریات عمومی نیز به‌خوبی منعکس شده است. آنتونی-میشل روتکوفسکی، مدیر اجرایی پیشین انجمن اینترنت معتقد است که «اینترنت انقلابی است خاص خود»، با رشدی بی‌سابقه، ساختاری که از فرط ناهمگنی بی‌همتاست، و وضعیت ترافیکی که نه تنها غیرقابل پیش‌بینی است، بلکه گاه آشوب‌گونه می‌نماید. در عین حال، عقیدهٔ عمومی این است که در قلب عملکرد اینترنت، ریاضیات نهفته است. به هر حال ریاضیات زبان کامپیوتر است، و اینترنت اکنون دهها میلیون کامپیوتر را به‌هم پیوسته است، و این میزان هر سال دو برابر می‌شود [Lo98]. با این‌همه اینترنت دنیای نوی است که در آن واقعیت مهندسی بر ریاضیاتِ معطوف به سنت غلبه کرده است و نیازمند «دگرگونیهایی در الگوها»ست که ترکیبی از «زیبایی» ریاضی و توان عملی زیاد مهندسی اینترنت را میسر سازد. در این مقاله خواهیم دید که تفاوتهای بنیادی اینترنت با شبکه‌های صوتی متعارف کدام‌اند، اینترنت در روند تکامل خود چگونه در مقیاس کوچک یا بزرگ بر دنیای ریاضیات اثر می‌گذارد ــ هم بر شیوهٔ انجام کار ریاضی و هم بر نوع ریاضیاتی که انجام می‌شود (برای درک خود شبکه)، و چرا این تأثیرْ مهندسی اینترنت را به معدنی گرانبها برای امکانات تحقیقاتی نو، مهیج و جذاب در علوم ریاضی بدل کرده است [۱].

نظریهٔ تله‌ترافیک و مهندسی اینترنت

اصطلاح «نظریهٔ تله‌ترافیک[2]» در ابتدا بر همهٔ ریاضیات مورد استفاده در طراحی، کنترل، و مدیریت شبکه‌های تلفن عمومی[3] (PSTN) از قبیل استنباط آماری، مدلسازی ریاضی، بهینه‌سازی، صف‌بندی و تحلیل کارایی اطلاق می‌شد. بعدها دست‌اندرکاران این حوزه، آن را چنان تعمیم دادند که شبکه‌هایی از داده‌ها نظیر اینترنت را نیز شامل شود. بنابراین مهندسی اینترنت نیز که فعالیتی مشتمل بر طراحی، مدیریت، کنترل و عملکرد اینترنت سراسری بود، بخشی از نظریهٔ تله‌ترافیک شد و برای رسیدن به بینشی جدید و فهمی بنیادی از مخابرهٔ داده‌ها به شیوهٔ نوین بر علوم ریاضی تکیه کرد. اما از همان روزهای نخست، اینترنت بیشتر بر مهندسی و تجربه تکیه داشت و کمتر با ریاضیات و نظریه‌پردازی درگیر می‌شد. در حقیقت برخی از اعضای جامعه اینترنت به روشنی بر این باورند که اینترنت به این دلیل «کار می‌کند» که از ریاضیات ــ به‌ویژه نظریهٔ تله‌ترافیک ــ چشم پوشیده است، و در اینجا داستان جالبی نهفته است.

ریاضیات و خدمات تلفن به شیوهٔ قدیمی

احتمال آنکه فردی که ساکن یک کشور صنعتی است نتواند برای برقراری یک تماس تلفنی [۲] به خط آزاد دسترسی پیدا کند چقدر است؟ حال چقدر احتمال دارد که این فرد موفق به دستیابی به یک کارگزار[1] معروف وب بر روی اینترنت نشود؟

پاسخ این سؤالات از یک بار در ماه یا سال برای حالت اول تا یک بار در ساعت یا روز برای حالت دوم متغیر است. درواقع، نظریهٔ تله‌ترافیک سنتی ــ آن‌گونه که برای POTS (خدمات تلفن به شیوهٔ سادهٔ قدیمی)[2] به‌کار می‌رود ــ به‌زعم بعضیها از موفقترین کاربردهای تکنیکهای ریاضی در صنعت بوده است. این نظریه منجر به ایجاد شبکه‌های درجهٔ یک تلفنی شده است که به‌طور دائم متکی به کیفیت خدمات آنها هستیم و بهینه‌سازی‌های مبتنی بر این نظریه در معماری و عملیات روزمرهٔ شبکه‌های مخابراتی، امکان

۱. Web، مخفف World Wide Web

2. teletraffic 3. Public Switched Telephone Networks

1. server 2. Plain Old Telephone Service

پوشش تقریباً کامل تلفنی را در سراسر جهان صنعتی فراهم کرده است. ازجمله دلایل اصلی موفقیت عظیم نظریهٔ تله‌ترافیک و کاربردش در علم تلفن سنتی، ماهیت بسیار ایستای PSTNهای متعارف و اصل خوش‌تعریف و همیشه صادق تغییرپذیری محدود است، یعنی آن ویژگی سیستمهای همگن که در آنها می‌توان راجع به کاربران «نمونه» و رفتار «کلی» صحبت کرد و میانگینها کارایی سیستم را به‌نحو رضایت‌بخشی توصیف می‌کنند. دلیل مهم دیگر، محبوبیت خاص مدلهای پراستفاده در جامعهٔ مهندسی است، این جاذبه بیشتر به دلیل سادگیِ توصیف فیزیکی و تناسب عملی آنهاست: این مدلها اغلب به تعداد اندکی ورودی نیاز دارند که در عمل می‌توان آنها را به سادگی تخمین زد.

ماهیت ایستای PSTNهای سنتی این باور همگانی را به‌وجود آورده است که «قوانینی عام» بر شبکه‌های صوتی حاکم‌اند. مهمترین این قوانین ماهیت پواسونی پیامهای رسیده در نقاطی از شبکه است که در آنها ترافیک سنگینی انباشته می‌شود، نظیر شاه‌سیمهای اصلی بین مراکز تلفن. براساس این قانون، پیامهای رسیده دوبه‌دو مستقل‌اند و فواصل زمانی بین پیامها از یک توزیع نمایی با تنها یک پارامتر λ برخوردار است.

به بیان دقیقتر، اگر $X = (X_k : k \geq 1)$ نشان‌دهندهٔ تعداد پیامهایی باشد که در بازه‌های زمانی متوالی نامتداخل با طول $\Delta t > 0$ دریافت شده‌اند، آنگاه X یک فرایند افزایشی از نوع فرایند پواسون با پارامتر λ است اگر و تنها اگر متغیرهای تصادفی X_k مستقل باشند و همه طبق تابع زیر توزیع شده باشند:

$$P[X_k = n] = e^{-\lambda \Delta t} \frac{(\lambda \Delta t)^n}{n!}, \quad n \geq 0 \qquad (1)$$

مدلهایی از ترافیک نظیر فرایند پواسون که دینامیک کامل آنها را می‌توان با یک یا تعداد اندکی پارامتر توصیف نمود، همسان[1] نامیده می‌شوند، و این خصیصه به دلایلی که خواهیم گفت بسیار مطلوب است.

قانون پواسون حداقل پنجاه سال اعتبار خود را در مدلسازی حفظ کرده است، و همین‌طور ناوردایی از ترافیک POTS که معلوم می‌کند که «زمانهای نگهداری» (فاصله‌های زمانی) پیامها کمابیش از یک توزیع نمایی پیروی می‌کنند. سه قانون مهم دیگر تله‌ترافیک، عبارت‌اند از اینکه: آهنگهای رشد به‌خوبی قابل پیش‌بینی هستند و امکان برنامه‌ریزی‌های دقیق کوتاه‌مدت و بلندمدت را برای ظرفیت خطوط فراهم می‌آورند؛ کنترلها و عملیات شبکه کاملاً متمرکزند، بنابراین می‌توان از اطلاعات در باره وضعیت عمومی شبکه بهره برد؛ و سرویسهای ارائه‌شده کاملاً منظم و تحت نظارت هستند.

از سوی دیگر، در محیط PSTN ایستا، اهمیتی که به اندازه‌گیریهای مستمر داده می‌شد دائماً کاهش یافته و برعکس بر نیاز به تکنیکهای تحلیلی تأکید شده است. با آنکه در ابتدا نظریهٔ تله‌ترافیک مبتنی بر مطالعات تجربی و نتایج اندازه‌گیریهای ترافیک بود که به دشواری از شبکه‌های تلفن عمومی جمع‌آوری می‌شد [۳]، به زودی این باور که فرایند پواسون و توزیع نمایی «قوانین عام» POTS هستند بر تمایل به جمع‌آوری و تحلیل داده‌های بیشتر فایق آمد. علاوه بر این، دستاوردهای جدید ریاضی مبنای فیزیکی مستحکمی برای ماهیت پواسونی پیامهای رسیده به شاه‌سیمها فراهم ساخت. به‌عنوان نمونه، قضیهٔ پالم-خینچین بیانگر آن است که برهم‌نهش بسیاری از فرایندهای بازسازی مستقل که به نحو مناسبی نرمال شده‌اند ــ و هر یک از آنها رسیدن پیام به یک خط تلفن واحد را توصیف می‌کنند ــ یک فرایند پواسون می‌سازد. مدلهای ترافیک حاصل به‌طورکلی به‌صورت ریاضی قابل پیمایش بودند و می‌شد از آنها برای پیش‌بینی دقیق بسیاری از معیارهای مهم کارایی استفاده کرد. نظریهٔ صف زاده شد. اعتماد به مدلهای ترافیک «حقیقی» از میان رفت، بر نیاز به اندازه‌گیری بیشتر ترافیک سرپوش گذاشته شد و توجه عمده بر پیشبرد نظریهٔ صف به‌عنوان یک شاخهٔ ریاضی نوپا متمرکز شد.

اما تغییراتی که اخیراً در دنیای «ایستا»ی علم تلفن رخ داده است، آسودگی خاطر ناشی از این برازندگی و موفقیت ریاضی را متزلزل کرده است. الگوهای پنجاه سالهٔ استفاده از تلفن که زیربنای موفقیت مدلهای ترافیک بوده‌اند، اکنون با پیدایش دو کاربرد نو برای شبکهٔ تلفن کاملاً بی‌اعتبار شده‌اند. این تغییرات با پیدایش نمابرها در دههٔ هشتاد آغاز شدند و با همه‌گیرشدن استفاده از وب، اهمیتی اساسی یافتند.

تغییر اساسی در آنجاست که خصوصیات آماری پیامهای تلفنی که برای انتقال نمابر و دستیابی به اینترنت استفاده می‌شوند از بنیاد با پیامهای صوتی معمول متفاوت است. این پیامها به میزان قابل ملاحظه‌ای طولانیترند و زمان آنها نسبت به یک پیام صوتی بسیار متغیر است، و تعداد آنها (مخصوصاً پیامهای دستیابی به اینترنت) اخیراً به‌نحو چشمگیری افزایش یافته است. هر دو نوع پیام، اکنون با فراساختارهای PSTN موجود که برای مدیریت پیامهای صوتی طراحی شده‌اند ناسازگارند و ایجاد آشفتگی می‌کنند. در برخی موارد «انسداد[1]» پیامها تا سطح غیرقابل قبولی افزایش یافته است، خاصه در ساعات دیرهنگام شب که بیش از همه مورد استفادهٔ پیمایشگرهای وب است، و برای آنکه پیامهای دستیابی به اینترنت شبکهٔ تلفن عمومی را اشباع نکند ناگزیر باید از روشهای سردستی مهندسی استفاده کرد. واضح است که دیگر نظریه با واقعیت همخوان نیست، در نتیجه برنامه‌ریزی ظرفیت امری خطرناک و نادقیق شده است. به بیان مختصر، صنعت در تلاش است تا ترافیک اینترنت را از PSTN جدا کند.

بدرود پواسون

بسیار تلاش شد تا پیروزی افسانه‌ای مدلسازی شبکه‌های صوتی برای شبکه‌های داده‌ای تکرار شود، اما به واقع مدلسازی شبکه‌های صوتی به هنگام اعمال بر شبکه‌های داده‌ای فاجعه به بار آورده است، تنها به یک دلیل ساده اما اساسی که آنجا که به جای انسانها، کامپیوترها با هم صحبت می‌کنند، همهٔ قوانین به هم می‌ریزد.

ترافیک صوتی نسبتاً همگن و قابل پیش‌بینی است، و از دیدگاه مخابره، مقیاسهای زمانی طولانیتری را فرا می‌گیرد. بنابراین می‌توان چند ارتباط صوتی همزمان را به‌سادگی «تسهیم» کرد تا یک سیم یا «خط» مشترک (گرانبها) را بین خود تقسیم کنند و به هر ارتباط، سهم معینی از ظرفیت خط را تخصیص دهند. هنگامی‌که یک درخواست پیام می‌رسد، به‌سادگی می‌توان تعیین کرد

1. parsimonious

1. blocking

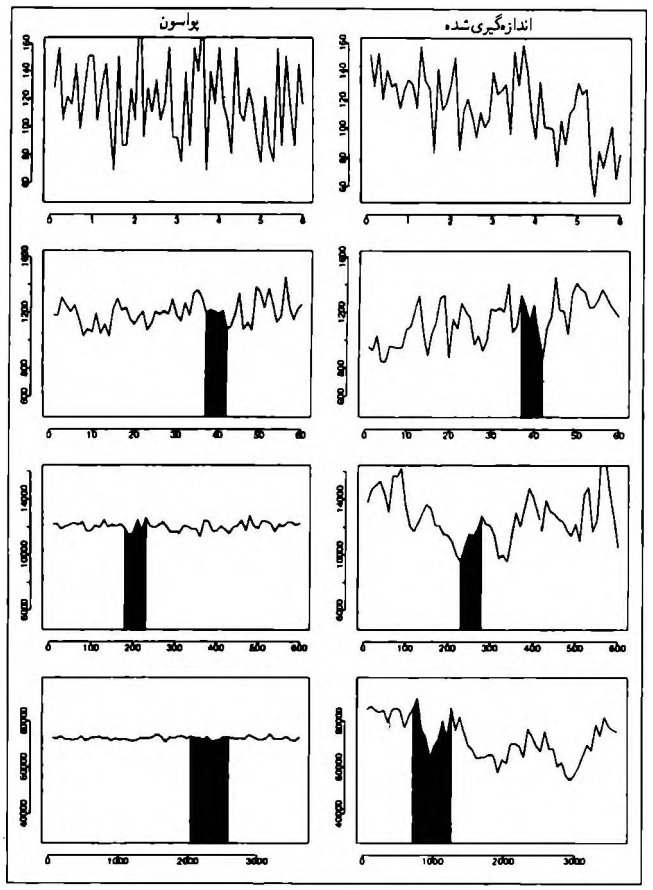
که آیا یک خط مشخص ظرفیت لازم برای تحمل بار اضافی را دارد یا خیر. در نتیجه، شبکه‌های صوتی به شیوه راه‌گزینی مداری[1] طراحی شده‌اند. در این شیوه، «مسیریابها»یی در داخل شبکه قرار دارند که ترافیک را از یک خط به خط بعدی به پیش می‌رانند تا سرانجام به مقصد برسد.(مسیریابها رد هر ارتباط فعال را نگه می‌دارند و هنگامی‌که یک ترافیک جدید از راه می‌رسد، ارتباط متناظر با آن را جستجو می‌کنند تا محل ارسال ترافیک را تعیین کنند. این جداسازی، ایجاد «مدارهای مجازی» نامیده می‌شود، زیرا شبکه چنان رفتار می‌کند که گویی یک مدار مستقیم از منبع ترافیک تا مقصد آن برقرار شده است.

برخلاف ترافیک صوتی، ترافیک داده بسیار متغیر است، طول ارتباطهای مستقل از بسیار کوتاه تا بسیار بلند و آهنگ آنها از بسیار پایین تا بسیار بالا تغییر می‌کند. این خصوصیات منجر به طراحی ویژه‌ای برای شبکه‌های داده‌ای شده که در آن هر «بسته» داده یا هر «داده‌نگار» منفرد که از شبکه عبور می‌کند مستقل از بسته‌های قبلی همان ارتباط به محل مناسب ارسال می‌شود. هر بسته اطلاعات لازم را در خود دارد، و مسیریابها برای تعیین مقصد بسته و نحوهٔ ارسال آن تنها باید به «سربرگ» آن مراجعه کنند. در نتیجه مسیریابها دیگر وضعیت ارتباطهای فعال را نگه نمی‌دارند.

این انتقال از راه‌گزینی مداری به راه‌گزینی بسته‌ای[2] پیامدهای عمیقی داشته است. از یک سو این تغییر منجر به پیدایش شبکه‌هایی بسیارکارا شده است. همهٔ ظرفیت زمانی شبکه قابل دستیابی است و بسته‌هایی که تازه از راه رسیده‌اند می‌توانند از آن بهره ببرند. هر بسته در شبکه با سایر بسته‌ها رقابت می‌کند، اگر ترافیک رقابت در یک مسیر خاص، کم باشد، ارتباطی که از آن مسیر استفاده می‌کند می‌تواند از همهٔ «عرض باند» آن بهره ببرد و داده‌اش را بسیار سریع منتقل کند. اگر چند ارتباط بر روی یک مسیر با هم در رقابت باشند، هر کدام بخشی از عرض باند موجود را دریافت خواهند کرد (که ممکن است این تقسیم عادلانه هم نباشد). به‌علاوه راه‌گزینی بسته‌ای شبکه را بسیار مقاوم می‌کند. با استفاده از این روش، شبکه قادر است برای مسیریابی، خطها و مسیرهای معیوب را دور بزند بی‌آنکه اختلالی در ارتباطات فعال ایجاد کند. مسیریابها بی‌هیچ مشکلی می‌توانند ترافیک بازمسیریابی‌شده را دریافت کنند، زیرا دربارهٔ ترافیک «جاری» اطلاعی ندارند و بنابراین در پذیرش ترافیکی که تا این لحظه از وجود آن خبر نداشته‌اند با مشکل مواجه نخواهند شد ــ برخلاف شبکهٔ راه‌گزینی مداری که در آن مسیریابها نمی‌توانند به‌سادگی ترافیک بازمسیریابی‌شده را بپذیرند زیرا دربارهٔ مدار مجازی متناظر با آن چیزی نمی‌دانند.

اما اگر آهنگ ورود بسته‌ها بیش از ظرفیت خطها باشد، خطوط دچار سربار خواهند شد. در این شرایط بسته‌ها «در میانگیر[3] قرار داده می‌شوند» و در انتظار انتقال از طریق خط می‌مانند، اما اگر آهنگ مازاد ادامه یابد ــ شرایطی که «راه‌بندان» نامیده می‌شود ــ سرانجام میانگیرهای درون مسیریابها هم پر خواهند شد، و ناگزیر برخی از بسته‌ها باید به دور انداخته شوند. برای اطمینان از رفتار صحیح منابع به هنگام بروز راه‌بندان در شبکه، سازوکارهایی برای کنترل راه‌بندان پایانه به پایانه در قراردادهای انتقال داده در اینترنت تعبیه شده که در صورت بروز راه‌بندان، به صورت خودکار آهنگ انتقال داده را

1. circuit-switching 2. packet-switching 3. buffer



شکل۱ ترافیک اینترنت در مقابل ترافیک ترکیبی از یک مدل پواسون که بر میانگین و واریانس ترافیک اندازه‌گیری شده، منطبق شده و با سه مرتبهٔ بزرگی نشان داده شده است.

کاهش می‌دهند. در نتیجهٔ استفاده از این سازوکارها، شکل‌گیری ترافیک در شبکه تابع شرایطی خواهد بود که برای هر ارتباط درگذشته پیش آمده است. بنابراین، ترافیک اینترنت شامل سازوکاری بنیادی برای بیان همبستگیهای ارزشمند و پیچیده در طول زمان، و نیز مبادله‌های پیچیده بین ارتباطهای فعال است.

میراث مخربی از علم تلفن که بر پژوهشهای مربوط به شبکه‌های داده‌ای تأثیر گذاشت، آن بود که در دهه‌های هفتاد و هشتاد، اعتبارسنجی مفروضات اساسی مدلسازی در قبال نتایج حاصل از اندازه‌گیری ترافیک در شبکه‌های داده‌ای واقعی کاملاً کنار گذاشته شد، درحالی‌که تنها مطالعهٔ مختصری در مورد اندازه‌گیریها کافی بود تا کشف شود که ترافیک، داده به‌شدت متغیر یا بسیار انفجاری[1] است، به این معنا که آهنگ یکنواختی ندارد، بلکه وقفه‌هایی بینابین دارد. اصطلاح «انفجاری» یک معنای شهودی آسان‌فهم دارد، اما پافشاری بر معنای ریاضی و دقیق آن، پیامد عمیقی در انتخاب مدلهای ریاضی ترافیک شبکه خواهد داشت. رویکرد طبیعی برای تبیین انفجاری بودن، تعریف آن براساس یک مقیاس زمانی است که فعالیتها و وقفه‌ها بر آن رخ می‌دهند. این مقیاس زمانی برای تلفن، به آهنگ λی فرایند پواسون (۱) مربوط خواهد بود که دینامیک پیامهای رسیده را توصیف می‌کند. مثلاً اگر $\lambda = ۱۰۰/\sec$،

1. bursty

آنگاه مقیاس زمانی انفجاری بودن در حدود ۱۰ m sec است و احتمال رخداد فعالیتهای مستمر بالای میانگین یا وقفه‌های مستمر زیر میانگین بر مقیاسهای زمانی بسیار بزرگتر یا بسیار کوچکتر به سرعت کاهش خواهد یافت.

اما دست‌اندرکاران بارها مشاهده کرده‌اند که انفجار ترافیک در شبکه‌های داده‌ای به‌واقع در مقیاسهای زمانی بسیار متفاوتی رخ می‌دهد و این انفجاری بودن چندمقیاسی به‌سادگی با دنیای مدلسازی ترافیک مرسوم که بر فرایند پواسون مبتنی است سازگار نمی‌شود. نظام پواسون حتی زبان مناسبی هم برای بحث در باب انفجارهایی از این‌دست مهیا نمی‌کند [۴]. شکل ۱ نمایشی بصری از شکست مدلسازی پواسون در مواجهه با انفجار موجود در ترافیک واقعی شبکه‌هاست. نمودارها براساس پیمایشی یک‌ساعته از ترافیک اینترنت که از روی خط اتصال یک شرکت بزرگ با اینترنت جمع‌آوری‌شده ترسیم شده‌اند [۵]. ما از روی این پیمایش و با تطبیق یک مدل سادهٔ مبتنی بر پواسون بر میانگین و واریانس نمونهٔ اندازه‌گیری‌شده، پیمایش دیگری از سری بسته‌های رسیده در طول یک ساعت ساختیم. مدلسازیهای استادانهٔ دیگری نیز ممکن است، اما همان‌طور که در ادامه خواهید دید نتیجهٔ نهایی یکسان خواهد بود.

با تغییر مقیاس زمانی مشاهده، انفجاری بودن پیمایش اولیه و پیمایش ترکیبی را به‌چشم می‌بینیم. ردیف بالا زیرمجموعه‌ای از هر پیمایش را که به صورت تصادفی انتخاب شده است بر مقیاس زمانی ۱۰۰ میلی‌ثانیه نشان می‌دهد؛ یعنی هر نقطه در نمودار نمایانگر تعداد بسته‌های مشاهده‌شده در یک بازهٔ زمانی ۱۰۰ میلی‌ثانیه‌ای برای مدت ۶ ثانیه است. در ردیف دوم مقیاس زمانی ۱۰ برابر بزرگتر شده است: اکنون هر نقطه نمایانگر تعداد بسته‌ها در ثانیه است که در مجموع ۶۰ ثانیه را در بر می‌گیرد. ناحیهٔ سیاه نشان می‌دهد که نمودارهای ردیف قبل از کجا گرفته شده‌اند. نکتهٔ مهم آن است که نه‌تنها مقیاس محور X، بلکه مقیاس محور Y هم با ضریب ۱۰ افزایش یافته است. مقیاس هر دو محور در ردیف سوم ۱۰ برابر و در ردیف چهارم باز ۶ برابر شده است، چنانکه در این نقطه نمودارها کل یک ساعت پیمایش را دربر بگیرند.

اختلاف میان مدل پواسون و ترافیک اندازه‌گیری‌شده فاحش و تکان‌دهنده است: با افزایش مقیاس زمان، ترافیک پواسون «هموار می‌شود» و رفتاری کاملاً رام دارد، حال آنکه ترافیک اندازه‌گیری‌شده ابداً چنین رفتاری را نشان نمی‌دهد. از دیدگاه مهندسی تفاوت کاملاً اساسی است: ترافیکی را که رفتاری مشابه ستون سمت چپ دارد می‌توان به‌سادگی مدیریت کرد. در مقیاسهای زمانی بالاتر از یک حد معین دیگر اتفاق غیرمنتظره‌ای نمی‌افتد ــ همه چیز چنان ساده می‌شود که آهنگ دریافت در درازمدت به‌دست آید ــ نیازی به میانگیرهای بزرگ در مسیریابها یا راه‌گزین‌ها نیست. در انتخاب نقاط عمل مطمئن برای طراحی شاه‌سیمهای اصلی، لازم نیست محافظه‌کارانه عمل کنیم، و حتی ارزیابی کاربر از کیفیت خدمات نیز تأثیری در مسأله نخواهد داشت. اما کاملاً برعکس، ترافیک اندازه‌گیری‌شده (نظیر آنچه که در ستون سمت راست مشاهده می‌شود) سرکش است، و این حالت را در مقیاسهای زمانی کاملاً بزرگ نیز حفظ می‌کند، و مهندسی ترافیک متعارف را به‌هم می‌ریزد: مسیریابها برای کنارآمدن با نوسانهای ترافیک در مقیاسهای زمانی متعدد نیاز به میانگیرهای بزرگ دارند؛ در غیاب هر گونه کنترل مؤثر، نقاط عمل مطمئن باید محتاطانه انتخاب شوند، زیرا ترافیک می‌تواند خط را در هر زمان و بر هر مقیاس زمانی اشباع کند و کیفیت کل شبکه و رضایت کاربران مستقل را نمی‌توان تضمین کرد.

نظام مدلسازی پواسون بارها به مهندسین شبکه اینترنت حکم کرده است که انتظار رفتاری مشابه ستون سمت چپ را داشته باشند ــ اما آنچه واقعاً مشاهده می‌شود حرکت لگام‌گسیختهٔ سمت راست است! بنابراین جامعهٔ مهندسین اینترنت به این نتیجه رسیده است که نظریهٔ تله‌ترافیک برای توسعهٔ اینترنت به‌راستی نامناسب و زیان‌بار است. این جامعه رویکرد مبتنی بر فرایند پواسون را به‌ویژه به این دلیل مورد نقد قرار داده است که مدلها (۱) با تجارب عملی و مشاهدات مهندسین شبکه وجه‌اشتراک اندکی دارند؛ (۲) ساختارهای نظری بر مفروضاتی مبتنی هستند که در قبال داده‌های اندازه‌گیری‌شده بی‌اعتبارند، به‌ویژه هنگامی‌که برای توصیف انفجار، با پارامترهای اضافی بسط داده می‌شوند؛ (۳) بیش از آن پیچیده‌اند که به فراهم‌آوردن یک شهود یا درک فیزیکی از دینامیک ترافیک واقعی شبکه‌ها («جعبه‌های سیاه») کمک کنند؛ و (۴) به ورودیهایی (تخمینهای پارامترها) نیاز دارند که در عمل تعیین، جمع‌آوری یا تخمین آنها ممکن نیست.

درود بر فرکتالها

بسیاری از خبرگان شبکه در این نکته اتفاق‌نظر دارند که تنها راه شناخت عمیق ترافیک شبکه‌های داده‌ای آن است که نظریهٔ تله‌ترافیک را کنار بگذاریم و همه چیز را از نو شروع کنیم. جالب اینجاست که ریاضیات که عامل اصلی موفقیت نظریهٔ تله‌ترافیک برای شبکه‌های صوتی بوده است، به‌تازگی امکانات کافی برای پشتیبانی از نظر خبرگان شبکه فراهم آورده است: هرچند مفاهیم و ایده‌های این ریاضیات به اندازهٔ فاصله بین ترافیک صوتی و ترافیک داده با ریاضیات قبلی تفاوت دارد، ریاضیات مربوط به POTS در دو مورد تغییرپذیری محدود دارد، نخست در زمان ــ فرایندهای ترافیک یا مستقل‌اند یا همبستگیهای زمانی آنها به صورت نمایی رو به کاهش است ــ و دوم در فضا؛ یعنی توزیع کمیتهای وابسته به ترافیک دارای دنباله‌هایی است که به صورت نمایی نزولی هستند. اما ریاضیات شبکه‌های داده‌ای واجد تغییرپذیری شدید یا بحرانی است. به‌لحاظ آماری، تغییرپذیری شدید در زمان در فرایندهای ترافیک بر اثر وابستگی در برد طولانی حاصل می‌شود؛ یعنی خودْ همبستگی‌هایی که یک کاهش توانی را نشان می‌دهند. از سوی دیگر، اشکال بحرانی تغییرپذیری در فضا را می‌توان به صورت ممسکانه با استفاده از توزیعهای سنگین‌ـدنباله[1] با واریانس نامتناهی تعریف کرد، یعنی توزیعهای احتمال F با این خاصیت که برای مقادیر بزرگ x،

$$1 - F(x) \approx \kappa_1 x^{-\beta} \qquad (2)$$

که در اینجا κ_1 یک ثابت متناهی مثبت و غیروابسته به x است و اندیس دنبالهٔ β دربازهٔ $(0, 2)$ قرار دارد. برای نمونه، خانوادهٔ مشهور «توزیعهای

1. heavy-tailed distributions

پارتو[1]» که در ابتدا برای مدلسازی توزیع درآمد در یک جمعیت معرفی شدند، این خصوصیت را برآورده می‌کنند.

معلوم می‌شود که رفتار توانی برخی از توصیفگرهای آماری آنها در زمان یا مکان، اغلب منجر به بروز خصوصیات فرکتالی [فرخالی] در فرایندهای ترافیک متناظر می‌شود. در متن حاضر، ما یک فرایند ترافیک را دارای خصوصیات فرکتالی می‌دانیم اگر رابطه‌ای میان کمیتهای معین Qی فرایند مربوطه و تفکیک[2] τ به فرم کلی زیر برقرار باشد:

$$Q(\tau) \approx \kappa_2 \tau^{f(D)} \qquad (3)$$

که در اینجا κ_2 یک ثابت متناهی مثبت و غیروابسته به τ است. τ یک تفکیک در زمان یا مکان است که Q در آن محاسبه می‌شود، و (۳) تعیین می‌کند که چگونه Q باید به عنوان تابعی از تفکیک τ تغییر کند؛ $f(\cdot)$ یک تابع سادهٔ اغلبْ خطی از D است، و D یک بعد فرکتالی است. برای تعریف فرکتالی‌بودن، فرض می‌شود که رابطهٔ فوق برای دامنه‌ای از مقادیر متفاوت τ با مقدار Dای که کمتر از بعد فضای حاوی است، برقرار است.

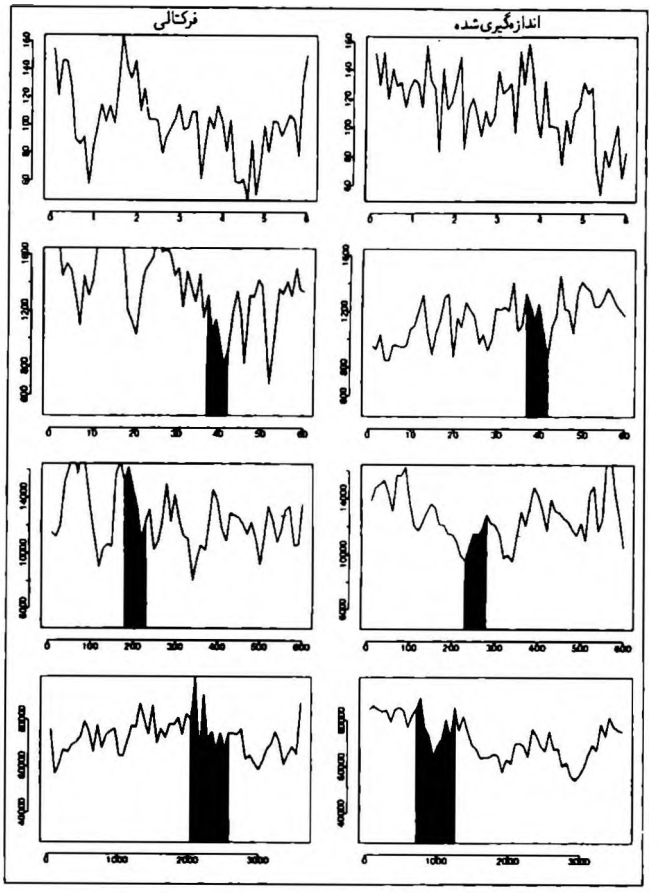
مفاهیم فرکتالی در نظریهٔ تله‌ترافیک وجود نداشته‌اند، اما نگاهی به شکل ۱ (سمت راست) رفتار فرکتالی را در دامنهٔ وسیعی از مقیاسهای زمانی، از صدها میلی‌ثانیه تا ثانیه و دهها ثانیه و بیشتر نشان می‌دهد. در حقیقت نمودارهای شکل ۲ نیز از نوع نمودارهای شکل ۱ است، بااین تفاوت، که این‌بار به‌جای مدل مبتنی بر پواسون، از یک مدل ریاضی بسیار ساده به نام نوفهٔ گاوسی کسری[3] استفاده شده است که به مفهومی که به‌زودی به دقت بیان خواهیم کرد، اکیداً فرکتالی است. فعلاً یک فرایند گاوسی کوواریانس-مانا[4]ی $X = (X_k : k \geq 1)$ یک نوفه گاوسی کسری با پارامتر هرست[5] $H \in [0.5, 1)$ نامیده می‌شود اگر خود همبستگی بین X_n و X_{n+k}، $k \geq 0$ از رابطهٔ

$$\mathbf{cor}(X_n, X_{n+k}) = \frac{1}{2}(|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H})$$

به‌دست آید. علاوه‌بر سازگارکردن مدل با میانگین و واریانس ترافیک اندازه‌گیری‌شده، یک پارامتر دیگر یعنی پارامتر هرست H نیز مورد نیاز است که درجهٔ تغییر مقیاس فرکتالها را تعیین می‌کند. از لحاظ بصری به‌نظر می‌آید که ترافیک حاصل از مدل فرکتالی در مکان صحیح قرارگرفته است، و می‌توان با افزودن تنها یک پارامتر به آن رسید! نکتهٔ آخر، خصوصیت بسیار مهم رویکرد مدلسازی فرکتالی است: این رویکرد «صرفه‌جویی[6]» را رعایت می‌کند، یعنی به اندازهٔ کافی ساده هست که بتوان به اِعمال آن بر دامنهٔ وسیعی از شرایط امیدوار بود، بدون آنکه برای تعیین پارامترها مجبور باشیم حدسهای فراوان بزنیم.

با توجه به شکاکیت عمومی که در محافل مختلف جامعهٔ ریاضی نسبت به مفید و مناسب بودن فرکتالها و ضرورت استفاده از آنها وجود دارد [۶]، در باب مقیاس‌بندی فرکتال‌گونه در ترافیک اندازه‌گیری‌شده در شبکه‌های داده‌ای چه می‌توان گفت؟ برای آزمودن این پرسش، فرایند تصادفیِ زمانی-گسستهٔ کوواریانس-مانایِ صفر-میانگین $X = (X_k : k \geq 1)$

1. Pareto 2. resolution 3. fractional Gaussian noise
4. covariance-stationary 5. Hurst 6. parsimony



شکل۲ ترافیک اینترنت در مقابل ترافیک ترکیبی از یک مدل سادهٔ فرکتالی که بر میانگین و واریانس و پارامتر هرست (H) ترافیک اندازه‌گیری شده، منطبق شده و با سه مرتبهٔ بزرگی نشان داده شده است.

را دقیقاً خودهمانند، یا فرکتالی با پارامتر مقیاس‌بندی $H \in [0.5, 1)$ می‌نامیم، اگر برای همهٔ سطوح انبوهش یا «تفکیک»، $m \geq 1$،

$$X^{(m)} = m^{H-1} X$$

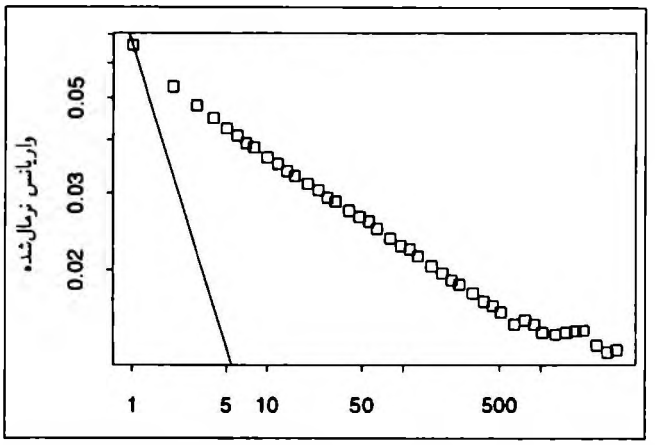
که در اینجا تساوی به مفهوم توزیعهای متناهی‌بعد درک می‌شود و فرایندهای انبوهش $X^{(m)}$ با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$X^{(m)}(k) = m^{-1}(X_{(m-1)k+1} + \cdots + X_{km}), \qquad k \geq 1$$

مثلاً فرایند نوفهٔ گاوسی کسری که قبلاً معرفی شد با پارامتر مقیاس‌بندیِ برابر با پارامتر هرست، دقیقاً خودهمانند است. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که برای یک فرایند کاملاً خودهمانند با پارامتر مقیاس‌بندی H، رابطهٔ تابعی زیر

$$\mathbf{Var} X^{(m)} = \kappa_1 m^{2H-2}$$

برقرار است و با فرم (۳) سازگار است. نمایش log-log خطی برای $\mathbf{Var} X^{(m)}$ نسبت به m، نمودار واریانس-زمان نامیده می‌شود. نمونه‌ای از این نمودار



شکل۳ نمودار واریانس-زمان برای ترافیک اندازه‌گیری‌شدهٔ اینترنت. خط سمت چپ که به پایین شیبدار است، نمودار واریانس-زمانی را که از ترافیک پواسون انتظار می‌رود، نشان می‌دهد.

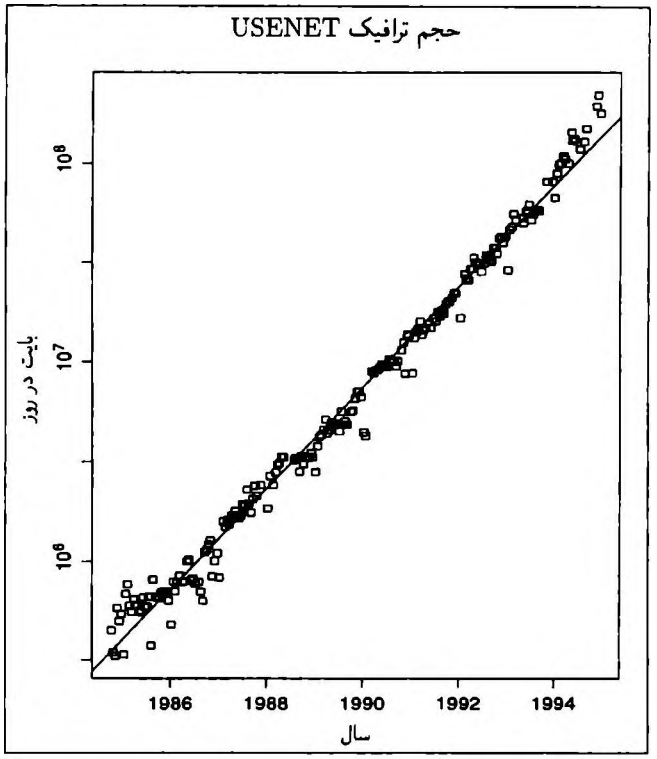
که براساس پیمایش ترافیک اینترنت شکل ۱ و ۲ رسم شده، در شکل ۳ نشان داده شده است. واضح است که محدودهٔ مقیاس‌بندی مورد مشاهده سه دهه را در بر می‌گیرد، و گواه قاطعی بر مقیاس‌بندی فرکتال‌گونه است. محدودهٔ مقیاس‌بندی سه تا پنج دهه‌ای در پیمایش شبکه‌های مختلف متداول است.

در ارزیابی اعتبار توصیف یک فرایند با استفاده از یک مدل خودهمانند، باید مراقب بود تا نامانهای واقعی (مثل آهنگ دریافت ارتباط که با زمان تغییر می‌کند) با رفتار فرکتالی مانا اما بسیار متغیر اشتباه نشوند. این دو ممکن است هم به چشم و هم در تعدادی از آزمونهای آماری مشابه به‌نظر بیایند، اما این تفاوت را می‌توان با بهره‌گیری از پیمایشهای ترافیک شبکه در ابعاد بسیار بزرگ، نشان داد، مثلاً می‌توان قطعات پنج دقیقه‌ای متعددی را از یک پیمایش استخراج کرد، آنها را تحلیل نمود تا رفتار فرکتالی احتمالی آنها مشخص شود، و سپس نتایج را با نتایج حاصل از قطعات پنج دقیقه‌ای همسایه و نیز قطعات ده دقیقه‌ای دربرگیرندهٔ آنها مقایسه کرد. اگر تحلیلها نتایج سازگاری به‌دست دهند، این نظر تأیید خواهد شد که داده‌ها را می‌توان به صورت مانا به‌خوبی مدل کرد. معمولاً وقتی که داده‌ها به پایان می‌رسند و زیرنمونه‌ها آن‌قدر کوچک می‌شوند که برای تحلیل مناسب نیستند، این فرایند ممکن است با مشکل مواجه شود. اما برای ترافیک شبکه، هر چقدر داده که بخواهیم در اختیار داریم. بنابراین انگیزهٔ کافی خواهیم داشت تا تکنیکهای آماری بدیعی به‌دست آوریم که بتوانند از ابعاد بزرگ نمونه‌ها کاملاً بهره‌برداری کنند، و مفاهیم متعارفی را که در طول سالیان برای کار با نمونه‌های کوچک پرورده شده‌اند جایگزین مفاهیم جدید کنیم. همان‌طور که دیدید، این روشهای نو با روشهای استنباط متعارف نظیر ارزیابی نیکویی برازش یا آزمون فرض وجه اشتراک اندکی دارند، اما در عوض نشان می‌دهند که چگونه مفهوم «افزایش توانمندی با استفاده از مجموعه‌های بزرگ داده‌ها» که به وسیلهٔ توکی[1] مطرح شد، در عمل به‌کار می‌رود و می‌تواند بر ماهیت فرکتالی ترافیک اینترنت گواهی دهد.

مشکل درک اینترنت

اگرچه کشف ماهیت فرکتالی اینترنت را می‌توان نقطهٔ شروع امیدوارکننده‌ای

1. J. Tukey



شکل۴ بایتهایی که روزانه از طریق تابلوی اخبار USENET (در اینترنت) فرستاده می‌شوند.

برای تعیین مشخصات دقیق اینترنت تلقی کرد، اما این امر تقریباً اثری نگذاشته است زیرا جنبه‌های کمتر مورد توجه واقع شده‌ای وجود دارند که تعیین مشخصات و فهم دقیق و کامل اینترنت را بسیار دشوار می‌کنند. هر خصوصیت، شکلی از تغییر را منعکس می‌کند ــ این نمودی است از این واقعیت که هیچ‌چیز در شبکه «نوعی» نیست. تغییر در طول زمان، بین سایتها، و در مفروضات اساسی دربارهٔ نحوهٔ استفاده از شبکه رخ می‌دهد [Pa94].

اینترنت در حال تغییر

اولین جنبهٔ اساسی تغییر در اینترنت رشد آن است. به بیان ساده، رشد شبکه نمایی است، در طول یک دهه چنین بوده است، و نشانه‌ای از کاهش آهنگ آن در دست نیست. شکل ۴ یک آمار رشد را نشان می‌دهد: حجم ترافیک در روز برحسب بایت که از طریق سیستم تابلوی اخبار USENET منتقل می‌شود. داده‌ها از ۱۹۸۴ شروع می‌شوند و تا ۱۹۹۴ ادامه می‌یابند. اندازه‌گیریها به‌خوبی بر یک خط راست منطبق می‌شوند، که نشان‌دهندهٔ رشد نمایی مستمر در حدود ۸۰٪ در هر سال در طول یک دهه است (به مقیاس لگاریتمی-خطی توجه کنید). واضح است که رشد اینترنت مطلب تازه‌ای نیست ــ و به هیچ وجه با وب آغاز نشده است ــ و آمارهای فعلی با رشدی که ابداً رو به کاهش ندارد سازگارند.

جنبهٔ دیگری که اینترنت از آن جنبه با تغییرات شدید مواجه است مشخصات ترافیک اندازه‌گیری شده در سایتهای مختلف و در زمانهای مختلف است. مثلاً در نمونه‌ای از ترافیک اینترنت که در سال ۱۹۹۱ در یک آزمایشگاه

پژوهشی به دست آمده است، تقریباً ۶۷٪ از داده‌هایی که به سایت وارد یا از آن خارج شده در نتیجهٔ استفاده از قرارداد انتقال فایل استاندارد اینترنت یا FTP بوده است. اما در همان زمان در نمونه‌ای از ترافیک یک دانشگاه، تنها ۱۸٪ از داده‌های مبادله شده به FTP مربوط بوده است. در دانشگاه دیگری این نسبت ۵۰٪ بوده است. واضح است که اگر پژوهشگران تنها یکی از این سایتها را (هر قدر دقیق) مطالعه می‌کردند، برای سایتهای دیگر نتیجه‌ای کاملاً نادرست به دست می‌آمد.

مشکل مشابهی در مورد زمان وجود دارد. نمونه‌ای از ترافیک FTP در یک آزمایشگاه پژوهشی در اکتبر ۱۹۹۲ نشان داد که میانهٔ اندازهٔ داده‌های منتقل شده ۴۵۰۰ بایت است. این میانه بر بیش از ۶۰۰۰۰ انتقال محاسبه شده که به نظر می‌آید آمارهٔ بسیار مطمئنی است. اما پنج ماه بعد، همان آماره بر بیش از ۸۰۰۰۰ انتقال محاسبه شد و میانه‌ای برابر با ۲۱۰۰ بایت به دست داد، که از نصف مقدار قبلی هم کمتر بود! در مارس ۱۹۹۸ همان میانه بر ۴۵۰۰۰۰ انتقال محاسبه شد و نتیجه برابر با ۱۰۹۰۰ بایت بود. بنابراین هر یک از این سه نقطه از زمان هر قدر دقیق مورد مطالعه قرار می‌گرفتند، نتایج به دست آمده برای این آمارهٔ «بسیار مطمئن» برای سایر نقاط زمان کاملاً نادرست بود.

منبع اساسی دیگر تغییرات مشکل‌آفرین اینترنت، ظهور بسیار سریع برنامه‌های کاربردی جدید است. در اکتبر ۱۹۹۲ آزمایشگاه پژوهشی فوق‌الذکر به مجموع چهل‌وپنج ارتباط وب در ماه پیوست. اما در ماههای بعدی وب گسترش یافت و ترافیک همان سایت وب در هر شش هفته دو برابر شد و این روند دو سال تمام ادامه یافت. امروزه این سایت در بیش از نیم‌میلیون ارتباط وب در روز مشارکت دارد. از دید پژوهشگران اینترنت، وب از ناکجا آمد. هیچ‌کس، حتی اولین مبلغین وب چنین موفقیت عظیمی را در خیال‌پردازانه‌ترین رویاهایشان پیش‌بینی نمی‌کردند. و اشکال اینجاست که ترافیک وب دارای خصوصیاتی است که تا آن هنگام در اینترنت متداول نبود. برون‌یابیهای دقیق که ترافیک آینده را پیش‌بینی می‌کردند یک‌شبه عملاً قدیمی و از کارافتاده شدند! [۷]

به سوی استنباط علمی

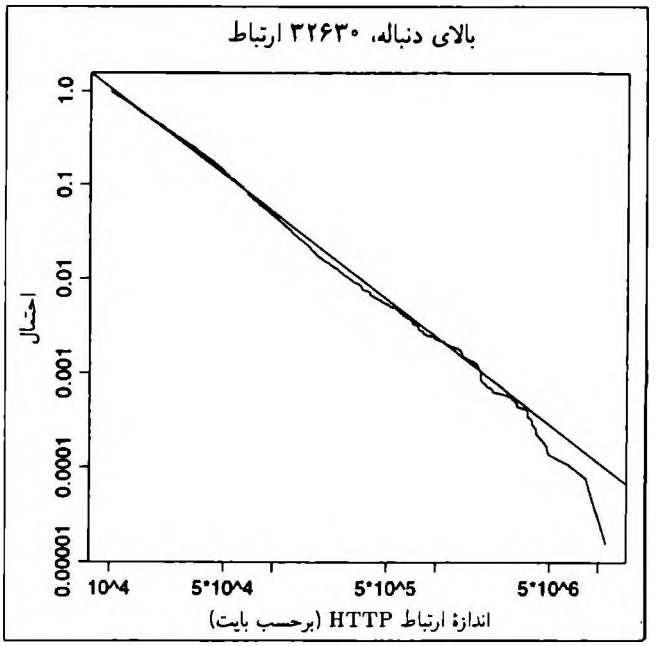
واضح است که اگر کسی بخواهد رفتار اینترنت را به طور کامل و درست بفهمد و پیشگویی کند، دشواریهایی که در بخش قبل ذکر شد باید برایش هشدار دهنده باشد؛ این دشواریها نشان می‌دهند که موانع بسیاری وجود دارند که باید بر آنها غلبه کرد، باید در نظر داشت که اینترنت بسیار سریع تغییر می‌کند و ذاتاً واگراست. یک رویکرد مناسب برای مواجهه با سرعت تغییرات اینترنت و ناهمگنی بیش از اندازهٔ آن این است که اساس یافته‌های خود را بر آزمایشهای دقیقی بگذاریم که بر حوزهٔ گسترده‌ای از اندازه‌گیریهای اینترنت صورت می‌گیرند. این اندازه‌گیریها باید در ابعاد وسیع، در زمانهای متفاوت، در نقاط مختلف شبکه و تحت شرایط متفاوت انجام شوند. اما این رویکرد اشکالاتی هم دارد: نه تنها به معنیِ فرایند زمان‌بر و دشوارکاوش در داده‌هاست، بلکه استنباط آماری (آن‌گونه که امروزه تلقی و اجرا می‌شود) هنگام مواجهه با تعداد کثیری از مجموعه‌های بزرگ داده‌ها به اندازهٔ کافی کارا نیست. استنباط آماری معمول بر تحلیل تک مجموعه‌ای از داده‌ها که معمولاً کوچک است متکی است، و وقتی برای آزمون «مدلهای واقعی» با استفاده از نمونه‌های کوچک به کار می‌رود عملکردی تقریباً بهینه دارد، و در طی سالها، زرادخانه‌ای از تکنیکها و ابزارهای مناسب برای کمک به تحلیلگران داده فراهم آورده است [Ch95].

اما آن‌چه پژوهشگران اینترنت به آن نیاز دارند روشهای استنباطی است که بتوانند گردایه‌ای بزرگ از مجموعه‌های حجیمی از داده‌ها را به نحو ثمربخشی پردازش کنند. اینان به ابزاری برای یافتن روابط شبه‌قانون بین مجموعه‌های مختلف داده‌ها نیاز دارند که به حوزهٔ وسیعی از شرایط مختلف تعمیم یابد. این رویکردها آنچه را که به صورت کلی استنباط علمی نامیده می‌شود تعریف می‌کنند. این رویکردها در علم فیزیک تاریخچه‌ای طولانی دارند، اما در علوم‌اجتماعی و در نوشتگان آمار متعارف کاملاً نادیده گرفته شده‌اند. به دلیلی که توکی آن را «بسط مبنا» می‌نامد، برای مطالعهٔ ترافیک اینترنت به استنباط علمی نیاز داریم، بسط مبنا به معنای تلاش برای آشکارسازی ناورداهای ترافیک است، یعنی صفاتی که نسبت به شرایط در حال تغییر شبکه حساس نیستند. چنین رویکردی می‌خواهد یک شهود و درک فیزیکی براساس توضیحات «جعبه سیاه» معمول یا شیوهٔ متداول تطبیق داده‌ها بنا کند. درضمن، استنباط علمی قالب و چارچوب مناسبی برای پژوهشگران ترافیک اینترنت فراهم می‌کند که براساس آن بتوانند به وجود مدلهای ممسکانه برای ترافیک اینترنت امیدوار باشند: هر مدلی که دارای تعداد کثیری پارامتر باشد ناگزیر غیرعملی است، زیرا پژوهشگران مطلع می‌دانند که امیدی به یافتن مقادیر با معنا برای همهٔ پارامترها نیست. به بیان دیگر، در زمینهٔ ترافیک اینترنت امساک تنها در صورت یافتن ناورداهای ترافیک قابل حصول است.

امیدی هست؟ ریاضیاتی هست؟

متأسفانه هیچ دستورالعمل استنباط علمی برای شناسایی ناورداهای ترافیک براساس تعداد زیادی مجموعهٔ حجیم و خوش‌کیفیت از داده‌های ترافیک، اینترنتی وجود ندارد. البته هنوز می‌توانیم تلاش کنیم تا ناورداها را از طریق تحلیل دستی مجدانه و تفکر عمیق بیابیم. هرگونه موفقیت در شناسایی ناورداها ارزش طلا را دارد، زیرا این امید را به همراه می‌آورد که نوعی مدل وابسته و ممسکانه برای ترافیک شبکه قابل اثبات باشد. در ادامه آنچه را که امروزه به عنوان ناورداهایی که با موفقیت تعیین شده‌اند می‌شناسیم به تفصیل بررسی خواهیم کرد.

نخست، در حالی که مدلهای پواسون به عنوان مبنای مشخص‌سازی ورود بسته‌های داده در اینترنت کاملاً کنار گذاشته شده‌اند، شواهد قاطعی وجود دارد که نشان می‌دهد این مدلها برای حوزهٔ پیش‌پا افتادهٔ مشخص‌سازی مراجعهٔ انسانها به اینترنت قابل به کارگیری هستند. یعنی زمانهایی که انسانها برای انجام کار مشخصی شروع به استفاده از اینترنت می‌کنند، واقعاً با فرایندی بی‌حافظه با آهنگ دریافتی که می‌توان آن‌را در طول بازه‌های زمانی از چند دقیقه تا حتی یک ساعت ثابت فرض کرد هماهنگی دارند. این ناوردا بر مجموعهٔ داده‌های حاصل از اندازه‌گیریهای مربوط به اینترنت مبتنی است که



شکل۵ نمودار توزیع متمم log-log (مشروط) اندازهٔ ارتباطهای WWW، با این فرض که اندازهٔ هر ارتباط حداقل ۱۰۰۰۰ بایت است.

اطلاعاتی دربارهٔ زمان شروع مثلاً ارتباطهای TELNET و FTP [PF95]، یا جلسات وب [FGWK98] در خود دارند، و در طی چند سال از مکانهای متعددی جمع‌آوری شده‌اند.

یک ناوردای بسیار جالب دیگر آن است که وقتی اندازه‌ها (برحسب بایت یا تعداد بسته‌ها) یا طول زمان مجموعه‌ای از جلسات یا ارتباطات شبکه (برحسب ثانیه) را در نظر می‌گیریم تقریباً همیشه چنین به نظر می‌آید که توزیع تجربی دارای خصوصیت سنگین-دنبالگی (۲) است که در آن $\beta < 2$ و حتی گاه $\beta \approx 1$. این حالات، تغییرپذیری بسیار زیاد را نشان می‌دهند: $\beta < 2$ یعنی فرایند ترافیک مورد بحث چنان مدلسازی شده است که دارای واریانس نامتناهی، و در حالت $\beta \leqslant 1$ دارای میانهٔ نامتناهی است.

شکل ۵ نشان می‌دهد که این دنباله‌های سنگین کاملاً با داده‌های اندازه‌گیری شده همخوانی دارند. داده‌های این نمودار از ترافیک یک روز وب در یک آزمایشگاه پژوهشی به دست آمده است. این روز به تصادف از بین صدها روز ثبت ترافیک انتخاب شده است. حال به اندازهٔ هر ارتباط وب نگاهی می‌اندازیم. روی‌هم‌رفته، ۲۲۶۰۰۰ ارتباط وجود داشت. اگر توجه خود را به ارتباطهایی که حداقل ۱۰۰۰۰ بایت منتقل کرده‌اند (یعنی ۱۴٪ بالای دنباله) محدود کنیم، و نمودار تابع توزیع متمم (۲) آنها را نسبت به اندازهٔ متناظر، در مقیاس log-log رسم کنیم، نمودار شکل ۵ به دست خواهد آمد. یک خط راست روی چنین نموداری رفتار دنباله را نشان می‌دهد که با یک توزیع پارتو مطابقت دارد. و شیب آن $-\beta$ را به دست می‌دهد. به روشنی دیده می‌شود که بیش از ۳۲۰۰۰ نقطه در شکل ۵ واقعاً روی خط قرار می‌گیرند، و با $\beta \approx 1.3$، داده‌ها واقعاً با واریانس نامتناهی سازگارند.

توجه کنید که خاصیت سنگین دنبالگی برای توزیع یک خاصیت جمعی یک منبع ترافیک، نظیر حجم داده‌ای که این منبع خواهد فرستاد، مطرح می‌شود. این خاصیت دربارهٔ اینکه منبع چگونه داده‌ها را به سری بسته‌هایی تقسیم می‌کند و آنها را در طول شبکه منتقل می‌کند چیزی به ما نمی‌گوید. بنابراین ممکن است این سؤال پیش بیاید که کشف اینکه خاصیت نامتناهی بودن واریانس در سطح ارتباط یا جلسه، یک ناوردای ترافیکی است به چه کار می‌آید. پاسخ دور از انتظار است: نتایج ریاضی جدیدی به دست آمده‌اند که وجود اندازه‌ها یا طول مدت ارتباطهای با واریانس نامتناهی را مستقیماً به کشف مقیاسهای فرکتالی در ترافیک جمعی شبکه در سطح بسته‌ها ربط می‌دهند! بنابراین پس از مجموعهٔ داده‌های حاصل از اندازه‌گیریهای اینترنت در سطح ارتباط، وجود ضروری خاصیت واریانس نامتناهی در مجموعه داده‌ها نیز عامل مهمی در حرکت از مدلهای مبتنی بر پواسونِ ترافیک داده به مدلهای مبتنی بر فرکتال بوده است. ناوردا بودن این خصیصه روشن می‌کند که چرا مقیاس فرکتالی نیز یک ناورداست. به علاوه، این نکته مبنایی برای یک توصیف فیزیکی بسیار ساده از ماهیت فرکتالی ترافیک جمعی شبکه (یعنی مجموع تعداد بسته‌ها یا بایتها در هر واحد زمان) شد که به صورت تجربی مشاهده شده بود. به این ترتیب دنباله‌های سنگین به رازگشایی از مدلسازی فرکتالی ترافیک بسیار یاری رساندند.

جالبتر اینکه در حقیقت پیشرفت نتایج مسیری در جهت خلاف آنچه تاکنون گفتیم پیموده است. این‌طور نبود که پژوهشگران ابتدا خصیصهٔ سنگین دنبالگی یا واریانس نامتناهی ارتباطهای مستقل را ببینند و بعد آن‌را با مدلهای فرکتالی ترافیک قیاس کنند. بلکه بر اساس تحلیل گستردهٔ پیمایشهای متعددی که از شبکه‌های محلی مختلف در طی یک دورهٔ چهارساله جمع‌آوری شده بود و با اعمال اصول «بسط مبنا» و افزایش توانمندی با استفاده از مجموعه‌های بزرگ داده‌ها، برخی از پژوهشگران برای اولین‌بار خیز بلندی به سمت استفاده از مدلهای فرکتالی ترافیک برداشتند که در آن زمان تقریباً دیوانه‌وار بود [LTWW94]. اگرچه در آن زمان پژوهشگران هنوز نمی‌توانستند مستقیماً به سؤال «چرا فرکتال؟» پاسخ دهند، اما در سازوکارهای ممکن به دقت اندیشه کردند ــ اندیشه‌ای که اساساً به جامعهٔ پژوهشگران شبکه فهماند «بروید و به دنبال دنباله‌های سنگین بگردید». وقتی پژوهشگران دانستند که باید به دنبال چه بگردند، آنها را همه‌جا یافتند! مثلاً می‌توان دنباله‌های سنگین را در زمان مصرف شده CPU توسط فرایندهای مختلف، اندازهٔ فایلها در یک سیستم فایل، اندازهٔ اقلام وب، فواصل زمانی بین فشردن کلیدها توسط شخصی که در حال تایپ است، اندازهٔ انفجارهای FTP، و اندازهٔ طول زمانی انفجارها یا دوره‌های بیکاری ارتباطهای مستقل Ethernet یافت.

این مثالها روشن می‌کنند که برخی از پیشرفتهایِ به سختی به دست آمدهٔ امروز در جهت فهم دینامیک ترافیک اینترنت حاصل همکاری نزدیک بین ریاضیدانها و پژوهشگران شبکه است. از سویی، همهٔ جزئیات مربوط به معماری شبکه‌های نوین داده‌ای، سلسله مراتب قراردادهای مورد استفاده، و فن‌آوریهای مختلف شبکه در اختیار ریاضیدانان قرار داده شده است. با این حال هنوز باید بسیاری از این جزئیات کم‌اهمیت را درک کرد تا مطمئن شویم که پژوهش ریاضی ازکاربرد شبکه فاصله نگرفته است. از سوی دیگر، پژوهشگران شبکه معمولاً کمتر به جزئیات دقیق یک اثبات یا تعریف ریاضی

علاقه‌مندند، اما می‌خواهند در سطح شهودی و/یا از طریق استدلالهای تجربی متقاعد شوند. در واقع تجارب و تجهیزات اینترنت و اندازه‌گیریها و مدلهای عملی حاصل، دستاوردهای مهندسی با اهمیتی هستند، و نتایج نظری در هندسهٔ فرکتالی، نشان‌دهندهٔ ریاضیاتی زیبا و فریبنده است. اما امید آن است که این دو در ترکیب با هم به شناخت بسیار بهتری از اینترنت منتهی شوند.

آیا توجه ریاضیدانان لازم است؟

کشف نخستین نمودهای مقیاس‌بندی فرکتالی با تردید بسیاری از ریاضیدانان روبه‌رو شد. آنها این پدیده را «هوس» گذرایی تلقی کردند که می‌آید و می‌رود، و چیزی برای عرضه کردن ندارد، مانند آنچه در سایر حوزه‌های علوم طبیعی یا اجتماعی نظیر هیدرولوژی، اقتصاد یا بیوفیزیک رخ داده بود، یعنی ثابت شده بود که «جنون» فرکتالی عمر کوتاهی دارد و بر بحثهای فلسفی درباره هدف کلی مدلسازی تأثیری نمی‌گذارد.

آنچه از دید این ریاضیدانان پنهان ماند این بود که کاربرد تحلیل فرکتالی در شبکه، از اساس با سایر کاربردها متفاوت است. نه تنها واقعیت مهندسی اینترنت یک نیروی پیش‌راننده است، بلکه مجموعه‌های داده‌های در دسترس نیز یکتا و برجسته هستند، هم از جهت حجم و کیفیت و هم مهمتر از آن، از جنبهٔ مقدار اطلاعاتی که در هر مشاهده (یعنی بستهٔ داده) نهفته است. این اطلاعات، دانش دقیقی دربارهٔ لایه‌های مختلف ساختار سلسله مراتبی شبکه‌های امروزی، دربارهٔ چگونگی تعامل قراردادهای مختلف این لایه‌ها با یکدیگر، و به طور غیرمستقیم دربارهٔ تعامل بین ارتباطهای مختلفی که در یک خط خاص با هم سهیم شده‌اند در اختیار ما می‌گذارد. غنای داده‌ها تأثیری عمیق بر نحوهٔ تحلیل، تفسیر و مدلسازی مجموعه‌های داده‌ها به جا گذاشته است. تصور حوزهٔ دیگری از علم که در آن داده‌های در دسترس چنین اطلاعات دقیقی دربارهٔ جنبه‌های مختلف وضعیت ارائه کنند دشوار است.

تغییر دیدگاه از پواسونی به فرکتالی در پژوهشهای ترافیک شبکه، بر شناخت ما از ترافیک واقعی شبکه تأثیر عمده‌ای داشته است، تا آنجا که اکنون می‌دانیم که چرا ترافیک جمعی اینترنت بر مقیاسهای زمانی چندصد میلی‌ثانیه و بیشتر، رفتاری فرکتالی از خود نشان می‌دهد. استدلالهای ریاضی مربوطه هم دقیق و هم ساده‌اند و کاملاً با شهود پژوهشگران شبکه همسو هستند، و می‌توان آنها را به سادگی برای کسی که در کار شبکه خبره نیست توضیح داد، و اینها بر موفقیت این تغییر نگرش صحه می‌گذارند. بخش دیگری از این درک جدید که به همان اندازه اهمیت دارد فهم این مطلب است که ما هنوز تصور روشن مشابهی از دینامیک ترافیک اینترنت بر مقیاسهای زمانی کمتر از چندصد میلی ثانیه نداریم؛ در این مقیاسها، سازوکارهای کنترل راه‌بندان پایانه به پایانه، جریان بسته‌ها را در لایه‌های مختلف سلسله مراتب شبکه تعیین می‌کنند. اما یافته‌های تجربی به تازگی حاکی از آن است که ترافیک اندازه‌گیری شدهٔ اینترنت بر این مقیاسهای زمانی کوچک نشان‌دهندهٔ بروز بی‌نظمیهای محلی است که با رفتار مقیاس‌بندی چندفرکتالی سازگارند و می‌توان آنها را به‌خوبی با استفاده از تکنیکهای مبتنی بر موجک[1] تحلیل کرد. با آنکه انتظار می‌رود که موجکها تحلیل چند فرکتالی ترافیک اینترنت را تسهیل کنند، اما کاربرد شبکه نیز به همان اندازه بر گسترش روشهای جدید مبتنی بر موجک به عنوان راهی برای بهره‌برداری از خصوصیات و ساختار غنی مجموعه‌های داده‌های در دسترس، تأثیر سازنده دارد.

بالاخره، از پیشرفتهایی با ماهیت متفاوت یاد می‌کنیم که به شدت محتاج عنایت ریاضیات است و بسیار امید می‌رود که مسائل ریاضی جالبی در خود داشته باشد. اکنون پروژه‌های پژوهشی بسیاری براساس اندازه‌گیریهای دوشمند اینترنت دردست انجام‌اند: مجموعه‌ای از هزاران سکوی کاوش[1] بالقوه در شبکه وجود دارند که هم در اندازه‌گیریهای مستقل و هم در اندازه‌گیریهای هماهنگ مسیرهای شبکه دخیل هستند تا رفتار شبکه را تعیین کنند و مشکلات را بیابند. این نگرش شبکه‌ای به دینامیک ترافیک اینترنت، هم ابعاد زمان و فضا را در برمی‌گیرد و هم ابعادی را که به‌وسیله لایه‌های مختلف سلسله مراتب شبکه تعریف شده‌است. واضح است که در اینجا مسائل جالب آنهایی هستند که به تعاملها، وابستگیها و ناهمگنیها در زمان، فضا و در خلال لایه‌های مختلف شبکه می‌پردازند. علاوه بر این، وقتی هدف غایی آن باشد که دهها میلیون کاربر اینترنت، مستقل از مکان استقرار یا زمان دستیابی به اطلاعات، قادر باشند میزان استفادهٔ خود از اینترنت را تعیین کنند، و مهندسی شبکه به گونه‌ای بهبود یابد که نیازهای بیشمار آنان را تأمین کند، آنگاه مسائل تحلیلی نیاز به یک عنصر مرکزی مقیاس دارند، که باید به حدودی بسیار فراتر از آنچه تاکنون مدنظر بوده توسعه یابد. اگرچه مقیاس صرف ممکن است رُعب‌آور به نظر بیاید، اما ما هنوز امتیاز بزرگی در اختیار داریم و آن مجموعه‌های عالی از داده‌هاست که می‌توان بر روی آنها کار کرد. آنگاه مسائل به یک چالش دشوار بدل می‌شوند، و حل آنها از حوزهٔ ریاضیات صرفاً جالب فراتر می‌رود و وارد نظام پاسخ‌گویی به سؤالاتی می‌شود که به تعیین میزان اهمیت این زیربنای عظیم جهانی کمک خواهد کرد.

یادداشتها

۱. توجه کنید که هدف این مقاله ارائهٔ یک راهنمای جامع کتاب‌شناسانه از آخرین دستاوردها و پیشرفتهای این حوزه نیست؛ خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند چنین راهنمایی را مثلاً در مقالهٔ تحقیقاتی اخیر [WTE96] بیابد.

۲. در اینجا منظور ما یک پیام صوتی است. حالت جالب شماره‌گیری برای تماس با یک ارائه‌دهندهٔ خدمات اینترنت را کمی بعد بررسی خواهیم کرد.

۳. ارلانگ، پالم، ویلکینسن و عده‌ای دیگر حدود نیم‌قرن پیش پیشگامان این کار بودند.

۴. به‌واقع، پژوهشگرانی را می‌بینیم که در تلاش برای توصیف مشاهدات خود به استعاره متوسل شده‌اند: «'یخ‌شکن'های ترافیک بر 'موجها'ی بلند سوارند، و آنها نیز به نوبهٔ خود بر روی 'برآمدگیها'ی بلندتر حرکت می‌کنند.» [FL91]

۵. نتایج اندازه‌گیریها به‌وسیلهٔ موگل (J. Mogul) در ۱۹۹۵ جمع‌آوری شده‌اند و از طریق مایگانی ترافیک اینترنت، http://www. acm. org/sigcomm/ITA، قابل دستیابی هستند.

۶. برای مثال به تحقیق اخیر انویر و همکارانش [ABLM98] نگاه کنید که برای همهٔ مجلات فیزیکال ریویو از ۱۹۹۰ تا ۱۹۹۶، یک محدودهٔ مقیاس‌بندی‌شدهٔ فرکتالی‌بودن را گزارش می‌دهد که به صورت تجربی تعریف شده است و روی‌هم‌رفته ۳ر۱ دهه (مرتبهٔ بزرگی، مبنای ۱۰) را در بر می‌گیرد.

1. wavelet

1. probe platform

۷. خاطر نشان می‌کنیم که این پدیده منحصر به وب نیست. برنامه‌های کاربردی دیگری نیز ناگهان ظهور کرده‌اند. وب ــ تاکنون ــ تنها موردی است که توسعهٔ انفجاری آن بیش از چند سال ادامه یافته است.

مراجع

[ABLM98] D. Avnir, O. Biham, D. Lidar, and O. Malcai, *Is the geometry of nature fractal?*, Science **279**, (Jan. 2, 1998), 39-40.

[Ch95] C. Chatfield, *Model uncertainty, data mining and statistical inference*, J. Roy. Statist. Soc. A **158** (1995), 419-466.

[FGWK98] A. Feldmann, A. C. Gilbert, W. Willinger, and T. G. Kurtz, *The changing nature of network traffic: Scaling phenomena*, Comput. Commun. Rev. **28**, no. 2 (April 1998).

[FL91] H. Fowler and W. E. Leland, *Local area network traffic characteristics, with implications for broadband network congestion management*, IEEE J. Selected Areas Commun. **9** (Sept. 1991), 1139-1149.

[LTWW94] W. E. Leland, M. S. Taqqu, W. Willinger, and D. V. Wilson, *On the self-similar nature of Ethernet traffic (Extended Version)*, IEEE/ACM Trans. Networking **2** (1994), 1-15.

[Lo98] M. Lottor, `http://www.nw.com/zone/WWW/top.html`, February 1998.

[Pa94] V. Paxson, *Growth trends in wide-area TCP connections*, IEEE Network **8** (July/August 1994), 8-17.

[PF95] V. Paxson and S. Floyd, *Wide-area traffic: The failure of poisson modeling*, IEEE/ACM Trans. Networking **3** (June 1995), 226-244.

[WTE96] W. Willinger, M. S. Taqqu, and A. Erramilli, *A bibliographical guide to self-similar traffic and performance modeling for modern high-speed networks*, Stochastic Networks: Theory and Applications (F. P. Kelly, S. Zachary, and I. Ziedins, eds.), Roy. Statist. Lecture Note Ser., vol. 4, Clarendon Press, Oxford, 1996, pp. 339-366.

******

• Walter Willinger and Vern Paxson, "Where mathematics meets the Internet", *Notices Amer. Math. Soc.*, (8) **45** (1998) 961-970.

* والتر ویلینجر، آزمایشگاه تحقیقاتی AT&T در فلورهم پارک نیوجرزی، آمریکا

`walter@research.att.com`

** ورن پاکسن، آزمایشگاه ملی لورنس، وابسته به دانشگاه کالیفرنیا در برکلی، آمریکا

`vern@ee.lbl.gov`

. . . واضح به‌نظر می‌رسد که در پنجاه سال آینده شاهد تغییرات اساسی در تقریباً همهٔ جنبه‌های زندگی، و بیش از هر چیز در رابطهٔ بین فرد و نهاد، خواهیم بود. بیشتر نهادها به‌صورت فعلیشان وجود نخواهند داشت. اما در دنیایی که مملو از افراد مطلع و مختار است و تغییر تنها مشخصهٔ ثابت آن است، چه وسایلی برای تضمین ثبات اجتماعی وجود خواهد داشت؟ این وسایل به چه صورتی خواهند بود؟ وقتی تکنولوژی مخابرات محدودیتهای مکانی و زمانی را از پیش پای فرد بردارد، چه بر سر هویت جامعه خواهد آمد؟ قانونِ چه کسی بر سپهر اطلاعاتی (cyberspace) حاکم خواهد بود؟ اگر از تکنولوژی برای تشدید پراکندگی در جامعهٔ انسانی، به جای وحدت بخشیدن به نژاد انسانی تحت الگویی واحد، استفاده کنیم، چگونه از سردرگمی پرهیز خواهیم کرد؟ در صورت وجود هزار کانال تلویزیونی، سرنوشت ارزشهای مشترک، و آگاهی مشترک که عامل پیوند افراد اجتماع‌اند چه خواهد بود؟ اگر هرکسی ناشر آرای خودش باشد، معیار و استاندارد چه معنایی خواهد داشت؟ وقتی سرعت تولید دانش از توانایی ما برای مدیریت آن فراتر رود، آیا از کوشش دست خواهیم کشید و در پیلهٔ واقعیت عملی فرو خواهیم رفت؟

اشکال این پرسشها و پرسشهای مشابه این است که ممکن است پرسشهای نابجایی باشند. منتقدان گوتنبرگ نگران آن بودند که فن چاپ فاجعهٔ حذف حافظه را به‌بار آورد. سازندگان پردازندهٔ مرکزی (mainframe) در دههٔ ۱۹۵۰ از تصور یک بازار ملی آمریکایی که حداکثر به پنج کامپیوتر نیاز داشته باشد، نگران بودند. مخالفان تلگراف می‌پرسیدند «ایالت مِین چه حرفی دارد که با ایالت تگزاس بزند؟» ما به‌ناگزیر محصور در زمینه و شرایط تاریخی خود هستیم. بنابراین رویدادها، گرایشها، و اثرات نوآوریها را براساس آنچه امور واقع می‌دانیم، تعبیر می‌کنیم. ولی مسأله این است که آنچه امروز امر واقع است، ممکن است فردا نباشد. پس چگونه می‌توانیم خارج از قالب زمانی و تاریخی خود دربارهٔ خود بیندیشیم؟ . . .

یکی از مهیج‌ترین جنبه‌های تکنولوژی اطلاعات این است که در حالی که دنیا را پیچیده و پیچیده‌تر و سرعت تغییرات آن را بیشتر و بیشتر می‌کند، در حالی که فاصلهٔ زمانی بین نوآوری و تأثیر آن را کوتاه و کوتاهتر می‌سازد، در حالی که همهٔ ما را هر چه بیشتر از طریق شبکه به هم نزدیک و با هم مرتبط می‌سازد، در عین حال برای هر یک، از ما امکان زندگی اختصاصی‌تر و انفرادی‌تری را فراهم می‌کند؛ همچنین سرعت و مقیاس عملکرد سیستمها امکان جستجو و یافتن الگوهای فرایند تغییر را میسر می‌سازد.

******

برگرفته از پیشگفتاری به قلم James Burk بر کتاب
Peter J. Denning and Robert M. Metcalfe, *Beyond Calculation*, Copernicus, Springer-Verlag (1997).

مقاله کلاسیک

سیر تکامل مفهوم انتگرال

هانری لبگ
ترجمهٔ رامتین گلبانگ

آقایان:

می‌خواهیم با صرف‌نظرکردن از تحولات فنی به بررسی کلیِ اصلاحات و غنی‌سازی‌هایِ پیاپیِ مفهوم انتگرال و پیدایش مفاهیم دیگری که در تحقیقات اخیر در بارهٔ توابع با متغیرهای حقیقی به‌کار می‌روند، بپردازیم.

قبل از کوشی، تعریفی از انتگرال در معنای واقعی واژهٔ «تعریف» وجود نداشت. توجه اشخاص محدود به این بود که مشخص کنند کدام مساحتها را باید جمع یا تفریق کرد تا انتگرال به‌دست آید.

ولی در نظر کوشی، تعریف لازم بود زیرا توجه به دقت که مشخصهٔ ریاضیات نوین است با او آغاز شد. کوشی توابع پیوسته و انتگرال این توابع را به روشی شبیه روش امروزی ما تعریف کرد. از نظر او برای رسیدن به انتگرال $f(x)$ کافی بود که مجموعهای

$$S = \sum f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad (1)$$

را تشکیل دهد (شکل ۱ را ببینید) که مساحان و ریاضیدانانْ قرنها برای تقریب‌زدن مساحت از آن استفاده کرده‌اند، و از این طریق به‌وسیلهٔ گذار به حد، انتگرال

$$\int_a^b f(x)dx$$

را نتیجه بگیرد.

اگرچه این گذار، به‌وضوح از نظر کسانی که [نیل به انتگرال را] با مفهوم مساحت آغاز می‌کنند مجاز بود، اما کوشی می‌بایست ثابت کند که مجموع S، تحت شرایطی که او در نظر گرفت واقعاً به حدی میل می‌کند. هر وقت به جای یک عقیدهٔ تجربی، یک تعریف منطقی محض قرار گیرد، الزام مشابهی درکار می‌آید. باید اضافه شود که [در این صورت] فایدهٔ موضوع تعریف‌شده، دیگر آشکار نیست و آن را فقط از بررسی ویژگیهای آن موضوع می‌توان نتیجه گرفت.

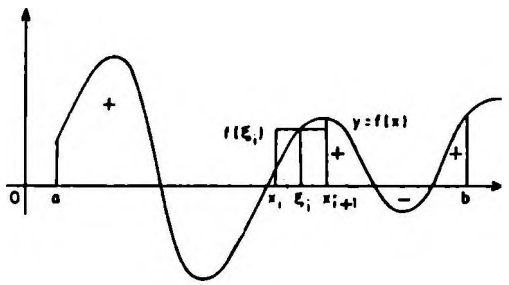
این تاوانِ پیشرفت منطقی است. کاری که کوشی انجام داد آنقدر قابل توجه هست که معنایی فلسفی داشته باشد. معمولاً گفته می‌شود که دکارت، هندسه را به جبر فرو کاست. من بیشتر مایلم که بگویم او با به‌کارگیری مختصات، تمامی هندسه را به هندسهٔ خط مستقیم فرو کاست و همچنین

این مقالهٔ ترجمهٔ متن سخنرانی هانری لبگ (Henri Lebesgue) در اجلاسی است که انجمن ریاضی فرانسه در هشتم ماه مه ۱۹۲۶ در شهر کپنهاگ برگزار کرد. ترجمهٔ انگلیسی این سخنرانی برای نخستین بار به‌عنوان ضمیمهٔ کتاب

Soo Bong Chase, *Lebesgue Integration*, Marcel Dekker (1980)

به چاپ رسیده است.

هانری لبگ (۱۸۷۵ـ۱۹۴۱) یکی از تأثیرگذارترین آنالیزدانان فرانسوی قرن بیستم و مبدع انتگرال لبگ است. وی با ابداع نظریهٔ این انتگرال، که ناشی از بصیرت عمیق او در مفاهیم شهودی هندسی بود، آغازگر دورهٔ نوینی در آنالیز شد. این دستاورد نه تنها سرآغاز انتگرالگیری به مفهوم نوین بلکه نقطهٔ عطفی در نظریهٔ سری فوریه و نظریهٔ پتانسیل بوده است. مفهومهای بعد لبگِ فضاهای توپولوژیک و عدد لبگِ مجموعه‌های فشرده نیز از آن اوست. وی همچنین تحقیقات مهمی در مسألهٔ دیریکله کرده است.



شکل۱

این هندسه، با عرضه‌کردن مفاهیم پیوستگی و اعداد گنگ، مجال داده است که جبر قلمرو واقعی خود را به‌دست آورد.

برای اینکه تمامی هندسه به هندسهٔ خط مستقیم فروکاسته شود، لازم بود تعدادی مفاهیم مرتبط با هندسه‌های ابعاد بالاتر، نظیر طول خم، مساحت رویه، و حجم جسم را کنار گذاریم. پیشرفتی که کوشی آن را تحقق بخشید، دقیقاً در همین جاست. پس از او کافی بود خبرگان علم حساب به‌کمک اعداد طبیعی پیوستار خطی را تشکیل دهند تا حسابی‌سازی[1] علم به انجام رسد.

و اکنون، آیا باید توجه خود را به آنالیز محدود کنیم؟ خیر. درواقع تمامی آنچه انجام خواهیم داد، می‌تواند به زبان حساب بازگردانده شود. اما اگر بصیرتهای شهودی، هندسی و مستقیم را نپذیریم، اگر توجهمان آنچنان منحصر به منطق محض شود که بین چیزهای دقیق تمایز نگذاریم، آنگاه به سختی ممکن است در بارهٔ بسیاری پرسشها و مفاهیم بیندیشیم و برای مثال اکثر مفاهیمی که امروز قصد بررسی آنها را داریم، کاملاً از نظرمان دور خواهد ماند.

مدتهای طولانی از توابع ناپیوستهٔ مشخصی انتگرال گرفته می‌شد. تعریف کوشی هنوز در مورد این انتگرالها به‌کار می‌آمد، اما طبیعی بود که حوزهٔ دقیق این تعریف بررسی شود، همچنان که ریمان بررسی کرد.

اگر $\underline{f}_i$ و $\overline{f}_i$ کرانهای پایین و بالای $f(x)$ را بر (x_i, x_{i+1}) مشخص کنند، آنگاه S بین دو مقدار

$$\underline{S} = \sum \underline{f}_i(x_{i+1} - x_i) \quad \text{و} \quad \overline{S} = \sum \overline{f}_i(x_{i+1} - x_i)$$

قرار می‌گیرد. ریمان نشان داد برای اینکه تعریف کوشی به‌کار آید، کافی است که

$$\overline{S} - \underline{S} = \sum(\overline{f}_i - \underline{f}_i)(x_{i+1} - x_i)$$

به‌ازای دنبالهٔ مشخصی از افرازهای (a, b) به بازه‌های کوچکتر و کوچکتر (x_i, x_{i+1})، به سمت صفر میل کند. داربو اضافه کرد که گذار متعارف به حد از $\underline{S}$ و $\overline{S}$ معمولاً دو عدد مشخص

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \qquad \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

را به‌دست می‌دهد. این اعداد در حالت کلی متفاوت‌اند، و تنها هنگامی برابرند که انتگرال کوشی-ریمان موجود باشد.

1. arithmetization

از دیدگاه منطقی این تعریفها بسیار طبیعی‌اند؛ این طور نیست؟ با وجود این می‌توان گفت که در عمل غیرقابل استفاده هستند. تعریف ریمان به‌خصوص این عیب را دارد که تنها به‌ندرت و به مفهومی، به طور اتفاقی قابل به کاربردن است.

درواقع آشکار است که اگر $f(x)$ پیوسته باشد، افرازکردن (a, b) به بازه‌های کوچکتر و کوچکتر (x_i, x_{i+1}) تفاوت $\overline{f}_i - \underline{f}_i$ را کوچکتر و کوچکتر می‌سازد و با توجه به این فرایند پیوستگی، واضح است که اگر تنها تعداد معدودی نقطهٔ ناپیوستگی داشته باشیم، این افرازکردن موجب می‌شود $\overline{S} - \underline{S}$ به سمت صفر میل کند. اما دلیلی در دست نیست که امیدوار باشیم همین وضعیت برای تابعی که همه جا ناپیوسته است، برقرار باشد. بنابراین در عمل، کوچکتر و کوچکترکردن بازه‌های (x_i, x_{i+1}) یعنی در نظرگرفتن مقادیر $f(x)$ به‌ازای مقادیری از x که به هم نزدیک و نزدیکتر می‌شوند به هیچ وجه تضمین نمی‌کند مقادیری از $f(x)$ به‌دست آید که تفاوتهای آنها کوچکتر و کوچکتر شوند.

برای دستیابی به هدف، کار را با گرد هم آوردن یا دسته‌بندی مقادیری از $f(x)$ که تفاوتی ناچیز دارند، ادامه می‌دهیم. از این قرار واضح است که باید به‌جای (a, b) بازهٔ $(\underline{f}, \overline{f})$ را که به کرانهای پایین و بالای $f(x)$ بر (a, b) محدود است، افراز کنیم. این عمل را به کمک اعداد y_i ای که تفاوتشان با یکدیگر کمتر از ϵ است، انجام می‌دهیم. پس، مثلاً مقادیری از $f(x)$ را در نظر می‌گیریم که به‌وسیله رابطهٔ

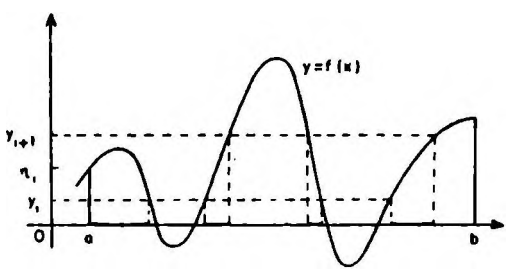
$$y_i \leq f(x) \leq y_{i+1}$$

تعریف می‌شوند. مقادیر متناظر x، مجموعه‌ای مانند E_i تشکیل می‌دهند. در وضعیت شکل ۲ این مجموعهٔ E_i از چهار بازه تشکیل شده است. در مورد تابع پیوستهٔ مشخصی چون $f(x)$ ممکن است تعدادی نامتناهی بازه تشکیل شود. وضعیت در مورد تابعی دلخواه ممکن است خیلی پیچیده باشد. اما مسأله‌ای نیست؛ این مجموعهٔ E_i است که نقش متناظر بازهٔ (x_i, x_{i+1}) در تعریف انتگرال توابع پیوسته را عهده‌دار است، زیرا مقادیری از x را به ما معرفی می‌کند که به $f(x)$ مقادیری با تفاوت ناچیز می‌دهد.

اگر η_i عدد دلخواهی باشد که بین y_i و y_{i+1} انتخاب شود:

$$y_i \leq \eta_i \leq y_{i+1}$$

مقادیر $f(x)$ به‌ازای نقاط E_i تفاوتی کمتر از ϵ با η_i دارند. عدد η_i همان نقشی را به‌عهده خواهد داشت که $f(\xi_i)$ در (۱) داشت. به همین ترتیب



شکل۲

نقش طول یا اندازهٔ بازهٔ (x_i, x_{i-1}) یعنی $x_{i+1} - x_i$ را اندازهٔ $m(E_i)$، که کمی بعد آن را به مجموعهٔ E_i نسبت خواهیم داد، به‌عهده خواهد داشت. به این نحو، مجموع

$$S = \sum \eta_i m(E_i) \qquad (۲)$$

را تشکیل می‌دهیم. اما نخست بیایید به آنچه تاکنون انجام داده‌ایم بنگریم و برای فهم بهتر، آن را با عباراتی دیگر بازگو کنیم.

هندسه‌دانان قرن هفدهم، انتگرال $f(x)$ را ــ واژهٔ «انتگرال» هنوز وضع نشده بود، اما این زیاد مهم نیست ــ به‌عنوان مجموع تعدادی نامتناهی از تقسیم‌ناپذیرها [۱] در نظر داشتند، که هر یک از آنها عرض $f(x)$، مثبت یا منفی، می‌باشد. بسیار خوب! ما فقط تقسیم‌ناپذیرها را دسته‌بندی کرده آنهایی را که تقریباً هم‌اندازه هستند در یک دسته قرار داده‌ایم. به‌عبارت دیگر ــ همچنان که در جبر می‌گوییم ــ دست به گردآوری یا تقلیل عبارات مشابه زده‌ایم. و باز می‌توان گفت که با روش ریمان، ریاضیدانان سعی می‌کردند تقسیم‌ناپذیرها را با در نظر گرفتنشان به ترتیبی که با تغییرات x به‌دست می‌آمد، جمع کنند. در این مورد مانند تاجری عمل می‌کردند که قاعده و اسلوبی در کارش ندارد، یعنی مانند کسی که سکه‌ها و اسکناسها را به‌طور اتفاقی و به ترتیبی که در دستانش قرار می‌گیرد شمارش می‌کند. در حالی که ما همچون تاجری با اسلوب عمل می‌کنیم که می‌گوید

من $m(E_1)$ یک سنتی به ارزش $1 \times m(E_1)$ دارم.
من $m(E_2)$ پنج سنتی به ارزش $5 \times m(E_2)$ دارم.
من $m(E_3)$ ده سنتی به ارزش $10 \times m(E_3)$ دارم.
و غیره. بنابراین من روی‌هم‌رفته این قدر پول دارم:

$$S = 1 \times m(E_1) + 5 \times m(E_2) + 10 \times m(E_3) + \cdots$$

هر دو روش، بدون شک، تاجر را به یک نتیجه خواهد رساند، چرا که او هر اندازه هم ثروتمند باشد، تنها تعدادی متناهی اسکناس برای شمارش دارد، اما برای ما که ملزم به جمع کردن تعدادی نامتناهی از تقسیم‌ناپذیرها هستیم، تفاوت این دو روشِ جمع کردن، فاحش است.

اکنون توجه خود را به تعریف عدد $m(E_i)$ که به E_i منسوب شد، معطوف می‌کنیم. تناظر میان این اندازه و یک، طول، یا همین‌طور تعداد اسکناسها، ما را به‌طور طبیعی به بیان این مطلب سوق می‌دهد که: در مثال مربوط به شکل (۲)، $m(E_i)$ مجموع طول چهار بازه‌ای است که E_i را تشکیل می‌دهند و همچنین در مثالی که در آن E_i از تعدادی نامتناهی بازه تشکیل شده است، $m(E_i)$ مجموع طول تمامی این بازه‌ها خواهد بود. این موضوع در حالت کلی ما را در این جهت پیش می‌برد: E_i را در تعدادی متناهی یا تعدادی نامتناهیِ شمارا از بازه‌ها محصور می‌کنیم، و فرض می‌کنیم l_1، l_2، ... طولهای این بازه‌ها باشند. یقیناً می‌خواهیم رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$m(E_i) \leq l_1 + l_2 + \cdots$$

اگر در جستجوی بزرگترین کران پایین طرف دوم این رابطه برای تمام دستگاههای ممکن از بازه‌هایی باشیم که می‌توانند E_i را بپوشانند، این عدد کرانی بالا برای $m(E_i)$ خواهد بود. به این دلیل آن را با $\overline{m(E_i)}$ نمایش می‌دهیم و داریم

$$m(E_i) \leq \overline{m(E_i)} \qquad (۳)$$

همین‌طور، اگر C مجموعهٔ نقاطی از (a, b) باشد که در E_i نیستند، خواهیم داشت

$$m(C) \leq \overline{m(C)}$$

اکنون واضح است که می‌خواهیم رابطهٔ

$$m(E_i) + m(C) = m((a, b)) = b - a$$

برقرار باشد. بنابراین باید داشته باشیم

$$m(E_i) \geq b - a - \overline{m(C)} \qquad (۴)$$

حال نابرابریهای (۳) و (۴) کرانهای بالا و پایین $m(E_i)$ را به‌دست می‌دهند. به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که این دو نابرابری هیچگاه متناقض یکدیگر نیستند. هنگامی که کرانهای پایین و بالای $m(E_i)$ برابرند، $m(E_i)$ تعریف می‌شود و می‌گوییم E_i اندازه‌پذیر است [۲].

تابعی چون $f(x)$ که برای آن مجموعه‌های E_i به‌ازای تمامی y_iها اندازه‌پذیرند، اندازه‌پذیر نامیده می‌شود. برای چنین تابعی رابطهٔ (۲) یک مجموع S را معین می‌کند. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد هنگامی که y_i انتخابی به گونه‌ای تغییر می‌کند که ϵ به سمت صفر می‌گراید، مجموع S به سمت حد مشخصی میل می‌کند که بنا به تعریف،

$$\int_a^b f(x)dx$$

است [۳].

این اولین تعمیم مفهوم انتگرال به بسیاری تعمیمهای دیگر منجر شد. فرض می‌کنیم مسألهٔ انتگرال‌گیری از تابع دو متغیرهٔ $f(x, y)$ مطرح است. در این صورت دقیقاً مانند قبل عمل می‌کنیم. به آن تابع، مجموعه‌های E_i را ــ که اکنون نقاطی در صفحه‌اند و از این پس روی خط قرار ندارند ــ نسبت می‌دهیم. اکنون باید به این مجموعه‌ها یک اندازهٔ دوبعدی[1] نسبت دهیم. همان‌طور که اندازهٔ یک‌بعدی[2] از طول بازه‌ها نتیجه می‌شود، این اندازهٔ دوبعدی از مساحت مستطیلهای

$$\alpha \leq x \leq \beta, \qquad \gamma \leq y \leq \delta$$

به‌دست می‌آید. با این اندازهٔ تعریف‌شده، رابطهٔ (۲) مجموع S را به‌دست می‌دهد که از آن، انتگرال به‌وسیلهٔ گذار به حد نتیجه می‌شود.

پس تعریفی که ما در نظر گرفتیم، بی‌درنگ به توابع چندمتغیره تعمیم می‌یابد. در اینجا توسیع دیگری مطرح می‌شود که در مورد توابعی با هر تعداد متغیر صادق است. اما من آن را تنها برای وضعیتی بیان می‌کنم که انتگرالگیری $f(x)$ بر (a, b) مطرح است.

1. plane measure 2. linear measure

من گفته‌ام که این مسأله‌ای است در بارهٔ تشکیل مجموع تقسیم‌ناپذیرها که توسط عرضهای نقاط x، یعنی $y = f(x)$، مشخص می‌شوند. اندکی قبل، این تقسیم‌ناپذیرها را برحسب اندازه‌شان دسته‌بندی کردیم. اکنون خود را مقید می‌کنیم که آنها را برحسب علامتشان دسته‌بندی کنیم. باید مجموعهٔ دوبعدی[1] E_p، مرکب از نقاط با عرض مثبت، و مجموعهٔ E_n، مرکب از نقاطِ با عرض منفی، را در نظر بگیریم. در حالت ساده‌ای که $f(x)$ پیوسته است، قبل از کوشی، همچنان که در ابتدا یادآوری کردم، می‌نوشتند:

$$\int_a^b f(x)dx = (E_p) \text{ مساحت } - (E_n) \text{ مساحت}$$

این فرمول ما را به این فکر می‌اندازد که بنویسیم

$$\int_a^b f(x)dx = m_s(E_p) - m_s(E_n)$$

m_s نشان‌دهندهٔ یک اندازهٔ دوبعدی است. این تعریف جدید با تعریف قبلی معادل است، و ما را به روش شهودی قبل از کوشی باز می‌گرداند اما تعریف اندازه، پایهٔ منطقی استواری به آن داده است.

بنابراین ما دو روش برای تعریف انتگرال تابعی از یک یا چند متغیر می‌شناسیم، بدون آنکه مجبور باشیم توجهی به شکل کم و بیش پیچیدهٔ دامنهٔ انتگرال‌گیری داشته باشیم، زیرا دامنهٔ D تنها به شرح زیر در این امر دخالت دارد: مجموعه‌های E_i در اولین و مجموعه‌های E_p و E_n در دومین تعریف ما، تنها با در نظر گرفتن مقادیری که تابع f در نقاط D می‌گیرد تشکیل می‌شوند.

از آنجا که انتخاب دامنهٔ انتگرال‌گیری D تنها در تشکیل مجموعه‌های E_i، یا E_p و E_n مؤثر واقع می‌شود، مشخص است که می‌توانیم توافق کنیم که این مجموعه‌های E_i، E_n، و E_p را فقط با در نظر داشتن مقادیری که f روی نقاط مجموعهٔ داده‌شده‌ای چون E می‌پذیرد، تشکیل دهیم و بنابراین انتگرال f را که به مجموعهٔ E گسترش یافته، تعریف کرده‌ایم.

به‌منظور دقیق‌کردن حوزهٔ این بسط جدید مفهوم انتگرال، یادآوری می‌کنیم که تعاریف ما مستلزم این هستند که f اندازه‌پذیر باشد، به‌عبارت دیگر مجموعه‌های E_i برای تعریف اول و مجموعه‌های E_p و E_n برای تعریف دوم، اندازه‌پذیر باشند و از این رو، E نیز باید اندازه‌پذیر باشد. بنابراین می‌دانیم چگونه انتگرال تعمیم‌یافته به یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر از یک تابع اندازه‌پذیر و کراندار بر این مجموعه را تعریف کنیم. من درواقع به‌طور ضمنی فرض کرده‌ام که ما در بارهٔ توابع کراندار بحث می‌کنیم.

اگر تابع fای که از آن انتگرال گرفته می‌شود کراندار نبود، در اولین تعریف ما چه تغییراتی باید داده شود؟ بازهٔ $(\underline{f}, \overline{f})$ دیگر متناهی نخواهد بود؛ تعدادی نامتناهی عدد y_i برای تقسیم آن به بازه‌هایی که طولشان حداکثر برابر ϵ باشد لازم خواهد بود، بنابراین تعدادی نامتناهی مجموعهٔ E_i وجود خواهند داشت و در این صورت مجموع S در رابطهٔ (۲) یک سری خواهد بود. برای اینکه در آغاز کار متوقف نشویم باید فرض کنیم که سری S برای اولین انتخاب از اعداد y_i همگراست، اما اگر S برای یک عدد انتخابی y_i موجود باشد، برای تمام اعداد انتخاب‌شدهٔ y_i موجود است و تعریف انتگرال بدون تغییر صادق است.

1. plane set

نام توابع مجموع‌پذیر[1] به تمام توابعی که از طریق روشهای مذکور می‌توان از آنها انتگرال گرفت، اطلاق شده است، به‌عبارت دیگر به تمام توابع اندازه‌پذیری که برای آنها مجموعهای S دارای معنی است. هر تابع اندازه‌پذیر کراندار، مجموع‌پذیر است و چون تاکنون هیچکس موفق نشده است یک تابع اندازه‌ناپذیر ارائه دهد، فعلاً می‌توان گفت که تقریباً هر تابع کراندار دارای انتگرال است. از طرف دیگر توابع خیلی سادهٔ بیکرانی وجود دارند که مجموع‌پذیر نیستند، بنابراین نباید شگفت‌زده شد که هنوز در بعضی مسائل، نارسایی مفهوم ما از انتگرال آشکار می‌شود.

ما با آغاز کردن از اولین تعریف خود، مفهوم انتگرال را به توابع بیکران تعمیم داده‌ایم. دومین تعریف هم به نتیجهٔ مشابهی منجر می‌شود. اما به این منظور لازم است مفهوم اندازه را تعمیم دهیم به طریقی که نه تنها مجموعه‌های کراندار که ما تاکنون فقط آنها را در نظر گرفته‌ایم بلکه همچنین مجموعه‌هایی از نقاط را که به بینهایت میل می‌کنند، شامل شود. من این روش دوم را تنها به این دلیل ذکر می‌کنم که با تعمیم دیگری از انتگرال معین نیز در ارتباط است که در آن بازه، دامنه، و مجموعه‌ای که انتگرال روی آنها تعریف می‌شود، برخلاف شیوه‌ای که تا اینجا داشته‌ایم دیگر متناهی فرض نمی‌شوند بلکه می‌توانند به بینهایت میل کنند.

من فقط به اشاره‌ای اکتفا می‌کنم زیرا نمی‌خواهم این تعمیم مفهوم انتگرال را در ادامهٔ بحث در نظر بگیرم. به همین دلیل به اختصار از تحقیقی یاد می‌کنم که هنوز بسیار بکر است و به‌دست جوانی به نام گاتوا[2] که در جنگ کشته شد، صورت گرفته است [۴]. وی قصد داشت عمل انتگرال‌گیری را برای توابعی با تعدادی نامتناهیْ متغیر تعریف کند. این تحقیق که توسط لوی[3] و نوربرت وینر ادامه یافت، با بررسیهای اصل موضوعی توسط فرشه[4] و دانیل[5]، به‌کمک تعمیم مفهوم انتگرال به مجموعه‌های مجرد، بدون ارتباط نیست [۴]. علاوه بر این فرشه و دانیل در نظر داشتند که نه تنها تعاریفی را که من تاکنون در بارهٔ آنها سخن گفته‌ام، بلکه تعمیم دیگری از انتگرال معین به مجموعه‌های مجرد را به‌کار برند که به‌زودی از طریق مفهوم انتگرال نامعین ــ که اکنون قصد بررسی آن را داریم ــ به این تعمیم خواهیم رسید.

معمولاً تابع $F(x)$ای را که با

$$F(x) = C + \int_a^x f(x)dx \qquad (۵)$$

تعریف می‌شود انتگرال نامعین $f(x)$ می‌نامند. ما به این نام اتکا نمی‌کنیم بلکه به واژه‌های «انتگرال نامعین» معنیِ اصلی آنها را اعطا می‌کنیم. در ابتدا هر دو نام «انتگرال معین» و «انتگرال نامعین» به‌عبارتِ $\int_a^b f(x)dx$ اطلاق می‌شدند. اما انتگرال وقتی «معین» نامیده می‌شد که صحبت از بازه‌ای داده‌شده، مشخص و یا تعریف‌شده چون (a, b) در میان بود و وقتی «نامعین» بود که (a, b) متغیر، نامشخص، تعریف‌نشده یا ــ اگر دوست دارید ــ نامعین بود.

خلاصه، اینکه $F(x)$ را انتگرال نامعین $f(x)$ می‌نامیم واقعاً با تسامح همراه است. علاوه بر این، اگر ملاحظه کنیم که وقتی $F(x)$ را بررسی می‌کنیم، همیشه برای به‌دست آوردن ویژگیهای $\int_a^b f(x)dx$ است، یعنی

1. summable 2. R. Gateaux 3. Paul Levy
4. M. Fréchet 5. P. J. Daniell

درواقع $\int_a^b f(x)dx$ را از طریق $F(x)$ بررسی می‌کنیم، می‌بینیم که بهتر است بگوییم: من تابع

$$\varphi(a,b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (۵')$$

را انتگرال نامعین $f(x)$ می‌نامم.

میان یک انتگرال نامعین و انتگرالِ معینِ متناظرِ با آن همان روابط و همان تفاوتهایی هست که میان یک تابع و مقدار مشخصی که آن تابع اختیار می‌کند. علاوه بر این اگر بازهٔ انتگرالگیری (a,b) را به D نشان دهیم، می‌توانیم بگوییم که انتگرال نامعین، تابعی است که متغیر مستقل آن، دامنهٔ D می‌باشد:

$$\psi(D) = \varphi(a,b)$$

از این ملاحظات به‌وضوح نتیجه می‌شود که در مورد تابعی دومتغیره چون $f(x,y)$، نباید انتگرال نامعین آن را تابع

$$F(X,Y) = c_1(x) + c_2(y) + \int_\alpha^x \int_\beta^y f(x,y)dxdy \quad (۶)$$

در نظر گرفت، هر چند گاهی این کار انجام می‌شود. اگر قلمرو انتگرالگیری را به دامنهٔ مستطیلی

$$a \le x \le b, \qquad c \le y \le d$$

محدود کنیم، باید تابع چهارمتغیرهٔ

$$\varphi(a,b;c,d) = F(b,d) + F(a,c) - F(a,d) - F(b,c) \quad (۷)$$

را انتگرال نامعین در نظر بگیریم. اما اگر کسی بخواهد تمام دامنه‌های انتگرال‌گیری را در نظر بگیرد، از آنجا که کلیترین دامنه را نمی‌توان با تعدادی متناهیْ پارامتر ــ هر اندازه زیاد ــ مشخص کرد، لازم می‌شود توابع معمولی را رها کند تا بتواند ارتباط میان یک دامنهٔ D و انتگرال توسعه‌یافته به این دامنه را نمایش دهد، و به مطالعهٔ مستقیم تابع

$$\psi(D) = \int_D \int f(x,y)dxdy$$

بپردازد، که در آن D یک دامنه است. این تابع است که ما آن را انتگرال نامعین $f(x,y)$ می‌نامیم. به بیان دقیقتر، چون ما علاوه بر این، انتگرال f را به‌طریقی تعریف کرده‌ایم که به یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر E تعمیم یافته است، انتگرال نامعین را به‌صورت تابعی مجموعه‌ای[1] در نظر خواهیم گرفت که برای تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر تعریف می‌شود [۵].

در تمام مطالبی که تاکنون گفته‌ایم، محققاً، تنها مسائلی در بارهٔ زبان یا نحوهٔ نامگذاری مطرح شده است، اما اگر مفهوم جدیدی به‌دست نیاورده بودیم، آن مسائل مطرح نمی‌شدند. به این دلیل، نباید متعجب شد که زبان جدید اعطای تمام معانیِ ممکن را به حقایقی که نخست در مورد تابع $F(x)$ از رابطهٔ (۵) معلوم شده، روا داشته است. به‌ویژه، توانسته‌اند توابعی مجموعه‌ای

1. set function

را که انتگرال نامعین هستند با دو خاصیت مشخص کنند: جمع‌پذیری کامل[1] و پیوستگی مطلق[2] [۶].

هنگامی که یک تابع مجموعه‌ای دارای این دو ویژگی است، انتگرالِ نامعینِ یک تابع f است که، براساس اینکه مجموعه‌های E از نقاطی روی یک خط، در یک صفحه، در فضای معمولی و غیره، تشکیل شوند، وابسته به ۱، ۲، ۳، ... متغیر است. برای اینکه زبان و نمادگذاری ما یکنواخت باشد، می‌گوییم f یک تابع نقطه‌ای[3] است، مانند $f(P)$؛ می‌نویسیم

$$\psi(E) = \int_E f(P)dm(E) \qquad (۸)$$

تابع $f(P)$ کاملاً توسط $\psi(E)$ مشخص می‌شود تا به آن اندازه که با تغییر دلخواه f بر نقاط مجموعه‌ای دلخواه با اندازهٔ صفر، $\psi(E)$ کماکان انتگرال نامعین آن باقی می‌ماند؛ و می‌توان با شروع از $\psi(E)$ توسط روشی که متعاقباً می‌آید، $f(P)$ را ــ مگر بر نقاط مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر ــ به‌دست آورد.

فرض کنید P نقطه‌ای باشد که می‌خواهیم مقدار f را در آن محاسبه کنیم. دامنهٔ انتگرال‌گیری Δ را بازه‌ای به مرکز P، یا دایره‌ای به مرکز P، یا کره‌ای به مرکز P ــ برحسب اینکه با مورد خط، صفحه یا فضا سروکار داشته باشیم ــ در نظر می‌گیریم و خارج‌قسمت $\psi(\Delta)/m(\Delta)$ را تشکیل می‌دهیم. سپس فرض کنید Δ به صفر میل می‌کند و داریم

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\psi(\Delta)}{m(\Delta)} = f(P) \qquad (۹)$$

این نتیجه آشکارا قضیه‌ای کلاسیک، را تعمیم می‌دهد که براساس آن، $f(x)$ پیوسته است، و تابع $F(x)$ مذکور در رابطهٔ (۵)، f را به‌عنوان مشتق خود می‌پذیرد؛ کار ما در محاسبهٔ $f(P)$، درواقع یک نوع مشتق‌گیری از تابع مجموعه‌ای $\psi(E)$ است.

این روش مشتق‌گیری مدتها پیش بررسی شد. کوشی [۷] آن مقادیری را که همزمان، یعنی تحت شرایطی یکسان، مشخص می‌شوند، «مقادیر همبود[4]» می‌نامد. اگر برای مثال جسمی ناهمگن، از لحاظ ساختار و چگالی، داشته باشیم، و اگر دامنه‌ای [بخشی] چون D از این جسم را در نظر بگیریم، حجم D، جرم D، مقدارگرمای لازم برای افزایش دمای D به میزان یک درجه ــ با فرض مجزابودن ــ همگی مقادیر همبود هستند. اینها توابع $V(D)$، $M(D)$، $Q(D)$ از این دامنه‌اند.

این از حسن تصادف نیست که در اینجا به توابعی از دامنه‌ها رسیده‌ایم. اگر کسی در آن اندیشه کند، به‌سرعت درمی‌یابد که هر مقداری در فیزیک نه به یک نقطه بلکه به یک جسم گسترده مربوط است، یعنی ــ حداقل تا جایی که با مقادیر مستقیماً اندازه‌گرفتنی سروکار داریم ــ تابعی از یک دامنه است. اما اگر در مشخص کردن مقدار موردنظر، متغیرهای غیرفضایی ــ مانند زمان، دما و غیره ــ دخالت کنند جسم موردنظر همیشه جسمی متعلق به فضای متعارف ما نخواهد بود بلکه می‌تواند در فضایی باشد که به شیوه‌ای مطلقاً ریاضی صورتبندی شده است. اما این چندان اهمیتی ندارد؛ مقادیر مستقیماً

1. complete additively 2. absolute continuity

3. point function 4. coexistent quantities

اندازه‌گرفتنی ــ برای مثال جرم، مقدار گرما، مقدار الکتریسیته ــ توابعی از یک دامنه‌اند و توابعی از یک نقطه نیستند.

در فیزیک ضمناً مقادیر مربوط به نقاط، مانند سرعت، تنش، چگالی، و گرمای ویژه نیز مطرح می‌شوند، اما اینها کمیات فرعی [اشتقاقی] هستند که اغلب به‌طور دقیق به‌صورت خارج‌قسمت یا حد خارج‌قسمت دو مقدار همبود تعریف می‌شوند، مثلاً

$$\text{چگالی} = \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}} \qquad \text{گرمای ویژه} = \frac{\text{مقدار گرما}}{\text{جرم}}$$

یعنی با مشتق‌گیری از یک مقدار نسبت به مقداری همبود با آن.

بنابراین در فیزیک و به دنبال آن در هندسه، به اینجا می‌رسند که توابعی از یک دامنه و مشتق‌گیری از آنها را در نظر بگیرند، درست همان‌گونه که در آنالیزِ توابع با متغیرهای حقیقی عمل می‌شود. به همین نحو، در فیزیک توابعی از یک دامنه نقش اصلیتری از توابع نقطه‌ای دارند. پس چرا فیزیکدانان از چنین توابعی سخن نمی‌گویند؟ زیرا ریاضیدانان هنوز آنها را بررسی نکرده‌اند و جبر نه برای دامنه‌ها نمادی دارد و نه برای توابعِ دامنه‌ها. بنابراین می‌بینیم که فیزیکدان توجه خود را به دامنه‌های به‌خصوص، که تنها به پارامترهای مشخصی وابسته‌اند، محدود می‌کند به طریقی که تابع دامنه‌ای موردنظر به تابعی از پارامترها تقلیل داده می‌شود. این دقیقاً همان کاری است که ریاضیدان انجام می‌دهد، وقتی به‌جای در نظر گرفتن انتگرال معین $f(x,y)$ با تمام کلیتش، خود را محدود به در نظر گرفتن توابع $F(X,Y)$ و $\varphi(a,b;c,d)$ از روابط (۶) و (۷) می‌کند.

همچنین ملاحظه می‌کنیم که فرمول (۸) ارتباطی میان توابع مجموعه‌ای $\psi(E)$، که انتگرالهای نامعین هستند، و توابع نقطه‌ای $f(P)$، که صرفاً جبری‌اند، برقرار می‌کند. نتیجتاً این فرمول نوعی نماد برای بعضی توابع مجموعه‌ای فراهم می‌کند. اما اگر دو شرط لازم برای انتگرالِ نامعین‌بودنِ یک تابع را بررسی کنیم، نمی‌توانیم تردید کنیم که کمیتهای فیزیکی، در ردهٔ توابعی هستند که این نماد را می‌گیرند.

این تأملات در بارهٔ طبیعت کمیتهای فیزیکی شاید به شما امکان داده باشد که فایده و اهمیت مفاهیمی را که مطرح کرده‌ایم دقیقتر درک کنید؛ و به‌ویژه نشان می‌دهد عمل مشتق‌گیری به‌صورتی که در رابطهٔ (۹) ظاهر می‌شود، تنها عملی از این نوع که می‌توان در نظر گرفت نیست، و همواره می‌توان مشتق یک تابع $\psi(E)$ را نسبت به یک تابع همبود $p(E)$ در نظر گرفت، خواه آنْ اندازهٔ $m(E)$ باشد خواه نباشد.

اکنون سؤالی به سرعت به ذهن خطور می‌کند: آیا می‌توان در تعریف انتگرال، تابع داده‌شدهٔ $p(E)$ را نیز جایگزین تابع $m(E)$ کرد؟ در این کار هیچ مشکلی نیست. در ابتدا

$$S = \sum \mu_i p(E_i)$$

را جایگزین رابطهٔ (۲) می‌کنیم اگر در ابتدا مجموعه‌های E_i به خانواده‌ای از مجموعه‌ها تعلق داشته باشند که برای آنها تابع $p(E)$ تعریف شده باشد، یعنی، برای همگرابودن سری S، تابعی که باید از آن انتگرال گرفته شود باید نسبت به $p(E)$ اندازه‌پذیر باشد، به‌عبارت دیگر، f باید نسبت به $p(E)$ مجموع‌پذیر باشد. با این فرض، تعریفِ انتگرالِ $f(p)$ نسبت به $p(E)$

$$\int f(P)dp(E)$$

مانند قبل به‌دست می‌آید به‌شرطی که تابع $p(E)$ ویژگیِ مشخصی داشته باشد. این ویژگی را می‌توان چنین بیان کرد که $p(E)$ باید دارای تغییرات کراندار[1] باشد [۸].

ما اکنون با اتخاذ دیدگاه صوری یک ریاضیدان، به تعمیمی جدید و بسیار قابل ملاحظه از مفهوم انتگرال نائل شده‌ایم. دیدگاه فیزیکدان حتی به شکل طبیعیتر ما را به همین نتیجه ــ حداقل در مورد توابع پیوستهٔ $f(P)$ ــ می‌رساند. به‌همین نحو می‌توان گفت که فیزیکدانان همیشه فقط انتگرالهایِ نسبت به توابع دامنه‌ای را در نظر می‌گرفته‌اند.

برای مثال فرض کنید می‌خواهیم مقدار گرمای $\varphi(D)$ لازم را جهت یک درجه بالا بردن دمای یک جسم D ــ که در بالا از آن سخن گفتیم ــ محاسبه کنیم. باید D را به بخشهای کوچک D_1، D_2، $\cdots$ با جرمهای $M(D_1)$، $M(D_2)$، $\cdots$ تقسیم کنیم، از هر کدام یک نقطهٔ P_1، P_2، $\cdots$ را انتخاب کنیم و مجموع

$$f(P_1)M(D_1) + f(P_2)M(D_2) + \cdots$$

را به‌عنوان مقداری تقریبی از $\varphi(D)$ برگزینیم. $f(P)$ نمایانگر گرمای ویژه در P است. این مانند آن است که بگوییم $\varphi(D)$ را از رابطهٔ

$$\varphi(D) = \int_D f(P)dM(E)$$

محاسبه می‌کنیم. تعریف این انتگرال جدید در شکل کلی خود، توسط رادون[2] در ۱۹۱۳ عرضه شد، در حالی که از ۱۸۹۴ برای حالت خاص یک تابع پیوستهٔ یک متغیره شناخته شده بود. اما اولین مبدع آن، استیلتیس[3]، از طریق تحقیق در آنالیز و حساب به آن دست یافت و آن را به شکلی کاملاً تحلیلی ارائه کرد که آن‌چنان معنای فیزیکیش را پنهان می‌داشت که شناختن چیزی که امروز واضح به نظر می‌رسد، مستلزم تلاشی بسیار بود. در تاریخ این مساعی نامهای ریتس[4]، لبگ، یانگ، فرشه و د لا واله پوسن[5] دیده می‌شود. این نشان می‌دهد که ما نه تنها در خلاقیت و ذکاوت بلکه در بی‌بصیرتی نیز با هم رقابت می‌کرده‌ایم [۹].

و با این حال انتگرالهای استیلتیس-رادون همواره مورد توجه ریاضیدانان بوده‌اند. انتگرال خمیده‌خطی $\int_C f(x,y)dx$ یکی از این انتگرالهاست، که در ارتباط با یک تابع تعریف‌شده برحسب طولِ تصویرِ کمانهایی از C بر محور x می‌باشد؛ انتگرال $\int\int_S f(x,y,z)dxdy$ به‌طور مشابه مستلزم یک تابع مجموعه‌ای تعریف‌شده برحسب تصویر مساحتهای S بر صفحهٔ xy است.

درواقع این انتگرالها اغلب به صورتهای کاملتر زیر ظاهر می‌شوند

$$\int_c f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

$$\int_S f(x,y,z)dx\,dy + g(x,y,z)dy\,dz + h(x,y,z)dz\,dx$$

1. bounded variation 2. Radon 3. Stieltjès 4. F. Riesz
5. de la Vallée-Poussin

اگر انتگرالهای موردنظر جهت تعریف طولهای خمها یا مساحتهای رویه‌ها نیز در نظر بگیریم:

$$\int_C (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}$$

$$\int\int_S [(dx\,dy)^2 + (dy\,dz)^2 + (dz\,dx)^2]^{1/2}$$

به نظر می‌رسد که بررسی حالاتی از انتگرال‌گیری که در آنها چندین تابع مجموعه‌ای $p_1(E_1)$، $p_2(E_2)$، $\cdots$ ظاهر می‌شوند نیز مناسب باشد. این بررسی کلاً کارآیندگان خواهد بود، اگرچه هلینگر[1] و توپلیتس[2]، مجموعیابیهای مشخصی را نسبت به چندین تابع مجموعه‌ای مورد استفاده قرار داده‌اند [۱۰].

ما تاکنون انتگرال‌گیری ــ معین یا نامعین ــ را به‌صورت عملی که یک عددِ مشخص یا متغیر را به‌وسیلهٔ نوعی جمع تعمیم‌یافته ارائه می‌کند در نظر گرفته‌ایم. این دیدگاه مبتنی است بر کوادراتور [تعیین مساحت]. اما همچنین می‌توان انتگرال‌گیری از توابع پیوسته را به‌صورت عملی که حاصل آن یک تابع است در نظر گرفت، درست مانند ساده‌ترین انتگرالهای معادلات دیفرانسیل. این دیدگاه توابع اولیه است که ما اکنون آن را بررسی می‌کنیم.

یافتن $F(x)$، تابع اولیهٔ یک تابع داده‌شدهٔ $f(x)$ ــ در صورت وجود تابع اولیه ــ یافتن تابعی است که با تقریب یک ثابت جمعی مشخص می‌شود و $f(x)$ مشتق آن است. این مسأله‌ای است که ما قصد بررسی آن را داریم.

اما در ابتدا خاطرنشان می‌کنیم که تأملات قبلی به صورتبندی مسأله به شیوه‌ای بسیار کلیتر می‌انجامد: یک تابع $f(P)$ داده شده است که مشتق تابع مجهول $\psi(E)$ نسبت به تابع معلوم $p(E)$ است؛ تابعِ اولیهٔ $\psi(E)$ از $f(P)$ را بیابید.

اگر مثلاً سروکار ما با یک تابع پیوستهٔ $f(x)$ باشد و اگر $m(E)$ اندازه باشد، دیگر تابع اولیه نمی‌تواند تابع $F(x)$ مذکور در رابطهٔ (۵) باشد بلکه انتگرال نامعین $\int_E f(x)dx$ است.

من فقط می‌توانم اشاره‌وار از این مسألهٔ کلی که هنوز بررسی نشده است یاد کنم؛ و به ذکر این نکته اکتفا می‌کنم که انتگرال استیلتیس برای حل آن بسیار نابسنده است. این انتگرال در عمل تنها با این فرض که $p(E)$ دارای تغییرات کراندار است تعریف شده است و با وجود این، یقیناً می‌توان در بارهٔ مشتق‌گیری نسبت به تابعی چون $p(E)$ که دارای تغییرات کراندار نیست، سخن گفت.

نظریهٔ توابع مجموع‌پذیر نتیجهٔ زیر را در ارتباط با حالتی که $p(E)$ اندازهٔ $m(E)$ است، ارائه می‌کند: هنگامی که $f(P)$ مشتقی مجموع‌پذیر است، پادمشتق f یکی از توابع اولیهٔ آن است. من می‌گویم یکی از توابع اولیهٔ آن، زیرا در حال حاضر هنوز کسی به خوبی آگاهی ندارد که این مسألهٔ کلی توابع اولیه چگونه باید مطرح شود تا مشخص گردد کدام تابع اولیه موردنظر است [۱۱].

بیایید این‌گونه سؤالات را رها کنیم زیرا من در بارهٔ آنها تنها از این جهت سخن می‌گویم که نشان دهم چقدر کارِ انجام‌نشده باقی مانده است، و بگذارید نشان دهیم چقدر کار در جستجوی تابع اولیهٔ $F(x)$ از $f(x)$ انجام شده است، که در این مورد بیش از هر کسی مرهون آرنو دانژوا[3] هستیم.

1. Hellinger 2. Toeplitz 3. Arnaud Denjoy

اندکی قبل گفتم هنگامی که $f(x)$ مجموع‌پذیر است، $F(x)$ با انتگرال‌گیری به‌وسیلهٔ رابطهٔ (۵) به‌دست می‌آید. فرض کنید که $f(x)$ بر (a,b) تنها در یک نقطهٔ c فاقد خاصیت مجموع‌پذیری باشد. در این صورت انتگرال‌گیری، $F(x)$ را بر $(a, c-\epsilon)$ به‌ازای ϵ به دلخواه کوچک، و بنابراین بر تمام بازهٔ (a,c) به‌دست می‌دهد؛ همچنین $F(x)$ را بر $(c+\epsilon, b)$ و بنابراین به‌طور کامل بر (c,b) معین می‌کند و با در نظر گرفتن پیوستگی $F(x)$ در نقطهٔ c، $F(x)$ را بر تمام بازهٔ (a,b) داریم. با توجه به چنین ملاحظاتی در بارهٔ پیوستگی [۱۲] می‌بینیم که اگر $F(x)$ در هر بازه‌ای که هیچ نقطه‌ای از مجموعهٔ E را در درون یا کرانه‌های خود در برندارد، معلوم باشد، می‌توان $F(x)$ را به‌وسیلهٔ عملی ــ که آن را A می‌نامم ــ بر هر بازهٔ مجاور E به‌دست آورد، یعنی بر هر بازه‌ای که نقاط انتهایی آن در E هستند اما هیچ نقطه‌ای از E درونش قرار ندارد.

اکنون فرض کنید $F(x)$ بر بازه‌های (α,β) که مجاور مجموعهٔ E هستند. معلوم است، همچنین مجموع $\sum[F(\beta)-F(\alpha)]$ همگراست، و نیز $f(x)$ بر E مجموع‌پذیر است [۱۳]. در این صورت کافی است بگوییم که تابع اولیه باید روی E و بازه‌هایی که مجاور E هستند به‌دست آید تا به رابطهٔ

$$F(x) - F(a) = \left\{ \int_E f(dx + \sum[F(\beta)-F(\alpha)]) \right\}_a^x$$

برسیم. آکولادهای طرف دوم مشخص می‌کنند که در اینجا باید تنها از نقاط بین a و x استفاده کنیم. از این رابطه، $F(x)$ با عملی که آن را B می‌نامم، تعیین می‌شود.

نتایج بالا نقاط انتهایی را که من در رسالهٔ خود به آنها رسیدم مشخص می‌کنند و باید بگویم که آن نکته‌ها را تا اندازه‌ای به‌طور اتفاقی ذکر کردم، چرا که ابداً اهمیتی را که دانژوا به آنها بخشید، حدس نمی‌زدم.

دانژوا با اتکا به نتایج بِئْر[1] نشان داد که اگر $f(x)$ یک تابعِ مشتقْ بر (a,b) باشد، آنگاه

(۱) نقاطی که $f(x)$ به‌ازای آنها مجموع‌پذیر نیست، مجموعه‌ای مانند E_1 تشکیل می‌دهند که در (a,b) چگال نیست؛ یک عمل O_1 از نوع A، $F(x)$ را بر بازه‌های مجاور E_1 مشخص می‌کند.

(۲) حال، مجموعه‌ای مانند E_2 وجود دارد که از نقاط E_1 تشکیل می‌شود و در E_1 چگال نیست، و بر بازه‌های مجاور آن، می‌توان $F(x)$ را توسطِ یک عملِ O_2 از نوع B محاسبه کرد.

(۳) سپس، مجموعه‌ای مانند E_3 وجود دارد که از نقاط E_2 تشکیل می‌شود و در E_2 چگال نیست، و بر بازه‌های مجاور آن، می‌توان $F(x)$ را توسطِ یک عملِ O_3 از نوع B محاسبه کرد، . . .

اگر مشخص شود که پس از دنباله‌ای نامتناهی از اعمال O_1، O_2، . . . هنوز $F(x)$ را بر کل بازهٔ (a,b) نیافته‌ایم، نقاطی از (a,b) که نقاط درونیِ بازه‌هایی که $F(x)$ را بر آنها تعریف کرده‌ایم نیستند، مجموعه‌ای مانند E_ω تشکیل می‌دهند، و عملی از نوع A ــ عمل O_ω ــ F را بر بازه‌های مجاورِ E_ω مشخص می‌کند. بعد ــ اگر لازم باشد ــ اعمال $O_{\omega+1}$، $O_{\omega+2}$، . . . از نوع B را در نظر می‌گیریم. به دنبال آن یک عمل $O_{2\omega}$ از نوع A، به دنبال آن عملهایی از نوع B و غیره.

1. Baire

و دانژوا، اکنون با استفاده از استدلالات کلاسیک کانتور و بندیکسون، ثابت می‌کند با این روش، نهایتاً پس از تعدادی متناهی، یا نامتناهیِ شمارا از اعمال، $F(x)$ بر کل بازهٔ (a,b) مشخص می‌شود.

دانژوا این شیوهٔ عملی را که یقیناً پیچیده اما در اصل به همان اندازهٔ روشهای متصورِ قبلیْ طبیعی است، «کلیت‌سازی[1]» نامید.

کلیت‌سازی، مسألهٔ یافتن تابع اولیهٔ $F(x)$ از یک تابع داده‌شدهٔ $f(x)$ را به‌طور کامل حل می‌کند، و در عین حال تعیین $F(x)$ را با دانستن تنها یک عددِ مشتقی[2] f از $F(x)$ [۱۴] ــ و نه مشتق آن ــ میسر می‌سازد. من نمی‌توانم در بارهٔ این نتایج زیبا زیاد سخن بگویم؛ مهمترین واقعیت برای ما این است که کلیت‌سازی از یک مسیر فرعی طولانی، تعمیم جدیدی از مفهوم انتگرال معین را فراهم می‌کند. عملاً هر زمان که کلیت‌سازی در مورد یک تابع $f(x)$ اعمال شود و تابع متناظر $F(x)$ را به‌دست دهد، می‌توانیم بنا به روابط (۵) و (۵′) به $f(x)$ یک انتگرال نسبت دهیم.

آقایان، در اینجا به سخنانم خاتمه می‌دهم و از شما به خاطر توجهی که از روی ادب نشان دادید تشکر می‌کنم. اما اگر اجازه بدهید، کلامی از باب نتیجه‌گیری لازم است، و آن این است که تعمیمی که نه برای لذت بیهودهٔ تعمیم دادن، بلکه برای حل مسائلی که قبلاً طرح شده‌اند انجام می‌شود معمولاً تعمیمی سودمند است. کاربردهای گوناگون مفاهیمی که ما بررسی کردیم، این موضوع را کاملاً تأیید می‌کند.

یادداشتها و مراجع

۱. در بحث مساحتها، تقسیم‌ناپذیرها (*indivisibles*) مستطیلهای «بینهایت باریک» یا مساحتهای «بینهایت کوچک» هستند. لایب‌نیتس علامت dx را برای معرفی «پهنای» یک تقسیم‌ناپذیر به‌کار برد، بنابراین «مساحت» یک تقسیم‌ناپذیر به طول y، با حاصلضرب $y\,dx$ مشخص شد. پس از آن، وی نماد $\int y\,dx$ را برای «مجموع» یا «انتگرال» مساحتهای تقسیم‌ناپذیرها معرفی کرد که مساحت ناحیهٔ مفروض را به‌دست می‌دهد.

۲. شیوهٔ تعریف اندازهٔ یک مجموعه که در اینجا از آن استفاده شد از ژوردان (C. Jordan) در منبع زیر است

Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, Vol. 1

اما با این جرح و تعدیل که برای هدف ما ضرورت دارد: ما مجموعهٔ E_i را به‌گونه‌ای محصور می‌کنیم که در بازه‌هایی که تعدادشان می‌تواند نامتناهی باشد جای گیرد، در حالی‌که ژوردان تنها از تعدادی متناهی بازه استفاده می‌کرد. این کاربرد نامتناهیِ شمارا به جای اعداد صحیح، از تلاشهای بورل ناشی شده است. از این گذشته، او شخصاً از این ایده به‌خصوص برای تعریف اندازه استفاده کرد (*Lecons sur la théorie des fonctions*).

3. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris.* 129, 1909.

تعاریفی معادل با آنچه در متن آمده، به‌وسیلهٔ نویسندگان متعددی پیشنهاد شده است، جالبترین آنها متعلق است به یانگ (W. H. Young) در

Philos. Trans. Roy. Soc. London, 204, 1905, *Proc, London, Math, Soc,*, 1910.

همچنین، مثلاً، به یادداشتهای بورل و ریتس [F. Riesz] رجوع کنید:

Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 154, 1912.

4. R. Gateaux, *Bull. Soc. Math. France*, 1919; P. Lévy, *Lecons d'analyse fonctionelle*, 1922; N. Wiener, *Proc. London Math. Soc.*, 1922; M. Fréchet, *Bull. Soc. Math. France*, 1915; P. J. Daniell, *Ann. of Math.*, 1918 and 1919.

5. *Ann. Sci. del' Ecole Normale Supérieure*, 1910.

۶. این اصطلاحات را، به ترتیب، د لا واله پوسن در

Integrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classef de Baire, Paris, 1916

و ویتالی (G. Vitali) در *R. Acc. Sci. Torino*, 1908 وضع کرده‌اند. تابعی از یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر مطلقاً پیوسته است اگر، هنگامی که E به طریقی تغییر کند که $m(E)$ به سمت صفر میل کند، $\psi(E)$ نیز به سمت صفر میل کند. «جمع‌پذیری کامل» مترادف «جمع‌پذیری شمارا»ست.

7. *Exercices d'analyse et de physique mathematique*, Vol. 2, Paris, 1840-1847, pp. 188-229.

۸. گفته می‌شود $p(E)$ دارای تغییرات کراندار است اگر به هر شیوه‌ای E را به تعدادی نامتناهی شمارا از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزای E_1، E_2، ... افراز کنیم، سری $\sum |p(E_i)|$ همگرا باشد.

نماد توابع با تغییرات کراندار برای اولین بار توسط ژوردان برای توابع یک‌متغیره ارائه شد.

تنها توابع مجموعه‌ای $p(E)$ که در این نظریه‌ها مطرح می‌شوند، توابع جمع‌پذیرند، یعنی توابعی که برای آنها داریم

$$p(E_1 + E_2 + \cdots) = p(E_1) + p(E_2) + \cdots$$

E_1، E_2، ... دوبه‌دو مجزا هستند. اگر جمع‌پذیری کامل باشد، یعنی اگر دنبالهٔ E_1، E_2، ... را بتوان به دلخواه انتخاب کرد، $p(E)$ لزوماً دارای تغییرات کراندار است. درواقع اگر ترتیب مجموعه‌ها بی‌اهمیت باشد سری $p(E_1)+p(E_2)+\cdots$ صرف‌نظر از ترتیب، باید همگرا باقی بماند یعنی سری $\sum |p(E_i)|$ همگراست.

هیچ تلاشی تاکنون انجام نشده است که از شرطِ کراندار بودن تغییرات $p(E)$ رهایی یابیم. باید، از این گذشته، ملاحظه کرد که اگر $p(E)$ دارای تغییرات کراندار نبود، می‌توانستیم یک تابع پیوستهٔ $f(p)$ بیابیم که تعریفمان از انتگرال در مورد آن صادق نباشد.

9. J. Radon, *Sitz, Kais. Ak. Wiss. Vienna*, Vol. 122, Section IIa, 1913; T. J. Stieltjes, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, 1894; F. Riesz, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 1909; H. Lebesgue, ibid., 1910; W. H. Young, *Proc. London Math. Soc.*, 1913; M. Fréchet, *Nouv. Ann. des Math.*, 1909; de la Vallee-Poussin, op. cit.

۱۰. در این مورد مثلاً مراجعه کنید به

J. reine angew. Math., 144, 1914, pp. 212-238.

۱۱. در بارهٔ این موضوع، یادداشتهای فوبینی (Fubini) و ویتالی را که در ۱۹۱۵ـ۱۹۱۶ در *Atti Rend R. Acc. Lincei* منتشر شده است، ببینید.

۱۲. همین وارد کردن شرایط پیوستگی است که تفاوت زیادی بین مسألهٔ توابع اولیه و مسألهٔ کوادراتور [تعیین مساحت] ایجاد می‌کند.

۱۳. ذکر این نکته مناسبت دارد که این فرضها در تضاد با یکدیگر نیستند، همچنان که اگر فرض شود E مجموعه‌ای از نقاط در یک بازهٔ در نظر گرفته شدهٔ (a,b) است که بر آن $f(x)$ مجموع‌پذیر نیست. برای مشخص کردنِ نقاط مجموع‌ناپذیری تابع بر (a,b) واقعاً لازم است که تمام نقاط (a,b) را در نظر بگیریم ــ چه متعلق به E باشند، چه نباشند. در حالی که مجموع‌پذیری بر E، شرطی است که تنها در نقاط E برقرار است.

۱۴. مشتقِ دینی (Dini).

۱۵. زندگینامهٔ مشروح دانژوا از ۱۹۱۵ تا ۱۹۱۷ در *Journal de Math.*، در *Bull. Soc. Math. France*، و در *Ann. Sci. de l'E'cole Normale Superieure* به چاپ رسیده است.

1. totalization 2. derived number

ریاضیات در سیاره‌ای دوردست•

ریچارد همینگ
ترجمهٔ سیامک کاظمی

این مقاله مبتنی بر سخنرانیی است که ریچارد همینگ (۱۹۱۵ـ۱۹۹۸) در سال ۱۹۹۷ در یک اجلاس جامعهٔ ریاضی آمریکا (MAA) ایراد کرده است. همینگ از معروفترین ریاضیدانان کاربردی عصر حاضر محسوب می‌شود. اصطلاح «کُد همینگ» را همهٔ کسانی که با نظریهٔ کدگذاری آشنایی دارند شنیده‌اند. همینگ نظراتی تُند و بعضاً نامتعارف در مورد شاخه‌های گوناگون ریاضیات و فلسفهٔ ریاضی داشت که گاه آنها را به زبان گزنده‌ای بیان می‌کرد. نوشتهٔ حاضر نیز از این قاعده مستثنا نیست. مقالهٔ بعدی این شماره تا حدی مکمل آرای این نوشته است.

هدف این سخنرانی واداشتن شما به تأمل جدی در این باره است که ریاضیات در بارهٔ چیست، تا چه حد دلبخواه و «من درآوردی» است و تا چه حد الزامی و اجتناب‌ناپذیر.

مضمون این سخنرانی خیلی قبل در دوران آغازین «برنامهٔ جستجو برای یافتن هوشمندان فرازمینی»[1] به ذهن من خطورکرد؛ درآن زمان از آنتن بشقابی عظیمی در آرسیبو[2] برای این جستجو استفاده می‌شد. اکنون که سالهای زیادی از آن زمان گذشته است، با تجهیزات بسیارکارامدتری مشغول جستجو هستیم ولی هنوز نشانه‌های مشخصی از حیات در سیاره‌های دیگر نیافته‌ایم.

ریاضیات سه جنبه دارد. اول، چیزهایی که می‌توان آنها را اصول یا اصول موضوع یا مفروضات ــ هر کدام که دوست دارید ــ نامید. رهیافت بورباکی بیشتر معطوف به اینها بوده است. دستگاههای مختلفی از اصول که ریاضیات واحدی را توصیف می‌کنند، متفاوت به حساب نمی‌آیند.

دوم، تعریفها هستند که مقدار زیادی از ریاضیات را تعیین می‌کنند. مثلاً تعریف فعلی تابع، چیزهای عجیب و غریب زیادی را مجاز می‌دارد. اگر من یک تابع پیوستهٔ دندانهٔ اره‌ای با شیبهای متناوب $\pm 45^\circ$ داشته باشم و مختصات را 45° دوران بدهم، آن تابع دیگر پیوسته نیست، و حتی تابع هم نیست! نه اویلر و نه فوریه هیچ‌یک نمی‌توانسته‌اند با چنین چیزی موافق باشند! مفهوم پیوستگی برخاسته از ایدهٔ ترسیم خم بدون برداشتن قلم (ایده‌آل) از روی کاغذ بود و هیچ ارتباطی با مختصات انتخاب شده نداشت. تحریف ایدهٔ اولیه و شهودی پیوستگی به‌نحوی که اکنون وابسته به مختصات شده است به نظر من کار بیهوده‌ای است. پس تابع و خم، امروز مفاهیم متمایزی هستند.

سوم، انواع استنتاجهای منطقیِ مجاز هستند. الگوهای استدلال در این روزها به‌ندرت مورد بررسی و بازنگری قرار می‌گیرند و من هم در این سخنرانی به اختصار، و فقط از یک لحاظ، به آنها خواهم پرداخت.

اما پیش از ادامهٔ صحبت لازم است به چند رویدادِ زندگیم که عقاید مرا شکل داده‌اند اشاره کنم. اولی در لُس آلاموس در جریان جنگ جهانی دوم و هنگامی که بمب اتمی را طراحی می‌کردیم رخ داد. کمی پیش از نخستین آزمایش میدانی (توجه دارید که در دست بودن جرم بحرانی در این مورد ضروری است، هیچ آزمایش کوچکْ‌مقیاسی ممکن نیست)، شخصی از من خواست محاسباتی را که انجام داده بود بازبینی کنم، و من هم قبول کردم با این فکر که آن را به یکی از زیردستانم محول کنم. وقتی پرسیدم محاسبه در بارهٔ چیست، پاسخ داد: «در بارهٔ احتمال اینکه بمب آزمایشی تمام جوّ را به آتش بکشد.» این بود که تصمیم گرفتم خودم آن را بازبینی کنم! روز بعد وقتی برای گرفتن جواب آمد، به او گفتم «محاسبات ظاهراً درست است ولی من در مورد فرمولهای سطوح مقطع جذب اکسیژن و نیتروژن اطلاعی ندارم ــ به هر حال، نمی‌توان آزمایشی در سطوح انرژیِ مورد نیاز انجام داد.» و او، همچون فیزیکدانی که با ریاضیدانی حرف می‌زند، پاسخ داد که از من

1. SETI (search for extraterrestrial intelligence) 2. Arecibo

خواسته است محاسبه را بازبینی کنم نه فیزیک مربوط به آن را. با خودم گفتم: «چکار کرده‌ای همینگ، تو در کاری که ممکن است تمام حیات را در عالم به مخاطره اندازد درگیرشده‌ای بدون اینکه از یک جزء اساسی موضوع اطلاعی داشته باشی.» در راهرو قدم می‌زدم که دوستی از من پرسید از چه چیزی ناراحتی. وقتی قضیه را به او گفتم، پاسخ داد: «اهمیت نده، هیچ‌کس به خاطر این موضوع یقهٔ تو را نخواهد گرفت.» بله، ما تمام حیاتِ شناخته‌شده در عالم شناخته شده را بر مبنای نوعی ریاضیات به مخاطره می‌افکندیم. ریاضیات فقط یک فُرم هنری بی‌هدف و بیهوده نیست بلکه جزئی ضروری از جامعهٔ ماست.

از آن روز به بعد، به خصوص وقتی در آزمایشگاههای تلفن بل کار می‌کردم، بسیار پیش آمده است که پیش‌بینیهایی مشابه، البته نه آنقدر هیجان‌انگیز، براساس ریاضیاتِ مرسوم انجام داده‌ام: اگر اندازهٔ بال پرتابه را $\frac{1}{2}$ کنید و پرتاب را به طور مورب انجام ندهید، به نتیجهٔ بسیار بهتری دست خواهید یافت و می‌توانید هدف بسیار دورتری را بزنید؛ اگر ترانزیستوری را به این طریق طرح کنید نه به آن طریق، این مزایا را خواهد داشت؛ تحت بار ترافیک در نظر گرفته شده، این طرح برای ساختمان ادارهٔ مرکزی باعث راه‌بندان کمتری خواهد شد تا آن یکی طرح، و غیره. بسیاری اوقات براساس محاسباتی که پشت میز تحریرم انجام داده‌ام، پیش‌بینیهایی در بارهٔ دنیای واقعی کرده‌ام. مسلماً طبیعت نه اطلاعی از آنچه من می‌نویسم و اصول ریاضیی که به‌کار می‌برم دارد و نه اهمیتی به آنها می‌دهد. با این حال، پیامدهای کار من جدی است. پس این پرسش اهمیت زیادی دارد که «به چه انواعی از ریاضیات می‌توانم اعتماد کنم و به چه انواعی نمی‌توانم؟» مسأله این است!

به موضوع اصلی برگردیم. یادتان باشد که فرض مبنایی ما این است که ارتباطی دوطرفه از طریق امواج رادیویی با تمدنی در یک سیارهٔ دور برقرار کرده‌ایم. ما عقیده داریم که دنیای فیزیکی و شیمیایی آنها نظیر دنیای ماست و بنابراین دنیای آنها نیز گرانش، لختی، گرما، بقای انرژی، پدیده‌های ترمودینامیکی، آنتروپی، و سایر ویژگیهای دنیای ما را دارد. آنها هم با همان مسائل مربوط به دنیای واقعی روبه‌رو هستند که ما هستیم، و باید با این مسائل مقابله کنند. اگر شما به آفرینش، طبق نظر تورات معتقد باشید، البته [خواهید گفت که] خداوند می‌توانسته است ساکنان سیاره‌های دیگر را خیلی متفاوت با ما آفریده باشد، ولی اگر به نظریهٔ تکامل اعتقاد داشته باشید، آنها نیز باید با همان قوانین فیزیکی حاکم بر ما، در جهت سازگاری هر چه بیشتر با محیط، مرحله به مرحله تکامل یافته باشند و از حالات سادهٔ اولیه به حالت پیچیدهٔ فعلی رسیده باشند. گالیله زمانی گفته است: «ریاضیات زبان علم است.» پس چون قوانین فیزیکی حاکم بر دنیای آنها و ما یکی است، ریاضیات آنها هم باید تشابه زیادی با ریاضیات ما داشته باشد.

پرسشی که بلافاصله مطرح می‌شود این است که انتظار داریم چه نوع ارتباطی با این موجودات فضایی داشته باشیم. مسلماً آنها به هیچ‌یک از زبانهای طبیعیِ رایج در روی زمین صحبت نمی‌کنند. در روی زمین با آنکه زبانهای طبیعیِ متفاوتِ بسیاری رایج است، اساساً فقط یک زبان برای ریاضیات داریم. آیا آنها هم اساساً همین زبان را دارند؟

من در دیدارهای دوهفته‌ای که هر تابستان به‌عنوان مشاور از آزمایشگاههای علمی لُس‌آلاموس به عمل می‌آوردم، شروع کردم به در میان گذاشتن این پرسش با دوستان فیزیکدان. با توجه به فرضی که در بالا عنوان شد، آنها همه موافق بودند که موجودات فضایی باید اساساً همین ریاضیات ما را داشته باشند. اما کلمهٔ «اساساً» نیاز به توضیح دارد. همهٔ فیزیکدانها می‌دانند که مکانیک کوانتومی به سه صورتِ متفاوت توصیف می‌شود: صورت موجی، صورت ماتریسی، و نیز با رهیافت مبتنی بر نظریهٔ گروهها؛ بنابراین، مجموعهٔ مفروضی از داده‌های تجربی، یا اگر ترجیح می‌دهید خود طبیعت، لازم نیست در نظریهٔ یگانه‌ای صدق کنند. صحبت این بود که ساکنان آن سیارهٔ دور مثلاً باید چیزی معادل با معادلات ماکسول داشته باشند. اما این معادله‌ها خود مستلزم حساب دیفرانسیل و انتگرالی هستند که کم و بیش شبیه مالِ ما باشد، و نظایر اینها.

افرادی که تخیل قوی دارند می‌توانند تقریباً هر چیزی را در این زمینه به تصور درآورند، و در داستانهای علمی‌ـتخیلی مثلاً صحبت از ابرهایی از گاز به میان می‌آید که همچون موجودات ذیشعور عمل می‌کنند، اما اگر از این افراد بخواهید به حدسهای توخالی قناعت نکنند و به بررسیِ احتمال این چیزها بپردازند، بیشترِ این تخیلات زیبا بر باد می‌رود. در مورد فرود سفینه‌ها در کرهٔ ماه، بعضیها ادعا می‌کردند که سطح ماه تا ارتفاع ۱۷ فوت از خاک پوشیده شده است و سفینه‌ای که بر ماه می‌نشیند ممکن است در آن فرو رود. ولی معلوم شد سطح کرهٔ ماه بسیار شبیه همان است که انتظار داشتیم ــ در پیش‌بینیهای ما در نظر گرفته شده بود که فرسایش ناشی از ذرات و باد خورشیدی بیشتر از فرسایش ناشی از آب و هواست زیرا جو ماه بسیار بسیار رقیق است. من تمایل به این دارم که حدسهای خام و دور از ذهن را نادیده بگیرم. درواقع وقتی این‌گونه حدسها [در مورد فرود بر ماه] روی هم جمع می‌شدند مجموع احتمالات منسوب به آنها آنقدر کوچک بود که ما آنها را نادیده گرفتیم و فرض کردیم سطح ماه شباهت زیادی به سطح زمین دارد.

با نظریه‌پردازیهای بیهوده به جایی نمی‌توان رسید: برای شروع کار به مبنایی نیاز است. دکارت وقتی شروع به اندیشیدن در بارهٔ جهان کرد، چون پی برد بیشتر آموخته‌هایش نادرست است، این جمله را مبنا قرار دارد: «من می‌اندیشم، پس هستم». و من تصمیم گرفتم با این جملهٔ معروف کرونکر آغاز کنم: «خداوند اعداد صحیح را آفرید، مابقی کار انسان است.» شما ممکن است ادعا کنید که به چیزی جز این اعتقاد دارید ولی ضرورتِ زیستن، بقا، و تمایز گذاشتن بین اشیا در نظر من به این معنی است که شما احتمالاً یک دستگاه شمارش گسسته و نامحدود دارید ــ عددهای صحیحْ متناهی و به‌طور خطی مرتب‌اند، اما دستگاه عددهای صحیح بیکران است.

اصول پئانو برای اعداد صحیح پذیرفته شده‌اند ولی هیچ‌کس واقعاً فکر نمی‌کند که عددهای صحیح از این اصول به‌دست می‌آیند، و درواقع اگر معلوم شود که این اصول نارسا هستند، آنها را تغییر می‌دهیم تا آنچه را می‌خواهیم به‌دست آوریم. ایده‌های ما در بارهٔ اعداد صحیح مستقل از اصول پئانو هستند.

هندسهٔ اقلیدسی کاملاً وابسته به کمیات پیوسته است. یونانیان سرانجام با معضل دو رهیافتِ پیوسته و گسسته روبه‌رو شدند و درواقع به طرز بدی آن را حل کردند، تقریباً به همان بدی که ما کرده‌ایم. در آن دوران دو نگرش فلسفی وجود داشت. گروهی از فیلسوفان به عدم تغییر اعتقاد داشتند (هیچ چیزی

نمی‌تواند تغییر کند و همچنان خودش باشد) و گروه دیگر، تغییر را اساس عالم می‌دانستند (هراکلیتوس: همه چیز در جریان است، و نمی‌توان دو بار در یک رودخانه قدم گذاشت). به نظر من، پاراداکسهای زنون تلاش چشمگیری است برای نشان دادن تعارضات ذاتی بین دو دیدگاه گسسته و پیوسته. به‌عنوان مثال، پاراداکس «تیر پرتاب شده» را در نظر بگیرید. اگر زمان مرکب از لحظه‌ها باشد، همان‌طور که محور حقیقی را مرکب از نقطه‌ها می‌دانند، آنگاه تیر در هر لحظه در مکانی قرار دارد و بنابراین هرگز حرکت نمی‌کند. ما شبیه همین حرف را در بارهٔ محور می‌زنیم: محور مرکب از نقطه‌هایی است که بعد ندارند ولی خود محور بعد دارد! آیا این حرف معقول است؟ از طرف دیگر کسانی که به تغییر اعتقاد داشتند بالاخره مجبور شدند بگویند که امکان تقسیم‌کردن حدی دارد، و بنابراین جهان مرکب از اتمهای تقسیم‌ناپذیر است. دیدگاه گسسته به این منطق اتکا داشت که هیچ تغییری ممکن نیست؛ تغییر فقط توهم است چون در غیر این صورت هیچ چیزی مشخص و ثابت نمی‌بود. پیوسته و گسسته، مانند نفت و آب، با هم مخلوط نمی‌شوند.

من به این عقیده گرایش دارم که ساکنان سیارهٔ دوردستِ فرضی هم به همین نوع منطقی دست یافته‌اند که ما به کار می‌بریم حتی اگر حیات آنها مبتنی بر ترکیبات سیلیکون باشد نه کربن؛ هر چه باشد، آنها ظاهراً با همان عالم فیزیکی سروکار دارند که زمین ما هم جزئی از آن است، و بنابراین، همان گرفتاریهایی را که زنون به طرز چشمگیری نشان داد، دارند. و باز، همان‌طور که گالیله خاطرنشان کرد، ریاضیات زبان علم است و چون دنیای فیزیکی آنها همان قوانین دنیای ما را دارد، ممکن نیست از ریاضیاتی که ما داریم زیاد منحرف شده باشند. ممکن است؟

یونانیان از عدد صحیح به کسر یا عدد نسبت یعنی عدد گویا رسیدند[1] و گمان می‌کنم ساکنان سیارهٔ دور نیز چنین کرده باشند. ولی یونانیان وقتی پی بردند که قطر مربع واحد یک عدد گویا نیست، به این نتیجه رسیدند که اصلاً عدد نیست و در بهترین حالت یک کمیت است، و قسمت بزرگی از اصول اقلیدس، از مقالهٔ ۵ به بعد، به نظریهٔ ائودوکسوس در باب کمیتها پرداخته است. ما ظاهراً در قرون وسطی، با پیدایش دستگاه شمار اعشاری، به این نتیجه رسیده‌ایم که عدد گنگ، عدد است. آیا ساکنان آن سیاره هم باید چنین مسیری را پیموده باشند؟ احتمالاً، و در غیر این صورت باید مانند اقلیدس دو نظریهٔ موازی پرورانده باشند. عددهای متعالی مانند π، γ، و e احتمالاً قابل اجتناب نیستند، و آنها مجبور بوده‌اند به نحوی به این عددها بپردازند.

تورینگ در ۱۹۵۷ ماشینِ (خیالی، نه واقعیِ) تورینگ را وارد منطق کرد تا به آرزوی هیلبرت در مورد دستیابی به اثباتهای مکانیکی جامهٔ عمل بپوشاند، اثباتهایی که به نظر هیلبرت اثباتهای کامل، و معتبر در همهٔ اعصار هستند. تورینگ در جریان این کار تعریف عدد را تغییر داد! پیش از آن، ظاهراً عدد را همان نمایش آن می‌دانستند (که تقریباً همیشه به صورت اعشاری بود و به‌ندرت به‌صورت دودویی). توجه تورینگ معطوف بود به آنچه ماشین می‌تواند با استفاده از برنامه تولید کند، برنامه‌ای که رشته‌ای متناهی از دستورالعملها (به‌صورت ارقام دودویی، برای راحتی کار) است و وقتی در ماشین محاسب اجرا می‌شود، اگر توقف کند می‌توان جواب را دانست. به این ترتیب، عدد محاسبه‌پذیر عددی است که برنامه‌ای وجود داشته باشد که بتوان آن عدد را با ماشین تورینگ تا هر تعداد رقم داخواه محاسبه کرد (البته این تعداد ضرورتاً متناهی است). بنابراین تورینگ در تلاش برای یافتن اثباتهای مکانیکیِ (البته، ایده‌آلی)، مفهوم عدد را از نمایش آن به فرایند به‌دست آوردن تعداد داخواه از ارقام آن تبدیل کرد. عدد π اکنون یک برنامه است، مثلاً برنامه‌ای که شش میلیارد رقم آن را تولید می‌کند، و دیگر نمایش نامتناهی اولیه نیست. پس تورینگ گامی در جهت دوری از نامتناهیِ بالفعل و بازگشت به متناهی، اما بیکران، برداشت: بینهایت بالقوهٔ ارسطو در مقابل بینهایت بالفعل کانتور. ظاهراً بیشتر ریاضیدانان از این تغییر آگاه نیستند، ولی کسانی که در زمینهٔ محاسبه کار می‌کنند آن را طبیعی می‌دانند. این تغییر تعریف، بعضی اثباتها و نتایج قدیمی را ضایع می‌سازد ولی اثباتهای دیگری از چیزهای دیگر را ممکن می‌کند.

این تحول از نامتناهی به متناهی، با بسیاری از اجزای دیگر ریاضیات مانند فرایند اپسیلن-دلتا همسوست. در این مورد هم نمی‌توانم تصور کنم که ساکنان سیارهٔ دورست توانسته باشند از مواجهه با مسائل گسسته و پیوسته و گرفتاریهای ناشی از آنها در مورد بینهایت اجتناب کنند. آنها نیز احتمالاً زنون خودشان را با پاراداکسهایش، و نیز گرفتاریهای دیگر، داشته‌اند. هر چه باشد، ما ظاهراً در عالَمی متناهی زندگی می‌کنیم و ایدهٔ قدیمی ۰٫۳۳۳۰۰۰ = ۱/۳ (تا بینهایت) مغایر با باورهای ما و احتمالاً آنهاست.

بدون اینکه اثباتی بیاورم — اندکی بعد به این موضوع دقت ریاضی و اثبات برمی‌گردم — می‌توانید دریابید که چون برنامه به‌صورت دنباله‌ای متناهی از دستورالعملها تعریف می‌شود، هر یک از برنامه‌های کامپیوتریِ ممکن لزوماً متناهی است هر چند مجموعهٔ همهٔ برنامه‌ها بیکران است، و این مجموعه شمارش‌پذیر است، و درواقع با ترتیب مناسبی حتی خوش‌ترتیب است، پس مجموعهٔ عددهای محاسبه‌پذیر نیز که زیرمجموعه‌ای از آن است، شمارش‌پذیر است. توجه کنید که این مجموعهٔ مرکب از برنامه‌ها که زیرمجموعهٔ مجموعهٔ شمارش‌پذیر نامتناهی از رشته‌های دستورالعملهاست، خوش‌تعریف نیست به این معنا که — چنانکه بعداً نشان داده می‌شود — نمی‌توانید بگویید یک رشتهٔ داخواهٔ برنامه است یا نه. اما بیشتر شما اعتقاد دارید که عددهای ۰ تا ۱ شمارش‌پذیر نیستند، چون به شما این‌طور گفته‌اند و نوعی اثبات هم برای آن آورده‌اند.

حالا توجه کنید به قضیهٔ معروف لوونهایم-اسکولم در منطق، که می‌گوید هر مجموعهٔ متناهی از اصول، مدلی شمارش‌پذیر دارد — و باز بدون اینکه اثباتی بیاورم تا حدی می‌توانید بفهمید که چرا این قضیه درست است؛ نکته اینجاست که ما اثباتهای بینهایت طویل را نمی‌پذیریم. ولی اگر چنین است، چگونه می‌توان با استفاده از تعدادی متناهی اصل، شمارش‌ناپذیریِ عددهایی را که به‌وسیلهٔ آن اصول تعریف می‌شوند ثابت کرد، چون مسلماً آنچه می‌توانید صرفاً از اصول استنتاج کنید باید در مورد هر مدلی از آنها صادق باشد. حالا اثباتی را که کانتور عرضه کرد، و فرایند قطری‌سازی او را به‌یاد آورید که در آن از نمایشهای اعداد استفاده شده است. شما کدام‌یک را ترجیح می‌دهید: اثباتِ شهوداً واضحی از این حکم را که هر تعداد متناهی از اصولْ مدلی شمارش‌پذیر دارد یا فرایند قطری‌سازی را که برای اثبات شمارش‌ناپذیری به‌کار می‌رود؟ ساکنان آن سیاره که در مرحله‌ای با این مسأله روبه‌رو شده‌اند در

۱. در انگلیسی، نسبت [ratio] و گویا [rational] از یک ریشه‌اند.

این مورد چه تصمیمی گرفته‌اند؟ من گمان می‌کنم آنها کانتورشان را در روزگار پیری، روانهٔ تیمارستان کرده باشند. بعداً به فرایند قطری‌سازی او برمی‌گردم.

متوجه خواهید شد که من از ورود به عمقِ منطق متداول پرهیز کرده‌ام. زمانی‌که دانشجوی دورهٔ تحصیلات تکمیلی بودم، قوانین تفکر بول را خواندم و آن را جالب توجه، ذیربط، و معقول یافتم. ولی وقتی حتی مقدمات منطق ریاضی را بررسی می‌کنم می‌بینم حاوی موشکافیهای نامعقولی است؛ من نمی‌توانم باور کنم که هیچ‌یک از این موشکافیها و تمایزات ظریف، یا حتی همهٔ آنها روی هم، بتواند عدد اولی را به عدد مرکب تبدیل کند، یا قضیهٔ انتگرال کوشی را باطل سازد، و یا باعث شود پرتابه‌ای به جای برخورد به هدف، یک مایل دورتر بیفتد. به نظر من کارهای منطقدانان ظاهراً ربطی به ریاضیات ندارد، و منطق یک بازی ذهنی است که ریاضیدانان برای سرگرمی خودشان به آن می‌پردازند.

مادامی که فقط دنباله‌ها و مجموعه‌های مرتب را در نظر دارید، راه طبیعی برای محاسبهٔ چگالیِ، مثلاً، عددهای صحیح زوج، به‌دست آوردن نسبت حدیِ عددهایِ دارای این خاصیت به کل عددهای موردنظر است، و البته نسبت ۱/۲ را برای چگالی عددهای صحیح زوج به‌دست می‌آورید، و به این ترتیب از حکمهای متناقض‌نما [مبتنی بر جفت‌سازی] پرهیز می‌کنید، حکمهایی که اشخاص را گیج می‌کند مگر آنکه برایشان روشن شود که شما روشی خاص، و نسبتاً غیرطبیعی، برای مقایسهٔ اندازه‌های مجموعه‌های مرتب اختیار کرده‌اید. حتی گالیله هم متوجه پارادکسی شد که از جفت‌کردن یک به یکِ [عددهای موردنظر] با عددهای صحیح پدید می‌آید و به‌خصوص ملاحظه کرد که با روش جفت‌کردن، تعداد مربعهای کامل و تعداد عددهای صحیح مثبت برابر می‌شود. اگر سروکارتان با مجموعه‌های مرتب و چگالیهای اعداد در بازه‌ها باشد به چنین نتایج غریبی نمی‌رسید. دلیل اینکه کانتور از تعریف یک به یک برای برابری اندازهٔ مجموعه‌ها استفاده کرد این بود که می‌خواست به مجموعه‌های نامرتب نامتناهی بپردازد. من به هیچ‌وجه مطمئن نیستم که ساکنان سیارهٔ دوردست چنین انتخابی کرده باشند، و این موضوع پیامدهای جدی برای انتگرالگیری لبگ دارد که اندازهٔ ۰ را به هر مجموعهٔ شمارش‌پذیر و در نتیجه به همهٔ عددهای محاسبه‌پذیر، و بنابراین به عقیدهٔ من، به تمام واقعیتی نسبت می‌دهد که می‌توانیم از آن نام ببریم و در باره‌اش صحبت کنیم. درواقع بیش از ۴۰ سال است که من ادعا کرده‌ام اگر امکان پرواز هواپیمایی به این بستگی داشته باشد که تابعی که در طراحی آن مطرح شده انتگرالپذیر لبگ باشد نه انتگرالپذیر ریمانی، من با آن هواپیما پرواز نخواهم کرد. آیا شما می‌کنید؟ آیا طبیعت این تفاوت را تشخیص می‌دهد؟ شک دارم! شما البته می‌توانید هر نظری که دلتان می‌خواهد در این مورد داشته باشید، اما من متوجه شده‌ام که انتگرالگیری لبگ و درواقع همهٔ نظریهٔ اندازه، سال به سال نقش کوچکتر و کوچکتری در سایر زمینه‌های ریاضیات ایفا می‌کند و در زمینه‌هایی که فقط با کاربرد ریاضیات سروکار دارند، نقشی ندارد. اخیراً نشان داده‌اند که انتگرال هنستاک[1]، که تعمیمی ساده و بسیار طبیعی از انتگرال ریمانی است، بسیار کلیتر از انتگرال لبگ است که چنان ویژگیهای عجیب و غریبی دارد.

می‌دانم که هیلبرتِ کبیر گفته است: «هیچ‌کس ما را از بهشتی که کانتور برایمان خلق کرده است بیرون نخواهد راند.» اما من پاسخ می‌دهم: «دلیلی برای واردشدن به این بهشت نمی‌بینم!» درواقع، گمان می‌کنم مردم هر چه بیشتر و بیشتر با کامپیوتر دمخور می‌شوند، بالاخره ما ساکنان زمین به این نتیجه خواهیم رسید که عددهای محاسبه‌پذیر برای ما کفایت می‌کنند. ظاهراً هرگز به عددی محاسبه‌ناپذیر نیاز نخواهیم داشت! مثلاً محور حقیقی ۰ تا ۱ را در نظر بگیرید و عددهای محاسبه‌پذیر را از آن بردارید. تعدادی شمارش‌ناپذیر عدد باقی می‌ماند که هیچ‌یک، را هرگز نمی‌تواند توصیف کنید (چگونه می‌توانید عددی را به‌طورکامل توصیف کنید اگر نتوانید، دست‌کم به‌طور ضمنی، راهی برای یافتن آن به‌دست دهید)! با این حال، اصل موضوع انتخاب می‌گوید که می‌توانید یکی را انتخاب کنید! آیا می‌توانید؟ کدام‌یک را؟ در حالی که نمی‌توانید آن را چنان توصیف کنید که شخص دیگری بفهمد در بارهٔ چه صحبت می‌کنید؟ آیا اصل موضوع انتخاب معقول است؟ آیا می‌توان در دنیای واقعی به این اصل اتکا کرد؟ همان‌طور که فیزیکدانها پس از سالها بحث در بارهٔ ویژگیهای اتر بالاخره به این نتیجه رسیدند که اتر قابل اندازه‌گیری نیست، من هم عقیده دارم که بهتر است آنچه را نمی‌توان در باره‌اش صحبت کرد یا اندازه‌اش گرفت، کلاً فراموش کرد. بعضی چیزها خاستگاه طبیعی ندارند!

سالها پیش، روزی مقاله‌ای در بارهٔ عددهای محاسبه‌ناپذیر به‌دست گرفتم که بخوانم. ناگهان به این فکر افتادم که ممکن نیست کسی وارد اتاقم شود و سراغ عدد محاسبه‌ناپذیری را ازمن بگیرد. وقتی این عددها هرگز [در عمل] مطرح نمی‌شوند چرا زحمت [مطالعهٔ آنها را] به خود بدهیم؟ این بود که مقاله را نخوانده در سطل آشغال انداختم.

در اینجا باید روشن کنم که به نظر من قضیه‌ها واقعاً ثابت نمی‌شوند. همان‌طورکه جی. اچ. هاردی مدتها قبل گفته است، ما علامتهایی می‌فرستیم، شخص دیگری آنها را می‌خواند و آن علامتها یا او را قانع می‌کند و یا نمی‌کند. برای افراد ساده‌ای که هر چه را می‌خوانند باور می‌کنند و در بارهٔ چیزها از خودشان سؤالی نمی‌کنند، اثباتْ اثبات است، ولی برای دیگران، اثبات فقط راهی برای اندیشیدن در بارهٔ قضیه به‌دست می‌دهد و به خود شخص بستگی دارد که چه عقیده‌ای در بارهٔ آن پیدا کند. اثباتهای صوری، که عمداً فاقد معنی هستند، فقط صورتگرایان را قانع می‌کند و نتایجی هم که به‌دست می‌دهند ظاهراً از نظر خود آنها فاقد هر نوع معنی است. آیا این است ریاضیاتی که می‌خواهیم آن را برای فهم دنیایی که در آن زندگی می‌کنیم به‌کار بریم؟

وقتی شانون نظریهٔ اطلاعات خود را برای نخستین بار (در ۱۹۴۷) انتشار داد، بیشتر صاحب‌نظران تشخیص دادند که قضیه‌ها درست‌اند اما اثباتها نارسا هستند. پروفسور دوب[1] در ایلینوی اثباتها را از دیدگاه دقیق بررسی کرد و در مقاله‌ای در مت دیوید آشکارا در مورد صداقت ریاضی شانُن ابراز تردید کرد. پس باز با دو دیدگاه در بارهٔ معنای واقعی ریاضیات روبه‌رو هستیم، و من راهی برای پی بردن به اینکه کدام‌یک از آنها در سیارهٔ دوردست غالب است ندارم؛ شاید هم، همان‌طورکه در روی زمین می‌بینیم، هر دو دیدگاه در کنار هم رواج دارند بدون آنکه تفاهم چندانی میان آنها وجود داشته باشد. در نظر من، درست یا غلط بودن قضیه‌ها کاملاً مستقل از اثباتهای آنهاست؛ وقتی با یک حکم ریاضی روبه‌رو می‌شوم، داور نهایی در پذیرش یا رد کردن آن اعتقاد قلبی من است. ولی ریاضیدانان محض عقیده دارند که تکالیف

1. Henstock

1. Doob

این چیزها را اصول موضوع، تعریفها، و منطق پذیرفته شده معلوم می‌کند!

حال از نظریه‌های تخیلی و رازآمیز که تعیین صحت و سقم آنها در واقعیت ممکن نیست به هندسهٔ اقلیدسی و اصول موضوع آن برگردیم. اثباتی متعارف، مبتنی بر روشهای پذیرفته شده، برای این گزاره وجود دارد که همهٔ مثلثها متساوی‌الساقین هستند، و به‌عنوان فرعِ این حکم نتیجه گرفته می‌شود که همهٔ مثلثها متساوی‌الاضلاع‌اند. این اثبات، همان‌طور که بی‌شک می‌دانید، متکی بر شکلی است که نادرست رسم شده است. هیلبرت پی برد که اقلیدس چیزهایی را در بارهٔ تقاطعها و میانبود [بینیّت] فرض کرده اما ثابت نکرده است، و برای مقابله با این‌گونه اثباتها اصول بسیار بیشتری را به اصول اقلیدس افزود! من نخستین بار هنگامی که دانشجوی دورهٔ تکمیلی بودم در این مورد مطالعه کردم و این حقیقت جالب توجه را دریافتم که هیچ‌یک از حدود ۴۰۰ قضیهٔ اقلیدس نیست که به این ترتیب غلط از آب دربیاید! پس از تأمل بسیار پی بردم که هیلبرت این اصول را اضافه کرده است تا قضایا درست باشند ــ یعنی قضایا مستقل از نارسایی اثباتشان (از همان اثبات قضیهٔ ۱ به بعد) درست به‌حساب می‌آمده‌اند ــ و از آنجا دریافتم که اقلیدس هم در موقعیت مشابهی قرار داشته است: او قضایای زیادی، از جمله قضیهٔ فیثاغورس، در دست داشت که «می‌دانست درست‌اند»، و می‌بایست اصولی پیدا کند که مؤید آنها باشند. ریاضیات این نیست که صرفاً چند اصل دلخواه را کنار هم بگذارید و استنتاجهایی از آنها به عمل آورید، بلکه بیش از اینهاست؛ شما از چیزی که دوست دارید شروع می‌کنید و سعی می‌کنید اصولی بیابید که مؤید آنها باشند! حال بورباکی هر چه می‌خواهد بگوید!

اکنون می‌رسیم به مسألهٔ اثبات و دقت. من مدتهاست استدلال کرده‌ام که با سیر صعودیِ معیار دقت، امروز نمی‌توانیم به هیچ اثباتی اطمینان داشته باشیم. مسلماً بیشتر اثباتهای فعلی ما ترمیم خواهند شد، همان‌طور که من هم در زمان خودم مجبور شده‌ام اثباتهایی متعلق به بعضی از بزرگترین ریاضیدانان را اصلاح کنم. گاوس در رسالهٔ دکتریش پس از نشان دادن اینکه اثباتهای قبلیِ قضیهٔ بنیادی جبر قابل اعتماد نیست، خودش اثباتی ارائه کرد ــ درواقع در طول عمرش چندین اثبات ارائه کرد ــ ولی احتمالاً همهٔ آنها از دیدگاه توپولوژیدانان امروزی نارساییها و نواقصی دارد! آیا گاوس قضیهٔ بنیادی جبر را هرگز ثابت کرده است؟ به نظر شما به چه معنایی این کار را کرده است؟ در بحثی با یک ریاضیدان بسیار خوب در اتاق استادان بخش ریاضی آزمایشگاههای بل، من مسألهٔ سطح صعودی دقت در اثبات را پیش کشیدم. او مدعی شد که در حال حاضر (دههٔ ۱۹۶۰) به غایتِ دقت در اثبات رسیده‌ایم و دیگر نیازی به ترمیم و اصلاح اثباتهای قدیمی نیست! البته او پس از اینکه آرام گرفته و افکارش را منظم کرده است، احتمالاً عقیده‌اش را تغییر داده است! شاید هرگز نتوان قضیه‌ای را به‌طور قطعی اثبات یا ابطال کرد!

در مورد سیارهٔ دور هم با همین مسأله روبه‌رو هستیم. آیا آنها توانسته‌اند ریاضیاتِ قطعی و مطمئنی پیدا کنند که در آن لازم نباشد اثبات قضیه‌ها دائماً تجدید شود؟ آیا چنین ریاضیاتی می‌تواند وجود داشته باشد؟ کاش می‌دانستم!

باز به هندسه برگردیم. ما زمینیان آگاهانه تصمیم گرفته‌ایم که عدم تقارن را نادیده بگیریم. مثلاً در مورد شکلهای قابل انطباق، ممکن است دو مثلث مسطحه را قابل انطباق بدانیم در حالی که برای این انطباق لازم باشد یکی را در فضای سه‌بعدی برگردانیم. محتمل به نظر می‌رسد که موجودات سیارهٔ دوردست ترجیح داده باشند مفهوم جهت را در وهلهٔ اول بپذیرند و نه آنکه اغلبِ کاربران هندسه را مجبور کنند که بعداً به این مفهوم بپردازند. در هندسهٔ اقلیدسی متعارف ما، نمی‌توانیم این قضیهٔ مهم را داشته باشیم که در فضای سه‌بعدی فقط دو جهت وجود دارد، یکی از آنِ پیچ چپگرد و دیگری از آنِ پیچ راستگرد.

حالا یکی از معروفترین قضیه‌های هندسهٔ اقلیدسی را در نظر بگیرید که می‌گوید نمی‌توان یک زاویهٔ دلخواه را با خط‌کش نامدرج و پرگار به سه قسمت برابر تقسیم کرد. این قضیه به مفهومی درست است، ولی اگر گذاشتن دو علامت روی خط‌کش را مجاز بدانید، غلط می‌شود (ارشمیدس هم این را می‌دانست)! این دو حالت در عمل تفاوت ناچیزی دارند. آیا ساکنان آن سیارهٔ دور هم افلاطونی داشته‌اند که ذهنش آنقدر متوجه ایده‌آلها بوده که هیچ وسیلهٔ فیزیکی بجز پرگار و خط‌کش نامدرج را در هندسه مجاز نمی‌دانسته و حتی گذاشتن دو علامت را روی این خط‌کش برنمی‌تافته است؟ اینکه ریاضیدانان این همه از قضیه‌ای یاد می‌کنند که درستی یا نادرستی آن به چنین تفاوت بی‌اهمیتی در تعریف وابسته است، معقول نیست! این قضیه ربطی به دنیای واقعی ندارد.

در همین زمینه از شما می‌خواهم به این موضوع توجه کنید که چند ریشهٔ برابرِ تابع را ریشهٔ چندگانه به حساب می‌آوریم (عاملها و ریشه‌ها را عمداً خلط می‌کنیم!)، این بحث را می‌توان به گرافهای دوگان کشاند و اینکه گرافهای خوددوگان را دوبار به حساب می‌آوریم و در نتیجه به این قضیه دست می‌یابیم که در فضای سه‌بعدی، شش چندوجهی منتظم وجود دارد و نه پنج تا. هر چه باشد، شش عدد تام است! اینها لفاظیِ صرف است؛ هیچ چیز تغییر نکرده، ولی صورت قضیه کاملاً متفاوت است!

مقدار زیادی از ریاضیات ما از همین نوع است، بنابراین نمی‌توان تصور کرد که آن موجودات فضایی همین مسیر محدود و مشخصی را پیموده باشند که ما طی کرده‌ایم. بدون اینکه ریاضیات «مستحکم» را تعریف کنم، ادعا می‌کنم بخشهای «مستحکم» ریاضیات عموماً قابل اتکا هستند به شرط اینکه دقت کافی در تطابق اجزای دنیای واقعی و ریاضیاتِ متناظر به‌کار رفته باشد (و نیز مفروضات زیربنایی، ساختار کلی و سودمندی در جاهای دیگر به دقت بررسی شده باشد) و بخشهای «نامستحکم» برای ما بی‌فایده‌اند همان‌طور که مفهوم اتر برای فیزیکدانان بیفایده از آب درآمد، و بهتر است فراموش شود.

حالا احتمالاً از من می‌خواهید که بگویم به چه چیزی اعتقاد دارم تا به خاطر همهٔ حرفهای نامتعارف و تکان‌دهنده‌ای که در بارهٔ ریاضیاتتان زدم، به من حمله کنید. با این گفتهٔ ارمیت شروع می‌کنم که: «ما ارباب ریاضیات نیستیم، خدمتکار آن هستیم.» من خیلی وقتها خلاف این را گفته‌ام: «ما ارباب ریاضیات هستیم نه خدمتکار آن؛ ریاضیات کاری را می‌کند که ما خواسته‌ایم بکند.» ولی درواقع به آمیزه‌ای از این دو اعتقاد دارم: گاهی

ریاضیات ما را به دنبال خود می‌کشاند و گاهی ما ریاضیات را هدایت می‌کنیم. موجودات فضایی هم خودشان را در چنین وضعیتی خواهند یافت و چون در همان نوع دنیای فیزیکی زندگی می‌کنند که ما می‌کنیم و با ما ارتباط رادیویی برقرار کرده‌اند، ریاضیات مفید «مستحکم» آنها کم و بیش با مال ما مشابه است ولی بخشهای «نامستحکم» ریاضیاتشان ممکن است خیلی با آنچه ما داریم تفاوت داشته باشد. آیا موجودات فضایی اصلاً اطلاعی از قضایای پیش پاافتادهٔ ما دارند یا اهمیتی به آنها می‌دهند؟ آیا قضیهٔ مشهور فرما، با آنکه تصور عمومی بر این است که با مفروضات، تعریفها، و روشهای استدلال ما به اثبات رسیده است، در ریاضیات آنها هم صادق است؟ آیا لازم نیست بررسی کنیم که آنها چه چیزی را اثبات می‌دانند و چه چیزی را نمی‌دانند، یا حتی اینکه گزارهٔ معنی‌دار در نظر آنها و در نظر ما چیست؟

برای اینکه فکر نکنید من قسمت اعظم ریاضیات عالی را کنار می‌گذارم، به مطلب دیگری که مدتهاست گفته‌ام توجه کنید. اگر وارد اتاق کار من شوید و به من نشان دهید که قضیهٔ انتگرال کوشی غلط است، توجه من بسیار جلب خواهد شد اما در آخر کار به شما خواهم گفت که باید بروید و مفروضات دیگری پیدا کنید تا قضیه درست شود زیرا من «می‌دانم» که «درست» است. این قضیه لازمتر از آن است که غلط باشد، و دست‌کم از قضیهٔ گرین نتیجه می‌شود. قضیهٔ انتگرال کوشی، علاوه بر چیزهای دیگر، تابع پتانسیل میدانهای برداری را به‌دست می‌دهد و مبنای بحثهای ما در مورد متغیرهای مختلط است، هر چند همه می‌دانیم که دست‌کم سه رهیافت متمایز به متغیرهای مختلط وجود دارد: (۱) قضیهٔ انتگرال کوشی، (۲) رهیافت لاگرانژ و وایرشتراس مبتنی بر سریهای توانی، و (۳) رهیافتِ مبتنی بر تابعهای همساز که در آن هیچ‌گاه از $i = \sqrt{-1}$ استفاده نمی‌شود، و باز این نشان‌دهندهٔ نکته‌ای است که من بارها گفته‌ام: لازم نیست نظریهٔ یکتایی درکار باشد تا کارهایی که فرض می‌کنیم موجودات فضایی توانسته‌اند انجام دهند براساس آن صورت گرفته باشد؛ پایه‌های ریاضی متفاوت، و نیز جزئیات سطحی متفاوت، می‌توانند وجود داشته باشند ولی همه باید زمینه‌ساز نتایجی باشند که مورد نیاز دنیای واقعی‌اند.

و بالاخره، فقط اصول و تعریفها نیستند که نیاز به بازبینی دارند، بلکه منطقی نیز که در ریاضیات به‌کار می‌رود نیازمند بررسی است. من نمی‌توانم در این فرصت کوتاه در بارهٔ اغلب مشکلات موجود در منطق بحث کنم و در اینجا فقط به نقش «ارجاع به خود» در ریاضیات اشاره می‌کنم. این گزاره برای همه آشناست: «این گزاره غلط است.» این جمله از لحاظ دستوری درست است و هیچ اشکالی ندارد مگر اینکه آن را در مورد خودش به‌کار ببرید که در این صورت اگر درست باشد غلط است و اگر غلط باشد درست! مثالهای متعدد دیگری می‌توان آورد، از قبیل این عبارت، معروف: «میانه‌روی در همهٔ امور». کلمهٔ «همه» خود حاکی از افراط و دوری از اعتدال است و بنابراین، در اینجا هم تناقضی درونی می‌بینیم. یکی از دوستان من دفترچه‌ای حاوی این‌گونه گزاره‌های رایج تهیه کرده است.

پارادکس راسل مثال متعارفی است که در منطق می‌آورند تا خطرات ارجاع به خود را در تعریفها نشان دهند و راسل خودْ برای گریز از این مشکلات نظریه‌ای در باب سلسله مراتب طبقات پرداخت، اما ظاهراً بعدها آن را پس گرفت! تا جایی که من دیده‌ام، نظریهٔ طبقات او مورد استقبال گسترده قرار نگرفته است، و ما هنوز با معضلِ رسیدن به تناقضات بر اثر ارجاع به خود دست به گریبانیم، تناقضاتی که البته ممکن است دیر به‌دست آیند.

نوع دیگری از ارجاع به خود که ممکن است شک‌برانگیز باشد، در منطقِ مورد استفاده در اثباتها دیده می‌شود. ابتدا حکم اصلی تورینگ را در مورد مسألهٔ توقف در نظر می‌گیریم که حاکی است برنامه‌ای وجود ندارد که بتواند تعیین کند یک برنامهٔ داخواه توقف خواهد کرد یا نه. تورینگ اثبات آن را با این فرض شروع می‌کند که این برنامه را دارد، برنامه‌ای که البته به وجود آن اعتقاد ندارد! وی چون نمی‌تواند اطلاعی از محتوای برنامه داشته باشد، تنها کاری که می‌تواند بکند وررفتن با ورودی و خروجی است؛ او خروجیهایِ «توقف می‌کند» و «توقف نمی‌کند» را برعکس می‌کند. سپس یک برنامه، برنامهٔ تغییرنیافته، را بر برنامهٔ تغییریافته اِعمال می‌کند (که معلوم نیست وجود داشته) و به تناقض می‌رسد! از اینجا عدم وجود برنامه را نتیجه می‌گیرد. آیا این‌گونه اثبات قابل قبول است؟ شما را قانع می‌کند؟

در بسیاری از اثباتهایِ امکان‌ناپذیری، فرض اولیهٔ ما این است که چیزی که عدم وجودش را می‌خواهیم ثابت کنیم، وجود دارد! مثلاً در اثباتِ متعارفِ این حکم که ریشهٔ دوم ۲ یک کسر نیست، فرض می‌کنیم کسری [برابر با ریشهٔ دوم ۲] داریم که در ساده‌ترین صورت خود است، دو طرف برابری را به توان دو می‌رسانیم و به تناقضی متضمن بخشپذیری بر ۲ می‌رسیم. ولی ساکنان سیاره دوردست کاملاً ممکن است این قضیهٔ کلی را ترجیح داده باشند که هیچ کسری اگر به توانی صحیح رسانده شود حاصلش نمی‌تواند عدد صحیح باشد. در روی کرهٔ زمین، هم قضیهٔ تورینگ و هم گنگ‌بودن ریشهٔ دوم ۲ معمولاً اثبات‌شده به حساب می‌آیند هر چند یکی از آنها خودْ راجع است.

حال نظری به فرایند قطری‌سازی کانتور می‌اندازیم که به نظر می‌رسد بین دو مثال بالا قرار داشته باشد. در اینجا هم کانتور فرض می‌کند که اگر عددهای موردنظر شمارش‌پذیر باشند می‌توان آنها را به ترتیبی در یک فهرست قرار داد، آنگاه اولین رقم اولین عدد، دومین رقمِ دومین عدد، و . . . را تغییر می‌دهد و همین‌طور ادامه می‌دهد. تا به انتهایِ این فهرستِ بی‌انتها برسد! سپس ادعا می‌کند که رقمهای تغییریافته عددی تشکیل می‌دهند که در فهرست نیست. پس چنین فهرستی نمی‌تواند وجود داشته باشد و اعداد بین ۰ و ۱ شمارش‌پذیر نیستند. و باز، در این اثبات با بینهایتِ بالفعل سروکار دارد نه با بینهایتِ بالقوهٔ ارسطو. هر چه باشد، او تصوری از عددهای محاسبه‌پذیر نداشت و نمی‌توان وی را زیاد سرزنش کرد؛ او از نمایش مرسوم عدد در زمان خودش استفاده کرده است و ما (دست‌کم بعضی از ما) مبنایی را که کار او بر آن استوار بوده، تغییر داده‌ایم.

مسأله این است که چه درجه‌ای از ارجاع به خود در اثباتهای «خودراجع» قابل قبول است. می‌دانیم که بعضی از انواع سادهٔ ارجاع به خود می‌توانند به نتایجی متناقض با خود بینجامند. احساس می‌کنیم اثبات سادهٔ گنگ بودن ریشهٔ دوم ۲ استدلال قابل اطمینانی است زیرا فقط عبارت موردنظر از لحاظ جبری به‌صورت دیگری نوشته می‌شود بدون آنکه تغییرات دیگری داده شود. ولی دست‌کم من، در بارهٔ اثبات تورینگ به‌صورتی که عرضه می‌شود تردیدهایی دارم و در بارهٔ صدق خود قضیه چیزی نمی‌گویم. فرایند قطری‌سازیِ کانتور، که مستلزم تغییری در اشیای مورد بحث است، مبتنی

است بر این فرض که می‌توانیم بینهایتِ بالفعل را بپذیریم، و نسبت به اثبات تورینگ درجهٔ بسیار خفیفتری از ارجاع به خود را به‌کار می‌برد و بنابراین بین دو مثال بالا قرار می‌گیرد. پاراداکس اوونهایم-اسکولم ظاهراً استدلال کانتور در مورد شمارش‌ناپذیری را مخدوش می‌کند. چگونه می‌توانید آن را بیازمایید؟ به یاد بیاورید که ما ظاهراً تعریف عدد را از نمایشِ گاه نامتناهیِ آن (مثلاً با استفاده از برشهای ددکیند) تبدیل کرده‌ایم به فرایندی که در هر مرحله رقمی از آن را به‌دست می‌دهد. آیا فرایند قطری‌سازی کانتور هنوز هم برقرار است؟ قضیهٔ تورینگ که قبلاً ذکر شد (اگر به آن معتقد باشید) نشان می‌دهد که هیچ راه مشخصی برای انتخاب برنامه‌هایی که به عددهای محاسبه‌پذیر می‌انجامند وجود ندارد، پس فهرست‌بندی اولیهٔ کانتور حتی برای اعداد محاسبه‌پذیر چگونه می‌تواند انجام شود در حالی که هیچ روش مکانیکی برای شناخت یک برنامه وجود ندارد؟ حتی اگر قضیهٔ تورینگ را باور نداشته باشید، فهرست‌بندی دقیقاً چگونه انجام می‌شود؟ آیا حاضرید زندگی خود را براساس اعتقاد به درستی آن در زندگی واقعی به مخاطره اندازید، یا این قضیه یکی از فراورده‌های مصنوعی ریاضیات معاصر است که ربطی به واقعیت ندارد؟ اگر شق دوم را قبول دارید، به نظر من غیرممکن است که بتوانیم جداً اعلام کنیم که موجودات فضایی چنین ریاضیاتی خواهند داشت یا نه. هر استدلالی دربارهٔ توافق ریاضیات ما و آنها باید مبتنی بر این باشد که این دو ریاضیاتْ توضیح‌دهندهٔ دنیای فیزیکی واحدی هستند و نه مبتنی بر تخیلات واهی.

به نظر من چنین می‌رسد که ارجاع به خود در این اثباتها درجاتی دارد چون بعضی از این اثباتها مرا قانع می‌کند و بعضی نمی‌کند. آیا ساکنان سیارهٔ دوردست روشی عینی برای تشخیص این درجات مختلف یافته‌اند که مرا از این حالت ابهام ــ که بعضی از این اثباتها برایم قابل قبول است و بعضی نیست بدون آنکه بتوانم مرز دقیقی بین آنها بکشم ــ نجات بخشد؟ به تعارضی برگردیم که من در مورد شمارش‌ناپذیری اعداد محور حقیقی مطرح کردم؛ در اینجا اثبات متعارفی که با آن مأنوس‌اید، فرایند قطری کانتور است. فرض کنید من پیشنهاد کنم که عددهای دودویی را به این ترتیبْ مرتب کنیم: نخست همهٔ عددهای یک رقمی، سپس عددهای دورقمی، بعد سه‌رقمی، و همین‌طور. پس داریم

$$۰, ۱, ۰۰, ۰۱, ۱۰, ۱۱, ۰۰۰, ۰۰۱, ۰۱۰, ۰۱۱, \ldots$$

شما هر رشته‌ای از رقمهای دودویی که به من بدهید، این رشته در این عالم باید متناهی باشد چون عالم ظاهراً متناهی است و من می‌توانم بگویم آن رشته درکجا واقع است! هر رقم دلخواه از هر درایه در هر رشتهٔ متناهی را که تغییر بدهید، من می‌توانم به شما بگویم که رقم تغییر یافته کجاست! البته این کاری نیست که کانتور کرد! او کل بینهایت را در نظر گرفته و فرض کرده است می‌تواند کاری بکند که هیچ برنامه‌ای نمی‌تواند، در حالی که من به این دیدگاه توسل می‌جویم که هر عدد یک فرایند است و شما [در هر مرحله] فقط رقم دیگری از نمایش آن را می‌توانید به من بدهید نه رشتهٔ مرکب از همهٔ ارقام نمایش نامتناهی آن را. موجودات فضایی در این مورد چه تصمیمی گرفته‌اند؟ راستی، شما دوست دارید چه تصمیمی بگیرید اگر زندگی شما احتمالاً به نتیجهٔ این تصمیم بستگی داشته باشد؟

نمی‌خواهم این فکر را در شما القا کنم که ریاضیات فقط از لحاظ سودمندیش جالب توجه است و جنبهٔ زیبایی‌شناختی آن فایده‌ای ندارد ــ به‌خصوص که در تدریس، زیبایی به ادراک کمک می‌کند. ولی توجه کنید که با دو برابرشدن نتایج ریاضی در تقریباً هر ۱۷ سال، آلان در هر سال بیش از ۱۰۰۰۰۰ قضیهٔ تازه داریم (براساس برونیابی از براوردی که مدتها قبل اولام[1] انجام داده است؛ به کتاب تجربهٔ ریاضی[2] اثر دیویس و هرش مراجعه کنید). رالف بواس[3] در زمانی که ویراستار مت. ریویوز بود اظهار داشته بود که اغلب نتایج نو در مقاله‌های مورد بررسی درست‌اند ولی اثباتهای آنها شاید در نیمی از موارد به‌وضوح غلط‌اند! بعضیها ادعا کرده‌اند که افزایش زیادِ نتایج منتشرشده ناشی از تجدید انتشار نتایج قدیمی به‌صورتی مبدّل است که تشخیص آنها در زبان جدید ریاضی مشکل است. با این حال مجبوریم با این مسأله کنار بیاییم. باز سعی می‌کنم این موضوع را براساس مفهوم ریاضیات از دیدگاه ایده‌آلیسم افلاطونی توضیح دهم.

در دنیای افلاطونی ریاضیات که ظاهراً بیشتر ریاضیدانان به آن معتقدند، ریاضیدانْ قضایا را که گویا از بعد از وقوع مهبانگ وجود داشته‌اند «کشف می‌کند»؛ در مقابلش این دیدگاه قرار دارد که ریاضیدان قضیه را «خلق می‌کند». من وقتی اعتقاداتم را در این باره بدون پیشداوریهای رایج بررسی می‌کنم، می‌بینم که اگر قضیه به نظرم مهم برسد آن را کشف کرده‌ام و اگر پیش‌پاافتاده به نظر برسد آن را خلق کرده‌ام! نظر ساکنان سیارهٔ دوردست در این باره چیست؟ ریاضیدانان زمینی عموماً تشخیص می‌دهند که دیدگاه افلاطونی از لحاظ منطقی قابل دفاع نیست اما به هر حال از آن دست نمی‌کشند مگر وقتی با اصرار از آنان پرسیده شود ریاضیات چیست و در آن وقت به موضع قابل دفاعی می‌روند و ادعا می‌کنند که ریاضیاتْ بازی بیهوده‌ای با نمادهاست و هیچ معنای ذاتی ندارد. به گفتهٔ هیلبرت: «وقتی دقت وارد می‌شود، معنا بیرون می‌رود». ولی به هر حال، ریاضیدانان سیارهٔ دوردست نیز مانند ما نیاز به حمایت مالی بیرونی برای ادامهٔ کار، و درواقع افزایش این حمایت، دارند. احتمال می‌دهم که آنها نیز مشکلات منطقی مشابهی در مورد تعریف ریاضیات و محتوای آن داشته باشند. ریاضیات هم در اینجا و هم در آنجا باید چیزی بیش از عملیات نمادی بی‌معنا باشد و گرنه نمی‌توانستیم از طریق امواج رادیویی که به‌وسیلهٔ معادلات ماکسول پیش‌بینی شده‌اند با آنها ارتباط برقرار کنیم، ولی اینکه ریاضیات به معنایی ایجابی‌تر چیست، گفتنش دشوار است.

در هنگام نوشتن کتابی (کاربرد روشهای ریاضیات در حساب دیفرانسیل و انتگرال، احتمال، و آمار) ناچار نوشتم که جوهر ریاضیات عبارت است از توسیع، تعمیم، و تجرید. این سه جنبهٔ ریاضیاتْ مشابه ولی متمایزند، و به نظر من اساس ریاضیات، هم در روی زمین و هم در سیارهٔ دوردست، هستند. اما شاید ریاضیات «فقط تفکر روشن» باشد و نه چیز دیگر.

وقتی ریاضیاتْ درس می‌دهیم، همواره باید به این سرشت دوگانهٔ ریاضیات توجه داشته باشیم: زیبایی انتزاعی آن، و جنبهٔ عملیش که به آن نیاز داریم زیرا به ما کمک می‌کند بر مشکلات عالَمی که در آن هستیم غلبه

1. S. Ulam

2. *The Mathematical Experience*, Davis and Hersh, pp. 20-21.

3. Ralph P. Boas

کنیم. ولی باید از این عقیدهٔ قدیمی یونانی که ریاضیاتْ دانش مطمئن و قطعی است اجتناب کنیم.

هدف این سخنرانی، کندوکاو در این موضوع و برانگیختن حساسیت شما نسبت به آن بود که کدام بخشهای ریاضیات فعلی دلبخواه‌اند و کدام بخشها، به دلیلِ سودمندی آنها در تبیین دنیای واقعی، الزامی و اجتناب‌ناپذیرند.

همچنین می‌خواهم قویاً پیشنهاد کنم که اگر می‌خواهید در آینده از کمکهای مالی و حمایت دولتی برخوردار شوید، باید به این نوعِ دومِ ریاضیات توجه زیادی مبذول دارید، اما نه اینکه مسألهٔ ظرافت و زیبایی در ریاضیات کلاً نادیده گرفته شود. این استدلال که درگذشتهٔ تحقیق در ریاضیات محض (در مقابل کاربردی)، مقدار زیادی ریاضیاتِ سودمندی پدید آورده است، درست است اما اگر جداً کارهایی را که به دلیل اشتغال ریاضیدانان به ریاضیات محض، به جای ریاضیات سودمند، انجام نشده است تخمین بزنید، این استدلال اعتباری ندارد و ریاضیدانها باید از توسل به آن شرمسار باشند. از آن گذشته، با رشد سرسام‌آور نتایج، بیش از ۱۰۰۰۰۰ قضیهٔ جدید (؟) در هر سال (به همهٔ کتابهایی که در هر ماه فقط در ارتباط با رشتهٔ خودتان بیرون می‌آید نگاه کنید)، احتمال اینکه مطلب تازه‌ای در ریاضیات محض بشناسید که وقتی نیاز دارید در اختیارتان باشد، و نه اینکه لازم باشد در هنگام نیاز ابداع شود، به طرز فزاینده‌ای کم می‌شود؛ در عوض ما در بسیاری اوقات، ریاضیات مورد نیاز را در هنگام نیاز خلق می‌کنیم. خلق دوبارهٔ مفاهیم قدیم روز به روز آسانتر از بازیافتِ آنها از متون موجود می‌شود. حتی امروز، در بسیاری از موارد ابداع دوبارهٔ مفهوم آسانتر از یافتن شرح آن در نوشتگان موجود است ــ و این خود به افزایش «نتایج جدید» کمک می‌کند!

لازم نیست همهٔ چیزهایی را که من گفتم قبول کنید؛ این حرفها برای برانگیختن و راهنمایی شما بود تا علی‌رغم آنچه کتابها و متخصصان در بارهٔ ریاضیات می‌گویند، اندیشه‌هایتان را در بارهٔ اینکه ریاضیات چیست و در آیندهٔ نزدیک چه باید باشد، بازبینی کنید. این‌گونه بررسی به نظر من خیلی روشنگر و ارزشمند است. من همیشه به دانشجویانم می‌گویم: «در علم و ریاضیات مرجعی نداریم که به آن متوسل شویم بلکه خودتان مسؤول اعتقاداتتان هستید.» بررسی عقایدتان در بارهٔ ریاضیات را به خودتان واگذار می‌کنم.

******

• R. W. Hamming, "Mathematics on a distant planet", *Amer. Math. Monthly*, (7) **105** (1998) 640-650.

دو میلیون دلار جایزه برای اثبات حدس گُلدباخ•

فیبر (Faber) ناشر انگلیسی اعلام کرده است که مبلغ دو میلیون دلار جایزه به‌فردی که بتواند حدس گُلدباخ را طی دو سال آینده ثابت کند، می‌پردازد. منظور از تعیین این جایزه، تبلیغ برای رمانی از نویسندهٔ یونانی آپوستولوس دوخیادیس (Apostolos Doxiadis) به‌نام عمو پتروس و حدس گُلدباخ است که فیبر ترجمهٔ انگلیسی آن را اخیراً به بازار عرضه کرده است. دوخیادیس در ۱۸ سالگی لیسانس ریاضی خود را از دانشگاه کلمبیای آمریکا کسب کرد ولی پس از آن به کار رمان‌نویسی و نمایشنامه‌نویسی در موطنش یونان پرداخت. این رمان که ماجرای مردی است که عمر خود را وقف اثبات حدس گُلدباخ می‌کند، تاکنون به ۱۵ زبان چاپ شده است.

طبق حدس گُلدباخ، هر عدد زوج بزرگتر از ۲ را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد اول نوشت. تاکنون صحت این حدس برای کلیهٔ اعداد تا ۴×۱۰^{۱۴} با کامپیوتر تحقیق شده است.

شرکت کامپیوتری Worldwide Computer Services در ایالت نیوجرسی آمریکا نیز یک جایزهٔ ۲۵۰۰۰ دلاری برای اثبات حدس «اعداد اول دوقلو» (اینکه بینهایت زوج متوالی از اعداد اول فرد وجود دارد) مقرر کرده است.

******

• نقل از روزنامهٔ تایمز لندن، مورخ ۱۶ مارس ۲۰۰۰

آیا ریاضیات ما طبیعی است؟
بررسی موردی مکانیک آماری تعادل•

داوید روئل*
ترجمهٔ احمدرضا طاهری

۱. آیا ریاضیات ما طبیعی است؟

می‌گویند. وقتی ولفگانگ پاولی[1] به بهشت رسید از یکی از علمای سلف که مدتها در آنجا به‌سر برده بود پرسید که چرا عدد ثابت ساختار ریز الکترودینامیک مقدار تقریبی $\alpha \approx ۱/۱۳۷$ را دارد. او دو ساعتی را به محاسبه روی تخته‌سیاه گذراند که در آن مدت پاولی دم برنیاورد و مرتب سر تکان می‌داد. بالاخره وقتی جواب $\alpha^{-۱} = ۱۳۷٫۰۳۵۹\ldots$ به‌دست آمد، پاولی از جایش بلند شد و در حالی‌که همچنان سرش را تکان می‌داد گچ را گرفت و به یک اشتباه اساسی در محاسبه اشاره کرد. من این داستان را از رز یوست[2] شنیدم و به اصالت کامل آن اعتماد ندارم. ولیکن بسیاری از ما بدمان نمی‌آید اگر فرصتی به‌دست آید از دانای مطلق سؤالهایی در مورد فیزیک و ریاضیات بپرسیم. چند سؤال فوراً به ذهن می‌رسد. به عنوان مثال، سازگاری نظام ریاضیات: مگر نمی‌شود آن‌طور که پیر کارتیه[3] گفته است [۱] خداوند ترتیبی داده باشد که اصول نظریهٔ مجموعه‌ها ناسازگار باشند ولی اثبات تناقض آن‌قدر طولانی باشد که انجام آن در جهان مادی ما میسر نباشد؟ آیا جهان ما بهترین دنیاهای ممکن است؟ آیا این تنها جهان از نوع خود است یا ممکن است ضریب ساختار ریز چیز دیگری باشد؟ چه نوع ریاضیاتی ممکن است به‌وسیلهٔ موجودات هوشمند در سیاره‌ای دوردست پدید آید؟ یا در جهانی دیگر با قوانین فیزیکی متفاوت؟

هانری پوانکاره یک بار اشاره کرد که برای اینکه سؤالی مفهوم داشته باشد، باید بتوان جوابی دارای مفهوم برای آن تصور کرد. این در مورد مسائلی که در بالا ذکر شد لزوماً صادق نیست. درواقع بسیاری اوقات نمی‌توان در مورد جالب توجه‌ترین مسائل به یک صورتبندی رضایتبخش رسید. در نتیجه معمولاً ما به کمتر از آن رضایت می‌دهیم، یعنی سؤالهایی را بررسی می‌کنیم که از نظر ریاضی بامفهوم‌اند ولی از نظر فلسفی کم‌وبیش بی‌ته‌رند.

1. Wolfgang Pauli 2. Res Jost 3. Pierre Cartier

من قصد دارم در این سخنرانی گیبس به جنبه‌ای کوچک از یک سؤال بلندپروازانه بپردازم: ریاضیات انسان قرن بیستم تا چه حد طبیعی است؟ در اینجا آماده‌ام تعریف ریاضیات را به‌عنوان یک نظام منطقی مبتنی بر اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها بپذیرم. سؤال این است: تا چه حد این نظام به طبیعت و شرایط انسان وابسته است؟ شرایط خاص انسانی و تصادفات تاریخی نباید ارزش صدق قضایا را تغییر دهند ولیکن می‌توانند بر مسیری که تحقیقات ریاضی طی می‌کند و سازماندهی نتایج این تحقیقات تأثیر چشمگیری بگذارند. من مسألهٔ طبیعی بودن ریاضیات را با کلیتی بلندپروازانه عنوان کرده‌ام ولی درواقع به جنبهٔ محدودی از آن خواهم پرداخت. اما قبل از اینکه به این فروتنی نزول کنم بگذارید این پیش‌بینی جسورانه را مطرح سازم که شاید در چند دههٔ آینده نظاره‌گر شمه‌ای از ریاضیات غیربشری باشیم. من ورود قریب‌الوقوع انسانهای کوچک سبزرنگ فضایی را پیش‌بینی نمی‌کنم، بلکه مقصودم تهاجم کامپیوتر به قلمرو ریاضیات است. از آنجا که مغز انسان نوعی کامپیوتر طبیعی است، دلیلی نمی‌بینم که نوع مصنوعی آن نتواند در امر تخصصی تحقیقات ریاضی بر انسان پیشی بگیرد. حدس من این است که بین ۵۰ تا ۱۰۰ (یا ۱۵۰) سال دیگر، کامپیوترها با انسان در انجام تحقیقات ریاضی به‌طور موفقیت‌آمیز رقابت خواهند کرد و سبک ریاضی آنها با آنچه ما عادت کرده‌ایم به نسبت متفاوت خواهد بود. برای کامپیوتر تحقیق محاسباتی نسبتاً طولانی (عددی یا ترکیبیاتی) دغدغه‌ای نخواهد بود و این امر نه تنها منجر به گونه‌های متفاوتی از اثبات خواهد شد، بلکه مهمتر از آن منجر به اثبات انواع جدیدی از قضایا خواهد گردید.

جدا از این موضوع، اکنون به ریاضیات انسانی باز می‌گردم. از نظر تاریخی، کاوش و تحقیق پیرامون دنیای فیزیکی که در آن زندگی می‌کنیم در شکل‌دادن به ریاضیات نقشی پراهمیت داشته است. هندسه از مطالعهٔ

فضای فیزیکی نشأت می‌گیرد، معادلات دیفرانسیل با مکانیک پیوند دارند، و غیره. ولی به همین ترتیب روشن است که ریاضیات قرن بیستم عمدتاً مسائل خود را خود تولید می‌کند و فیزیک تنها یک مرجع الهام ثانوی است. رؤیای بورباکی و چند نسل از ریاضیدانان این بوده است که ساختارهای طبیعی آنالیز را دریابند و به رشد و تکامل آنها برحسب شایستگی ذاتی‌شان بپردازند. شاید بتوان گفت که این رؤیا نیرومندترین و پربارترین منبع الهام برای ریاضیات قرن بیستم بوده است. نقش فیزیک، و اخیراً علوم کامپیوتر، مهم بوده است ولی کمتر مرکزیت داشته است. بدین ترتیب می‌توان تصور کرد که ریاضیات دارای نوعی هستهٔ مرکزی طبیعی است هر چند که ممکن است شاخه‌های مهمی از آن از کاربرد در فیزیک یا محاسبه تأثیر یا انگیزه بگیرند. روابط متعددی که بین رشته‌های گوناگون ریاضیات مشاهده می‌شود مؤید وجود این هستهٔ مرکزی طبیعی‌اند. انسانهای کوچک سبزرنگ فضایی باید هستهٔ مرکزی مشابهی برای ریاضیاتشان داشته باشند؛ ممکن است نمود ظاهری آن کاملاً متفاوت باشد، ولیکن در زبان خودشان باید قضیه‌ای داشته باشند که بگوید تصویر مجموعه‌های فشرده تحت نگاشتهای پیوسته، فشرده است.

همین اطمینان خاطر در مورد هستهٔ مرکزی طبیعی ریاضیات است که می‌خواهم آن را در این سخنرانی مورد سؤال قرار دهم. حدس من این است که هستهٔ مرکزی ریاضیات ما و ریاضیات انسانهای کوچک سبزرنگ فضایی ممکن است وجه اشتراک چندانی نداشته باشند. اطمینان خاطر ما از طبیعی‌بودن ریاضیاتمان بر وحدت آن استوار است: روابط بسیاری بین رشته‌های مختلف مشاهده می‌شود. ولی وحدت ریاضیات نیست که نسبت به آن شک می‌ورزم؛ ریاضیات انسانهای کوچک سبزرنگ فضایی ممکن است با ریاضیات ما روابط بسیاری داشته باشد، هر چند که ممکن است اشتراک چندانی نداشته باشد. اگر بخواهیم یک تصویر هندسی از این وضعیت بدهیم، رشته‌های مختلف ریاضیات را گویهایی فرض کنید (با قطر برابر برای سهولت). حال می‌توان به هر تعداد از این گویها داشت به‌طوری که هر دو گوی بر هم مماس باشند (به شرطی‌که در فضایی با بعد به اندازهٔ کافی بزرگ باشیم). بدین‌ترتیب می‌توان به‌راحتی تجسم کرد که گویهای ما و گویهای سبزرنگ آنها همه نزدیک به هم باشند در عین حال که از هم مجزا هستند.

ممکن است بگویید «این درست»، اما چگونه می‌توان استدلال کرد که ریاضیات ما طبیعی نیست بدون اینکه به کامپیوتر یا موجودات کوچک سبزرنگ فضایی متوسل شویم؟ قصد من این است که همین استدلال را با توسل به فیزیک ریاضی انجام دهم. من مثالهایی از مفاهیم ریاضی را جستجو خواهم کرد که سرچشمهٔ فیزیکی دارند، از نظر ریاضی طبیعی و سودمند از آب درآمده‌اند، و در عین حال اگر از خارج ریاضیات وارد نشده بودند دستیابی به آنها آسان نمی‌بود. ادعای من این است که مکانیک آماریِ حالت تعادل مثالهایی این چنین فراهم می‌آورد.

ولی قبل از پرداختن به این ادعایِ به نسبت کوچک، باید مقصود از مفاهیم ریاضیِ دارای منشأ فیزیکی را تشریح کنم. درک جهان برحسب ساخته‌های ریاضی یا به اصطلاح قوانین، امر ساده‌ای نیست. واضح است که قوانین فیزیکی را انسان به دلخواه وضع نمی‌کند، همچنان‌که طبیعت نیز خود آنها را بی‌ابهام آشکار نمی‌سازد. درواقع اینکه چرا طبیعت به این خوبی توسط ساخته‌های ریاضی توصیف می‌شود رازی دیرینه است (به مقالهٔ زیبای یوجین ویگنر زیرعنوان «کارایی نامعقول ریاضیات در علوم طبیعی» [۲] مراجعه کنید). ما نه به این اسرار خواهیم پرداخت و نه به شناخت‌شناسی فیزیک. آنچه مدنظر ماست این است که در بعضی از شاخه‌های فیزیک ــ بالاخص در مکانیک آماریِ تعادل ــ مفاهیم ریاضی عمیقی پدیدار می‌شوند که مطالعهٔ قوانین فیزیک آنها را بر ما تحمیل کرده‌اند. بدون تأثیر فیزیک، مدت زمان رسیدن به این مفاهیم بسیار طولانی می‌بود.

۲. مکانیک آماری تعادل به‌عنوان سرمنشأ مفاهیم ریاضی

فیزیک ریاضی مشتمل است بر تحلیل مدلهای ریاضیِ دسته‌های گوناگونی از پدیده‌های طبیعی. این تحلیل در بدترین حالت منجر به جنگی پراکنده از مسائل کوچک ریاضی می‌شود که فاقد اهمیت‌اند. ولی بسیاری اوقات این مسائل کوچک نظریهٔ وسیعتری را می‌طلبند و این فرایند تجمّع به پیدایش یک رشتهٔ جدید ریاضی می‌انجامد که مفاهیم آن از فیزیک ــ ولی بنا به ضرورت اجتناب‌ناپذیر ریاضی ــ فراهم آمده است.

واقعیتی که در نگاه نخست حیرت‌آور به نظر می‌رسد این است که فرایند تجمع ذکرشده ممکن است به رشته‌های نامرتبط فیزیک وحدت ببخشد. بخشی از تبیین این امر جامعه‌شناختی است و متکی بر وجود جماعت فیزیک‌ـریاضی‌دان است. اما دلیل دیگر اینکه مفاهیم جدید منجر به سازماندهی رشته‌های نامرتبط فیزیک می‌شوند ــ و این دلیلی اساسی است ــ طبیعی‌بودن مفاهیم به لحاظ ریاضی است.

به‌عنوان مثال، در سالهای اخیر، مفاهیم و روشهای مکانیک آماری تعادل در حدی وارد نظریهٔ میدان کوانتوم نسبیتی شده‌اند که عملاً به تلفیق دو رشته انجامیده است. [این مطلب را می‌توان هم در سطح ایده‌های گروه بازهنجاری[1] کنت ویلسن[2] مشاهده کرد و هم درکارهای دقیقتر نظریه‌پردازان میدان سازنده[3].] در راستایی کاملاً متفاوت، مفاهیم مکانیک آماری حالت تعادل در مطالعهٔ دستگاههای دینامیکی مشتق‌پذیر مفید واقع شده‌اند و از آنجا در بحث آشوب و تلاطم هیدرودینامیکی. توجه کنید که رابطه‌ای که در اینجا میان مکانیک آماری و دینامیک سیالات ایجاد می‌شود صرفاً ریاضی است: این هیچ ارتباطی با این مطلب ندارد که سیّال تحت مطالعه در سطح میکروسکوپی به‌وسیلهٔ مکانیک آماری (غیرتعادلی) توصیف می‌شود.

علاوه بر سهمی که مکانیک آماری تعادل در مطالعهٔ دستگاههای دینامیکی مشتق‌پذیر داشته است که در بالا به آن اشاره شد، این رشته منشأ خدمت به بخشهای دیگری از ریاضیات نیز بوده است. یادآوری می‌کنیم که منشأ تاریخی نظریهٔ ارگودیک، مکانیک آماری است. همچنین یادآوری می‌کنیم که کلود شانُن از تعریف مکانیک آماری آنتروپی برای معرفی مفهوم اطّلاع استفاده کرده است، که این خودْ ناوردای کولموگوروف‌ـسینایی در نظریهٔ ارگودیک را به ارمغان آورده است. در جهتی کاملاً متفاوت، شرط تعادل KMS در مکانیک آماری کوانتومی نقش مهمی در رشد نظریهٔ تومیتاـتاکساکی[4] در باب خودریختی‌های پیمانه‌ای جبرهای فون‌نویمان داشته است (به مطالب بعدی مراجعه کنید).

1. renormalization group 2. Kenneth Wilson
3. constructive field 4. Tomita-Takesaki

در اینجا لازم است کمی صریحتر و مشخصتر صحبت کنم. من با توصیفی عمومی و کوتاه از موضوع مکانیک آماری تعادل آغاز می‌کنم[1] و سپس به سه نمونه از تأثیر مکانیک آماری تعادل در ریاضیات می‌پردازم.

مکانیک آماری با «دستگاههای بزرگ» سروکار دارد، یعنی گردایه‌های بزرگی از زیردستگاههای یکسانِ محصور در یک جعبهٔ $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^3$ وقتی‌که در حد Λ بینهایت بزرگ می‌شود. برای سهولت معمولاً به‌جای $\mathbb{R}^3$ از یک «شبکهٔ» $\mathbb{Z}^\nu$ (مثلاً $\mathbb{Z}$) استفاده می‌کنیم. نوعاً برای دستگاههای کلاسیک یک مجموعهٔ فشردهٔ F و یک اندازه متناهی مثبت m روی F داده می‌شوند. یک پیکربندی دستگاه به‌وسیلهٔ نقطه‌ای چون $\xi_i \in F$ برای هر $i \in \Lambda$ مشخص می‌شود. هر حالت آماری در Λ چیزی جز یک اندازهٔ احتمال ρ_Λ روی F^Λ نیست. برای به‌دست آوردن ρ_Λ یک تابع انرژی $E_\Lambda : F^\Lambda \to \mathbb{R}$ و عددی چون $\beta > 0$ (عکس دما)، انتخاب می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\rho_\Lambda(d\xi) = \frac{1}{Z_\Lambda}[\exp(-\beta E_\Lambda(\xi))] \prod_{i\in\Lambda} m(d\xi_i)$$

که در اینجا Z_Λ تابع افراز

$$Z_\Lambda = \int \exp[(-\beta E_\Lambda(\xi))] \prod_{i\in\Lambda} m(d\xi_i)$$

است. فرض کنیم E_Λ برای هر زیرمجموعهٔ متناهی $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ داده شده باشد و در ویژگی جمع‌پذیری تقریبی $E_{\Lambda_1\cup\Lambda_2} \approx E_{\Lambda_1} + E_{\Lambda_2}$، برای Λ_1 و Λ_2 بزرگ، و مجزا، صدق کند. در این صورت می‌توان برای مطالعهٔ حد ρ_Λ وقتی $\Lambda \to \mathbb{Z}^\nu$، معنی قائل شد؛ اینها اندازه‌های روی $F^{\mathbb{Z}^\nu}$ هستند که تحت انتقالهای $\mathbb{Z}^\nu$ ناوردا می‌مانند، و حالت تعادل نام دارند. این اشیاء موضوع اصلی مکانیک آماری تعادل (کلاسیک) را تشکیل می‌دهند.

این واقعیت که حالات تعادل اشیائی طبیعی هستند به هم ارزی مجموعه‌های آماری[2] مربوط می‌شود. توصیف این موضوع وقتگیر است (به [۸ و ۹] مراجعه کنید) و احتمالاً به این دلیل است که مکانیک آماری تعادل بر مبنای ملاحظات فیزیکی رشد و تحول یافته است نه براساس ضرورت ریاضی.

میزان تصادفی‌بودن[3] در هر واحد حجم در یک حالت تعادل ρ کمیتی طبیعی از نظر فیزیکی است که متناظر است با آنتروپی ترمودینامیکی (بولتسمان[4]). همان‌طور که قبلاً اشاره شد، مفهوم آنتروپی فیزیکی به تعریف ناوردای کولموگوروف-سینایی در نظریهٔ ارگودیک منجر می‌شود. بررسی وابستگی حالات تعادل به β از نظر ریاضی بسیار دشوار است ولی اهمیت فیزیکی دارد زیرا ناپیوستگی‌های این وابستگی متناظر گذارهای فاز هستند. حالات تعادل متفاوت (متناظر با βهای متفاوت یا اندرکنشهای متفاوت) معمولاً اندازه‌های توأماً تکین هستند. بدین ترتیب ضرورت فیزیکی ما را وادار می‌کند که به بررسی خانواده‌های اندازه‌های توأماً تکین بپردازیم و همین ضرورت فیزیکی رهنمودهایی برای حل مسأله ارائه می‌کند. روشهای نیرومندی که از این طریق به‌دست می‌آیند برای حل مسائل دیگر نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند، مثلاً در بررسی دستگاههای دینامیکی مشتق‌پذیر هذلولوی (از طریق تناظر با مکانیک آماری که به یاری «افرازهای مارکوف» برپا می‌شود).

آنچه در بالا به‌طور خلاصه بیان شد مکانیک آماری دستگاههای کلاسیک است. برای دستگاههای کوانتومی، یک عملگر جایگزین تابع انرژی E_Λ می‌شود، ردّ[1] به‌جای انتگرالگیری می‌آید، و یک حالت تعادل ρ، حالتی روی یک جبر C^* است نه یک اندازهٔ احتمال.

۳. سه مثال و قدری تعمق

در اینجا به توصیف کوتاهی از سه مثال می‌پردازم که در مکانیک آماری ریشه دارند و کم و بیش در حال شکوفاشدن به‌صورت نظریات ریاضی هستند.

اولین مثال قضیهٔ لی-یانگ است که قضیهٔ زیبای ناکامی است.

قضیه (لی و یانگ [۱۰]). فرض کنید داریم $a(\{i,j\}) \in \mathbb{R}$ که $-1 \le a(\{i,j\}) \le 1$ به‌ازای $\{i,j\} \subset \{1,\dots,n\}$. می‌نویسیم:

$$P(z) = \sum_{X\subset\{1,\dots,n\}} z^{|X|} \prod_{i\in X}\prod_{j\notin X} a(\{i,j\})$$

که در اینجا $|X| = \mathrm{card}X$ و جملات درجهٔ ۰ و درجهٔ n به ترتیب ۱ و z^n محسوب می‌شوند، در این صورت همهٔ صفرهای P روی دایرهٔ $|z| = 1$ قرار دارند.

در کاربرد این قضیه در مکانیک آماری، P تابع افراز Z_Λ برای یک سیستم اسپینی فرومغناطیسی است و محل صفرهای Z_Λ گذارهای فاز را کنترل می‌کند. در ابتدا کوشش قابل ملاحظه‌ای صرف اثبات این قضیه شد که بر مبنای فیزیک طرح شده بود. ایدهٔ جدیدتری از تارو آسانو[2] اکنون اثباتی کوتاه را میسر ساخته است (به ضمیمه مراجعه کنید). من این نتیجهٔ زیبا را ناکام خوانده‌ام زیرا که علی‌رغم کاربردهای مهم آن در فیزیک، در این برهه از زمان، نقطه‌ای تکین و منزوی در ریاضیات است. قابل تصور است که ارتباطاتی با تابع زتا (و حدسهای ویل) داشته باشد؛ همچنان که مثال دوم نشان خواهد داد، ایدهٔ چنین ارتباطی نامعقول نیست. ولی این معجزه به‌وقوع نپیوسته است، و هنوز نمی‌دانیم با این قضیهٔ دایره چه کنیم.

مثال دوم کاربردی از ایده‌های مکانیک آماری در دستگاههای دینامیکی مشتق‌پذیر است که با معرفی‌کردن مفهوم افراز مارکوفی میسر شده است (سینایی [۱۱، ۱۲، ۱۳] و بوئن [۱۴، ۱۵]). افرازهای مارکوفی، مسائل نظریهٔ ارگودیک برای وابرریختی‌های هذلولوی[3] یا شاره‌ها را به مسائلی از مکانیک آماری روی «شبکهٔ» $\mathbb{Z}$ مبدل می‌کنند. در میان کاربردهای بسیار این روش می‌توان از اثبات زیبای سینایی [۱۳] از این مطلب نام برد که وابرریختی‌های هذلولوی لازم نیست دارای یک اندازهٔ ناوردای هموار باشند[4]. همچنین از آنجا که شارهٔ ژئودزیک روی خمینه‌های دارای انحنای منفی، هذلولوی است، امکان بررسی توابع زتا از نوع زلبرگ[5] پدید می‌آید. با استفاده

۱. در بین آثار با جهتگیری ریاضی در زمینه‌های گوناگون مکانیک آماری تعادل می‌توان [۳، ۴، ۵، ۶، ۷] را نام برد.

2. ensembles 3. randomness 4. Boltzmann

1. trace 2. Taro Asano 3. hyperbolic diffeomorphisms

۴. به عبارت دقیقتر، مجموعه‌ای باز و چگال از وابرریختی‌های آنوسوف C^∞ وجود دارد که فاقد یک اندازهٔ ناوردایِ به‌طور مطلق پیوسته نسبت به عنصر حجم ریمانی است.

5. Selberg

از افرازهای مارکوف، این توابع زتا را می‌توان به‌صورت نوعی توابع افراز بیان کرد که قابل بررسی در چارچوب مکانیک آماری هستند. بدین ترتیب نوعی «قضیهٔ اعداد اول» برای طول ژئودزیکهای بسته روی خمینه‌های فشردهٔ دارای انحنای منفی (نه لزوماً ثابت) به‌دست می‌آید ــ به [۱۶] نگاه کنید.

مثال سوم ما مربوط می‌شود به تعمیم مفاهیمی که در جبرهای جابه‌جایی [تعویض‌پذیر] طبیعی هستند به جبرهای ناجابه‌جایی [غیرتعویض‌پذیر]. (جبرهای جابه‌جایی رابطهٔ تنگاتنگی با هندسه دارند که منبعی غنی از مفاهیم طبیعی است.) همان‌طور که مکانیک آماری کلاسیک روشهای نیرومندی برای کارکردن با اندازه به‌دست می‌دهد (که آن‌را مسأله‌ای در جبر جابه‌جایی می‌توان تلقی کرد)، مکانیک آماری کوانتومی سرچشمه‌ای پربار از الهام برای جبرهای ناجابه‌جایی است. اکنون مثال سوم را تشریح می‌کنیم.

برای یک دستگاه کوانتومی در جعبهٔ Λ با عملگر انرژی E_Λ، تحول عملگر A برحسب زمان به‌صورت زیر داده می‌شود

$$A \mapsto \tau_\Lambda^t A = e^{iE_\Lambda t} A e^{-iE_\Lambda t}$$

از سوی دیگر (با مساویِ واحد قراردادن عکس دما)، حالت ρ_Λ را با تعریف زیر داریم

$$\rho_\Lambda(A) = \frac{1}{Z_\Lambda} \operatorname{tr} A e^{-E_\Lambda}, \qquad Z_\Lambda = \operatorname{tr} e^{-E_\Lambda}$$

کوبو[1]، مارتین، و شوئینگر متوجه شده‌اند که تابعی کراندار و پیوسته چون F روی $\{z : 0 \le \operatorname{Im} z \le 1\}$ وجود دارد که در $0 < \operatorname{Im} z < 1$ تحلیلی است و به‌ازای هر مقدار حقیقی t

$$\rho_\Lambda(B \cdot \tau_\Lambda^t A) = F(t), \qquad \rho_\Lambda(\tau_\Lambda^t A \cdot B) = F(t+i)$$

این وضعیت همچنان پابرجا می‌ماند وقتی $\Lambda \to \infty$: حالت تعادل ρ در شرط حدّی KMS (کوبو-مارتین-شوئینگر) نسبت به خودریختی زمانی τ^t صدق می‌کند. از جنبهٔ ریاضی، تومیتا و تاکساکی کشف و ثابت کردند که اگر ρ یک حالت نرمال وفادار[2] روی یک جبر فون نویمان M باشد، آنگاه گروه خودریختی یکتایی (τ^t) از M وجود دارد که ρ در شرط KMS نسبت به (τ^t) صدق می‌کند. این ارتباط غیرمنتظره میان مکانیک آماری و نظریهٔ جبرهای فون نویمان پس از ده سال کار مستقل در جبهه‌های فیزیک و ریاضی پیدا شد. (این ارتباط البته برای هر دو طرف بسیار مفید واقع شد.) این داستان را هوزی‌هیرو آراکی[3] با تأکید بر نقش اساسی مقاله‌ای از هوگن‌هولتس[4] و وینینک[5] [۱۸] به طرزی عالی نقل کرده است [۱۷]. کارهایی که به دنبال این ماجرا صورت گرفت منجر به احیاء نظریهٔ جبرهای فون نویمان شده است که در آن آثار الن کن[6] نقشی محوری دارد.

1. Kubo 2. faithful 3. Huzihiro Araki 4. Hugenholtz
5. Winnink 6. Alain Connes

سه مثال ما به‌طور تقریباً تصادفی از میان مثالهای ممکن انتخاب شدند[1]؛ هدف به نمایش گذاشتن سرنوشت مفاهیم گوناگون برگرفته از مکانیک آماری در ریاضیات محض بود. بدین ترتیب در مثال ۳، سهم مکانیک آماری کمتر از مثال ۲ اهمیت داشت زیرا که نظریهٔ تومیتا-تاکساکی مستقلاً رشد و قوام یافته بود. در همهٔ موارد، به هر صورت، اثر ایده‌های فیزیکی قابل ملاحظه بود. این نکته به ما چه می‌آموزد؟

بحثی نیست که در میان نظریات فیزیکی این قرن، مکانیک آماری تعادل از لحاظ تولید ایده‌های ریاضی عمیق فوق‌العاده بارآور بوده است. نمی‌توانیم ادعا کنیم که دلیل این مطلب را کاملاً درک می‌کنیم. در مقایسه، مکانیک آماری غیرتعادلی از نظر ریاضی نسبتاً عقیم بوده است هر چند مسائلی مفهومی که مطرح می‌کند برای فیزیکدانان از اهمیت کمتری برخوردار نیستند. بعید نیست که این مبحث روزی به منبعی غنی از الهامات ریاضی بدل شود.

حال به سؤال اولیهٔ «طبیعی‌بودن» ریاضیات بازگردیم. برای رشد و نمو ریاضیات راههایی طبیعی وجود دارد: کوشش در حل مسائلی که جالب توجه به نظر می‌رسند از طریق روشهایی که عملی به نظر می‌رسند. بسیاری اوقات یک مسیر تحول طولانی منجر به نتیجه‌ای می‌شود که مرکزی به نظر می‌رسد، ولی بعداً با تغییر دیدگاه، راه کوتاه میان‌بُری به همان نتیجه گشوده می‌شود. این بدین معنی است که آنچه طبیعی به نظر می‌رسد به مرور زمان تغییر می‌کند. به‌عنوان مثال، تناظر یا توازی میان دو نظریهٔ ریاضی (مانند «دوگانی» در هندسهٔ افکنشی) مدتهای طولانی است که مشاهده شده است و از آن به‌طور شهودی برای اکتشاف بهره‌گیری شده است. ولی امروز مضحک به‌نظر می‌رسد که دو رشتهٔ طولانی از قضایای موازی را جداگانه به‌دست آوریم و همواره از تناظر آنان در شگفت باشیم. بالعکس سعی ما این خواهد بود که یک یکریختی میان دو نظریه ایجاد کنیم و عملاً از یکی از آنها خلاصی یابیم.

حالا بیایید پای فیزیک را به میان کشیم. به خاطر تفاوت معیارها در مورد اهمیت و ذی‌ربط بودن، آنچه از دیدگاه فیزیک طبیعی است با آنچه در ریاضیات طبیعی به نظر می‌رسد بسیاری اوقات متفاوت است. بنابراین مداخلهٔ فیزیک سیر تاریخی ریاضیات را تغییر می‌دهد. خاطرنشان کرده‌ام که در این قرن میزان مداخلهٔ فیزیک به نسبت اندک بوده است، که طبیعی‌بودن ریاضیاتمان را در معرض تردید قرار می‌دهد. همان‌طور که در مثالهای بالا اشاره شد، سیرهای تاریخی متفاوتی قابل تصورند، و راههای بسیار دیگری نیز می‌توان در نظر گرفت.

شاید وقت آن رسیده باشد که به نتیجه‌گیریهای محتاطانه‌ای اقدام کنیم در حالی‌که به خاطر داریم که طبیعی‌بودن ریاضیاتمان مسأله‌ای خوش‌طرح نیست. تأثیر حوادث تاریخی را نباید بیش از آنچه هست انگاشت. مفاهیمی مانند عدد و گروه به اجبار دیر یا زود وارد مسیر رشد ریاضیات بشری می‌شدند. با این‌حال اعجاب‌انگیز است که بعضی ایده‌های بسیار خوب ریاضیات از منطق درونی سیر تحول ریاضیات نشأت نگرفته‌اند، بلکه از بیرون به آن

۱. در این زمینه، تعریف اخیری که کُن، نارنهوفر، و تیرینگ [۱۹، ۲۰] از «ناوردای کولموگوروف-سینایی ناجابه‌جایی» ارائه کرده‌اند به ذهن می‌رسد، یا کاربردها در مکانیک کوانتومی نسبیتی که در مورد آن می‌توانید به [۲۱] نگاه کنید.

راه پیدا کرده‌اند. شرایط بیرونی متفاوتی می‌توان متصوّر شد که می‌توانسته‌اند منجر به ریاضیات متفاوتی بشوند. چه قدر متفاوت؟ قضاوت شخصی من این است که ریاضیات انسانی می‌تواند کاملاً متفاوت از آنچه هست باشد.

همچنین فکر می‌کنم تا جایی که ریاضیات ما طبیعی است، این طبیعی‌بودن بیش از آنکه مدیون ضرورت منطقی باشد، به طبیعت خاص ذهن انسان مربوط است. مقصودم طریقی است که «تفکّر منطقی» ما با شهود بصری پیوند می‌خورد و با «زبانهای طبیعی» برون‌منطقی اتصال می‌یابد. همچنین مقصودم عشق غریب ما به صورتبندی‌های کوتاهی است که «زیبا» می‌نامیم و روشهای تکراری استدلال که «طبیعی» می‌خوانیم.

مقصود این نیست که ریاضیات یک ساختهٔ دلخواه است. البته که نیست: ریاضیات یک موضوع ساختاری است و به مفهومی چیزی جز ساختار نیست. فهم رمز این ساختار خارج از توان ماست، با این‌حال ذهن انسان می‌تواند آن‌را درک کند: این چیزی است که ریاضیات را این‌قدر جذاب و فریبنده می‌سازد. دوست داریم جریان کشف ساختار ریاضیات را پیمودن راهی تصور کنیم که خدایان برایمان گسترده‌اند. ولی همان‌طور که آنتونیو ماچادو[1] سروده است، شاید راهی در بین نباشد:

رهروا، گام تو
راه است، راه جز این نیست
رهروا، راهی نیست
راه را تو با گام برداشتنت می‌آفرینی[2]

ضمیمه: اثبات قضیهٔ دایرهٔ لی-یانگ. مجموعهٔ $\mathcal{A}$ از چندجمله‌ایهای $P_I(z_I)$ را در نظر بگیرید که در آن:

(i) I یک مجموعهٔ متناهی است.

(ii) $z_I = (z_i)_{i\in I}$.

(iii) $P_I(z_I)$ به‌طور جداگانه نسبت به هر یک از متغیرهای z_i مستوی است.

(iv) اگر $|z_i| < 1$ به‌ازای هر $i \in I$، آنگاه $P_I(z_I) \neq 0$.

به حقایق زیر توجه کنید:

I. برای $a \in [-1, 1]$ حقیقی، چندجمله‌ای

$$P_{\{1,2\}}(z_1, z_2) = z_1 z_2 + a z_1 + a z_2 + 1$$

در ردهٔ $\mathcal{A}$ است. [با در نظر گرفتن تبدیل از مرتبهٔ دوم افکنشی $z_1 \mapsto z_2$ که توسط $P_{\{z_1,z_2\}}(z_1, z_2) = 0$ تعریف می‌شود می‌توان این مطلب را به سهولت دید: نقاط ثابت روی دایرهٔ واحد قرار دارند.]

II. اگر I و J مجزا باشند و $P_I(z_I)$ و $P_J(z_J)$ در $\mathcal{A}$ باشند، حاصلضرب $P_{I\cup J}(z_{I\cup J}) = P_I(z_I)P_J(z_J)$ در $\mathcal{A}$ است.

III. فرض کنید $I \cap \{\alpha, \beta\} = \emptyset$ و بنویسید:

$$P_{I\cup\{\alpha,\beta\}}(z_{I\cup\{\alpha,\beta\}}) = A z_\alpha z_\beta + B z_\alpha + C z_\beta + D$$

که در اینجا A، B، C، D چندجمله‌ایهایی برحسب z_I هستند. فرض کنید $\gamma \notin I$ و چندجمله‌ای منقبض‌شدهٔ آسانو را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$P^*_{I\cup\{\gamma\}}(z_{I\cup\{\gamma\}}) = A z_\gamma + D$$

در این صورت اگر $P_{I\cup\{\alpha,\beta\}}$ در $\mathcal{A}$ باشد، $P^*_{I\cup\{\gamma\}}$ نیز هست. [برای $i \in I$، $|z_i| < 1$ را در نظر بگیرید، آنگاه $Az^2 + (B+C)z + D$ برای $|z| < 1$ صفر نمی‌شود. از این‌رو حاصلضرب ریشه‌های آن، یعنی D/A، در $|D/A| \geq 1$ صدق می‌کند، پس $Az_\gamma + D$ برای $|z_\gamma| < 1$ صفر نمی‌شود.]

قضیه. فرض کنید I یک مجموعهٔ متناهی باشد و $a(\{i,j\}) \in \mathbb{R}$، به‌صورت $-1 \leq a(\{i,j\}) \leq 1$ به‌ازای هر $\{i,j\} \subset I$ انتخاب کنید، بنویسید:

$$P_I(z_I) = \sum_{X\subset I} z^X \prod_{i\in X}\prod_{j\notin X} a(\{i,j\})$$

که در آن $z^X = \prod_{i\in X} z_i$؛ در این صورت P_I در $\mathcal{A}$ است.

برای ملاحظهٔ این مطلب، به چندجمله‌ایهای $z_i z_j + a(\{i,j\})(z_i + z_j) + 1$ توجه کنید (که بنابر I در $\mathcal{A}$ هستند). با ضرب کردن متوالی این چندجمله‌ایها، انجام انقباض آسانو هرگاه که یک متغیر دو بار ظاهر شود، P_I به‌دست می‌آید. از II و III می‌توان نتیجه گرفت که P_I در $\mathcal{A}$ است.

قضیهٔ دایرهٔ لی-یانگ پیامد مستقیم نتایج بالاست. توجه کنید که آسانو مسألهٔ دشوارتری را حل کرد: او یک صورتبندی کوانتومی از قضیهٔ دایرهٔ لی-یانگ را ثابت کرد. (به مقالات آسانو [۲۲، ۲۳]، و همچنین مقالات سوزوکی و فیشر [۲۴] و روئل [۲۵] نگاه کنید.)

مراجع

1. P. Cartier, *La pratique—et les pratiques—des mathématiques*, Encyclopédie Philosophique Universelle, Presses Univ. de France, Paris, 1988 (to appear).
2. E. Wigner, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 1-14.
3. D. Ruelle, *Statistical mechanics. Rigorous results*. Benjamin, New York, 1969.
4. R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math., vol. 470, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
5. D. Ruelle, *Thermodynamic formalism*, Encyclopedia of Math. and its Appl., vol. 5, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1978.
6. R. Israel, *Convexity in the theory of lattice gases*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1979.

1. Antonio Machado

۲. اصل اسپانیایی این قطعه شعر این است:

Caminante, son tus huellas
el camino y nada más;
caminante, no hay camino,
se hace camino al andar.

7. Ia. G. Sinai, *Theory of phase transitions: Rigorous results*, Pergamon, Oxford, 1982.

8. D. Ruelle, *Correlation functionals*, J. Math. Phys. **6** (1965), 201-220.

9. O. E. Lanford, *Entropy and equilibrium states in classical statistical mechanics*, Statistical Mechanics and Mathematical Problems, Lecture Notes in Physics, vol. 20, Springer-Verlag, Berlin, 1973, pp. 1-113.

10. T. D. Lee and C. N. Yang, *Statistical theory of equations of state and phase transitions*. II, *Lattice gas and Ising model*, Phys. Rev. **87** (1952), 410-419.

11. Ia. G. Sinai, *Markov partitions and C-diffeomorphisms*, Funktsional Anal. i Prilozhen **2** No. 1 (1968), 64-89; English transl., Functional Anal. Appl. **2** (1968), 61-82.

12. _____, *Construction of Markov partitions*, Funktsional Anal. i Prilozhen **2** No. 3 (1968), 70-80; English transl., Functional Anal. Appl. **2** (1968), 245-253.

13. _____, *Gibbs measures in ergodic theory*, Uspekhi Mat. Nauk **27** No. 4 (1972), 21-64; English transl., Russian Math. Surveys **27** No. 4 (1972), 21-69.

14. R. Bowen, *Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms*, Amer. J. Math. **92** (1970), 725-747.

15. _____, *Symbolic dynamics for hyperbolic flows*, Amer. J. Math. **95** (1973), 429-459.

16. W. Parry and M. Pollicott, *An analogue of the prime number theorem for closed orbits of Axiom A flows*, Ann. of Math. (2) **118** (1983), 573-591.

17. H. Araki, *Some contact points of mathematics and physics*, Invited talk, First Pan-African Congress of Mathematicians, Rabat, 1976 (Zi F, Bielefeld, preprint).

18. R. Haag, N. M. Hugenholtz and M. Winnink, *On the equilibrium states in quantum statistical mechanics*, Comm. Math. Phys. **5** (1967), 215-236.

19. A. Connes, H. Narnhofer and W. Thirring, *Dynamical entropy of C^* algebras and von Neumann algebras*, Comm. Math. Phys. **112** (1987), 691-719.

20. _____, *The dynamical entropy of quantum systems*, preprint.

21. J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum physics: a functional integral point of view*, Springer-Verlag, New York, 1981.

22. T. Asano, *Lee-Yang theorem and the Griffiths inequality for the anisotropic Heisenberg ferromagnet*, Phys. Rev. Letters **24** (1970), 1409-1411.

23. _____, *Theorems on the partition functions of the Heisenberg ferromagnets*, J. Phys. Soc. Japan **29** (1970), 350-359.

24. M. Suzuki and M. E. Fisher, *Zeros of the partition function for the Heisenberg, Ferroelectric, and general Ising models*, J. Math. Phys. **12** (1971), 235-246.

25. D. Ruelle, *Extension of the Lee-Yang circle theorem*, Phys. Rev. Letters **26** (1971), 303-304.

******

• این مقاله مبتنی است بر متن ششمین سخنرانی از سلسله سخنرانیهای گیبس (Josiah Willard Gibbs) که مؤلف آن را در نودوچهارمین نشست سالانهٔ انجمن ریاضی آمریکا (AMS) در آتلانتای جورجیا، به تاریخ ۶ ژانویهٔ ۱۹۸۸ ایراد کرده است. منبع مقاله این است:

David Ruelle, "Is our mathematics natural?: the case of equilibrium statistical mechanics", *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, (1) **19** (1988) 259-268.

* داوید روئل، مؤسسهٔ مطالعات عالی علمی (IHES)، فرانسه

اصول موضوع پئانو به‌قلم خودش

$1 \varepsilon N.$

$a \varepsilon N . \supset . a + 1 \varepsilon N.$

$a, b \varepsilon N . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1.$

$a \varepsilon N . \supset . a + 1 - = 1.$

$k \varepsilon K \therefore 1 \varepsilon k \therefore x \varepsilon N . x \varepsilon k : \supset_x x + 1 \varepsilon k :: \supset . N \supset k.$

Giuseppe Peano, *Arithmetices principia nova methodo exposita*, Turin: Bocca, 1889.

عدد بسته‌صورت چیست؟•

تیموتی چاو*
ترجمهٔ عبدالحسین امینی

۱. مقدمه

زمانی‌که دانش‌آموز دبیرستان بودم، دوست داشتم به مسائل عددی تا حد امکان جوابهای دقیق بدهم. وقتی جواب مسأله‌ای ۲/۷ یا $\pi\sqrt{5}$ یا $\arctan 3$ یا $e^{1/e}$ بود، به‌جای ارائهٔ تقریب اعشاری، آن‌را به همان صورت رها می‌کردم.

بعضی مسائل مرا ناکام می‌گذاشتند زیرا راهی برای بیان دقیق جواب آنها به‌نظرم نمی‌رسید. به‌عنوان مثال، مسأله‌های زیر را در نظر بگیرید.

سؤال ۱. معادلهٔ

$$x + e^x = 0 \qquad (1.1)$$

دقیقاً یک ریشهٔ حقیقی دارد؛ آن را R بنامید. آیا عبارتی «بسته‌صورت»[1] برای R وجود دارد؟

سؤال ۲. معادلهٔ

$$2x^5 - 10x + 5 = 0 \qquad (2.1)$$

پنج ریشهٔ غیرتکراری r_1، r_2، r_3، r_4 و r_5 را دارد. آیا عباراتی بسته‌صورت برای آنها وجود دارد؟

به‌نظر می‌رسید این‌گونه سؤالها جوابشان منفی باشد اما من امیدوار ماندم که جواب مثبت باشد و مشکل از آنجا باشد که من هنوز به حد کافی ریاضیات نمی‌دانم.

در دانشکده در بارهٔ نظریهٔ گالوا مطالبی یاد گرفتم و دانستم که گروه گالوایی (۲.۱)، S_5 است [۷، بخش ۸.۵]. بنابراین اثبات می‌شود که r_iها با عبارات رادیکالی قابل بیان نیستند. هر چند این احتمالاً باید مرا قانع می‌کرد، اما چنین نشد. معادلهٔ

$$x^4 - (6\sqrt{3})x^3 + 8x^2 + (2\sqrt{3})x - 1 = 0$$

را در نظر بگیرید. ریشه‌هایش $\tan(\pi/15)$، $\tan(4\pi/15)$، $\tan(7\pi/15)$، و $\tan(13\pi/15)$ هستند. از نظر من اینها عبارات بسته‌صورتِ بسیار خوبی بودند. هر چند در این مورد خاص ریشه‌ها برحسب رادیکال نیز قابل بیان هستند اما احساس می‌کردم ممکن است عددهایی جبری وجود داشته باشند که قابل بیان برحسب رادیکال نباشند اما باز هم بتوان آنها را به صورت بسته ارائه کرد ــ مثلاً با استفاده از توابع مثلثاتی، نمایی و لگاریتمی. بنابراین تا آنجایی که به من مربوط می‌شد نظریهٔ گالوا پایان داستان نبود.

وقتی دانشجویان برای $\int \exp(x^2)dx$ یک عبارت بسته‌صورت می‌خواهند، همهٔ ما جواب استاندارد را می‌دانیم: تابع داده شده یک تابع مقدماتی نیست. ولی شگفت‌آور است که سؤال ۱ (و نیز سؤال ۲، اگر عدم رضایتم را از جوابِ نظریهٔ گالوایی بپذیرید) به‌نظر نمی‌رسد جواب استانداردی داشته باشد که «همه آن‌را بدانند». حداکثر می‌توانیم زیرلب با تردید بگوییم که (۱.۱) یک «معادلهٔ متعالی» است، اما این کمک زیادی نمی‌کند.

این نبودِ جواب استاندارد برای یک چنین سؤال ساده و معمولی به‌نظرم غیرقابل قبول می‌آید. هدف اصلی این مقاله برطرف کردن این نقصان است با پیشنهاد یک تعریف دقیق از «عبارت بسته‌صورت برای یک عدد». چنین تعریفی ما را قادر می‌سازد که سؤالهای ۱ و ۲ را به‌طور دقیق بازگوییم و ببینیم ارتباط آنها با نتایج موجود در منطق، جبر کامپیوتر و نظریهٔ اعداد متعالی چگونه است. من امیدوارم این تعریفِ عبارت بسته‌صورت برای یک عدد، مقبولیت یابد و بسیاری از خوانندگان ترغیب شوند که روی مسائل حل‌نشدهٔ جذاب فراوانی که در این زمینه هست کار کنند.

۲. از توابع مقدماتی به عددهای EL

چگونه می‌توانیم سؤالهای ۱ و ۲ را دقیق کنیم؟ تمایل اولیهٔ ما ممکن است این باشد که توجه خود را به مفهوم تابع مقدماتی معطوف کنیم. به یاد بیاورید که

1. closed-form

تابعْ مقدماتی است اگر بشود آن را تنها با استفاده از ترکیبی متناهی از توابع ثابت، اعمال روی میدان [هیأت]، توابع جبری، نمایی و لگاریتمی ساخت. این رده از توابع در ارتباط با مسألهٔ انتگرال‌گیری نمادی[1] یا «انتگرال‌گیری با حاصلی به‌صورت جملات متناهی»[2] بسیار مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، و به‌علاوه «شهود دبیرستانی» در بارهٔ عبارت بسته‌صورت، معطوف به این توابع است. برای مثال، در سؤال ۱ بالا، معلوم می‌شود $R = -W(1)$ که در آن W، تابع W ی لامبرت [۶] است، تابعی (چندمقداری) که با معادلهٔ

$$W(x)e^{W(x)} = x$$

تعریف می‌شود. اما از آنجا که W تابعی مقدماتی نیست [۵]، این جوابی نیست که بیشتر دانش‌آموزان دبیرستانی را راضی کند. همین‌طور اگر چندین نوع تابع خاص را مجاز بدانیم ــ مثلاً توابع بیضوی، ابرهندسی، یا تتا ــ آنگاه می‌توانیم r_iها را در سؤال ۲ یا درواقع ریشه‌های هر معادلهٔ چندجمله‌ای را، برحسب ضرایب بیان کنیم. در این مورد، [۳] و [۱۰] را ببینید. اما این نیز راضی‌کننده نمی‌نماید چون این تابعها، مقدماتی نیستند.

در نظر داشتن مفهوم تابع مقدماتی بجاست، اما توجه کنید که آنچه ما برای سؤالهای ۱ و ۲ لازم داریم، مفهوم عدد بسته‌صورت است نه تابع بسته‌صورت. تفاوت این دو مهم است: ما نمی‌توانیم عدد مقدماتی را به‌عنوان عددی تعریف کنیم که از تعیین مقدار یک تابع مقدماتی در یک نقطه به‌دست آید؛ با این تعریف، تمامی اعداد مقدماتی خواهند بود چون توابع ثابت مقدماتی هستند. به‌علاوه، حتی اگر تابعی (چون W) مقدماتی نباشد، می‌توان تصور کرد که هر مقدار خاصی که می‌گیرد ($W(1)$، $W(2)$، ...) بتواند یک نمایش مقدماتی داشته باشد، البته با عبارتهای مختلف در نقاط مختلف. این مشکلات را شاید بشود با کمی کار رفع کرد. اما ما شیوهٔ دیگری را در پیش می‌گیریم: به‌جای تعریف عدد بسته‌صورت برحسب تابع مقدماتی یک تعریف متناظر ارائه می‌دهیم.

در اینجا نکتهٔ تکنیکی‌تری را ذکر می‌کنیم. طبق قرارداد تمامی توابع جبری (یعنی توابعی که در یک معادلهٔ چندجمله‌ای با ضرایب چندجمله‌ای صدق می‌کنند) مقدماتی به‌شمار می‌آیند. اما این برای هدف ما مناسب نیست زیرا از لحاظ شهودی، «بسته‌صورت» به‌معنی «صریح» است درحالی که بیشتر توابع جبریْ نمایش ساده و صریحی ندارند. بنابراین مجموعهٔ توابع مقدماتی صرفاً متعالی الگوی بهتری برای اهداف ما خواهد بود تا مجموعهٔ توابع مقدماتی. معنی «صرفاً متعالی» جز این نیست که کلمهٔ «جبری» از تعریف حذف شده است.

با این ملاحظات تعریف اساسی زیر را می‌آوریم.

تعریف. یک زیرمیدان [زیرهیأت] F از $\mathbb{C}$ را تحت exp و log بسته می‌گوییم اگر (۱) به‌ازای هر $x \in F$، $\exp(x) \in F$ و (۲) به‌ازای هر x ناصفر که $x \in F$، $\log(x) \in F$. در اینجا log شاخه‌ای از تابع لگاریتم طبیعی است که در آن به‌ازای هر x، $-\pi < \mathrm{Im}(\log x) \leq \pi$. میدان [هیأت] $\mathbb{E}$ مرکب از عددهای EL اشتراک تمامی زیرمیدانهای $\mathbb{C}$ است که تحت exp و log بسته‌اند.

پیش از بررسی $\mathbb{E}$ خوب است به ذکر چند نکته در بارهٔ اصطلاحات بپردازیم. ممکن است طبیعی‌تر به‌نظر رسد که $\mathbb{E}$ را میدان «اعداد مقدماتی» بنامیم. اما بدبختانه از این اصطلاح قبلاً استفاده شده است. ظاهراً ریت آن‌را اول بار به‌کار برده است [۱۸، ص ۶۰]. ریت طبق الگوی توابع مقدماتی، اعداد مقدماتی را کوچکترین زیرمیدان جبری‌ــبستهٔ $\mathbb{L}$ از $\mathbb{C}$ گرفت که تحت exp و log بسته باشد. ولی این اصطلاح از زمان ریت به این سو تطور یافت به‌طوری که در حال حاضر اعداد مقدماتی آنهایی‌اند که به‌طور صریح و یا ضمنی با عملگرهای نمایی، لگاریتمی و جبری مشخص شوند، و $\mathbb{L}$ را هم‌گاه میدان اعداد لیوویلی می‌گویند [۱۶]. اما به هر حال $\mathbb{E}$ را اگر میدان اعداد مقدماتی بنامیم با کاربرد فعلی این اصطلاح مغایرت خواهد داشت. «EL» در عبارت «عدد EL» هم مخفف «Exponential-Logarithmic» [نمایی‌ـلگاریتمی] است و هم صورت اختصاری «Elementary» [مقدماتی] است که یادآوری می‌کند $\mathbb{E}$ یک زیرمیدان اعداد مقدماتی است.

در اینجا هم باید بگویم من نخستین کسی نیستم که میدان $\mathbb{E}$ را در نظر گرفته است، اما عجیب آن است که در نوشتگان موجود توجه چندانی به آن نشده است و ظاهراً هیچ‌کس آن‌را به‌عنوان یک مفهوم پایه‌ای تأیید و تبلیغ نکرده است درحالی که به نظر من چنین مفهومی هست.

حال برای آشناترشدن با $\mathbb{E}$، به چند تمرین که ما را برای کار مهیا کند می‌پردازیم. می‌توانیم $\mathbb{E}$ را چنین بسازیم: قرار می‌دهیم $\mathbb{E}_0 = \{0\}$ و برای هر $n > 0$، $\mathbb{E}_n$ را مجموعهٔ تمامی اعداد مختلط در نظر می‌گیریم که یا با یک عمل میدان روی هر جفت از اعضای $\mathbb{E}_{n-1}$ (که لزوماً متمایز نباشند) به‌دست می‌آید یا با اِعمال exp و log بر هر عضو $\mathbb{E}_{n-1}$. بدیهی است که تقسیم بر صفر و لگاریتم‌گیری از صفر مجاز نیست. بنابراین $\mathbb{E}$، به‌وضوح اجتماع $\mathbb{E}_n$ها خواهد بود. این به‌ویژه نشان می‌دهد که $\mathbb{E}$ شماراست و هر عضو $\mathbb{E}$ می‌تواند به‌صورت عبارت متناهی و صریحی متشکل از اعداد گویا، عملهای میدان، exp، و log باشد.

ثابتهای آشنای زیادی در $\mathbb{E}$ هستند. برای مثال

$$\pi = -i\log(-1) \text{ و } i = \exp\left(\frac{\log(-1)}{2}\right)، e = \exp(\exp(0))$$

از آنجا که $2\pi i \in \mathbb{E}$، نه تنها به شاخهٔ اصلی لگاریتم بلکه به تمامی شاخه‌های لگاریتم راه می‌یابیم و از این رو برای هر $x \in \mathbb{E}$، همهٔ n تا ریشهٔ nام x در $\mathbb{E}$ خواهند بود. از اینجا نتیجه می‌گیریم که تمامی ریشه‌های هر معادلهٔ چندجمله‌ای با ضرایب گویا که برحسب رادیکالها حل‌پذیر باشد در $\mathbb{E}$ است. و بالاخره فرمولهایی چون

$$x^{2/3} = \exp\left(\frac{2\log x}{3}\right), \sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i},$$
$$\tanh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)},$$
$$\arccos x = -i\log\left(x + \exp\left(\frac{\log(x^2 - 1)}{2}\right)\right)$$

نشان می‌دهند که هر عبارتی که شامل توابع «دبیرستانی» و اعضای $\mathbb{E}$ باشد خود در $\mathbb{E}$ است.

ما امیدواریم این بحث مختصر خواننده را متقاعد کرده باشد که $\mathbb{E}$ را تعریف «راستین» و دقیقِ «مجموعهٔ اعداد مختلطی که می‌توان آنها را به‌صورت

1. symbolic integration 2. integration in finite terms

بسته نوشت» بداند. با قبول این موضوع، سؤالهای ۱ و ۲ را به‌صورت زیر بازسازی می‌کنیم.

حدس ۱. جواب حقیقی R برای معادلهٔ $x + e^x = 0$ در $\mathbb{E}$ نیست.

حدس ۲. ریشه‌های r_1، r_2، r_3، r_4 و r_5 از معادلهٔ $2x^5 - 10x + 5 = 0$ در $\mathbb{E}$ نیستند.

تا جایی که من می‌دانم، حدس ۱ و حدس ۲ هنوز حل و فصل نشده‌اند، که این شاید عجیب باشد. پس هنوز هم ناکام مانده‌ایم، اما لااقل این ناکامی به سطح بالاتری انتقال‌یافته است. بخش آیندهٔ این مقاله به بیان دستاوردهایی در این زمینه اختصاص دارد.

۳. حدس شنوئل

حدس ۱ اساساً از آنِ ریت است، ولی او این سؤال را به‌جای $\mathbb{E}$ در مورد $\mathbb{L}$ مطرح کرده است، زیرا انگیزه‌های او با ما متفاوت بوده است. بهترین گزارهٔ جزئی که من از آن مطلعم متعلق به فرنگ‌ـچینگ لین [۱۲] است. برای بیان قضیهٔ لین ابتدا باید حدس، شنوئل[1] را یادآوری کنیم.

حدس شنوئل. اگر α_1، α_2، $\cdots$، α_n اعداد مختلطی باشند که روی $\mathbb{Q}$ مستقل خطی‌اند، درجهٔ تعالی[2] میدان

$$\mathbb{Q}(\alpha_1, e^{\alpha_1}, \alpha_2, e^{\alpha_2}, \cdots, \alpha_n, e^{\alpha_n})$$

روی $\mathbb{Q}$ حداقل n است.

حدس شنوئل قضایا و حدسهای بسیاری را در بارهٔ اعداد متعالی به دنبال دارد. برای مثال، قضیهٔ لیندمان‌ـوایرشتراس را ایجاب می‌کند: اگر α_1، α_2، $\cdots$، α_n اعدادی جبری باشند که روی $\mathbb{Q}$ مستقل خطی‌اند، آنگاه e^{α_1}، e^{α_2}، $\cdots$، e^{α_n} روی $\mathbb{Q}$ مستقل جبری خواهند بود [۲، قضیهٔ ۴.۱]. حدس شنوئل همچنین قضیهٔ گلفوند‌ـشنایدر را نتیجه می‌دهد: اگر α_1 و α_2 اعدادی جبری باشند که برایشان عددهای β_1 و β_2 که $\mathbb{Q}$ـمستقل خطی‌اند موجود باشد به‌طوری که $\alpha_1 = e^{\beta_1}$ و $\alpha_2 = e^{\beta_2}$، آنگاه β_1 و β_2 روی اعداد جبریْ مستقل خطی‌اند. تعمیم بیکر [۲، قضیهٔ ۱.۲] از قضیهٔ گلفوند‌ـشنایدر به تعداد متناهی و دلخواهی از α_iها، باز از حدس شنوئل نتیجه می‌شود. به‌عنوان یک تمرین ساده، می‌توان نشان داد (با استفاده از $e^{i\pi} = -1$) که حدس شنوئل ایجاب می‌کند e و π مستقل جبری باشند، موضوعی که هنوز معلوم نیست. ما حتی نمی‌دانیم که $e + \pi$ متعالی است یا نه. اثبات حدس شنوئل رویدادی بزرگ، خواهد بود، گرچه در حال حاضر خارج از دسترس به نظر می‌رسد.

فرض کنید $\overline{\mathbb{Q}}$ بستار جبری $\mathbb{Q}$ باشد. گزارهٔ لین چنین است.

قضیهٔ ۱. اگر حدس شنوئل درست باشد و $f(x,y) \in \overline{\mathbb{Q}}[x,y]$ چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیری باشد که هم x و هم y را شامل شود و به‌ازای α ای ناصفر و متعلق به $\mathbb{C}$ داشته باشیم $f(\alpha, \exp(\alpha)) = 0$، آنگاه $\alpha \notin \mathbb{L}$.

1. Schanuel 2. transcendence degree

اگر قرار دهیم $f(x,y) = x + y$ و توجه کنیم که $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{L}$، فوراً درمی‌یابیم که حدس شنوئل حدس ۱ را ایجاب می‌کند.

حدس ۲ به نظر چیز جدیدی می‌آید. همه می‌گویند که معادلات چندجمله‌ای کلی (یعنی با ضرایب متغیر) را نمی‌توان برحسب توابع نمایی و لگاریتمی حل کرد، هر چند به نظر نمی‌رسد کسی برهان کاملی برای آن عرضه کرده باشد. اثباتهای ناقص را می‌توانید در [۹، پاراگراف ۵۱۳] و [۱، ص ۱۱۴] بیابید. ولی بیان‌ناپذیری توابع جبری برحسب exp و log ایجاب نمی‌کند که مقادیر خاصی از یک تابع جبری را نتوان برحسب exp و log بیان کرد، درست همانند بعضی معادلات درجهٔ پنج با ضرایب گویا که قابل حل به‌وسیلهٔ رادیکالها هستند، هر چند معادلهٔ کلی درجهٔ پنج چنین نیست.

باقیماندهٔ این بخش اختصاص دارد به اثبات گزارهٔ زیر.

قضیهٔ ۲ حدس شنوئل، حدس ۱ و حدس ۲ را ایجاب می‌کند.

همان‌گونه که اشاره کردیم، این نشان داده است که حدس شنوئل حدس ۱ را دربی دارد. ولی ما از این واقعیت که حدس ۱ ضعیفتر از حکم قضیهٔ ۱ است، سود می‌جوییم تا یک اثبات کوتاهتر به‌دست دهیم. اثباتی که برای قضیهٔ ۲ پیشنهاد می‌کنیم با همکاری دانیل ریچاردسن صورت گرفته است. خواننده می‌تواند تحقیق کند که استدلالهای ما به‌آسانی به دیگر معادلات متعالی چون $x = \cos x$ تعمیم می‌یابد. خواننده همچنین می‌تواند بررسی کند که تنها خاصیتی از (۲.۱) که ما از آن استفاده می‌کنیم حل‌ناپذیری گروه گالوایی آن است. بنابراین، نتیجهٔ زیر را از برهان به‌دست می‌آوریم.

فرع ۱. اگر حدس شنوئل درست باشد، آنگاه اعداد جبری موجود در $\mathbb{E}$ دقیقاً ریشه‌های چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب صحیح هستند که با رادیکالها حل‌پذیرند.

بنابراین از حدس شنوئل نتیجه می‌شود که مفهوم ما از «عدد جبری بسته‌صورت» با مفهوم معمولی آن مطابقت دارد.

هر چند حدس ۱ و حدس ۲ به دو نوع کاملاً متفاوت از معادلات مربوط می‌شوند، اما معلوم می‌شود که در اینجا یک مفهوم واحد (برج کاهیده) کلید هر دوست.

نخست به بعضی تمهیدات نیازمندیم: اگر $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ دنباله‌ای متناهی از اعداد مختلط باشد، آنگاه برای اختصار، به‌جای میدان $\mathbb{Q}(\alpha_1, e^{\alpha_1}, \alpha_2, e^{\alpha_2}, \cdots, \alpha_i, e^{\alpha_i})$ می‌نویسیم A_i. به‌ویژه، $A_0 = \mathbb{Q}$.

تعریف. یک برجْ دنباله‌ای متناهی چون $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ از اعداد مختلط ناصفر است که به‌ازای هر $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$، عدد صحیح مثبت m_iای وجود داشته باشد به‌نحوی که $\alpha_i^{m_i} \in A_{i-1}$ یا $e^{\alpha_i m_i} \in A_{i-1}$ (یا هر دو). برجْ را کاهیده گوییم اگر مجموعهٔ $\{\alpha_i\}$ روی $\mathbb{Q}$ مستقل خطی باشد. اگر $\beta \in \mathbb{C}$، آنگاه یک برج برای β عبارت است از برجی چون $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ به‌طوری که $\beta \in A_n$.

به‌ازای هر $\gamma \in \mathbb{E}$، برجی برای γ وجود دارد. مثال زیر به‌خوبی این موضوع را نشان می‌دهد. فرض کنید $\gamma = 4 + \log(1 + e^{(\log 2)/3})$.

آنگاه قرار می‌دهیم

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\log 2, (\log 2)/3, \log(1 + e^{(\log 2)/3}))$$

در این صورت می‌توانیم به‌ازای هر i فرض کنیم $m_i = 1$، چون، $e^{\alpha_1} = 2 \in A_0$، $\alpha_2 \in A_1$، و $e^{\alpha_2} \in A_2$. به‌طور کلی عبارت γ را گام به گام می‌سازیم و اگر در مرحلهٔ iام نیازمند exp گرفتن از عددی چون $\beta \in A_{i-1}$ بودیم قرار می‌دهیم $\alpha_i = \beta$ و اگر نیازمند log گرفتن از عددی چون $\beta \in A_{i-1}$ بودیم قرار می‌دهیم $\alpha_i = \log \beta$؛ با این شیوه، هیچ‌گاه نیازمند $m_i > 1$ نخواهیم بود. اما برجی که به‌دست می‌آوریم ممکن است کاهیده نباشد (همان‌طور که در این مثال داریم $\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0$). ولی برای اینکه بتوانیم حدس شنوئل را به‌کار بگیریم، نیازمند برجهای کاهیده هستیم. بنابراین نخستین هدف ما آن است که نشان دهیم چگونه یک برج داده شده را به‌صورت کاهیده درمی‌آوریم.

لم تقسیم. فرض کنید $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ یک برج باشد و q_1، q_2، $\cdots$، q_n اعداد صحیح ناصفری باشند، در این صورت دنبالهٔ $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ که با $\beta_i = \alpha_i/q_i$ تعریف می‌شود نیز یک برج است و به‌ازای هر i، $A_i \subseteq B_i$.

اثبات. توجه کنید که به‌ازای هر $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$، هر $\gamma \in A_i$ تابعی گویا (با ضرایب گویا) از اعداد α_1، e^{α_1}، $\cdots$، α_i، e^{α_i} است. حال به‌ازای هر j، $\alpha_j = (\alpha_j/q_j)q_j = \beta_j q_j$ و $e^{\alpha_j} = e^{(\alpha_j/q_j)q_j} = (e^{\beta_j})^{q_j}$. بنابراین γ تابعی گویا با ضرایب گویا از اعداد β_1، e^{β_1}، $\cdots$، β_i، e^{β_i} نیز هست. پس $\gamma \in \beta_i$ و از اینجا به‌ازای هر i، $A_i \subseteq \beta_i$.

به‌ازای هر $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ عدد صحیح مثبت m_i ای وجود دارد که $\alpha_i^{m_i} \in A_{i-1}$ یا $e^{\alpha_i m_i} \in A_{i-1}$. نخست حالتی را در نظر بگیرید که در آن $\alpha_i^{m_i} \in A_{i-1}$. در این صورت

$$\beta_i^{m_i} = (\alpha_i/q_i)^{m_i} \in A_{i-1} \subseteq B_{i-1}$$

در حالت دیگر اگر $e^{\alpha_i m_i} \in A_{i-1}$ آنگاه

$$e^{\beta_i(q_i m_i)} = e^{\alpha_i m_i} \in A_{i-1} \subseteq B_{i-1}$$

بنابراین عدد صحیح مثبت m'_iای (برای مثال $m'_i = q_i m_i$) وجود دارد که $\beta_i^{m'_i} \in B_{i-1}$ یا $e^{\beta_i m'_i} \in B_{i-1}$، پس B یک برج است. ■

لم کاهش. به‌ازای هر $\gamma \in \mathbb{E}$، یک برج کاهیده برای γ وجود دارد.

اثبات. اگر $\gamma \in \mathbb{Q}$، آنگاه می‌توانیم A را دنبالهٔ تهی بگیریم. در غیر این صورت، فرض می‌کنیم هیچ برجی برای γ کاهیده نباشد، و به تناقضی خواهیم رسید. Aای با n مینیمال در نظر می‌گیریم؛ از آنجا که $\gamma \notin \mathbb{Q}$، پس $n \geq 1$. فرض می‌کنیم i کوچکترین عدد صحیحی باشد که $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i\}$ وابستهٔ خطی باشد. در این صورت، به‌ازای عددهای صحیحی چون p_1، q_1، p_2، q_2، $\cdots$، p_{i-1}، q_{i-1} داریم

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{p_j \alpha_j}{q_j} \qquad (1.3)$$

ادعا می‌کنیم که دنبالهٔ

$$A' = \left(\frac{\alpha_1}{q_1}, \frac{\alpha_2}{q_2}, \cdots, \frac{\alpha_{i-1}}{q_{i-1}}, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \cdots, \alpha_n\right)$$

برجی برای γ است. از آنجا که A' کوتاهتر از A است، این با مینیمال بودن n تناقض دارد و قضیه اثبات می‌شود.

برای اثبات ادعا، ابتدا توجه کنید که بنا به لم تقسیم دنبالهٔ

$$\left(\frac{\alpha_1}{q_1}, \frac{\alpha_2}{q_2}, \cdots, \frac{\alpha_{i-1}}{q_{i-1}}\right)$$

یک برج است. سپس ملاحظه کنید که (۱.۳) ایجاب می‌کند $\alpha_i \in A'_{i-1}$، همچنین با exp گرفتن، e^{α_i} یک چندجمله‌ای (درواقع یک تک‌جمله‌ای) برحسب اعداد e^{α_1/q_1}، $\cdots$، $e^{\alpha_{i-1}/q_{i-1}}$ خواهد بود. بنابراین $e^{\alpha_i} \in A'_{i-1}$. بنا به لم تقسیم، $A_{i-1} \subseteq A'_{i-1}$، پس $A_i = A_{i-1}(\alpha_i, e^{\alpha_i}) \subseteq A'_{i-1}$. این ما را مطمئن می‌سازد که شرط برج بودن برای A' درگذر از α_{i-1}/q_{i-1} به α_{i+1} برقرار می‌ماند و نیز $\gamma \in A_n \subseteq A'_{n-1}$ که این ادعای ما را اثبات می‌کند. ■

اثبات قضیهٔ ۲. ابتدا به ذکر یک نکتهٔ کلی می‌پردازیم. اگر $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ یک برج کاهیده باشد، آنگاه حدس شنوئل ایجاب می‌کند که به‌ازای همهٔ iها، دقیقاً یکی از β_i و e^{β_i} روی B_{i-1} جبری باشد، چون طبق تعریف برج، حداقل یکی از آن دو روی B_{i-1} جبری است که این ایجاب می‌کند درجهٔ تعالی B_i روی $\mathbb{Q}$ به‌ازای هر i حداکثر i باشد؛ پس چون B کاهیده است، طبق حدس شنوئل α_i و e^{α_i} هر دو نمی‌توانند روی B_{i-1} جبری باشند، و درجهٔ تعالی B_i روی $\mathbb{Q}$ دقیقاً i خواهد بود.

حال فرض کنید حدس شنوئل درست باشد. ابتدا حدس ۱ را اثبات می‌کنیم. فرض می‌کنیم $R \in \mathbb{E}$، و به تناقض می‌رسیم. با توجه به لم کاهش، برای R یک برج کاهیدهٔ $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ وجود دارد. از آنجا که e متعالی است داریم $R \notin \mathbb{Q}$ (چون $R = p/q$ ایجاب می‌کند $e^p = (-p/q)^q$) پس $n \geq 1$. با کوتاه کردن برج در صورت لزوم، می‌توانیم فرض کنیم $R \notin A_i$ اگر $i < n$.

گیریم $A' = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, R)$، در این صورت $R \in A'_n$ و رابطهٔ $R + e^R = 0$ نشان می‌دهد $e^R \in A'_n$؛ و با توجه به «نکتهٔ کلی» که در آغاز اثبات آوردیم، A' نمی‌تواند کاهیده باشد. اما A کاهیده است. بنابراین، به‌ازای اعداد صحیحی چون p_1، q_1، p_2، q_2، $\cdots$، p_n، q_n داریم

$$R = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i \alpha_i}{q_i}$$

به‌علاوه $p_n \neq 0$ چون به‌ازای $i < n$، $R \in A_i$. رابطهٔ $R + e^R = 0$ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i \alpha_i}{q_i} + \prod_{i=1}^{n} (e^{\alpha_i/q_i})^{p_i} = 0 \qquad (2.3)$$

گیریم $A'' = (\alpha_1/q_1, \alpha_2/q_2, \cdots, \alpha_n/q_n)$. طبق لم تقسیم، A'' یک برج است و چون A کاهیده است، A'' هم چنین خواهد بود. اما چون $p_n \neq 0$، (۲.۳) نشان می‌دهد که اگر α_n/q_n روی A''_{n-1} جبری باشد، e^{α_n/q_n} هم جبری خواهد بود و برعکس. پس طبق «نکتهٔ کلی» ما، A'' نمی‌تواند کاهیده باشد و این، تناقض موردنظر ما را به‌دست می‌دهد.

حال به حدس ۲ می‌پردازیم. فرض می‌کنیم که خواننده با مبانی نظریهٔ گالوا آشناست. با فرض اینکه $r_1 \in \mathbb{E}$، به تناقض می‌رسیم. طبق لم کاهش، برای r_1 یک برج کاهیدهٔ $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ وجود دارد (روشن است که ربطی به «A» در بخش اول اثبات ندارد). به‌ازای هر i فرض می‌کنیم

$$\beta_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{اگر } \alpha_i \text{ روی } A_{i-1} \text{ متعالی باشد} \\ e^{\alpha_i} & \text{اگر } e^{\alpha_i} \text{ روی } A_{i-1} \text{ متعالی باشد} \end{cases}$$

آنگاه β_iها مستقل جبری خواهند بود و یک پایهٔ تعالی برای A_n روی $\mathbb{Q}$ تشکیل خواهند داد. فرض کنید $F = \mathbb{Q}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$. A_n به‌وضوح یک توسیع رادیکالی F است. فرض کنید L بستار گالوایی A_n روی F باشد. در این صورت $\mathrm{Gal}(L/F)$ حل‌پذیر است. اگر F' میدان شکافندهٔ[1] چندجمله‌ای (۲.۱) روی $\mathbb{Q}$ باشد، آنگاه $S_5 = \mathrm{Gal}(F'/\mathbb{Q})$ و $F' \cap F = \mathbb{Q}$ چون $F'/\mathbb{Q}$ یک توسیع جبری است در حالی که $F/\mathbb{Q}$ یک توسیع صرفاً متعالی است. بنابراین حاصلضرب FF' روی F گالوایی است با گروه گالوایی S_5 [۱۱، فصل ۸. قضیهٔ ۱۲.۱]. اما $FF' \subseteq L$ و بنابراین S_5 تصویر یکریختی از $\mathrm{Gal}(L/F)$ است. این تناقض موردنظر ماست، چون هر تصویر یکریختیِ یک گروه حل‌پذیر، حل‌پذیر است. ■

۴. کارهای مرتبط با این زمینه و مسأله‌های حل‌نشده

انگیزهٔ بسیاری از کارهای انجام شده در بارهٔ میدانهایی چون $\mathbb{E}$ و $\mathbb{L}$ یا میدان اعداد مقدماتی، از مسائلی در منطق و جبر کامپیوتر نشأت گرفته است. نمونه‌ای از این مسائل چنین است. فرض کنید عبارت پیچیده‌ای برای عددی که در $\mathbb{E}$ است داشته باشیم، چنانچه این عبارت برابر صفر باشد چگونه می‌توانیم آن را تشخیص دهیم؟ اهمیت این مسأله برای طراحان نرم‌افزارهای محاسبهٔ نمادی[2] روشن است. مسأله دشوارتر از آن است که در نگاه نخست شاید به نظر رسد و هنوز هم به‌طورکامل حل نشده است. هر چند ریچاردسن فرایند صریحی به‌دست داده است [۱۷] که یک عدد مقدماتی را می‌گیرد و اگر فرایند به پایان برسد، به‌درستی می‌گوید که آن عدد معادل صفر است یا نه. او همچنین ثابت کرده است که اگر حدس شنوئل درست باشد، این فرایند همیشه به پایان می‌رسد. این دستاورد، کم و بیش مسألهٔ تشخیص صفر را برای اعداد مقدماتی (و به طریق اولیٰ برای $\mathbb{E}$ و $\mathbb{L}$) در عمل حل می‌کند.

مسألهٔ تشخیص صفر رابطهٔ نزدیکی با سؤال مشهور و دیرپای تارسکی دارد. تارسکی اثبات کرد که نظریهٔ مرتبهٔ اول برای اعداد حقیقی تصمیم‌پذیر است؛ از اینجا نتیجه می‌شود الگوریتمی وجود دارد که مشخص می‌کند دستگاه متناهی مفروضی از معادلات و نامعادله‌های چندجمله‌ای، جوابی در اعداد حقیقی دارد یا نه [۸، ص ۳۴۰]. برهان به‌وسیلهٔ حذف سور[1] صورت می‌پذیرد که به‌طور غیردقیق می‌توانیم آن‌را این‌گونه در نظر بگیریم: جملهٔ «یک راه‌حل وجود دارد» شامل سور وجودی است و حذف سور فرایندی است برای تبدیل چنین جمله‌هایی به جمله‌های خالی از سور. آنگاه بررسی چنین جمله‌هایی آسان است چون کاری که لازم است، تشخیص صفر برای اعداد صحیح است. تارسکی پس از اثبات قضیه‌اش این پرسش را طرح کرد که آیا این حکم می‌تواند به نظریهٔ مرتبهٔ اول اعداد حقیقی به اضافهٔ عمل نمایی‌سازی[2] تعمیم یابد؟

این مسأله بسیار مشکل است چون ثابت می‌شود که حذف سور در این نظریه امکان‌پذیر نیست. به‌علاوه بررسی جمله‌های خالی از سور، با مسألهٔ تشخیص صفر برای عبارات نمایی سروکار دارد که مشکل است. اما اخیراً پیشرفت بزرگی رخ داده است. مکینتایر نشان داد [۱۳] که اگر حدس شنوئل درست باشد، برای جملات خالی از سور یک فرایند تصمیم‌گیری وجود دارد. سپس در ۱۹۹۱ ویلکی اثبات کرد که نظریهٔ مرتبهٔ اول اعداد حقیقی به همراه نمایی‌سازی، مدل‌کامل است [۱۹]، که معنای غیردقیق آن این است که سورها را می‌توان «تقریباً» به‌طورکامل حذف کرد. مکینتایر و ویلکی بر پایهٔ این کارها نشان دادند که اگر حدس شنوئل درست باشد، آنگاه نظریهٔ مرتبهٔ اول اعداد حقیقی به همراه نمایی‌سازی، تصمیم‌پذیر است [۱۴]. به‌ویژه با استفاده از این روشها می‌توانیم یک شیوهٔ تشخیص صفر برای اعداد مقدماتی استخراج کنیم (البته باز هم منوط به درستی حدس شنوئل). شرح بسیار خوبی از این مطالب و نتایج وابسته در [۱۵] آمده است.

تشخیص صفر در $\mathbb{E}$ باید آسانتر از تشخیص صفر در اعداد مقدماتی باشد. آیا می‌توان این کار را در $\mathbb{E}$ بدون مفروض گرفتن حدس شنوئل یا لااقل مفروض گرفتن چیزی ضعیفتر، صورت داد؟ ایده‌های مکینتایر در اینجا شروع خوبی است.

یک مسألهٔ حل‌نشدهٔ جذاب دیگر، که تامس کالتهرست[3] آن‌را طرح کرده (در مقاله‌ای در سای‌مت[4] که در ۲۱ ژوئن ۱۹۹۳ چاپ شده است) این است: مثالی صریح از عددی که در $\mathbb{E}$ نیست بیابید. از آنجا که $\mathbb{E}$ شمارا است، روش قطری کانتور الگوریتمی برای تولید بسط اعشاری اعداد غیرEL به‌دست ما می‌دهد. اما این چندان رضایت‌بخش نیست. خوشایندتر این است که بتوانیم به‌طور مثال اثبات کنیم $\zeta(3) \notin \mathbb{E}$، اما این کار مشکل به‌نظر می‌رسد. کالتهرست پیشنهاد می‌کند که در پی عباراتی به شکل

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} f(m)$$

باشیم و روی آنها کار کنیم که در اینجا $f(m)$ تابعی نامنفی از m است که سریعاً به صفر میل می‌کند. برای مثال، مجموعه‌های $\mathbb{E}_n$ (که در بخش ۲ تعریف شد) متناهی‌اند، بنابراین ϵ_n مثبتی وجود دارد که هر دو عدد متمایز در $\mathbb{E}$، قدر مطلق تفاضلشان دست‌کم برابر ϵ_n باشد. اگر بتوانیم fای با این ویژگی پیدا کنیم که به‌ازای هر n،

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} f(m) < \epsilon_n \quad \text{و} \quad \sum_{m=1}^{n} f(m) \in \mathbb{E}_n$$

1. splitting field 2. symbolic computation

1. quantifier elimination 2. exponentiation 3. Colthurst 4. *Sci. math*

آنگاه F نمی‌تواند به‌ازای هیچ nای در $\mathbb{E}_n$ باشد. این شاید بسیار ساده‌اندیشانه باشد اما شاید هم چیزی در این راستا ممکن باشد. آیا f را می‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که مقدماتی باشد؟

استیو فینچ[1] موضوع رابطهٔ بین عددهای EL و ثابتهای هولونومیک[2] را پیش می‌کشد. تابع هولونومیک جوابی از یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولیِ همگن خطی با ضرایب چندجمله‌ای است. ثابت هولونومیک عبارت است از مقدار یک تابع هولونومیک در یک نقطهٔ گویای عادی. ثابتهای هولونومیک تکین، مقادیر توابع هولونومیک در نزدیکی یک نقطهٔ تکین هستند. ثابتهای معروف متعددی چون π، $\zeta(3)$ و ثابت کاتالان[3]، ثابتهای هولونومیک تکین هستند.

به دلیل آنکه بسیاری از دانش‌آموزان دبیرستانی با اعداد مختلط ناآشنایند، می‌توان از «متناظر حقیقی» $\mathbb{E}$ سخن گفت. تعریف صحیح آن چیست؟ یک چنین متناظر حقیقی، بسیاری از خواص خوب $\mathbb{E}$ را نخواهد داشت (برای مثال به یاد بیاورید که اگر یک چندجمله‌ای درجهٔ سهٔ تحویل‌ناپذیر با ضرایب گویا سه ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد آنها را نمی‌توان به وسیلهٔ رادیکال نمایش داد، البته اگر اعداد مختلط را کنار بگذاریم) اما باز هم می‌تواند چیز جالبی باشد.

و نکتهٔ آخر اینکه ریچاردسن (در مکاتبه‌ای خصوصی) نشان داده است که اگر حدس شنوئل نادرست باشد، آنگاه یک مثال ناقض که فقط شامل اعداد مقدماتی است، وجود دارد. آیا می‌توان این نتیجه را تقویت کرد و نشان داد که هر مثال ناقض می‌باید در $\mathbb{E}$ باشد؟

ما امیدواریم خواننده ترغیب شده باشد که به سراغ این سؤالهای نسبتاً دست نخورده برود.

مراجع

1. V. B. Alekseev, *Abel's Theorem in Problems and Solutions*, Izdat. "Nauka," 1979 (Russian).

2. A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge Mathematical Library, Camb. Univ. Press, 1990.

3. G. Belardinelli, Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et résolution analytique des équations algébriques générales, *Mémorial des Sci. Math.* **145** (1960).

4. M. Bronstein, *Symbolic Integration I: Transcendental Functions*, Algorithms and Computation in Mathematics, Volume 1, Springer-Verlag, 1997.

5. R. M. Corless, Is elementary? Math 498/990 notes, Nov. 23, 1995, http://www.apmaths.uwo.ca/~rcorless/AM563/NOTES/Nov-23-95 / Nov-23-95. html

6. R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth, On the Lambert W function, *Adv. Comput. Math.* **5** (1996) 329-359.

7. I. N. Herstein, *Topics in Algebra*, 2nd ed., Wiley, 1975.

1. Steve Finch 2. holonomic 3. Catalan

8. N. Jacobson, *Basic Algebra I*, 2nd ed., W. H. Freeman, 1985.

9. C. Jordan, *Traité des Substitutions et des Équations Algébriques*, Gauthier-Villars, 1870.

10. R. Bruce King, *Beyond the Quartic Equation*, Birkhäuser Boston, 1996.

11. S. Lang, *Algebra*, 2nd ed., Addison-Wesley, 1984.

12. F.-C. Lin, Schanuel's conjecture implies Ritt's conjecture, *Chinese J. Math.* **11** (1983) 41-50.

13. A. Macintyre, Schanuel's conjecture and free exponential rings, *Ann. Pure Appl. Logic* **51** (1991) 241-246.

14. A. Macintyre and A. J. Wilkie, On the decidability of the real exponential field, in *Kreiseliana: About and Around Georg Kreisel*, ed. P. Odifreddi, A. K. Peters, 1996.

15. D. Marker, Model theory and exponentiation, *Notices Amer. Math. Soc.* **43** (1996) 753-759.

16. D. Richardson, The elementary constant problem, in *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, Berkeley, July* 27-29, 1992, ed. P. S. Wang, ACM Press, 1992.

17. D. Richardson, How to recognize zero, *J. Symb. Comp.* **34** (1997) 627-645.

18. J. Ritt, *Integration in Finite Terms: Liouville's Theory of Elementary Models*, Columbia Univ. Press, 1948.

19. A. J. Wilkie, Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996) 1051-1094.

******

• Timothy Y. Chow, "What is a closed-form number?", *Amer. Math. Monthly*, (5) **106** (1999) 440-448.

* تیموتی چاو، مرکز تحقیقات تل‌آبز، آمریکا

tchow@alum.mit.edu

نشر ریاضی، سال ۱۱، شمارهٔ ۱، صص ۵۸-۶۱

مسأله

روشمندی یا جادوگری؟

ایمان افتخاری*

گاهی در ریاضیات به روشهایی در حل مسائل برخورد می‌کنیم که در نگاه اول (و گاهی حتی تا نگاه آخر!) شگفت‌انگیز به نظر می‌رسند. شاید تعریف دقیق این عجیب بودن امکان‌پذیر نباشد ولی معمولاً این راه‌حل‌ها از ابزارهایی که از گوشه‌ای از ریاضیات برگرفته شده‌اند استفاده می‌کنند تا مسأله‌ای را در دوردست‌ها و در گوشه‌ای دیگر حل کنند.

در بسیاری اوقات، راه‌حل‌هایی که بدون استفاده از این «جادوگری»ها ارائه می‌شوند فوق‌العاده دشوارتر هستند و لذا به هیچ‌وجه زیبایی و طراوت راه‌حل‌های دستهٔ اول را ندارند. نکتهٔ دیگر در مورد این راه‌حل‌ها، آن است که معمولاً منطقی برای دستیابی به این «جادوگری» وجود ندارد و به نظر می‌رسد که سرچشمهٔ آن نبوغ ابداع‌کنندهٔ چنین راه‌حل‌هایی است. در این نوشته بعضی از اثباتهایی را که چنین جنبه‌هایی در بر دارند گرد آورده‌ایم. معمولاً مسائل و قضایا راه‌حل‌های دیگری هم دارند که عموماً دشوارتر است و نمونه‌های بارز آن مسأله‌های ۶ و ۸ است.

******

مسألهٔ (۱). فرض کنید A و B ماتریسهای حقیقی $n \times n$ ای هستند، $AB - BA$ وارون‌پذیر است، و $A^2 + B^2 = AB$. ثابت کنید $3|n$.

در نگاه اول می‌توان دید که ظاهراً هیچ ارتباط منطقی بین فرض و حکم دیده نمی‌شود. با وجود این، راه‌حل زیر با شگفتی بسیار زیاد حکم مسأله را تأیید می‌کند:

اثبات. ω را ریشه اولیهٔ سوم واحد در صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ فرض کنید. پس $1 + \omega + \omega^2 = 0$. حال قرار دهید $C = A + \omega B$. بنابراین $\overline{C}$، ماتریسی که درایه‌های آن مزدوج درایه‌های متناظر در C هستند، برابر است با $A + \overline{\omega} B = A + \omega^2 B$. علاوه بر این واضح است که $\det\overline{C} = \overline{\det C}$. پس

$$
\begin{aligned}
|\det C|^2 &= \det C \cdot \overline{\det C} = \det((A+\omega B)(A+\omega^2 B)) \\
&= \det(A^2 + B^2 + \omega BA + \omega^2 AB) \\
&= \det(AB + \omega BA - (\omega+1)AB) \\
&= \det(\omega(BA - AB)) \\
&= \omega^n \det(BA - AB) \\
&\Rightarrow \omega^n \det(BA - AB) \in \mathbb{R}, 0 \neq \det(BA - AB) \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \omega^n \in \mathbb{R} \Rightarrow 3|n
\end{aligned}
$$

و اثبات به انجام می‌رسد. ■

ایدهٔ مهم در این مسأله به‌کار بردن ریشهٔ اولیهٔ سوم واحد بود. به‌کار بردن ریشه‌های اولیه گاهی در مورد حکمهایی که به بخش‌پذیری مربوط می‌شوند کارایی دارد.

شاید مسألهٔ زیر، حتی بیشتر از قبلی به هم پیچیده باشد ولی متفاوت بودن آن، قبل از دیدن راه‌حل به نظر نمی‌رسد!

مسألهٔ (۲). ثابت کنید $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^k+2}$ که در آن n عددی صحیح و مثبت

است، صحیح و مثبت است!

اثبات. $\mathscr{A}_n$ را مجموعهٔ نگاشتهای

$$f:\{1,2,\dots,n\}\to\{1,2,\dots,n\}$$

با این خاصیت بگیرید که اگر $f^{-1}(i)$ ناتهی بود آنگاه $f^{-1}(j)$ به‌ازای $j=1,2,\dots,i$ ناتهی باشد و قرار دهید $a_n=|\mathscr{A}_n|$. تعداد اعضای $\mathscr{A}_n$، که دقیقاً برای l عدد صحیح i، $f(i)=1$، برابر است با $\binom{n}{l}a_{n-l}$ (چرا؟) بنابراین از آنجا که $f^{-1}(1)$ همواره ناتهی است:

$$a_n=\sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l}a_{n-l}=\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n}{l}a_l$$

قراردهید $a_0=1$ و $b_n=a_n/n!$. بنابراین $b_n=\sum_{l=0}^{n-1}b_l/(n-l)!$. پس $b_n\le 2^n$ و لذا شعاع همگرایی $\sum b_nz^n$، حداقل $\frac{1}{2}$ است. اگر قرار دهیم

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$$

آنگاه

$$\begin{aligned}f(z)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}z^n\Big(\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{(n-l)!}b_l\Big)\\&=1+\sum_{l=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=l+1}^{\infty}\frac{z^n}{(n-l)!}\Big)b_l\\&=1+\sum_{l=0}^{\infty}b_l(e^z-1)z^l=1+(e^z-1)f(z)\end{aligned}$$

پس $f(z)=\frac{1}{2-e^z}$. لذا

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(e^z/2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{kz}}{2^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^nk^n}{n!\,2^{k+1}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{2^{k+1}}\Big)\Rightarrow a_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{2^{k+1}}\end{aligned}$$

و در اینجا اثبات کامل می‌شود. ■

نمونه‌هایی از این اتفاق را در ریاضیات پیشرفته‌تر هم می‌توان دید. به‌عنوان مثال، مسأله زیر را که به قضیهٔ ساندویچ معروف است، یادآوری می‌کنیم.

مسألهٔ (۳). فرض کنید $A_1,\dots,A_n\subseteq\mathbb{R}^n$ زیرمجموعه‌هایی کراندار و اندازه‌پذیر باشند. در این صورت یک ابرصفحهٔ $(n-1)$بعدی در $\mathbb{R}^n$ موجود است که هر A_i را به قطعاتی با اندازهٔ برابر تقسیم می‌کند.

اثبات. ابتدا قضیهٔ بورسوک-اولام[1] را یادآوری می‌کنیم.

قضیهٔ بورسوک اولام: اگر $f:S^n\to\mathbb{R}^n$ یک نگاشت باشد، نقطهٔ $x\in S^n$ موجود است که $f(x)=f(-x)$.

حال $\mathbb{R}^n$ را به‌صورت $\mathbb{R}^n\times\{1\}$ در $\mathbb{R}^{n+1}$ در نظر گیرید. برای هر بردار $x\in S^n\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ تعریف کنید

$$V_x=\{y\in\mathbb{R}^n\times\{1\}\,|\,\langle x|y\rangle\ge 0\}$$
$$H_x=\{y\in\mathbb{R}^n\times\{1\}\,|\,\langle x|y\rangle=0\}$$

و تعریف کنید: اندازهٔ $f_i=(V_x\cap A_i)$. چون A_i کراندار است، هر f_i پیوسته می‌شود و با قراردادن $f=(f_1,\dots,f_n)$ تابع $f:S^n\to\mathbb{R}^n$ به‌دست می‌آید. طبق قضیهٔ بورسوک-اولام، نقطهٔ x_0 در S_n موجود است که $f(x_0)=f(-x_0)$، و به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که ابرصفحهٔ H_x، همان ابرصفحهٔ مورد نظر است. ■

مسألهٔ زیر هم زیبایی خاص خودش را دارد:

مسألهٔ (۴). فرض کنید که p عددی اول باشد و a و b اعدادی صحیح مثبت باشند. ثابت کنید $\binom{b}{a}\overset{p^2}{\equiv}\binom{bp}{ap}$.

اثبات. حکم در حالت $a\ge b$ بدیهی است. فرض کنید $b>a$. یک جدول $b\times p$ با b ستون و p سطر در نظر بگیرید. تعداد حالاتی را که می‌توان ap تا از خانه‌های جدول را انتخاب کرد محاسبه می‌کنیم. از یک سو این مقدار برابر است با $\binom{bp}{ap}$. از سوی دیگر در این انتخاب دو حالت متصور است:

الف) فقط a ستون کامل را انتخاب کنیم که تعداد چنین انتخابهایی $\binom{b}{a}$ است.

ب) بعضی از ستونها ناقص باشند. در این حالت از ستون اول r_1، از دومی r_2، ... و از bامی r_b تا انتخاب می‌شود و بنا به فرض، حداقل دو تا از این اعداد مثلاً r_i و r_j بین ۱ و $(p-1)$ هستند. وابسته به اعداد r_1، ...، r_b، تعداد حالات ممکن برابر است با $\binom{p}{r_1}\binom{p}{r_2}\dots\binom{p}{r_b}$ و $\binom{p}{r_i},\binom{p}{r_j}\,|\,p$. بنابراین $p^2\,|\,\binom{p}{r_1}\cdots\binom{p}{r_b}$. لذا تعداد کل حالات قسمت «ب» بر p^2 بخش‌پذیر است، و این اثبات را کامل می‌کند! ■

چنین راهکارهایی که منشأ ترکیبیاتی دارند، در اینجا و آنجای ریاضیات به چشم می‌خورند و تبحر در استفاده از این ابزار، گاهی بسیار مفید و راهگشاست.

یکی دیگر از ابزارهایی که گاهی به شکل معجزه‌آسا در میانهٔ اثباتها ظاهر می‌شود، جبر خطی مقدماتی است. به دو مثالی که در ادامه می‌آیند توجه کنید:

مسألهٔ (۵). نشان دهید به‌ازای هر عدد اول $p\overset{4}{\equiv}3$

$$\prod_{1\le x<y\le\frac{p-1}{2}}(x^2+y^2)\overset{p}{\equiv}(-1)^{[\frac{p+1}{4}]}$$

اثبات. فرض کنید $p=4k+3$، و g را یک ریشهٔ اولیه به پیمانهٔ p فرض کنید. قرار دهید $h=g^2$. بنابراین ۱، h، ...، h^{2k}. همه مانده‌های مربعی به پیمانهٔ p هستند و لذا هر یک از اعداد x^2 (برای $1\le x\le\frac{p-1}{2}$)

1. Borsuk-Ulam

با یکی از آنها برابر است. بنابراین

$$P = \prod_{1\le x<y\le \frac{p-1}{2}} (x^2+y^2) \overset{p}{\equiv} \prod_{0\le i<j\le 2k} (h^i+h^j)$$
$$\Rightarrow P\Big(\prod_{0\le i<j\le 2k} (h^i-h^j)\Big) \overset{p}{\equiv} \prod_{0\le i<j\le 2k} (h^{2i}-h^{2j}) \qquad (1)$$

حال فرض کنید $V(\xi_1,\dots,\xi_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & & \xi_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{n-1} & \xi_2^{n-1} & \dots & \xi_n^{n-1} \end{bmatrix}$ ماتریس واندرموند وابسته به $\xi_1, \dots, \xi_n$ باشد. در این صورت معادلهٔ (۱) با توجه به مطالب جبر خطی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$P\det(V(1,h,h^2,\dots,h^{2k})) = \det(V(1,h^2,h^4,\dots,h^{4k})) \qquad (2)$$

از طرفی داریم

$$h^{2k+1} = g^{4k+2} = g^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$$

پس

$$\det(V(1,h^2,\dots,h^{2k},h^{2k+2},\dots,h^{4k}))$$
$$\overset{p}{\equiv} \det(V(1,h^2,\dots,h^{2k},h,h^3,\dots,h^{2k-1})$$

بنابراین در رابطهٔ (۲)، ماتریس سمت راست از ماتریس سمت چپ با $1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ جایگشت دوتایی (ترانهش) ستونها به‌دست می‌آید و لذا داریم $P \overset{p}{\equiv} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$, $(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \overset{2}{\equiv} [\frac{k+1}{2}]$. پس $P \overset{p}{\equiv} (-1)^{[\frac{k+1}{2}]} = (-1)^{[\frac{p+1}{8}]}$. ■

مسألهٔ (۶). فرض کنید X مجموعه‌ای است nعضوی ($n \ge 1$) و نیز فرض کنید که $\mathscr{A} = \{A_1,\dots,A_m\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X است که برای هر $i \ne j$ داریم $|A_i \cap A_j| = 1$. نشان دهید $m \le n$.

اثبات. فرض کنید $X = \{1,2,\dots,n\}$ و ماتریس $m \times n$ای را به‌صورت زیر تعریف کنید. $A = [\epsilon_{ij}]$ که در آن

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } j \in A_i \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

بنابراین

$$AA^T = \begin{bmatrix} |A_1| & |A_1\cap A_2| & \cdots & |A_1\cap A_m| \\ & & & \\ & & & \\ |A_m\cap A_1| & |A_m\cap A_2| & \cdots & |A_m| \end{bmatrix}$$

اگر iای موجود باشد که $|A_i| = 1$، تحقیق حکم مسأله بسیار ساده است و به خواننده محول می‌شود. در غیر این‌صورت $|A_i| \ge 2$ به‌ازای هر $i = 1,2,\dots,m$، و لذا AA^T وارون‌پذیر است. از طرفی داریم

$$n \ge \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} AA^T = m$$

و اثبات به انجام می‌رسد. ■

این اثبات از حکم مسألهٔ (۶)، ممکن است این تصور را ایجاد کند که مسألهٔ (۶) مسألهٔ ساده‌ای است. ولی کوششهایی که از طریق ترکیبیات و به‌طور مجرّد به‌کار برده می‌شود عمدتاً به شکل عجیبی بی‌نتیجه هستند. احتمالاً خواننده این مطلب را پس از دیدن اثبات ترکیبیاتی مسأله در مرجع [۱] تصدیق خواهد کرد.

و باز هم مسأله‌ای در نظریهٔ اعداد که روش حل آن، توسل به اعداد مختلط است:

مسألهٔ (۷). فرض کنید p عددی است اول. چندجمله‌ای‌های خطی و همگن $p_k(x) = \lambda_{k1}x_1 + \dots + \lambda_{kn}x_n$ را به‌ازای $k = 1,2,\dots,p^n$ در نظر بگیرید که $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}$. و فرض کنید که به‌ازای هر $(\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{Z}^n$، که همهٔ ξ_iها بر p بخش‌پذیر نباشند، $p_1(\xi_1,\dots,\xi_n)$، ...، $p_{p^n}(\xi_1,\dots,\xi_n)$ هر مانده‌ای به پیمانهٔ p را دقیقاً p^{n-1} بار اتخاذ کنند. ثابت کنید مجموعه‌های زیر به پیمانهٔ p با هم برابر هستند

$$A = \{(\lambda_{k1},\dots,\lambda_{kn}) | k = 1,2,\dots,p^n\}$$
$$B = \{(i_1,\dots,i_n) | i_j = 0,1,\dots,p-1, j = 1,2,\dots,n\}.$$

اثبات. کافی است ثابت کنیم که به‌ازای هر $(i_1,\dots,i_n)$، دقیقاً یک k وجود دارد که $i_j \overset{p}{\equiv} \lambda_{kj}$. به دلیل یکنواختی توزیع در بین مانده‌ها، اگر $(\xi_1,\dots,\xi_n) \overset{p}{\not\equiv} (0,0,\dots,0)$ داریم

$$\sum_{k=1}^{p^n} e^{\frac{2\pi i}{p}(\lambda_{k1}\xi_1+\dots+\lambda_{kn}\xi_n)} = 0$$

با ضرب دو طرف در $e^{-\frac{2\pi i}{p}(i_1\xi_1+\dots+i_n\xi_n)}$ نتیجه می‌شود که

$$\sum_{k=1}^{p^n} e^{\frac{2\pi i}{p}((\lambda_{k1}-i_1)\xi_1+\dots+(\lambda_{kn}-i_n)\xi_n)} = 0$$

اگر $(\xi_1,\dots,\xi_n) \overset{p}{\equiv} (0,0,\dots,0)$ آنگاه عبارت بالا برابر است با p^n. بنابراین با جمع‌کردن عبارت بالا روی همهٔ دنباله‌های $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ نتیجه می‌شود که

$$\sum_{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\{0,1,\dots,p-1\}^n} \sum_{k=1}^{p^n} e^{\frac{2\pi i}{p}((\lambda_{k1}-i_1)\xi_1+\dots+(\lambda_{kn}-i_n)\xi_n)}$$
$$= p^n$$

بنابراین

$$p^n = \sum_{k=1}^{p^n} \Bigg[\Big(\sum_{\xi_1=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i}{p}(\lambda_{k1}-i_1)\xi_1}\Big) \times \Big(\sum_{\xi_2=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i}{p}(\lambda_{k2}-i_2)\xi_2}\Big) \times \cdots \times \Big(\sum_{\xi_n=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i}{p}(\lambda_{kn}-i_n)\xi_n}\Big) \Bigg]$$

هر عامل در جمع بالا صفر است مگر آنکه ضریب $\lambda_{kj} - i_j$ بر p بخش‌پذیر باشد و چون کل عبارت صفر نیست، kای وجود دارد که برای $j = 1, 2, \ldots, n$، $p|\lambda_{kj} - i_j$ و این همان حکم مورد نظر است. ■

حسن‌ختام این مقاله، اثباتی است شگفت‌انگیز برای یک قضیهٔ معروف در نظریهٔ گراف.

مسألهٔ (۸). به گراف ۴ـمنظم G' (یعنی هر رأس G' درجهٔ ۴ دارد) یک یال دلخواه اضافه می‌کنیم تا گراف G حاصل شود. در این‌صورت G یک زیرگراف ۳ـمنظم دارد.

اثبات. ابتدا صورت قضیهٔ شواله را یادآوری می‌کنیم.

قضیهٔ شواله: دستگاه n معادلهٔ $f_j(x_1, \ldots, x_m) \overset{p}{\equiv} 0$ را در نظر بگیرید که در آن $j = 1, 2, \ldots, n$ و f_j چندجمله‌ای از درجهٔ r_j است و p عددی است اول و $r_1 + r_2 + \cdots + r_n < m$. اگر این دستگاه (به پیمانهٔ عدد اول p) جواب داشته باشد، در این‌صورت حداقل دو جواب دارد.

حال فرض کنید گراف G دارای رأسهای $v_1, \ldots, v_n$ است و یالهای آن $e_1, \ldots, e_m$ می‌باشند. چون G'، ۴ـمنظم است

$$2m = 2 \times \text{تعداد یالها} = \text{مجموع درجات} = 4n + 2$$

و لذا $m = 2n + 1$. حال ماتریس $m \times n$ای به‌نام A با درایه‌های a_{ij} را چنین بسازید

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{یک انتهای } e_i \text{ است } v_j \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

پس حکم مسأله آن است که مجموعهٔ ناتهی $I \subseteq \{e_1, \ldots, e_m\}$ را بیابیم که برای هر j، $\sum_{e_i \in I} a_{ij}$ برابر ۰ یا ۳ باشد. از طرفی این جمع، بین ۰ تا ۵ است، پس معنی حکم آن است که مجموع بالا به پیمانهٔ ۳ صفر باشد. قرار دهید $f_j(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^2$. پس درجهٔ f_j، یعنی r_j، ۲ است و لذا مجموع درجات $2n$ است که از m کمتر است. با استفاده از قضیهٔ شواله چون دستگاه $f_j(x_1, \ldots, x_m) \overset{3}{\equiv} 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ دارای جواب $(0, 0, \ldots, 0)$ است، لذا جواب ناصفری دارد. فرض کنید J مجموعه اندیسهای i باشد که $x_i \neq 0$، و قرار دهید $I = \{e_i | i \in J\}$. حال از آنجا که برای هر $i \in J$، $x_i^2 \overset{3}{\equiv} 1$، داریم

$$\sum_{e_i \in I} a_{ij} \overset{3}{\equiv} \sum_{e_i \in I} a_{ij} x_i^2 \overset{3}{\equiv} 0$$

و لذا اثبات مسأله کامل می‌شود. ■

در پایان تعدادی مسأله برای خوانندگان علاقه‌مند به حل مسأله می‌آوریم.

مسألهٔ ۱. با دستکاری راه‌حل مسألهٔ ۴ در متن مقاله، ثابت کنید که با شرایط این مسأله و فرض اضافی $p \neq 2, 3$ داریم $\binom{bp}{ap} \overset{p^2}{\equiv} \binom{b}{a}$

مسألهٔ ۲. فرض کنید که R حلقه‌ای است یکدار، $n = 2^a + 2^b$ که $a, b \in \mathbb{N}$ و $(a+1, b+1) = 1$. ثابت کنید اگر در حلقهٔ R رابطهٔ $x^n = x$ برقرار باشد، رابطهٔ $x^2 = x$ هم برقرار است.

مسألهٔ ۳. فرض کنید S خانواده‌ای از کره‌های $n - 1$ بعدی در $\mathbb{R}^n$ باشد چنان‌که هر دوتایی حداکثر در یک نقطه مشترک باشند. ثابت کنید مجموعهٔ M، شامل نقاطی که حداقل روی دو تا از اعضای S هستند، حداکثر شماراست.

مسألهٔ ۴. تعدادی $\top$ در صفحه نوشته شده است که هیچ دوتا از آنها همدیگر را قطع نمی‌کنند. (در هر $\top$ هر یک از سه پاره‌خط طول مثبت و دلخواه دارند) ثابت کنید که تعداد این $\top$ها، شماراست.

مسألهٔ ۵. دو تاس داده شده است و در مورد هر تاس ما مجازیم که احتمال آمدن هر یک از ۶ عدد روی وجوه تاس را مشخص کنیم. ثابت کنید نمی‌توانیم طوری احتمال نسبت دهیم که توزیع مجموع اعداد حاصل در پرتاب دو تاس، یکنواخت شود.

مسألهٔ ۶. n نقطه روی دایره‌ای با توزیع یکنواخت به‌طور مستقل انتخاب می‌شوند و p_n را احتمال آن می‌گیریم که مرکز دایره در پوش محدب نقاط انتخاب شده قرار گیرد. p_n را محاسبه کنید.

مسألهٔ ۷. ثابت کنید مجموعهٔ توابع حسابی ضربی با مقادیر گویا و مجموعهٔ توابع حسابی ضربی با مقادیر مختلط گویا (یعنی $p + iq$ که p و q گویا هستند) با عمل ترکیب $f \circ g(n) = \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d})$ یکریخت هستند.

مسألهٔ ۸. کلیهٔ توابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ را که در رابطهٔ

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}^2$ صدق می‌کنند و روی کره واحد در $\mathbb{R}^2$، ثابت هستند بیابید.

مراجع

1. Ioan Tomescu, *Problems in Combinatorics and Graph Theory*, John Wiley and Sons (1985).

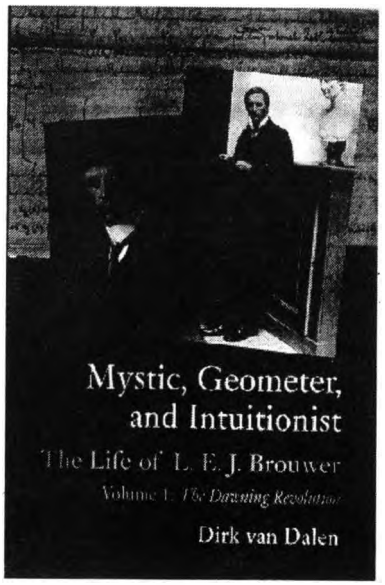
* * * * * *

* ایمان افتخاری، دانشگاه صنعتی شریف

نشر ریاضی، سال ۱۱، شمارهٔ ۱، صص ۶۲-۶۵

عارف، هندسه‌دان و شهودگرا

محمد اردشیر*



***Mystic, Geometer and Intuitionist, The Life of L. E. J. Brouwer*, volume 1: *The Dawning Revolution*, Dirk van Dalen, Clarendon Press, Oxford (1999), xv+420 pp.**

به‌خاطر می‌آورم در غروب چهارشنبه ۱۲ خرداد ۱۳۷۸ که با فان دالن در ساحل دریاچهٔ مازندران در حال قدم‌زدن بودیم، از من پرسید که اگر براؤر زنده بود، در بارهٔ کتاب عارف، هندسه‌دان و شهودگرا چه نظری اتخاذ می‌کرد؟ جواب سؤال برایم فوق‌العاده مشکل می‌نمود. پاسخ من این بود: با توجه به شخصیّت براؤری که من می‌شناسم، باید بگویم نمیدانم. فان دالن گفت که او نیز نظری شبیه من دارد، امّا یک چیز مسلّم است که این کتاب به مذاق عدهٔ زیادی خوش نخواهد آمد، مثل ... و ... و ....

کتاب عارف، هندسه‌دان و شهودگرا تصویری دقیق از زندگی، شخصیّت وکار براؤر، یکی از بزرگترین ریاضیدانان و فیلسوفان اوایل قرن بیستم، به‌دست می‌دهد. جلد اوّل کتاب وقایع زندگی براؤر را از تولد او در سال ۱۸۸۱ تا سال ۱۹۲۷ دربر می‌گیرد. در زندگی براؤر، مثل فلسفهٔ او، نکات مبهم زیاد است. این ابهامات حتی طرفداران او را نیز دچار تشتّت کرده است. کتاب فان دالن کوششی درخور تحسین برای ابهام‌زدایی است. تصویری نسبتاً روشن از براؤر ارائه می‌شود که مبتنی بر حقایق نوشته و نانوشته است. آرشیو براؤر بنابر وصیّت دختر خوانده او، لیزا، در اختیار فان دالن در دانشگاه اوترخت هلند است و این منبع مؤثر کمک شایانی به تدوین این اثر و جلد دوّم آن که حدود سه سال دیگر (به پیش‌بینی فان دالن) به چاپ خواهد رسید، نموده است.

در این نقد به سه مطلب، که با عنوان کتاب نیز همخوانی دارد، اشاره می‌کنم: عرفان، هندسه، و شهودگرایی.

«حیات من در این لحظه، یقین من به نفس من و اعتقادم به جلوه‌ها[1]یم است، و یقین به او، که مبدأ نفس من است و جلوه‌هایم را، که مستقل از من است و مستقیماً به او مرتبط است، به من اعطاء می‌کند. بنابراین چیزی مثل من حیات دارد و مرا تعالی می‌بخشد و آن خدای من است.»

«این کلمات را به هیچ‌وجه نباید به‌گونه‌ای تعبیر کرد که گویا یک استنتاج عقلی برای خدا ارائه شده است، زیرا اعتقاد به خدا اساس کار است، که از آن می‌توان استنتاج کرد اما خود آن را نمی‌توان. اعتقاد به خدا یک احساس خودجوش بلاواسطه در من است.»

«برای من، تنها حقیقت، [آگاهی] نفس خودم از این لحظه است، که با جلوه‌ها احاطه شده، که در آن نفس یقین دارد، و بدین‌ترتیب به آن حیات می‌بخشد.»

«این نظر شامل جبرگی من نیز هست. زیرا مفهوم زمان، مثل مفهوم مکان، به جلوه‌هایم تعلّق دارد، در حالی‌که نفس من کاملاً جدا از این مفاهیم است. رابطهٔ من با خدای من عبارت است از یقین من به او، که مرا حیات می‌بخشد.»

این عبارات عارفانه بخشی از اعترافات براؤر ۱۷ ساله در مراسم «اعلان ایمان»[2] در مارس ۱۸۹۸ است. برخی از این اعتقادات در کتاب زندگی، هنر و عرفان[3] نیز تکرار شده و اساساً تا آخر عمر همراه براؤر باقی ماند.

براؤر در سالهای ۱۹۰۴ و ۱۹۰۵ در دلفت[4] به مسائل فرهنگی دانشجویی علاقهٔ شدیدی داشت. در هفته نامهٔ دانشجویی مقالات کوتاه می‌نوشت و

1. representations
2. profession of faith
3. *Life, Art and Mysticism*
4. Delft

نهایتاً یک سلسله سخنرانی برای دانشجویان ایراد کرد که در مجموعهٔ زندگی، هنر و عرفان جمع شده است. این کتاب اخیراً در مجلهٔ $NDJFL$ به‌طور کامل به‌وسیلهٔ فان استیخت به انگلیسی ترجمه شد [۱]. نگاهی به عناوین فصلهای این کتاب، علایق و دلمشغولیهای براؤر را نشان می‌دهد:

۱. جهان غم‌زده؛ ۲. درون‌نگری؛ ۳. افول ناشی از عقل؛ ۴. آشتی؛ ۵. زبان؛ ۶. حقیقت ذاتی (درونی)؛ ۷. حقیقت استعلایی (ترافرازنده)؛ ۸. زندگی رهایی‌یافته؛ ۹. اقتصاد.

دو عنصر اساسی فلسفهٔ ریاضی براؤر را می‌توان در این مکتوب دریافت. اول اینکه زمان یک شهود اولیه[1] است و دوم اینکه ریاضیات فاقد زبان[2] است.

نکتهٔ اصلی زندگی، هنر و عرفان بیان این آیین عرفانی است که هدف و چالش غایی بشر، درون‌نگری کامل است. نکات و فصول دیگر این کتاب شرح و بیان این آیین است. این سلسله از سخنرانیها حاوی نکات عمیق عرفانی و فلسفهٔ زبان است که شرح آن مقال دیگری می‌طلبد. درک و بیان این مطالب از جوانی ۲۳ یا ۲۴ ساله شگفت‌آور و حاکی از عمق روح و بینش درون‌نگرانهٔ اوست.

در سال ۱۹۰۷ براؤر از رسالهٔ دکتری خود تحت عنوان «مبانی ریاضیات» زیر نظر کورتووخ[3] دفاع کرد. براؤر در این رساله تقریباً به همه حمله کرد، از کانت و راسل [در مورد هندسه] گرفته تا کانتور [در مورد نظریهٔ مجموعه‌ها] و هیلبرت [در مورد مبانی ریاضیات]. جالبترین موضوع در بارهٔ رسالهٔ دکتری او، اختلاف نظر براؤر با استاد راهنمایش کورتووخ در بارهٔ محتوای رساله است. بخشهایی از رساله را کورتووخ به دلیل ماهیّت «غیرریاضی» آنها نپذیرفت (این بخشها بعداً در [۶] به چاپ رسید). در رساله از استدلال کانت در بارهٔ پیشینی بودن مکان انتقاد شد. کورتووخ شرح و نقد آراء کانت را در یک رسالهٔ ریاضی ثقیل و غیرقابل توجیه یافت. در عین حال احساس می‌کرد که براؤر در بیان آراء کانت صاحب‌نظر نیست. جواب نامهٔ براؤر متضمّن نکات قابل توجهی است، از جمله اینکه:

> « ... رسالهٔ «در باب مبانی هندسه» راسل و «اصول ریاضی» کوچورا[4] به میزان زیادی بر اصول کانتی مبتنی است.»

و بنابر نظر پوانکاره، مناقشات در باب مبانی در آن زمان ادامه مجادلهٔ قدیمی ریاضی-فلسفی بین کانت و لایب‌نیتس بود. او می‌گوید.

> « ... چرا باید از نام کانت احتراز کرد، در حالی‌که ایده‌های او در متون ریاضی، مثلاً در آثار راسل و کوچورا، به بحث کشیده شده است؟»

براؤر در بارهٔ اینکه از آراء کانت اطلاع داشته، به کورتووخ خاطرنشان می‌کند که:

> «البته من نمی‌توانم به شما اطمینان دهم، اما می‌توانم بگویم که من همه سنجش خرد ناب[5] را خواندم و بعضی قسمتهای آن را (که مرتبط با رسالهٔ من بود) به کرّات و با جدیّت مطالعه کردم».

کتاب فان دالن شرح مبسوطی از این وقایع «خصوصی» بین استاد و شاگرد و همچنین محتوای رساله می‌دهد. از جمله نکات قابل‌توجه، تکوین بعضی

1. Urintuition 2. languageless 3. Korteweg 4. Couturat
5. *Critique of Pure Reason*

مفاهیم شهودگرایانه در رساله است. ساختار شهودگرایانهٔ پیوستار که از مفاهیم اساسی شهودگرایی است در این رساله تکوین می‌یابد. گرچه براؤر بعدها (در ۱۹۱۵) در شکل عمیقتری، و درواقع باید گفت در نظریه‌ای متفاوت، آن را پروراند.

بعد از دفاع از رساله، براؤر عمیقترین کارهای خود را تا مدتی (یعنی تا ۱۹۱۲) در قلمرو توپولوژی متمرکز کرد. ابتدا در توپولوژی سنّتی کانتور-شونفلیس[1] (فصل چهارم کتاب) کار می‌کرد که در این قلمرو، اولین مقالهٔ براؤر در گروههای متناهی پیوسته در ۱۹۰۹ در ماتماتیشه آنالن به چاپ رسید. قضیهٔ نقاط ثابت روی کره و قضیهٔ ترجمه[2] از کارهای این دوره (۱۹۰۷-۱۹۱۰) به‌شمار می‌رود. براؤر را باید بنیانگذار مفهوم هومولوژی در توپولوژی دانست. از نکات جالب توجه و هیجان‌انگیز در این دوره نزاع بر سر «تقدم» در کارهاست. در همین زمینه، به یکی از این نزاعها اشاره می‌کنم.

دورهٔ بعدی (۱۹۱۰-۱۹۱۲) (فصل پنجم کتاب) دورهٔ بنیانگذاری توپولوژی جدید است. در این دوره براؤر ناوردایی بُعد[3] را مورد توجه قرار می‌دهد. در ۱۸۷۸ مقالهٔ کوتاهی به‌وسیلهٔ استادی در هال[4] منتشر شد که در آن ثابت شد: نگاشت یک‌به‌یکی از یک ضلع مربع به خود مربع وجود دارد (یا از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^2$). نویسندهٔ این مقاله گئورگ کانتور بود. مقالهٔ کانتور نشان می‌دهد که مفهوم بُعد مفهومی نیست که مطلقاً غیرقابل تغییر باشد. تا قبل از کانتور هیچ ریاضیدانی فکر نمی‌کرد که یک مربع را بتوان با یک خط پُر کرد. ددکیند معتقد بود که نباید به قضیهٔ کانتور، بیش از آنچه از خود قضیه برمی‌آید، اهمیت داد، زیرا نگاشت کانتور ناپیوسته است. براؤر در ۱۹۰۸ به اهمیت ناوردایی بُعد پی برد. او در متن سخنرانیش در کنفرانس رُم بعد از تعریف گروههای لی در پانوشتی اظهار داشت:

> «اینکه p [یعنی تعداد پارامترها] برای هر گروه ثابت است تا زمانی‌که ناهمسانریختی[5] دو فضای با ابعاد مختلف حل نشود یک مسألهٔ حل‌نشده است.»

بحث مفصلی در فصل پنجم کتاب فان دالن در بارهٔ سهم براؤر در مفهوم ناوردایی بُعد آمده است. مقالات مهم یوهانسون (۱۹۷۹ و ۱۹۸۱) نیز شرح مبسوطی از تاریخ بُعد را دربر می‌گیرد. از نکات تاریخی خواندنی در این فصل از کتاب، درگیری براؤر و لبگ است که در فاصلهٔ ارسال مقالهٔ معروف بُعد و چاپ آن اتفاق افتاد و تا مدتها ادامه داشت.

در تابستان ۱۹۱۰ بلومنتال سفری به پاریس داشت و در آنجا با هانری لبگ ملاقات کرد. در این ملاقات بلومنتال، لبگ را در جریان اکتشافات براؤر گذاشت. در ۲۷ اکتبر ۱۹۱۰ بلومنتال، هیلبرت را از ملاقات خود با لبگ مطلع ساخت:

> «او [لبگ] مرد بسیار جالبی است و به من گفت که نه یک برهان بلکه چند برهان مختلف برای قضیه ناوردایی بُعد دارد که اخیراً براؤر آن را در آنالن اثبات کرده است. او یکی از این برهانها را برای آنالن به من داد که به‌نظر شگفت‌آور است.»

در فوریهٔ ۱۹۱۱ مقالهٔ براؤر در آنالن به چاپ رسید، اما بلافاصله بعد از آن، خلاصه نامهٔ لبگ به بلومنتال نیز با این عنوان آمد: در ناهمسانریختی دو ناحیه که به فضاهایی با ابعاد n و $n+p$ تعلق دارند.

1. Cantor-Shoenflies 2. translation 3. invariance of dimension
4. Halle 5. non-applicability

لحن نامه تحریک‌کننده بود:

> ... وقتی شما با من دربارهٔ اثبات غیرممکن بودن تناظری یک به یک، بین نقاط دو فضا با ابعاد n و $n+p$ صحبت نمودید و نیز در بارهٔ اثباتی از آقای براؤر که قرار است در ماتماتیشه آنالن به چاپ برسد، خاطرنشان کردم که چندین برهان برای این قضیه در دست دارم که مبتنی بر اصلی معروف است. من یکی از ساده‌ترین آنها را به شما نشان می‌دهم.

اصلی که لبگ به آن اشاره کرد، اصل سنگفرش[1] است:

> «اگر هر نقطهٔ یک ناحیهٔ D با ابعاد n به حداقل یکی از مجموعه‌های بستهٔ E_1، ...، E_p تعلق داشته باشد، و اگر این مجموعه‌ها به اندازهٔ کافی کوچک باشند، آنگاه نقاطی موجودند که به $n+1$ تا از این مجموعه‌ها تعلق دارند.»

به‌نظر نمی‌رسد که براؤر قبل از چاپ نامهٔ فوق از آن مطلع بوده باشد. بنابراین به محض رؤیت آن می‌بایست عکس‌العمل نشان دهد!

تصور کنید که براؤر مجلهٔ ماتماتیشه آنالن را باز می‌کند و می‌بیند در بارهٔ یکی از مسائل اساسی که قبلاً حل نشده است، گفته شده که «ساده‌ترین راه‌حل» می‌تواند ارائه شود.

براؤر بعد از خواندن، بلافاصله دریافت که در راه‌حل لبگ یک پرش جدی وجود دارد. اصل سنگفرش یک حدس بود. ولی براؤر نگران این مسأله بود که فقط عدهٔ کمی از ریاضیدانان متوجه این امر شوند و حل مسألهٔ ناوردایی بعد به حساب لبگ گذاشته شود.

چهرهٔ اصلی در نزاع میان براؤر و لبگ، بلومنتال بود. او اولین شاگرد دکتری هیلبرت بود که در ۱۹۰۱ از رسالهٔ خود دفاع نمود. وی در موقع چاپ مقاله براؤر سردبیر ماتماتیشه آنالن بود. گرچه نمی‌توان بلومنتال را به خاطر اینکه فرد ثالثی را در جریان یک مقاله قرار داده است سرزنش کرد، اما می‌توان این ایراد را گرفت که یادداشت لبگ، را برای داوری قبل از چاپ به داور نداده است. حق آن بود که بلومنتال، براؤر را از یادداشت لبگ قبل از چاپ مطلع می‌کرد.

براؤر یادداشت لبگ را به‌دقت بررسی کرد و فهمید که اثبات او کامل نیست. در اوایل مارس همان سال، یادداشت کوتاهی برای هیلبرت فرستاد که عنوان آن این بود: نکاتی در بارهٔ اثبات آقای لبگ برای ناوردایی. کپی این یادداشت با عبارتی حاکی از پذیرش آن به‌وسیلهٔ هیلبرت موجود است. بلومنتال بدون درک کُنه مسأله در ۱۴ مارس ۱۹۱۱ در نامه‌ای به هیلبرت می‌گوید:

> «من موضوع براؤر-لبگ را به‌غایت ناخشنود کننده یافتم و در کل جانب لبگ را می‌گیرم ...»

بلومنتال خواهان ردّ یادداشت است و از هیلبرت نیز می‌خواهد که چنین کند. اما مسأله پیچیده‌تر از آن است زیرا بلومنتال خود در ادامهٔ نامه می‌گوید:

> «علاوه بر همهٔ اینها، من مثل لبگ قادر به فهم برهان براؤر نیستم».

1. paving principle

عکس‌العمل لبگ به یادداشت براؤر کوتاه بود و نشان می‌دهد که هنوز مشکل را به‌طور کامل نفهمیده بوده است:

> «نکته‌ای که آقای براؤر می‌گوید، اگر آن را درست فهمیده باشم، چنین است: من اعلام کردم که احکامی را که بدیهی نامیدم باید اثبات کنم. من با آقای براؤر در این نکته موافقم و باید اضافه کنم که اثباتم را هنوز به‌طور کامل ننوشته‌ام، زیرا مدتی قبل قول داده‌ام که مقاله‌ای در این موضوع برای انجمن ریاضی فرانسه بنویسم. من اذعان دارم صورتبندی‌ای که از این مسأله عرضه کرده‌ام بسیار ضعیف است ...»

نامهٔ لبگ، بلومنتال را متقاعد کرد که لازم نیست براؤر از چیزی نگران باشد. او در نامهٔ ۲۵ مارس توضیح می‌دهد که:

> «هر چه لبگ بخواهد پافشاری کند، کسی شک نمی‌کند که شما [براؤر] در اثبات ... تقدم دارید. لبگ از نظر خودش و همچنین از نظر جهانی، خود را نه رقیب شما، بلکه هوادار شما می‌داند».

اما داستان به همین جا خاتمه نمی‌یابد. مشروح آن گزارش یکی دیگر از حوادث تراژیک جهان ریاضیات در قرن بیستم است. صفحات ۱۵۹-۱۷۲ کتاب فان دالن به حوادث جزئی مربوط به این نزاع اختصاص یافته است.

آنچه بین براؤر و لبگ اتفاق افتاد، تنها حادثه از این نوع نیست. نمونهٔ دیگر آن در همین حوالی یعنی ۱۹۱۲ نزاع براؤر و کوبه[1] بر سر قضایای اساسی کلاین[2] است.

نکتهٔ اخلاقی در درگیریهای براؤر با دیگران بر سر مسائل علمی این است: اگر براؤر به برحق بودن امری اعتقاد داشت به‌هیچ وجه کوتاه نمی‌آمد، این اصرار بر اعتقاد به حق در برهه‌هایی از زندگی براؤر، او را از بسیاری چیزها محروم کرد. بخشی از جلد دوم کتاب قرار است دربرگیرندهٔ نزاع اصلی دوران زندگی براؤر باشد، یعنی درگیری او با هیلبرت. در آنجا نیز آن‌طور که از مقاله‌ای از فان دالن در این باره برمی‌آید [۵]، این نکتهٔ اخلاقی تکرار می‌شود.

بخش آخر این نقد را به شهودگرایی براؤر اختصاص می‌دهم. شهودگرایی براؤر، متأسفانه، حتی در نظر ریاضیدانان معروف و فیلسوفان ریاضی نیز دچار سوء فهم‌های فاجعه‌آمیزی شده است. غالب ناقدان شهودگرایی به آثار براؤر یا حتی اصحاب درجه اول او توجهی نداشته‌اند و آنچه را از منابع «غیرموثّق» فهمیده‌اند (در بهترین حالت) به نقد کشیده‌اند. این برخورد فاجعه‌آمیز با شهودگرایی از زمان خود براؤر آغاز شد. هیلبرت که همزمان با براؤر می‌زیست، حملاتش نه علیه شهودگرایی براؤر، بلکه علیه شبح خودساخته‌ای از کرونکر بود. شاید بتوان غفلت ریاضیدانان و فیلسوفان پنجاه سال پیش از منابع دست اول را با عدم دسترسی آنها به ترجمه‌ای موثّق تا حدودی توجیه کرد، اما در اواخر قرن بیستم دیگر این دلیل نمی‌تواند قانع‌کننده باشد. این نوع برخورد با اندیشه مرا به یاد برخورد با مارکسیسم در دههٔ پنجاه در ایران می‌اندازد.

کتاب فان دالن از لحاظ شرح ساده و در عین حال معتبر برخی مفاهیم اساسی شهودگرایی براؤر، توأم با تکوین تاریخی آن در نزد او، فعلاً بی‌بدیل می‌نماید. ساختمان پیوستار و نقش دنباله‌های انتخاب[3] در تکوین آن از برجسته‌ترین بخشهای کتاب است (صص ۱۰۵-۱۱۸ و ۲۳۵-۲۴۳ و ۳۰۷-۳۳۰ و ۳۷۵-۳۹۵).

1. Koebe 2. F. Klein 3. choice sequences

برای براؤر بسیار ثقیل می‌نمود که پیوستار کانتوری، یعنی مجموعه‌ای از نقاط مجزّا و منفرد (اتمها) را بپذیرد. او در رسالهٔ دکتری خود به پیوستار شهودی باور داشت که به‌وسیلهٔ شهود ابتدایی به ما داده شده است. این پیوستار بی‌شکل[1] و جاری[2] است. در ۱۹۱۵، براؤر با طرح نظریهٔ دنباله‌های انتخاب، این تصویر از پیوستار را غنا بخشید و با قبول دنبالهٔ انتخاب به‌عنوان یک شیء ریاضی، ساختمان دقیقی از پیوستار (در چارچوب ریاضیات شهودگرایانه) ارائه کرد. با ورود دنباله‌های انتخاب به جهان اشیاء ریاضی، ریاضیات شهودگرایانه فقط تحدید ریاضیات کلاسیک نبود، بلکه با آن در تضاد قرار گرفت. وجود دنباله‌های انتخاب پیوستگی تمام توابع حقیقی $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را نتیجه می‌دهد و این آشکارا با ریاضیات کلاسیک در تناقض است.

در اینجا به معرفی موجز دنباله‌های انتخاب می‌پردازیم.

هر دنباله روی اعداد طبیعی یک تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ است. اگر چنین تابعی با ارائه یک قانون معرفی شود، مثلاً $f(n) = 5n$، آن‌را دنباله‌ای قاعده‌مند[3] می‌خوانیم. اگر چنین تابعی تابع هیچ قانونی نباشد و صرفاً مبتنی بر انتخاب آزادانهٔ اعداد طبیعی باشد، آن‌را دنباله‌ای بی‌قاعده[4] می‌خوانیم. در بین این دو حد نهایی، دنباله‌هایی را تصور کنید که نه با قاعده‌ای از پیش تعیین‌شده شکل می‌گیرد و نه اینکه مطلقاً بی‌قاعده است. این دنباله‌ها در فرایند گسترش محدودیتهایی را متحمل می‌شوند. برای مثال فرض کنید می‌خواهیم دنباله‌ای چون $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ از اعداد گویا بسازیم که به عددی حقیقی میل کند. این دنباله از اعداد گویا بدون دنباله‌ای کوشی باشد. بنابراین محدودیتی در انتخاب اعداد گویا در فرایند انتخاب بر ما تحمیل می‌شود. جهان دنباله‌های انتخاب، جهانی متشکل از هر سه نوع دنبالهٔ یاد شده است. پذیرش این جهان چونان جهان شهودگرایانه، محتاج بحث فلسفی و توجیه هستی‌شناسانه است. این توجیهات با رویکردهای مختلف از طرف افراد مختلف در حال انجام است. ظاهراً قویترین آنها تاکنون در چارچوب پدیدار شناسی هوسرل انجام یافته است [۴].

تا آنجا که من اطلاع دارم یک نقد در بارهٔ این کتاب نگاشته شده است [۲]، که در آن از گرانی کتاب، عکسهای تیره، و ... سخن رفته است. من نظرات خود در بارهٔ کتاب را که عمدتاً در بارهٔ محتوای آن بود برای نویسنده فرستادم. از باب حسن ختام بخشی از آن‌را که در بارهٔ اعتقادات شخصی براؤر راجع به زنان است همراه با جواب فان دالن در اینجا می‌آورم.

دیرک عزیز ۷ اکتبر ۱۹۹۹

«... ...

۲. به اعتقاد من نظر براؤر در باره زنان با کمال شهامت ابراز شده و حاکی از صداقت او در بیان باورهایش است. ما می‌توانیم با او موافق نباشیم، اما این نکتهٔ مثبتی در مورد براؤر است که به چیزی غیر از آن تظاهر نکرده است. او به‌قدر کافی باهوش بود که بداند ایدئولوژی زن‌ستیزی او در قرن بیستم مورد نفرت قرار خواهد گرفت. من احساس می‌کنم شما در کتابتان، به‌نحوی سعی دارید نظر او را در این موضوع به نرمی بیان کنید.

آیا فکر می‌کنید من دچار سوء فهم هستم؟

... ...»

1. amorphous 2. flowing 3. lawlike 4. lawless

و اما جواب فان دالن (۶ دسامبر ۱۹۹۹):

«... ...

۲. من تا حدودی با تو موافقم. عقاید او عقاید یک فردِ عارف بود و بنابراین کاملاً قابل فهم است که زن یک «خطر» است. از طرف دیگر، زمانی‌که این سخنرانیها ایراد می‌شد، او مرد جوانی بود. ممکن بود بعدها در زندگی خود را متعادلتر نشان دهد. به‌علاوه، همهٔ ما، وقتی‌که جوانیم نظرات افراطی داریم؛ [هر چند] بدون شک، او بعدها نیز تا حدودی این نظرات را در زندگی حفظ نمود.

در بارهٔ این نظرات، چیز شگفت‌آوری وجود دارد؛ او نسبت به استادان یا ریاضیدانان زن هیچ اعتراضی نداشت و با اکثر آنها، رابطهٔ بسیار عالی داشت. من حدس می‌زنم او هم مثل هر کس دیگر، نظرات اساسی خود را در بارهٔ اجتماع داشت، اما استثناناتی را هم مجاز می‌دانست.

درواقع من سعی نکردم همهٔ بیانات افراطی او را در باره زنان که در زندگی، هنر و عرفان آمده، نقل کنم ولی اولاً، اطلاعات کافی به خواننده داده شد که بداند وضع چگونه است؛ و در ثانی این‌گونه اظهارات را باید در چارچوب سن و شرایط محیط دید.

... ...»

مراجع

1. L. E. J. Brouwer, "Life, art and mysticism", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, (3) **37** (1996) 389-429. Translated and introduced by W. P. van Stigt.

2. I. Gratten-Guinnes, Review of *Mystic, Geometer, and Intuitionist: The Life of L. E. J. Brouwer*, volume 1: *The Dawning Revolution*, by Dirk van Dalen, *Bulletin of The American Mathematical Society*, (4) **36** (1999) 529-532.

3. D. M. Johanson, "The problem of the invariance of dimension in the growth of modern topology", part I, *Archive for History of Exact Sciences*, **20** (1979) 97-188; part II, **25** (1981) 85-267.

4. M. S. P. R. van Atten, *Phenomenology of Choice Sequences*, Ph. D dissertation, Department of Philosophy, Utrecht University (1999).

۵. دیرک فان دالن، جدال موش و قورباغه: بحران ماتماتیشه آنالن، نشر ریاضی، سال ۹، شمارهٔ ۱، اسفند ۱۳۷۶.

6. W. P. van Stigt, "The rejected parts of Brouwer's dissertation on the foundations of mathematics", *Historia Mathematica*, **6** (1979) 385-404.

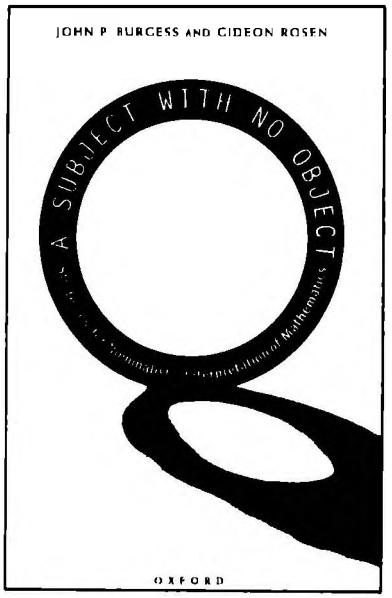
******

* محمد اردشیر، دانشگاه صنعتی شریف و پژوهشگاه دانشهای بنیادی

ardeshir@karun.ipm.ac.ir

موضوعی بِلاشیء*

چاراز پارسونز*
ترجمهٔ محمد اردشیر



***A Subject With No Object–Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics*, John P. Burgess and Gideon Rosen, Clarendon Press, Oxford University Press (1997).**

نامگرایی[1] برنامه‌ای در مبانی ریاضیات است که حداقل پنجاه سال است دنبال می‌شود. این برنامه با شک‌گرایی در وجود هویات[2] مجرد آغاز می‌شود و بدین ترتیب سعی در بنای ریاضیاتی دارد که در آن از هرگونه تعهدی [وجودشناسانه] نسبت به این هویات اجتناب شود. پیشینهٔ این نگرش به گودمن و کواین می‌رسد، و اگرچه واژهٔ «نامگرایی» کاربردهای دیگری نیز دارد، این کاربرد است که در کتاب به بحث کشیده شده است. نویسندگان این واژه را عمدتاً برای اشاره این تز به‌کار می‌برند که هویت مجرد وجود ندارد. اگر این را نامگرایی هستی‌شناسانه یا به اختصار، نامگرایی (ه) بنامیم، موضوع روشنتر خواهد شد. آنها، در بعضی موارد، این برنامه را نامگرایی بازساختی[3] نامیده‌اند که ما آن را به‌طور خلاصه، نامگرایی (ب) می‌نامیم. یکی از موضوعات اصلی مورد نظر نویسندگان، رابطهٔ این دو مفهوم از نامگرایی است.

نویسندگان خود را نامگرا به شمار نمی‌آورند، اما علاقه‌مند به برنامهٔ نامگرایی هستند. برخلاف برنامه‌های معروف دیگر، این برنامه انعکاس اندکی در بین ریاضیدانان داشته، و حتی کارهای فنی آن عمدتاً به‌وسیلهٔ فلاسفه انجام گرفته است. کتاب حاضر، اولین بررسی جامع از موضوع است. در آن از انگیزه‌های فلسفی برای دنبال کردن برنامه (فصل I.A)، استراتژیها و کارکرد آنها (فصول I.B، II.A – C و III.A – B) و اینکه چگونه با این نتایج مفروض به نتایجی دیگر برسیم (فصل III.C) بحث شده است. فصول I.A و III.C که عمدهٔ بحث فلسفی در آنها صورت گرفته است، بیشتر کار روزن و مابقی عمدتاً کار برِجس است (صفحات ix – x). ولی با فرض اینکه هر دو نفر مسؤولیت تمام کتاب را به‌عهده می‌گیرند، در این نقد همه جا از آنها با عنوان «نویسندگان» یاد می‌شود.

نویسندگان می‌گویند که هدف آنها «عمدتاً روشن کردن جنبهٔ فنی کارهای اخیر در نامگرایی است» (صفحهٔ ۱۲). این قیدْ هدف بخشهای فلسفی کتاب را محدود می‌کند. مقدمه (I.A) در حکم یک مرور کلی بر سؤالات زیر است «(i) هویت مجرد چیست؟ (ii) چرا نباید به هویات مجرد باور داشت؟ (iii) چرا کسی که به هویت مجرد باور ندارد در جستجوی تعبیر دوبارهٔ نظریه‌هایی است که آنها را شامل می‌شود؟» (همانجا). از این سؤالها، (i) و (iii) به نوعی در نوشتگان مربوط به نامگرایی نادیده گرفته شده و (ii) غالباً به‌وسیلهٔ هواداران این برنامه به‌طور گذرا بررسی شده است. نویسندگان سعی در تشکیک آرایی دارند که تا حدودی مقبولیت عام دارند: (i) اینکه چه چیزی مجرد است و چه چیزی مجرد نیست، بدیهی است؛ (ii) اینکه هویات مجرد به‌دلایل شناخت‌شناسانه و شاید غیر آن بسیار پیچیده و مسأله‌آفرین است؛ (iii) اینکه نامگرایی محتاج تعبیری دوباره از علم است که با مقررات سخت آن مطابقت داشته باشد. در مورد (i)، بحث روشن و سودمندی در تمایز «مجرد و ملموس» آمده است و به‌طور متقاعدکننده‌ای مدلل شده است که معیارهایی که معمولاً در این مورد ارائه می‌شوند در مواجهه با مثالهای معین به اشکال برمی‌خورند. برای مثال، یکی از این معیارها که مطلوب این منتقد است این است که یک شیء مجرد است اگر در مکان و زمان قرار نگیرد و در روابط علّی وارد نشود. نویسندگان خاطرنشان می‌کنند که انواع، بنگاهها، و کتابها مثل یارک منسفیلد[1] حداقل به شکلی در مکان جای دارند (به طوری که همتای این کتاب در یک همزاد خیالی کرهٔ زمین کتابی کاملاً متفاوت خواهد بود). همچنین، مطرح می‌کنند که آنها تحت تغییر هستند و بنابراین معلول علتی هستند. نویسندگان این سیاست کلی را رعایت می‌کنند که هیچ کوششی در به نتیجه رساندن بحث نداشته باشند: آنها قانع‌اند به اینکه «دشواریهای مسألهٔ توصیف مجرد

1. nominalism 2. entities 3. reconstructive

۱. رمانی از جین آستین که اخیراً به‌صورت فیلم هم درآمده است.ـم.

بودن» را آشکار کنند (ص ۲۵). می‌توان گفت که اشکالات بیان شده فقط ارتباط جنبی با ریاضیات دارند، اگرچه باز هم سؤالاتی دربارهٔ اشیائی که معمولاً اشیاء ریاضی تلقی می‌شوند باقی می‌ماند، مثل مجموعه‌های اشیاء ملموس.

جدیترین سؤال از سه سؤال مطرح‌شده، سؤال (ii) است که منجر به بحث دربارهٔ رایجترین ایراد به اشیاء مجرد می‌شود، یعنی این ایراد که هیچ شناخت‌شناسی کافی برای آنها وجود ندارد چون وارد روابط علّیِ نمی‌شوند و بنابراین با نظریه‌ای علّی تبیین نمی‌شوند. ممکن است گفته شود: «این نقصی برای نظریه‌های علّی معرفت است»، اما نویسندگان در اینجا مسأله را ختم نمی‌کنند. آنها می‌گویند که صورتبندی کلاسیک بناسراف از این مسأله پایبند به نوشتگان شناخت‌شناسانهٔ زمان خود بوده است، نوشتگانی که به مسألهٔ معرفتِ اشیاء مجرد نمی‌پرداخته بلکه توجهش به‌خصوص معطوف به این مسأله بوده است که غیر از باورِ راسخ موجه، ملزومات معرفت چه باید باشد، در حالی‌که نامگرایان (ه) حتی انکار می‌کنند که باورهای موجهی دربارهٔ اشیاء مجرد داشته باشیم. استدلال شده است که شیوهٔ تکوین این نوشتگان استعمال ضمنی آن را به‌وسیلهٔ نامگرایان تأیید نمی‌کند. استدلالی از هارتری فیلد، مبنی بر وجود اشکال در توضیح اعتمادپذیری باورهای ما به اشیاء ریاضی، به نقد کشیده شده است (صفحات ۴۱ـ۴۶). استدلالهای مشابهی نیز که مبتنی بر نظریهٔ علّی دلالت‌اند به‌خوبی نقد شده‌اند. این استدلالها نقاط ضعف نامگرایی را آشکار می‌کنند ولی خود نیز دچار ضعف هستند. نویسندگان در مقابل فیلد استدلال می‌کنند که رابطهٔ قابل توجهی بین باورهای ریاضی و احکام ریاضی که باید به‌دست آیند، وجود ندارد. آنها هریک را به حکم واحدی تقلیل می‌دهند و مدعی‌اند که توضیح آن رابطه، عطف سادهٔ آن دو است (ص ۴۵). اما این‌کار مطمئناً سفسطه است: هر حکم واحدی خلاصهٔ تعدادی از حکمهاست، به‌طوری که آن رابطه واقعاً تقلیل نمی‌یابد. همچنین نویسندگان این نکته را در نظر نمی‌گیرند که نتایج در پذیرش اصول نقش دارند. آنها ممکن است در این نظر محق باشند که در شرحهای تاریخی متعارف، گام اولیهٔ خوبی در توضیح اینکه چگونه و چرا نظریهٔ استاندهٔ مجموعه‌ها پذیرفته شد، برداشته می‌شود» (ص ۴۶)، اما بعید است که چنین توضیحی از نظر طبیعی‌گرایی که بعضی نامگرایان، به‌خصوص فیلد، در پی آن هستند، مطلوب باشد.

بحث دربارهٔ (iii) در مسیری پیش می‌رود که برای من آشنا نیست. در نظر نویسندگان بدیهی نیست که نامگرایان نمی‌توانند یک موضع «افسانه‌گرایانهٔ افراطی» اتخاذ کنند، که طبق آن در نظریه‌های علمی می‌توان فرض کرد اشیاء ریاضی وجود دارند گرچه چنین نیستند. آنها می‌گویند در اینجاست که دلایل معروف اجتناب‌ناپذیری عرض اندام می‌کند. هدف ساختمان فیلد، به‌ویژه، نفی این ادعاست که اشیاء مجرد باید پذیرفته شوند چون ریاضیات برای علم اجتناب‌ناپذیر است. نویسندگان دلیل می‌آورند که اگر ساختمان دیگری بر اساس نامگرایی (ه) برای ریاضیات پدید آید که از نظر علمی کاربردپذیر باشد، از دیدگاه علمی باید ارجح باشد. (آنها بعداً دربارهٔ این موضوع در III.C بحث می‌کنند.)

در بخش فنی کتاب، هوشمندی قابل ملاحظه‌ای به‌کار رفته است تا حداکثر تعداد راهها به شیوه‌ای کاملاً موجز ارائه شود. چارچوب کلی برای تقلیل در I.B آمده است. در آغاز نظریهٔ دو نوعی T معرفی شده است که اشیاء نوع اول (اشیاء اولی) آنهایی هستند که تقلیل به آنها انجام می‌گیرد (مثلاً اشیاء ملموس) و اشیاء نوع دوم (اشیاء ثانوی) آنهایی هستند که باید تقلیل یابند. یک فراقضیهٔ کلی بیان شده (تقریباً) به این مضمون که اگر بتوان ثابت کرد که فرمولی، نگاشت یک به یکی از اشیاء ثانوی به kـتاییهای اشیاء اولی تعریف می‌کند، آنگاه می‌توان از آن برای ترجمهٔ T به بسطی از آن بخش از زبان استفاده کرد که فقط از هویات اولی در آن صحبت می‌شود: مفاهیم اولیهٔ جدید به معنای روشنی، المثنای مفاهیم اولیهٔ T هستند که شامل متغیرهای ثانوی‌اند. با تعویض اصول T، که شامل چنین اولیه‌هایی است، با اصول متناظر درباره المثناها، نظریه‌ای یک نوعی به‌دست می‌آید که هر چیزی را دربارهٔ هویات اولی که در T قابل اثبات‌اند، ثابت می‌کند، و توسیع بدیهی تعریفی T همچنان توسیع محافظه‌کارانه‌ای از آن خواهد بود.

این نتیجه در حالتی که هویات ثانوی شامل اعداد باشند به وضوح صادق است فقط به شرط اینکه در تعبیر مورد نظر به تعداد نامتناهی هویات اولی موجود باشند. این امر در گذشته یک مانع اساسی در برابر بازسازیِ نامگرایی بود، و برای غلبه بر آن از دو اصل زیر استفاده می‌شد: قبول هویات هندسی، و توسیع نامگرایی مصداقی با پذیرش [مفهوم] موجهات.

نتیجهٔ فوق هستهٔ منطقی «استراتژی هندسی» را فراهم می‌کند که اساس کار هاتری فیلد است. ایدهٔ کار، ساختن ریاضیاتی برمبنای هندسهٔ ترکیبی است که در فیزیک کاربرد دارد. چون هندسه دارای منابع کافی برای ساختن المثناهای اعداد حقیقی است، می‌توان این استراتژی را زیباتر و طبیعیتر از کاربرد مکانیکی نتیجهٔ I.B به انجام رساند. به پیروی از مقالات برجس، نویسندگان روشی برای حذف اعداد و دیگر اشیاء ریاضی از نظریهٔ نیوتنی فضا، زمان و جاذبه ارائه می‌کنند. آنها مدعی‌اند که این کار برای نسبیت خاص نیز ممکن است. ولی برای هندسهٔ نسبیّت عام و مکانیک کوانتومی موانعی بروز می‌کند. آنها حدس می‌زنند که روش کلی I.B باید کاربردپذیر باشد، هرچند آن را به زیبایی نتوان به‌کار برد، و خاطرنشان می‌کنند که هیچ دلیل قاطعی وجود ندارد که این مسائل را حل‌ناپذیر تصور کنیم. از طرف دیگر، می‌گویند که حدسهای مربوط به قطعیت می‌تواند حدسهایی دربارهٔ مناطقی از مکان باشد، به‌طوری که اگر کسی فراتر از فیزیک واقعی برود، می‌تواند قطعیت بورل و احکام دیگر را صورتبندی کند که با استفاده از نظریهٔ مراتب بالاتر مجموعه‌ها، اما نه بدون آن، قابل اثبات باشند، اما آنها مسائل فلسفی را که از این فرض ناشی می‌شوند پیگیری نمی‌کنند.

با تعبیر ادعاهای وجودی دربارهٔ اعداد به‌صورت ادعاهایی دربارهٔ وجود امکانی [ممکن] ارقام مکتوب، تعبیر نامگرایانه‌ای از حساب براساس منطق موجهات به‌دست می‌آید. این ایده را بعداً چیهارا در مورد آنالیز محمولی[1] به‌کار برد. بحث در فصل II.B مجردتر است ولی یک اشکال مهم را تحلیل

1. predicative analysis

می‌کند: از وجود ممکن برای تحلیل وجود ریاضی استفاده می‌شود اما بعداً ریاضیات در مورد جهان واقعی به‌کار گرفته می‌شود. برای صورتبندی منطق این استراتژی، برجس از یک عملگر فعلیت و محمولهایی استفاده می‌کند که در بعضی از نشانه‌های آنها اشیاء بالفعل جای می‌گیرند و در بعضی غیر آن.

این نوع استراتژی را نمی‌توان فراتر از ریاضیات محمولی به‌کار بست مگر اینکه تدابیر مؤخر چیهارا پذیرفته شود، یعنی قبول وجود ممکن جملات باز که از زبان مفروضی نیستند و بنابراین تعبیر آنها نامعین است. «استراتژی مخلوط موجهات» در II.C صورتی از ساختگرایی موجهات مبتنی بر منطق مرتبهٔ دوم یا جانشینی برای آن است، مانند آنچه در کارهای هلمن دیده می‌شود. منطق مرتبهٔ دوم با تعبیر معمول از نظر نامگرایی قابل قبول نیست. اما برای مقاصدی، می‌توان منطق اجزاء[1] را به‌جای آن به‌کار برد، و منطق مرتبهٔ دوم با محمولهای یک‌موضعی که به‌عنوان منطق ساختمانهای متکثر[2] تعبیر می‌شود (همان‌طورکه جُرج بولوس پیشنهاد کرد) به‌وسیلهٔ بعضی از نامگرایان پذیرفته شده است. نویسندگان، منطق ساختمانهای متکثر را plethynticology [کثرت‌شناسی] نامیده‌اند، و این یکی از واژه‌سازیهای هوشمندانهٔ متعدد کتاب است (بعضی از این واژه‌سازیها، البته نه این یکی، جدی نیستند). نویسندگان این سؤال را که آیا کثرت‌شناسی واقعاً از نظر نامگرایی قابل قبول است فقط مطرح می‌کنند اما دربارهٔ آن بحث نمی‌کنند (ص ۱۵۵).

اگر در جایی‌که باید منطق مرتبهٔ دوم به‌کار رود از منطق اجزاء استفاده شود و بعد کثرت‌شناسی برای صعود به مرتبهٔ سوم به‌کار گرفته شود، قویترین نتیجه به‌دست می‌آید. (ابزار مرتبهٔ سوم به این خاطر به‌کار می‌رود که ابزار مرتبهٔ دوم دارای محمولهای یک‌موضعی است، اما خاصیت تسویر روی مجموعه‌های اعداد حقیقی را شبیه‌سازی می‌کند.) اگر اجزاء، اتم فرض شوند، منطق مرتبهٔ دوم به‌وسیلهٔ منطق اجزاء شبیه‌سازی می‌شود: برای ساختمان حساب کاملاً لازم است. نویسندگان از این فرض استفاده می‌کنند که دنباله‌ای نامتناهی از هویات، که اجزاء این دنباله نسبت به هم رابطهٔ جزئیت دارند، وجود (امکانی) دارند؛ این فرض معادل این است که چنین دنباله‌ای از هویات مجزا موجود باشد. چون این منطق (با در نظرگرفتن منطق اجزاء و کثرت‌شناسی) قویتر است، می‌توان آن را با منطق موجهات ساده‌تری به‌دست آورد.

استراتژیهای دیگری هم به‌طور خلاصه بررسی شده‌اند، و بعد، آنچه در کتاب آمده مربوط به نوشتگان موجود در بارهٔ ساختمانهای نامگرایی است. آن وقت است که به ما گفته می‌شود که استراتژی II.A از کارِ فیلد، II.B از کارِ چیهارا و II.C از کار هلمن نتیجه می‌شود، گرچه مقالات بعدی هلمن در فهرست مراجع نیامده است.[3]

1. mereology 2. plural

۳. این مقاله‌ها عبارت‌اند از
"Real analysis without classes", *Philosophia Mathematica*, ser. 3 vol. 2 (1994) 228-250;
"Structrualism without structures", ibid, vol. 4(1996) 100-123.

اواین بخش از نتیجه به تشکیک این ایده اختصاص دارد که حتی بازسازی موفقیت‌آمیز نامگرایی باید مطابق استانده‌های علمی متعارف، به نامگرایی (ه) منجر شود. نکات اصلی در این زمینه عبارت‌اند از اینکه نظریه‌های متعارف ریاضی روشنتر و مهارشدنی‌ترند، و اینکه اگر کسی دیدگاه شناخت‌شناسی «طبیعی گرایانه» را اختیار کند، آنگاه این نکته قابل توجه می‌شود که در تاریخ علم، صرفهٔ ناشی از هستی‌شناسی مجرد، مزیت علمی مهمی به حساب نمی‌آمده است. البته این نشان نمی‌دهد که اگر بیشتر دلایل فلسفی پیشینی برای نامگرایی که تاکنون بررسی شده‌اند معتبر باشند، دلیل مقنعی برای رد هویات مجرد وجود ندارد. در بخش نهایی، نویسندگان توضیحاتی به نفع بازسازیهای نامگرایی می‌دهند که حتی برای کسی که نامگرایی (ه) را رد می‌کند، از نظر فلسفی روشنگر است. آنها به وضوح این موضوع را مزیتی برای نامگرایی می‌دانند که با ریاضیات همان‌گونه که در علم به‌کار می‌رود برخورد کرده است، برخلاف ساختی‌گرایی[1] که غالباً چنین نکرده است. اما جالبترین دلیل از نظر آنها ظاهراً این است که این بازسازی نشان می‌دهد که ممکن بود نظریه‌های دیگری در باب جهان داشته باشیم حال آنکه جهان همین جهان باشد. این نکته بر نتیجه‌گیری منفی آنها درباره نامگرایی شناخت‌شناسانه اثر می‌گذارد: آیا این نشان نمی‌دهد که اگر نامگرایی (ب) موفق باشد، ترجیح نظریه‌هایی که روی اشیاء مجرد تسویر می‌کنند، بیش از آنچه که نویسندگان مجاز می‌شمارند ابزارگرایانه است؟

این کتاب محتملاً یک اثر استانده در موضوع خود خواهد شد؛ رقیبی واقعی در صحنه نیست. مقدار زیادی توصیف فنی و استدلال فلسفی به شیوه‌ای فشرده و عموماً ماهرانه در کتاب ارائه شده است. بعضی وقتها خواننده مأیوس می‌شود، زیرا نویسندگان نکات فلسفی را تا پایان پی نمی‌گیرند. جنبهٔ فنی آن نیز ممکن است به همین دلیل مأیوس کننده باشد: اگرچه کتابْ مقدمه‌ای است برای ورود به موضوع، شیوهٔ بیان آن بیشتر به سبک مقاله‌ای در کتاب راهنما شبیه است تا یک کتاب درسی. کسی که در پی یادگیری چگونگیِ بازسازیِ نامگرایی باشد خواهان یک توصیف مفصل و قدم‌به قدم و نظام مرتب‌تری از مراجعه به نتایج و شاید حتی تمرینات است. با فرض اینکه خواننده برای پاره‌ای جزئیات باید به مقالات مجله‌ها مراجعه کند، جداسازی مراجع از توصیف فنی اصلی باعث مشکلاتی می‌شود، هرچند این کار برای هموارسازی متن صورت گرفته باشد. با وجود این، در محدودهٔ اعلام‌شده، این کتابْ اثری برجسته و درخشان است، و خوانندگانی در سطوح مختلف و با علایق مختلف آن را آموزنده و چالشگرانه می‌یابند.

* * * * * *

• Charles Parsons, *The Journal of Symbolic Logic*, (1) **64** (1999) 391-394.

* چارلز پارسونز، دانشگاه هاروارد، آمریکا

1. constructivism

دیدگاه

در بارهٔ حرفهای همینگ

آیا «ریاضیات در سیاره‌ای دوردست»[1] را (احتمالاً در همین شمارهٔ نشر ریاضی[2]) خوانده‌اید؟ این نظرِ من است در بارهٔ آن مقاله؛ امیدوارم خواندنِ این مقاله برای خوانندگانِ بسیار جوانی که برایشان روشن نیست که همینگ در مواردِ زیادی زیادی بی‌راه گفته است بی‌فایده نباشد. این‌طور به نظرم می‌رسد که کلِّ مقالهٔ همینگ نشان می‌دهد که چگونه می‌توان در حوزه‌ای آدمِ برجسته‌ای بود و در حوزه‌هایی دیگر، با درست و دقیق و روشمند دنبال نکردنِ سؤالات، و با التزامِ عملیِ ناخودآگاهانه به این اصل که «آنچه نمی‌فهمم مهمل است» حرفهایی زد که اگر مهمل نیست، باری آشکارا و به‌طورِ عینی غلط است. فقط در چند مورد می‌کوشم در بارهٔ حکمهای جزم‌اندیشانهٔ همینگ به اختصار نکاتی بگویم.

◇ «اگر من یک تابع پیوستهٔ [...] داشته باشم و مختصات را ۴۵° دوران بدهم، آن تابع دیگر پیوسته نیست، و حتی تابع هم نیست!» «تحریف ایدهٔ اولیه و شهودی پیوستگی به‌نحوی که اکنون وابسته به مختصات شده است به نظر من کار بیهوده‌ای است.»

بدتر (؟) از این هم رخ‌دادنی است: به‌سادگی می‌توان مجموعه‌ای از نقاطِ صفحه اختیار کرد که با انتخابِ یک دستگاهِ مختصاتْ نمودارِ تابعی پیوسته، و با انتخابِ دستگاهی دیگر نمودارِ تابعی ناپیوسته باشد.[3] خُب؛ که چه؟ فرض کنیم واقعاً «نه اویلر و نه فوریه هیچ‌یک نمی‌توانسته‌اند با چنین چیزی موافق باشند»؛ فرض کنیم این بزرگان معتقد نبوده‌اند ــ یا به هر حال توجه نداشته‌اند ــ که باید برای آنالیزِ ریاضی مبانیِ قابلِ اعتمادی داشت؛ تکلیفِ ما چیست؟ آیا ترجیح می‌دهید که منظورمان از «پیوستگی» را دقیقاً نگوییم که چیست و بعد با ــ مثلاً ــ ریاضیدانانِ سیاره‌ای دوردست درگیرِ بحثی احتمالاً بی‌نتیجه شویم در بارهٔ اینکه فلان حکمِ خاص (مثلاً در مورد پیوستگیِ حدِ توابع پیوسته) درست است یا نه؟[1] آیا پیوستگیِ یکنواخت هم مفهومی جعلی و مِن‌عندی است؟ اگر چنین است لازم است بر ما روشن شود که اصلاً شاخه‌ای به نامِ «آنالیزِ ریاضی» موجودِ مشروعی هست یا نه (در بارهٔ «نه»ی احتمالیِ همینگ حرفی دارم)؛ و اگر که آنالیزِ ریاضی جزء مهمی از ریاضیات است باید بتوان درستی یا نادرستیِ فلان «اثبات» در آن را بررسی کرد. این پدیدهٔ شناخته‌شده‌ای است که بسا که تعریفِ صوریِ دقیقْ همه‌ی تصور شهودیِ ما از مُعرَّف را در برنگیرد، اما، بالاخره، این بهایی است که باید برای دقت و امکانِ ارتباط بپردازید، جنابِ شادروان همینگ!

□ «زمانی [...] قوانینِ تفکرِ بول را خواندم و آن را جالب توجه، ذی‌ربط، و معقول یافتم. ولی وقتی حتی مقدمات منطق ریاضی را بررسی می‌کنم می‌بینم حاوی موشکافیهای نامعقولی است؛ من نمی‌توانم باور کنم که هیچ‌یک

1. R.W. Hamming, "Mathematics on a distant planet," *The American Mathematical Monthly*, (7) **105** (August-September 1998) 640-650.

۲. صص ۳۸ـ۴۵؛ قولها از این ترجمه نقل شده است.

۳. مثلاً نگاه کنید به

Hugh Thurston, "Can a graph be both continuous and discontinuous?," *The American Mathematical Monthly*, (9) **96** (November 1989) 814-815.

۱. در ۱۸۲۱ کوشی «قضیه»ای منتشر کرد با این مدعا که حدِ هر سری از توابع پیوسته پیوسته است؛ آبل در ۱۸۲۶ در پانوشتِ مقاله‌ای نوشت که این قضیه استثناهایی دارد! ضمیمهٔ اولِ این کتابِ معروف تحلیلِ جالبی از این موضوع است:

Imre Lakatos, *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, edited by John Worrall and Elie Zahar, Cambridge University Press, Cambridge, 1976 (reprinted with corrections, 1991).

از این موشکافیها و تمایزات ظریف، یا حتی همهٔ آنها روی هم، بتواند عدد اولی را به عدد مرکب تبدیل کند، یا قضیهٔ انتگرال کوشی را باطل سازد [...] به نظر من کارهای منطقدانان ظاهراً ربطی به ریاضیات ندارد، و منطق یک بازی ذهنی است که ریاضیدانان برای سرگرمی خودشان به آن می‌پردازند.»

شخصاً یادم نمی‌آید جایی خوانده باشم که قرار بوده است با منطق بتوان عددِ اولی را مرکب کرد یا قضیهٔ انتگرالِ کوشی را باطل کرد ...؛ به هر حال، لطفاً این قطعه را با قطعهٔ زیر که شاید روزی از دفترِ خاطراتِ یکی از باستانیان پیدا شود مقایسه کنید:

> یادش به خیر. وقتی درکنارِ نیل پاپیروس‌های مصری را می‌خواندم (یا بیشتر از آن: پیش از آن دوره، وقتی که با پدران و پدرانِ پدرانِ نویسندگانِ این پاپیروس‌ها مراوده داشتم) بحثهایشان را جالبِ توجه و ذی‌ربط و معقول می‌یافتم: آنها عملاً نشانم می‌دادند که چطور با ریسمانْ گوشه‌هایی بسازم مثلِ گوشه‌های برگهای نشر ریاضی؛ یادم می‌دادند که چطور بفهمم که برای کاشتِ زمینِ گردِ من بذرِ بیشتری لازم است یا برای کاشتِ زمینِ چهارگوشِ شمعون، و غیرذلک. اما حالا، حتی مقدماتِ کتابِ آقای اقلیدس را هم که بررسی می‌کنم می‌بینم حاویِ موشکافی‌های نامعقولی است در بارهٔ چیزهای بی‌جهتْ پیچیده‌ای به نامِ «زاویهٔ قائمه»، «دایره»، «مساحت»، و غیرذلک. من نمی‌توانم باور کنم که هیچ‌یک از اینها . . . اینها صرفاً یک بازیِ ذهنی است که . . . .

□ «سالها پیش، روزی مقاله‌ای در بارهٔ عددهای محاسبه‌ناپذیر به‌دست گرفتم که بخوانم. ناگهان به این فکر افتادم که وقتی این عددها هرگز [در عمل] مطرح نمی‌شوند چرا زحمت [مطالعهٔ آنها را] به خود بدهیم؟ این بود که مقاله را نخوانده در سطل آشغال انداختم.»

آفرین! (فقط نگرانم که نکند در بخشی از آن مقاله توضیحی هم داده شده بوده است که چرا بعضیها به خود زحمتِ مطالعهٔ این عددها را می‌دهند!) اما آیا تا به حال در اطرافتان کرهٔ هفت‌بعدی، گروهِ گالوا، فضای توپولوژیکِ متریک‌ناپذیر، یا ... دیده‌اید؟ نمی‌دانم (هرچند می‌توانم حدس بزنم) که، پس، چرا نویسنده فقط به منطق حمله می‌کند؛ اجازه دهید با انتخابِ دیدگاهِ همینگی به نحوِ سازگاری پیش برویم و نتایجِ حرفهایمان را هم قبول کنیم و بی‌پرده و بی‌پروا بگوییم که تنها نوعِ قابلِ احترامِ ریاضیاتْ ریاضیاتِ کاربردی است ــ و آیا استدلالهای همینگ، به چیزی جز این می‌تواند بینجامد؟

نمی‌خواهیم واردِ بحثِ محض/کاربردی بشوم[1]؛ فقط می‌خواهم توجهِ خواننده را به این موضوعِ نسبتاً بدیهی جلب کنم که هر علم و فنّ و هنری ضوابطِ داخلیِ خودش را برای تشخیصِ سره از ناسره دارد؛ شما می‌توانید با رشته‌ای روابطِ عاشقانه برقرار کنید یا از آن متنفر باشید یا اصلاً حالِ نگاه کردن به آن را نداشته باشید، اما، حداقل تا وقتی که اطلاعتان از شاخه‌ای به اندازهٔ «اطلاع» همینگ، از ــ مثلاً ــ منطق کم است (□های بعدی را ببینید)، باید در اظهارِ نظر در موردِ اهمیت و ارزش و زیباییِ این شاخه‌ها بیشتر احتیاط کنید. ریاضیدانی که علومِ مهندسی را به چیزی نمی‌گیرد چون «دقیق» نیست؛ جانورشناسی که فلسفه را تحقیر می‌کند چون «نظام‌مند» نیست؛ آن آقای سخنران که می‌گوید معماریِ مدرن بد است چون «هارمونی» ندارد ــ همهٔ اینها، اگر قصدشان فریفتنِ عوام نباشد، در اظهارِ نظرهایشان همان‌قدر خام‌اند که همینگ.[1]

□ «تورینگ در ۱۹۵۷ ماشینِ (خیالی، نه واقعی) تورینگ را وارد منطق کرد تا به آرزوی هیلبرت در مورد دستیابی به اثباتهای مکانیکی جامهٔ عمل بپوشاند [...]» الخ.

الن تورینگ[2] (۱۹۱۲ـ۱۹۵۴) در نیمهٔ دومِ دههٔ ۱۹۳۰ چند مقاله منتشر کرد که به واسطهٔ آنها او را از بنیانگذارانِ نگرهٔ محاسبه‌پذیری یا نگرهٔ بازگشت می‌دانند ــ موضوعِ این علم تبیینِ مفهومِ «محاسبه‌پذیری» برای توابعِ جزئی از N^k به N است. ماشینِ تورینگ را تورینگ در ۱۹۳۷ در مقاله‌ای معرفی کرد[3] و با آن مسألهٔ هیلبرت در موردِ تعیین‌پذیریِ منطقِ مرتبهٔ اول [Entscheidungsproblem] را با جوابِ منفی حل کرد. و آیا کسی بوده است که عدد را همان نمایشِ عدد بداند؟ و آیا نمی‌توانیم بگوییم که رشته‌ای داخواه برنامه است یا نه؟ در اینجا به هیچ روی با یک نظرِ «فلسفی» سر و کار نداریم که بتوانیم با آن موافق باشیم یا نباشیم یا اینکه آن را پخته بیابیم یا نیابیم؛ اینها، حرفهای همینگ در بارهٔ کارهای تورینگ، پُر است از خطاهای تاریخی و ریاضی، و از چنین مقدماتی، نتیجه‌گیریهای همینگ چندان هم غریب نیست. [کسی که نگرهٔ محاسبه‌پذیری درس می‌دهد می‌تواند برای اذیت کردنِ شاگردانش موظفشان کند که برای جلسهٔ دومِ کلاس، همه‌ی غلطهای این چند پاراگراف را بنویسند و تحویل دهند!]

□ «حالا توجه کنید به قضیهٔ معروف لوونهایم‌ـاسکولم در منطق، که می‌گوید هر مجموعهٔ متناهی از اصول، مدلی شمارش‌پذیر دارد [...] ولی اگر چنین است، چگونه می‌توان با استفاده از تعدادی متناهی اصل، شمارش‌ناپذیریِ عددهایی را که به‌وسیلهٔ آن اصول تعریف می‌شود ثابت کرد، چون مسلماً آنچه می‌توانید صرفاً از اصول استنتاج کنید باید در مورد هر مدلی از آنها صادق باشد.» «پارادکسِ لوونهایم‌ـاسکولم ظاهراً استدلال کانتور در مورد شمارش‌ناپذیری را مخدوش می‌کند.»

اول. اثباتِ کانتور، به نظرِ من، از اوجهای زیباییِ ریاضیات است.

آیا همینگ با این حکمِ معادلْ مشکلی دارد؟:

> به ازای هر دنبالهٔ $\{c_j\}_{j\in N}$ از اعدادِ حقیقی، عددِ حقیقی‌ای هست که هیچ‌یک از c_jها نیست.

و این را به‌راحتی می‌توان با استفاده از خاصیتِ کوچکترین کرانِ بالا اثبات کرد[4]: از c_jها یک دنبالهٔ اکیداً صعودیِ $\{a_k\}$ و یک دنبالهٔ اکیداً صعودیِ

۱. به‌ویژه که بعید است بتوانم نظرم را بهتر از این مقاله توضیح دهم:

پال هالموس، «ریاضیات کاربردی بد ریاضیاتی است»، ترجمهٔ محمدرضا بهاری، نشر ریاضی، سالِ ۳ شمارهٔ ۱ و ۲ (مردادِ ۱۳۶۹)، صص. ۵۴ـ۵۹.

۱. نیز نگاه کنید به: اسماعیل خوئی، «چکادی برفپوش، یا هوای پاک زمستانی»، در باغ بی‌برگی، به اهتمامِ مرتضی کاخی، نشر ناشران، تهران، ۱۳۷۰، صص. ۲۲۳ـ۲۳۹.

2. Alan M. Turing 3. "On computable numbers with an application to the *Entscheidungsproblem*."

۴. توجه کنید که در اثباتِ کانتور هم از این خاصیتِ $\mathbb{R}$ به‌نحوی اساسی استفاده می‌شود: اصلاً می‌توان این خاصیت را این‌طور بیان کرد که هر بسطِ اعشاریِ عددی حقیقی را نمایش می‌دهد (این نکته را در درسِ ریاضیاتِ عمومیِ آقای دکتر سیاوش شهشهانی یاد گرفته‌ام).

$\{b_k\}$ جدا کنید که هر a_m از هر b_n کوچکتر باشد؛ حدِ a_kها هیچ c_jای نیست.

دوم. قضیهٔ لوونهایم-اسکولم (که در آن لازم نیست تعدادِ اصولْ متناهی باشد) قضیه‌ای است در منطقِ مرتبهٔ اول (یعنی منطقی که دامنهٔ تغییرِ سورهای فرمولهایش اعضای عالَمِ سخن است و نه زیرمجموعه‌های آن)، و می‌توان دید که خاصیتِ کوچکترین کرانِ بالا با هیچ مجموعه‌ای از اصولِ مرتبهٔ اولْ قابلِ بیان نیست؛ پس اگر با اصولی در موردِ میدانهای مرتبِ کامل شروع کنیم روشن نیست که بتوان از قضیهٔ لوونهایم-اسکولم استفاده کرد.

سوم. بحث را ادامه دهیم. $\mathbb{R}$ را می‌توان در نگرهٔ مجموعه‌ها (ZFC) ساخت، و می‌توان اثبات کرد که ناشمارا است. فرض کنیم ZFC سازگار باشد؛ در این صورت، طبقِ قضیهٔ لوونهایم-اسکولم، یک مدلِ شمارای $\mathfrak{M}$ از ZFC وجود دارد. به واسطهٔ مدلِ ZFC بودن، در جهانِ $\mathfrak{M}$ مجموعه‌ای هست که خواصِ اعدادِ حقیقی را دارد، و از جمله ناشمارا است — چطور چنین چیزی ممکن است؟ این‌طور: مفهوم شمارا بودن/نبودن، در اصطلاح نگرهٔ مجموعه‌ها، مطلق نیست، یعنی ممکن است مدلی «معتقد باشد» که مجموعه‌ای ناشمارا است، در حالی که آن مجموعه در «عالَمِ واقع» شمارا باشد. این، اگر که تأمل کنید، چندان عجیب نیست: شمارا بودنِ A یعنی وجودِ نگاشتِ یک به یکِ fای از A به $\mathbb{N}$؛ قابلِ تصور است که در موردِ Aی شمارایی، هیچ‌کدام از این fها در $\mathfrak{M}$ نباشد و بنابراین در $\mathfrak{M}$ مجموعهٔ A ناشمارا محسوب شود. [مثالی ساده‌تر: در عالَمِ واقع، مجموعهٔ $x = \{۵, ۱۱, ۷۷\}$ زیرمجموعهٔ $y = \{۵, ۱۱, ۲۶, ۱, ۶\}$ نیست، اما در مدلی با جهانِ $M = \{x, y, ۵, ۱۱, ۱, ۶\}$ حکمِ "$x \subseteq y$" درست است چرا که در بینِ اعضای جهانِ مدل، هر چه در x است در y هم هست.]

******

در حرفهای همینگ اشکالاتِ دیگری هم هست: آنچه در بارهٔ برهانِ خُلف و خودْارجاعی می‌گوید، حرفهایش در موردِ مقایسهٔ توانِ مجموعه‌های نامتناهی، اصرارِ — به نظرِ من — ناموجه‌اش بر اینکه قوانینِ فیزیکیِ حاکم بر سیاراتِ دوردست مثلِ دنیای ما است، و چند موردِ دیگر — و البته نظرهای فلسفیِ همینگ در بارهٔ ریاضیات هم هست که من در اینجا قصد ندارم در مقابلشان موضعی بگیرم (پاراگرافِ زیبای پایانِ مقالهٔ او را بخوانید). حرفِ آخرم این است که گرچه با بسیاری از حرفهای همینگ مخالفم، بر آنم که نحوهٔ بیانش عالی است: این لحنِ تندِ جاندار، برخلافِ نظرِ کسانی که زیبانویسان را به «ادب» توصیه می‌کنند، بسیار اندیشه برانگیز است. ■

کاوه لاجوردی
پژوهشگاه دانشهای بنیادی
kaave@vax.ipm.ac.ir

همینگ، روئل، و سیارهٔ دوردست

همینگ در مقاله (یا سخنرانی) خود[1] مدّعی است که هدف اصلیش برانگیختن مخاطب به تفکر مستقل در مورد ریاضیات است، ولی لحن تند و تیز او احتمالاً در بعضیها بیشتر عکس‌العملهای احساسی و خصمانه برمی‌انگیزد تا تفکر و تأمل خونسردانه و عقلانی. از آنجا که این نوع حمله به جریانهای اصلی ریاضیات قرن بیستم در میان اقلیتی از ریاضیکاران و شاید اکثریتی از استفاده‌کنندگان از ریاضیات نامعمول هم نیست، به نظر می‌آید چیزی سوای سبک شخصی همینگ نیز در آن دخیل باشد. شاید مشهورترین مورد مشابه در میان اهل ریاضیات، موضع خصمانهٔ کارل لودویگ زیگل یکی از ریاضیدانان نامدار قرن بیستم است در برابر آنچه که او تجریدگرایی افراطی و زبان نامفهوم ریاضیات معاصر می‌خواند. زیگل در زمان حیات خود مانع از آن شد که مؤسسهٔ ریاضیات شهر بُن که شهرت جهانی داشت ولی زیگل آن را تحت نفوذ بورباکی می‌دانست، به زنجیرهٔ مؤسسات تحقیقاتی ماکس پلانک آلمان بپیوندد. او که خود کاشف نتایج مهمی در نظریهٔ اعداد بود به شدت از آنچه انحرافات گرایشهای تحقیقاتی نوین در نظریهٔ اعداد تلقی می‌کرد انتقاد می‌کرد و به‌خصوص کتابهای سرژ لانگ در هندسهٔ دیوفانتی و نظریهٔ جبری اعداد را آماج حملات بسیار تندی قرار داد. پس از اثبات قضیهٔ آخر فرما توسط اندرو وایلز در چارچوب برنامه‌های نوگرایانی که مورد انتقادات تحقیرآمیز زیگل بودند، سرژ لانگ فرصتی یافت که از موضع قدرت به نوعی تسویه حساب ایدئولوژیک با زیگل بپردازد [۱]. موریس کلاین نیز که آثار معروفی در تاریخ و فرهنگ ریاضیات دارد از منتقدین سرسخت گرایشهای نو و مجرد در ریاضیات قرن بیستم محسوب می‌شود (به کتاب [۲] از وی مراجعه کنید). این نوع انتقاد و حتی عناد با ریاضیات رایج، در میان مصرف‌کنندگان خارجی محصولات ریاضی مانند فیزیکدانان و مهندسان حتی رواج بیشتری دارد. این متخصصان وقتی به مقتضای ضرورت به آثار ریاضیات معاصر مراجعه می‌کنند، اغلب خود را مواجه با نوشتگانی می‌بینند که به زبان نامأنوسی نگارش یافته و بعضاً شک می‌کنند که اصلاً ریاضیات نوین چیزی بجز یک زبان پیچیدهٔ خالی از محتوا باشد.

این یک واقعیت تاریخی است که یکی از اشتغالات عمدهٔ ریاضیدانان در اوایل قرن بیستم ایجاد و گسترش زبانی پرتوان و دقیق برای ریاضیات، مبتنی بر نظریهٔ مجموعه‌ها، بود که از یک سو مبنای هستی‌شناسانهٔ جدیدی برای ریاضیات پدید آورد و ریاضیات را از قیود جهان مادی رهایی بخشید، و از سوی دیگر منجر به ایجاد شکاف عمیقی میان زبان جامعهٔ ریاضی و زبان جوامع علمی دیگر شد. این شکاف تدریجاً با رسوخ زبان جدید

۱. مراجعه کنید به همین شمارهٔ نشر ریاضی، صص ۳۸-۴۵.

ریاضیات به برنامه‌های ریاضی سطوح ابتدایی و متوسطه در حال پرشدن است ولی نمی‌توان نسبت به آن احساس غریبگی که نسل قدیمیتر ریاضیدان و مصرف‌کنندهٔ ریاضی نسبت به نوشتگان ریاضی معاصر پیدا کرده است و نیز نسبت به دشواری دستیابی به کشفیات مهم ریاضیات معاصر، بی‌اعتنا بود. اکثر ریاضیدانان به حقّانیت و اهمیت زبان نوین ریاضیات در پیشبرد و تکامل جریان تاریخی این علم اعتقاد دارند و موفقیتهای چشمگیری را که در قرن بیستم در حلّ مسائل بغرنج باقیمانده از اعصار گذشته نصیب ریاضیات شده است تا حدی مرهون این تحول می‌دانند، لیکن سستی ریاضیدانان در تبلیغ محاسن و کارایی این زبان و بیان نتایج جدید به زبان قابل استفادهٔ افراد غیرحرفه‌ای بی‌شک عامل بزرگی در پدیدآمدن سوءتفاهمات عمومی نسبت به فعالیتهای ریاضی معاصر بوده است.

ورای این‌گونه سوءتفاهمها نسبت به اشتغالات فکری ریاضیدانان که عمدتاً ناشی از فقدان آشنایی به زبان ریاضی است، مقالهٔ همینگ نکتهٔ مهمی در باره «ضرورت» و «اجتناب‌ناپذیری» بخشی از ریاضیات که وی آن را «مستحکم» خوانده است مطرح می‌کند. از نظر همینگ ریاضیات مستحکم ریاضیاتی است که به طور مستقیم و ضروری بازتابی در جهان خارج دارد و هیچ‌گونه تغییر در تعاریف و اصول نمی‌تواند اعتبار آن را خدشه‌دار سازد. به اعتقاد او این ریاضیاتی است که می‌توان انتظار داشت در سیاره‌ای دوردست نیز یافت شود و در نظام ارزشی همینگ این نوع ریاضیات از جایگاه و منزلتی رفیعتر از سایر نتایج ریاضی برخوردار است. روئل در مقالهٔ خود با مسأله‌ای نزدیک به این موضوع درگیر می‌شود. بدون قائل‌شدن یک نظام ارزشگذاری مبتنی بر قابلیت استفاده، وی نیز معتقد است که بخشهای بزرگی از ریاضیات موجود برحسب تصادف تاریخی یا به سبب ویژگیهای خاص کارکرد ذهن انسان پدید آمده‌اند و برخاسته از هیچ ضرورتی نیستند. به اعتباری می‌توان نظرات هیلبرت در باب فلسفهٔ ریاضی را نوعی پیشینهٔ این طرز تفکر دانست. هیلبرت معتقد بود که هسته‌ای لایزال از ریاضیاتِ اساساً متناهی وجود دارد ولیکن دستیابی بهینه به این هستهٔ مرکزی باید از طریق ریاضیات عامتری باشد که مفاهیم نامتناهی را نیز دربرمی‌گیرد. از آنجا که او محدود ساختن ریاضیات را مرتجعانه قلمداد می‌کرد و اطمینان خاطر داشت که گسترش دامنهٔ ریاضیات دستیابی به هستهٔ مرکزی را سهلتر می‌سازد و بینش ما را نسبت به آن غنا می‌بخشد، درصدد برآمد که ضوابط قابل اعتمادی برای به‌کارگیری اشیاء نامتناهی وضع کند.

چگونه همینگ می‌تواند مطمئن باشد که موجودات هوشمند سیارهٔ دوردست به قضیهٔ انتگرال کوشی اعتقاد داشته باشند یا اصلاً زبان و مفاهیم مناسبی برای بیان آن در دست داشته باشند؟ مگر نه این است که قضیهٔ انتگرال کوشی، معادلات ماکسول، قوانین مکانیک و بسیاری قضایا و قوانین دیگر که همینگ برای آنها ارزش عینی قایل است به زبان حساب دیفرانسیل و انتگرال که خود بر پایهٔ پیوستار ریاضی بنا شده است بیان می‌شوند؟ مگر «پیوستار» از ساخته‌های ذهنی انسانهای کرهٔ خاک نیست؟ مگر ناتوانی قوهٔ بینایی ما در تمیز نقاط نزدیک به هم توهم پیوستار را پدید نیاورده است؟ کوانتومی‌بودن ساختار جهان که نظریهٔ غالب در میان نظریات مربوط به جهان مادی است جایی برای پیوستار طبیعی باقی نمی‌گذارد. ساکنان سیارهٔ دوردست ممکن است ادراکی کاملاً گسسته (دیجیتال) از جهان داشته باشند و ریاضیات و مفاهیم فیزیکی این موجودات به جای اینکه مبتنی بر معادلات دیفرانسیل باشد، می‌تواند بر پایهٔ معادلات تفاضلی یا مفاهیمی کاملاً متفاوت از آنچه ما به آنها خوگرفته‌ایم بنا شده باشد. چه بسا در عصر دیجیتالی که فراروی موجودات کرهٔ خاک است، استفاده از کامپیوترهای ساخته شده براساس معادلات دیفرانسیل (پیوستهٔ) الکتریسیته، ظهور ریاضیات گسسته از نوعی جدید و انقلابی را به ارمغان آورد که ریاضیات گذشته را صرفاً یک بازی ذهنی ناشی از ضعفهای ادراکی و محاسباتی انسان ماقبل کامپیوتر بنمایاند. حتی اگر چنین شود، نقش تاریخی ریاضیات پیوسته در فرا آوردن چنین تحولی از میان نمی‌رود. ریاضیاتی که در حول و حوش مفهوم پیوستار شکل گرفته است بزرگترین دستاورد فکر انسان تا این تاریخ است و زبان ریاضیات معاصر نیز به طور طبیعی برای بیان این دستاورد شکل گرفته است. شاید سال جهانی ریاضیات فرصتی مناسب برای زدودن احساس غریبگی کسانی باشد که به سبب ناآشنایی با این زبان از ریاضیات معاصر قهر کرده‌اند.

مراجع

1. Serge Lang, " Mordell's Review, Sigel's letter to Mordell, diophantine geometry, and 20th century mathematics, in *Notices Amer. Math. Soc.*, (3) **42** (1995), 339-350.

2. Morris Kline, *Why Johnny Can't Add: The Failure of New Mathematics*, Vintage Books (1974).

* * * * * *

سیاوش شهشهانی
دانشگاه صنعتی شریف و پژوهشگاه دانشهای بنیادی

shahshah@ipm.ac.ir

حقیقت به‌ندرت خالص است، و هرگز ساده نیست.

اسکار وایلد

NASHR-E RIYĀZI

Volume 11, Number 1, April 2000

Editorial Board

M. ARDESHIR, O.A.S. KARAMZĀDEH, S. KĀZEMI,
K. LĀJEVARDI, S. SHAHSHAHĀNI (chairman), Y. TĀBESH

Nashr-e Riyāzi is a Persian-language, expository mathematics journal published biannually (in April and October) by Iran University Press.

Annual subscription rates (including airmail postage) are: Middle East £ 19, Europe & Asia £ 21, North America & Far East £ 26.

For more information write to Iran University Press, 85 Park Avenue, Tehrān 15134, Iran, or contact ⟨nashriaz @vax.ipm.ac.ir⟩.

CONTENTS

* An asterisk indicates that the article was originally published elsewhere. Complete address of the original article appears at the end of the article.

ISSN: 1015-2857

از کتابهای مرکز نشر دانشگاهی

- **از فیثاغورس تا اینشتین**
  کورت اوتو فریدریشس
  ترجمهٔ همایون معین
- **نظریهٔ نمونه‌گیری و کاربردهای آن (در دو جلد)**
  علی عمیدی
- **آمار ریاضی**
  جان فروند
  ترجمهٔ علی عمیدی و محمدقاسم وحیدی‌اصل
- **فرایندهای تصادفی**
  شلدون م. راس
  ترجمهٔ عین‌اله پاشا
- **نخستین درس در علم کامپیوتر (جلد اول)**
  فورسایت، کینان، اورگانیک، ستنبرگ
  ترجمهٔ احمد توحیدی، محمود روغنی، ناصر قاسم‌آقایی، مصطفی کرمانی
- **ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی از دیدگاه کاربردی (در دو جلد)**
  رالف گریمالدی
  ترجمهٔ علی عمیدی
- **گامهایی در جبر تعویضپذیر**
  رودنی شارپ
  ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی