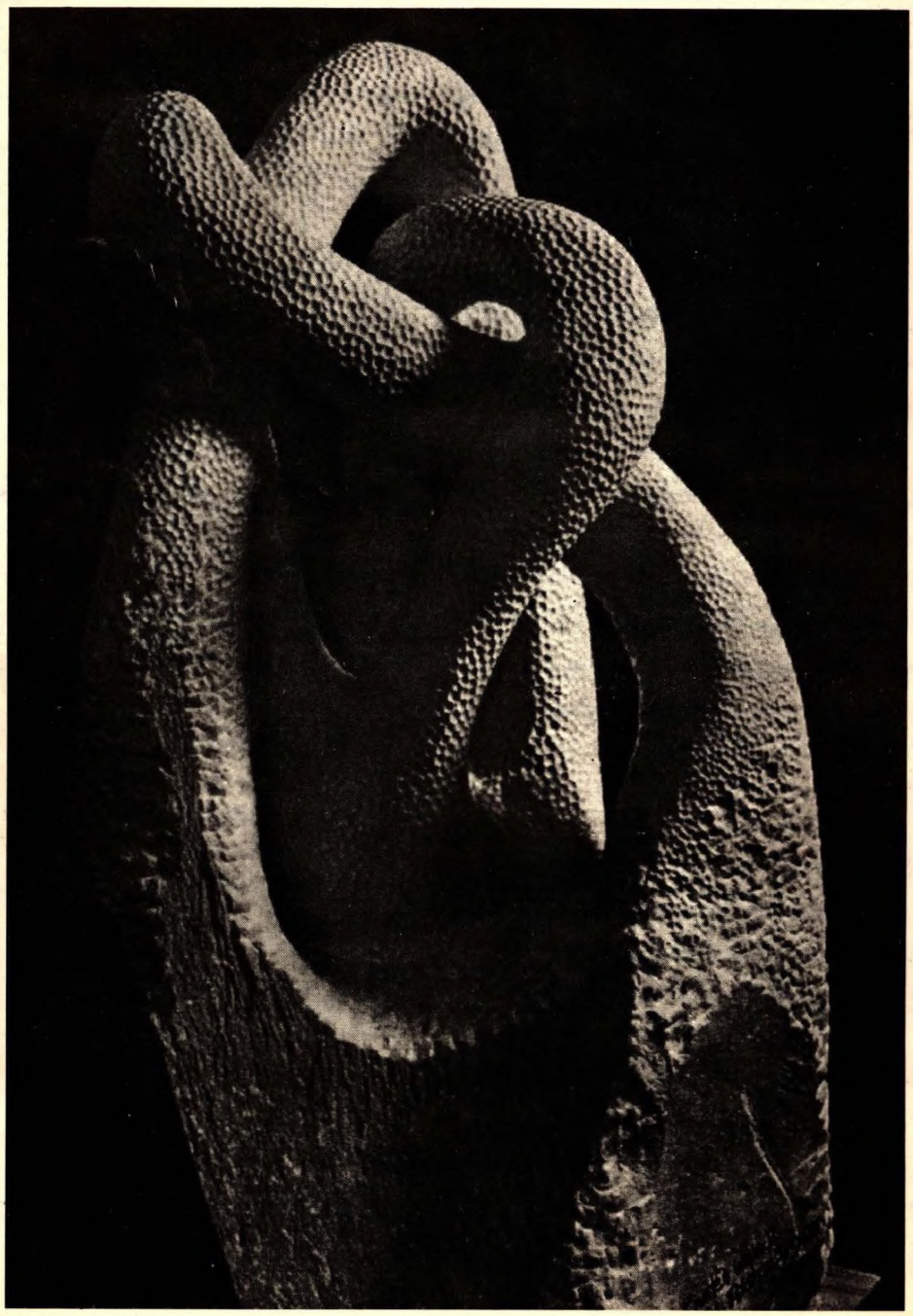
شیرازه

سال ۱۰، شمارهٔ ۱

شمارهٔ پیاپی: ۱۹



بسم‌الله الرحمن الرحیم

مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

شمارهٔ ۸۵ خیابان پارک خیابان دکتر بهشتی، تهران ۱۵۱۳۴

بهای این شماره ۴۰۰۰ ریال؛ حق اشتراک سالانه برای داخل کشور ۸۰۰۰ ریال.
(برای دانشجویان با ۳۰٪ تخفیف)

وجه اشتراک به حساب شمارهٔ ۹۰۰۰۹ بانک ملی شعبهٔ خیابان پارک تهران به نام مرکز نشر دانشگاهی واریز شود.

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر شش ماه یک بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجّه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی پژوهان فارسی زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چهارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبک مقاله‌های چاپ‌شده در *نشر ریاضی* باشد. به همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حک و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ شدهٔ در *نشر ریاضی* باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۱۰، شمارهٔ ۱

تاریخ انتشار: اسفند ۱۳۷۷

شمارهٔ پیاپی: ۱۹

nashriaz@rose.ipm.ac.ir

صاحب امتیاز: مرکز نشر دانشگاهی

مدیر مسؤول: سیاوش شهشهانی

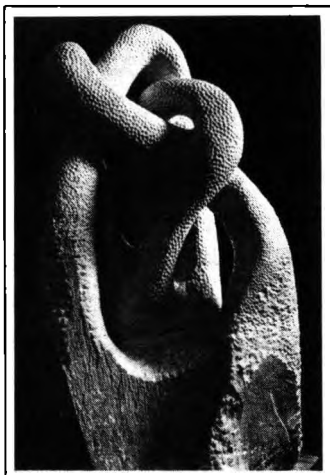
فهرست

گفتگو

مقاله‌ها

مسأله

کتاب



روی جلد

تصویر مجسمه‌ای مرمرین از لای گره خورده، اثر هلامن فرگوسن، در سالن ورودی مرکز هندسهٔ دانشگاه مینه‌سوتا.

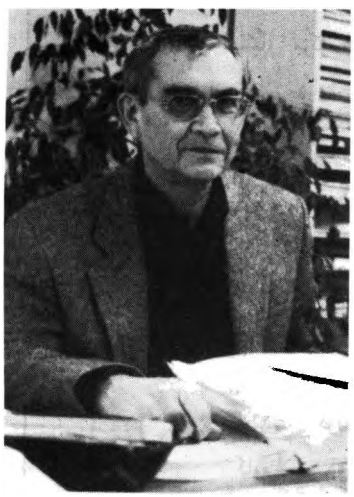
تصویر از کتاب توپولوژی و هندسهٔ سه‌بعدی اثر ترستن.

رک. «توپولوژی و هندسهٔ سه‌بعدی».

گفتگویی با یوری منین

اثباتِ خوب اثباتی است که بر آگاهی ما بیفزاید

یوری منین (Yuri I. Manin) از ریاضیدانان مشهور معاصر روسیه و اکنون استاد مؤسسهٔ ریاضیات ماکس پلانک در شهر بُن آلمان است. تحقیقات منین دامنهٔ گسترده‌ای دارد که شامل منطق ریاضی، نظریهٔ اعداد، هندسهٔ جبری، و فیزیک ریاضی می‌شود. این مصاحبه را مارتین آیگنر (Martin Aigner) و واسکو اشمیت (Vasco A. Schmidt) با منین انجام داده‌اند و متن در آن ویژه‌نامهٔ مجلهٔ *اینتلیجنسر* به مناسبت برگزاری کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان (برلین، ۱۹۹۸)، به چاپ رسیده است.



○ *کنگرهٔ بین‌المللی امسال آخرین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات در قرن بیستم است. آیا به نظر شما امکان دارد کسی چون هیلبرت بیاید و فهرستی از مسأله‌های معاصر عرضه کند که همتراز مسأله‌های هیلبرت باشند؟*

من واقعاً عقیده ندارم که فهرست هیلبرت نقش مهمی در ریاضیاتِ این قرن داشته است. البته از لحاظ روانی برای بسیاری از ریاضیدانان اهمیت داشته است؛ مثلاً آرنولد به من می‌گفت در اوایل تحصیل خود در دورهٔ پس از کارشناسی، فهرست مسائل هیلبرت را در دفترچه‌اش یادداشت کرده و همیشه آن را به همراه داشته است. ولی وقتی گلفاند از این موضوع اطلاع می‌یابد، آرنولد را به این خاطر به باد تمسخر می‌گیرد. آرنولد مسأله حل کردن را بخش اساسیِ دستاوردهای مهم ریاضی می‌دانست. ولی من نظر دیگری دارم. من فرایند ابداع در ریاضیات را پی‌بردن به الگوهایِ از پیش موجود می‌دانم. وقتی شما به مطالعهٔ مبحثی می‌پردازید ــ توپولوژی، احتمال، نظریهٔ اعداد، یا هر چیز دیگر ــ نخست یک دیدگاه کلی در بارهٔ تمام قلمروِ موضوع به دست می‌آورید و سپس توجهتان را روی بخشی از آن متمرکز می‌کنید. آنگاه سعی می‌کنید بفهمید «در آنجا چه خبر است؟» و «دیگران قبلاً به چه چیزهایی پی برده‌اند؟» پس مقاله‌های دیگران را می‌خوانید و بالاخره می‌توانید شروع کنید به کشف چیزی که قبلاً هیچ‌کس به آن پی نبرده است.

○ *آیا اهمیت زیاددادن به حل مسأله، نوعی دیدگاه رومانتیک نیست: قهرمان بزرگی که قله‌ها را فتح می‌کند؟*

چرا، تا حدی یک نوع دیدگاه ورزشی مآب است. نمی‌گویم کلاً بی‌ثمر است. از لحاظ روانی برای جوانان مهم است که احساس کنند در صورت کسب دستاوردهای بزرگ، از نوعی اعتبار اجتماعی برخوردار می‌شوند. هر مسألهٔ خوب، تبلورِ بصیرت یک ذهنِ نیرومند ریاضی است، ذهنی که نمی‌توانسته راههای منتهی به یک قله را تشخیص دهد ولی وجود کوه را تشخیص می‌داده است. ولی این [رهیافتِ مبتنی بر حل مسأله] راه درک ریاضیات و راه عرضهٔ ریاضیات به عامه نیست. جوهر ریاضیات این نیست. به‌خصوص وقتی فهرستی از چنین مسأله‌هایی تشکیل می‌دهند،

شبیه فهرست پایتختهای کشورهای بزرگ است: حداقلِ اطلاعات ممکن را دربردارد. من واقعاً باور نمی‌کنم که هیلبرت عقیده داشته باشد ریاضیات را می‌توان به این طریق سازماندهی کرد.

○ *آیا جرأت این را دارید که بعضی از الگوهای اصلی ریاضیات در قرن آینده را پیش‌بینی کنید؟*

کار بسیار مشکلی است. به نظر من، ریاضیات قرن بیستم بیشتر حول برنامه‌ها شکل گرفته است تا مسأله‌ها. بعضی از این برنامه‌ها صریحاً صورتبندی شده‌اند و بعضی به تدریج به‌صورت گرایش غالب پدیدار شده‌اند. مثلاً پیشبرد منطق ریاضی و مبحث مبانی ریاضیات، دستاورد برنامه‌ای بوده که رسماً هم به عنوان برنامه شناخته می‌شده است. پس از کشفیات کانتور، روشن بود که باید شیوه‌های تفکر خودمان را در بارهٔ بینهایت عمیقاً بررسی کنیم. همچنین برنامهٔ لنگ‌لندز را در مورد شناخت گروه گالوا داریم. برنامه‌ای هست که با آن وارد قرن بعدی می‌شویم و آن، کوانتومی‌کردن ریاضیات است. وقتی توجه می‌کنیم که در بیست سال گذشته چه تعداد از مفاهیم ریاضی به نحوی تغییر یافته‌اند که مفهومهای جدید صورتهای کوانتومیِ مفاهیم قدیمی هستند، شگفت‌زده می‌شویم. توجه کنید به گروههای کوانتومی، کوهومولوژی کوانتومی، محاسبهٔ کوانتومی، و نظایر اینها. به گمان من تعداد بسیار بیشتری از اینها را در آینده خواهیم داشت. این پدیده خیلی عجیب است زیرا واقعاً هیچ‌کس تصور نمی‌کرد چنین چیزی به‌صورت برنامه‌ای برای رشد کلی ریاضیات درآید. فقط تمایلی وجود داشت به فهم ابزارهایی که فیزیکدانها با شمّ و شهودی شگفت‌انگیز ابداع کرده بودند و به‌صورتی به‌کار می‌رفتند که بسیار محرک، و انگیزه‌بخش بود ولی از نظر ریاضیدانان محض، از دقت کافی برخوردار نبود.

○ *به نظر شما، از دیدگاه تاریخی به ریاضیات قرن بیستم چگونه خواهند نگریست؟ آیا این قرن، قرن مهمی برای ریاضیات بوده است؟*

بله، به نظرم چنین بوده است. ریاضیاتِ این قرن در هماهنگ‌سازیِ زمینه‌های پراکنده و یکپارچه‌کردن آنها در چنان مقیاسی توفیق یافته است که احتمالاً قبل از آن هرگز سابقه نداشته است. در این وحدت‌بخشی، نقش اصلی را نظریهٔ مجموعه‌ها بر عهده داشت. این نظریه که کانتور آن را در آغاز به عنوان فصلی جدید از ریاضیات یعنی «نظریهٔ بینهایت» عرضه کرد، به تدریج جایگاه دیگری یافت و به‌صورت زبان عام ریاضی درآمد. ریاضیدانان دریافتند که بر اساس چند اصطلاح و عمل بنیادی می‌توان به طور بازگشتی ساختمانهایی زبانی تولید کرد که ایده‌های شهودی بنیانگذاران حساب دیفرانسیل و انتگرال، احتمال، نظریهٔ اعداد، توپولوژی، هندسهٔ دیفرانسیل، و غیره را خوبْ بیان کنند. به این ترتیب، همهٔ جامعهٔ ریاضی زبان مشترکی پیدا کرد. از آن گذشته با قائل شدن تمایز واضح بین محتوایِ نظریهٔ مجموعه‌ای و محتوای هندسی ساختمانهای ریاضی از یک سو، و شیوهٔ انعطاف‌پذیر بیان آنها (با نمادها، فرمولها، و محاسبات) از سوی دیگر، نظریهٔ مجموعه‌ها برهم‌کنشِ نیمه‌های چپ و راست مغزِ ریاضیدان را بسیار آسانتر کرد. این کارکردِ دوگانهٔ زبان نظریهٔ مجموعه‌ای، زمینه را برای ابداع تکنیکهای تازه، حل مسأله‌های قدیمی، و صورتبندی برنامه‌های تحقیقاتی فراهم کرد. تنوع یافتن مباحث ریاضی در وهلهٔ اول به پدیده‌های اجتماعی خارجی مربوط می‌شد: رشد سریع جامعهٔ علمی به‌طور کلی، و کشفیات دورانساز در فیزیک. به عقیدهٔ من، ریاضیات در یکصد سال گذشته هیچ چیزی که ــ از لحاظ تغییر دادن تصور کلی ما از جهان ــ قابل مقایسه با نظریهٔ کوانتوم یا نسبیت عام باشد، پدید نیاورده است. ولی قطعاً اعتقاد دارم که بدون استفاده از ریاضیات، فیزیکدانان نمی‌توانستند دریافتهای خود را حتّی بیان کنند. این رابطهٔ متقابل بین اکتشافات فیزیکی و شیوه‌های ریاضی تفکر، یعنی زبان ریاضی، که آن کشفیات فقط به این زبان می‌توانند بیان شوند، شگفت‌آور است. از این لحاظ، قرن بیستم مسلماً قرن پیشرفتهای عظیم به حساب خواهد آمد.

○ *آیا مباحث خاصی به نظرتان می‌آید که در آن مباحث، قرن ما شاهد پیشرفتهایِ واقعاً سطح بالایی بوده باشد؟*

زبان ریاضی در قرنهای هجدهم و نوزدهم بسیار مبهمتر از زبانی بود که ما با آن مأنوسیم. قرن بیستم با بازاندیشیِ مبانی آغاز شد. پس از آنکه مبانی از وضوحِ کافی برخوردار شدند، با جستجویی پردامنه روشهایِ تکنیکیِ بغایت نیرومندی به دست آمدند و این خود به ابداع ابزارهای قدرتمندی انجامید که امکان گسترش شهود هندسی ما به قلمروهای جدید را پدید آوردند. در این مورد، توپولوژی، جبر هومولوژیک، و هندسهٔ جبری را در نظر دارم. به محض اینکه این پیشرفت تکنیکی به انجام رسید، حل چندین مسألهٔ بسیار مشکل در یک دورهٔ زمانی سی‌ساله میسر شد ــ اثبات دُلین از حدسهای ویل، اثبات فالتینگز از حدس موردل، اثبات وایلز از قضیهٔ فرما. هیچ‌یک از این کارها در قرن گذشته انجام‌پذیر نبود چون ریاضیات به قدر کافی توسعه نیافته بود.

○ *بعضیها ــ از جمله عده‌ای از ریاضیدانها ــ تا حدی به دلیلِ رواج گسترده کامپیوتر، پایان دوران اثبات را اعلام کرده‌اند. در این باره چه نظری دارید؟*

اگر از ریاضیاتِ بدون اثبات صحبت کنید، از چیزی حرف زده‌اید که ذاتاً متناقض است. اثبات ممکن نیست بمیرد، مگر همراه با خودِ ریاضیات. ولی ریاضیات ممکن است بمیرد یعنی دیگر جزئی از فرهنگ بشری به حساب نیاید. به نظر من، در نسل ما، ریاضیدانان هنوز مطابق همان ادراکی که ما از کارِ ریاضی داریم به این کار می‌پردازند. اثبات تنها راه اطمینان از درستی اندیشه‌های ماست؛ درواقع تنها راه توصیف چیزهایی است که به آنها پی برده‌ایم. اثبات صرفاً استدلالی برای قانع‌کردن یک حریف موهومی نیست. ابداً؛ بلکه راه انتشار حقایق ریاضی و رساندن آن به دیگران است. سایر چیزها ــ بارقهٔ شهود، شادمانی از کشف ناگهانی، باورها و حدسهای غیرمدلل ولی قوی، اموری شخصی و خصوصی هستند. وقتی هم محاسبات کامپیوتری انجام می‌دهیم، فقط ثابت می‌کنیم در حالتهایی که ما بررسی کرده‌ایم، حکم موردنظر صادق است.

○ *همین اواخر خبری در روزنامه‌ها بود که حدسی از هربرت رابینز را کامپیوتر با جستجوی کاملِ تمام استراتژیهای ممکن ثابت کرده است.*

البته چنین کاری ممکن است. چرا نباشد؟ اگر استراتژی خوبی برای اثبات طرح کرده باشید که در عین حال شامل جستجویی جامع یا محاسبات صوری

طولانی باشد و سپس برنامه‌ای برای اجرای این جستجو نوشته باشید، کار درستی کرده‌اید. ولی اثبات چه مبتنی بر کمک کامپیوتر باشد و چه نباشد، ممکن است خوب یا بد باشد. اثبات خوبِ اثباتی است که بصیرت و آگاهی ما را بیشتر کند. اثباتی که قلب و اساس آن جستجویی پردامنه یا رشته‌ای طویل از اتحادها باشد، احتمالاً اثبات بدی است. اگر مطلبی آن‌قدر تک‌افتاده و بی‌ارتباط با بقیهٔ مطالب باشد که ظاهر شدن نتیجه روی صفحهٔ نمایش کامپیوتر کفایت کند، پرداختن به آن مطلب ارزشی ندارد. بصیرت از ارتباطات برمی‌آید. اگر من مجبور باشم ۲۰ رقم اول π را با دست محاسبه کنم مسلماً پس از این کار آگاهتر از قبل خواهم بود زیرا می‌بینم فرمولهایی که برای π می‌شناسم وقت بسیار زیادی می‌گیرند تا ۲۰ رقم اول را به دست دهند. بنابراین احتمالاً الگوریتمهایی ابداع خواهم کرد که زحمت مرا به حداقل برسانند. اما اگر دو میلیون رقم π را به وسیلهٔ کامپیوتر و با استفاده از برنامهٔ کتابخانه‌ایِ یک شخص دیگر به دست آورم، همان فرد ناآگاهی خواهم بود که از قبل بودم.

○ *اگر قضیه‌ای زیبا داشته باشید و اثباتی به همان اندازه زیبا که نیازمند محاسبهٔ هزار حالت باشد، آیا آن را به کامپیوتر واگذار می‌کنید؟ و آیا چنین اثباتی اصیل و واقعی خواهد بود؟*

بله، اثبات اصیلی خواهد بود ولی با همان شرطها و احتیاطهایی که برای هر اثباتِ نوشته شده روی کاغذ دارم. ممکن است اشتباهاتی در برنامه‌نویسی، یا در اجرای محاسبات، و یا در فهم ما از نحوهٔ رده‌بندی حالتها، و غیره وجود داشته باشد. نمونه‌هایی از این گونه اثباتها سراغ داریم، مثلاً مسألهٔ چهار رنگ و رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی. در هر دو مورد، مقدار عظیمی محاسبهٔ ترکیبیاتی با کامپیوتر به انجام رسیده است. پس هنوز هم جای شک و نیاز به بازبینی محاسبات و از همه مهمتر، نیاز به ابداع روشهایی برای نگریستن به اوضاع از یک دیدگاه جدید، وجود دارد.

○ *اجازه بدهید سؤالی در بارهٔ مسائل درونی جامعهٔ ریاضی مطرح کنم. به نظر می‌رسد که جامعهٔ ریاضی در سالهای اخیر اهمیت زیادی به کاربردها می‌دهد. آیا به نظر شما ریاضیات محض، در مقایسه با ریاضیات کاربردی، گرفتاریهایی خواهد داشت؟ آیا گمان می‌کنید که منابع مالی در آینده فقط به رشته‌های کاربردی اختصاص خواهد یافت؟*

رشته‌های کاربردی بیشتر از ریاضیات محض به پول نیاز دارند و بیشتر هم به‌دست می‌آورند. ولی به نظر من مسألهٔ اصلی مسألهٔ پول و نحوهٔ تخصیص منابع محدود نیست. ریاضیدانان اصولاً نیاز زیادی به پول ندارند و پول چندانی هم صرف نمی‌کنند. مسألهٔ اصلی، گرایش عمومی و اولویت ارزشها از نظر جامعه است. من شاهد روگردانیِ روزافزون جامعه از ارزشهای سنتی عصر روشنگری هستم. جامعه دوست ندارد روی ریاضیات ــ و شاید روی دانشگاهها به‌طور کلی ــ سرمایه‌گذاری کند. ریاضیات ــ اگر قربانی شود ــ قربانیِ این فرایند عمومی خواهد شد نه قربانی سرازیرشدن پول به سمت زمینه‌های کاربردی. ولی به هر حال در نظر من مسلم است که انتقال منابع مالی به سمت ریاضیات کاربردی و جاذبهٔ این رشته برای جوانان به طور پیوسته ادامه خواهد داشت. ریاضیات کاربردی مرتبط است با شبیه‌سازی کامپیوتری ــ کارهای کامپیوتری به‌طور کلی، برنامه‌های مبتنی بر بانکهای اطلاعاتی و این جور چیزها. من زمانی یک سخنرانی دانلد کنوت را به زبان روسی ترجمه کردم. در ازبکستان همایشی در بزرگداشت خوارزمی برگزار شده بود، و کنوت سخنرانی خود را در این همایش با مطلب جالبی آغاز کرد. به نظر او، اهمیت کامپیوتر برای جامعهٔ ریاضی بیشتر به خاطر این است که: در گذشته عده‌ای از کسانی که به ریاضیات رومی‌آوردند، علاوه بر علاقه به ریاضیات، نوعی ذهن الگوریتمی داشتند؛ اکنون آنها می‌توانند به کاری که دوست دارند [کامپیوتر] بپردازند. قبلاً این خردهٔ فرهنگ وجود نداشت. من این استدلال را خیلی جدی می‌گیرم و قطعاً عقیده دارم که در میان جامعهٔ ریاضیدانان بالقوهٔ آینده، یک زیرجامعه وجود دارد که ذهن افراد آن بیشتر مستعد برنامه‌نویسی کامپیوتر است تا اثبات قضیه. این افراد اگر در قرن گذشته زندگی می‌کردند احتمالاً به اثبات قضیه می‌پرداختند ولی امروز چنین نمی‌کنند. من احتمال زیادی می‌دهم که مثلاً اویلر اگر امروز به کار می‌پرداخت، بیشتر وقت خود را صرف نوشتن برنامهٔ کامپیوتری می‌کرد زیرا او در زمان حیاتش بسیاری از اوقات خود را به کارهایی از قبیل محاسبهٔ جدولهای مواضع ماه اختصاص می‌داد؛ و عقیده دارم که گاوس هم بیشتر اوقاتش را جلوی صفحهٔ کامپیوتر می‌گذراند.

○ *برگردیم به مسألهٔ ریاضیات کاربردی. آیا این طور نیست که خیلی وقتها کار به‌دست ریاضیات انجام می‌شود اما بیشتر امتیاز آن به متخصصان علم کامپیوتر تعلق می‌گیرد؟ یک نمونهٔ متعارف آن، برش‌نگاری کامپیوتری است. هیچ‌یک از افرادی که من با آنها صحبت کرده‌ام، چیزی در بارهٔ تبدیل رادون، که اساسِ برش‌نگاری کامپیوتری است، نشنیده‌اند. حتی افراد تحصیلکرده گمان می‌کنند این دستاوردْ از آنِ دانشمندان کامپیوتر است.*

نکته اینجاست که توجیه علایق ما بر اساس مفید بودنشان، یک اشکالِ ذاتی دارد. «مفید» یک لغت مهندسی است. آنچه شما از مکانیک کوانتومی (یا تراشه‌ها، یا هر چیز دیگر) می‌فهمید چیزی نیست جز فهم فرمولهایی روی یک صفحهٔ کاغذ، که هیچ چیز «مفید»ی در آنها وجود ندارد. اینها وقتی مفید می‌شوند که در عمل به کار روند و جنبهٔ مهندسی پیدا کنند.

○ *آیا ریاضیدانها باید موضعِ تهاجمی بگیرند؟ آیا باید از لاک خودشان بیرون بیایند و بگویند «ما اینجا هستیم»؟ آیا ما از تبلیغ دستاوردهایمان اکراه داریم؟*

این اکراه را قویاً تأیید می‌کنم. من آدم نسبتاً گوشه‌گیری هستم و از تحمیل عقایدم به مردم بیزارم. به نظر من هر چیزِ خوبی بالاخره خودش را نشان خواهد داد، هر چند مسألهٔ کلی فروش کالای فرهنگی ــ با فرض اینکه ما چیزی تولید می‌کنیم که ارزش فرهنگی دارد ــ مطرح است. بسته به میل مردم است که این کالای فرهنگی را بخرند یا نخرند. البته بعضی از ما احتمالاً باید سعی کنند که ثابت کنند تولیداتِ ما مهم است، ولی این کار به نظر من دشوار است. اگر از استدلال کاری ساخته بود، رامیراند در منتهای فقر و بیچارگی جان نمی‌سپرد. او چه استدلالی می‌توانست بکند؟ من واقعاً نمی‌دانم ریاضیات کلاً در بارهٔ چیست. ولی در مورد فرهنگ هم همین‌طور

است چون ما واقعاً نمی‌دانیم تابلوهای رامبراند حاکی از چیستند، چرا او پرترهٔ اشخاص را می‌کشید ــ تصویر مرد پیر در زمینه‌ای معین ــ و چرا کار او مهم است. ما نمی‌دانیم. این مسألهٔ فرهنگ است: شما نمی‌توانید بگویید «چرا».

○ *به نظر شما نقش فرهنگی ریاضیات چیست؟*

به نظر من پایهٔ همهٔ فرهنگ بشری زبان است، و ریاضیات هم نوع خاصی از فعالیت زبانی است. زبان طبیعی ابزاری فوق‌العاده انعطاف‌پذیر در تفهیم و تفاهمِ لازم برای بقا، در بیان احساسات و تحمیل خواستها، در خلقِ دنیای مجازیِ شعر و تخیل، و در اغواگری و مجاب‌سازی است. اما این زبان برای کسب، سازماندهی، و نگهداریِ شناخت فزاینده از طبیعت ــ که مهمترین خصیصهٔ تمدن نوین است ــ چندان مناسب نیست. احتمالاً ارسطو آخرین اندیشمند بزرگی بود که این تواناییهای زبان را به نهایتش رساند. با ظهور گالیله، کپلر و نیوتن، جایگاه زبان طبیعی در علوم تنزل یافت و نقش یک میانجی بین معرفت علمی واقعی ــ که در قالب جدولهای نجومی، فرمولهای شیمیایی، معادله‌های (مثلاً) نظریهٔ میدان کوانتومی، بانکهای اطلاعاتی ژنوم انسان . . . متجلی می‌شود ــ از یک سو و مغزهای ما از سوی دیگر بر عهدهٔ آن گذاشته شد. فاصلهٔ این میانجی از زبان واقعی علمی زیاد است. با استفاده از زبان طبیعی در مطالعه و تدریس علوم، ارزشها و پیشداوریها، تصورات سیاسی، عشق به قدرت و دوز و کلک‌های خود را نیز انتقال می‌دهیم، بدون آنکه چیزی واقعاً ضروری برای محتوای بحث علمی از این طریق منتقل شود. هر آنچه ضروری است یا به‌صورت فهرستهای طویلی از داده‌ها که خوبْ سازمان یافته‌اند عرضه می‌شود و یا به وسیلهٔ ریاضیات. به این دلیل من اعتقاد دارم که ریاضیات یکی از مهمترین دستاوردهای فرهنگ است، و پس از یک عمر اشتغال به ریاضیات در مقام پژوهشگر و مدرس، هنوز هم در پایان هر روزکاری با احساس تحسین و شگفتی نسبت به ریاضیات، کار را ترک می‌کنم. ولی گمان نمی‌کنم که بتوانم در مباحثات عمومی فعلی بر سر علوم و ارزشهای انسانی، از این اعتقاد به طرز قانع‌کننده‌ای دفاع کنم.

○ *چرا این قدر بدبین هستید؟*

در توضیح این بدبینی، اول باید یادآوری کنم که کلمهٔ «فرهنگ» در کاربرد فعلیش به یک واژهٔ «خودمرجع» تبدیل شده است، یعنی مسلم گرفته می‌شود که هر تعریف از فرهنگ به زمینهٔ فرهنگیِ موجود بستگی دارد، حتی اگر به آن تصریح نشده باشد. این بدان معنی است که هیچ توضیح و ارزیابی عینی از فرهنگ ممکن نیست. علاوه بر آن هر حکمی در بارهٔ فرهنگ که اعتبار و نفوذ پیدا کند، تصور عامه از فرهنگ و در نتیجه خود فرهنگ را تغییر می‌دهد. از همه مهمتر اینکه، گفتمان نوین در بارهٔ فرهنگ تا حد زیادی تابعِ گفتمان سیاسی است. چهار دههٔ پیش که سی. پی. اسنو بحث «دو فرهنگ» را پیش کشید، از این مطالب چندان آگاه نبودیم. اسنو اصولاً از این موضوع نگران بود که در محیط اجتماعی او، کسب دانش علمی، برخلاف آشنایی با فرهنگ یونان و شکسپیر، از اجزاء اصلیِ تحصیلات افراد فرهیخته به شمار نمی‌آمد. از آن گذشته، شخص می‌توانست آشکارا و حتی با تفاخر به ناآگاهی خودش از قوانین بنیادی فیزیک اذعان کند بدون آنکه خدشه‌ای در تصویر اجتماعی او به عنوان یک فرد با فرهنگ وارد شود. اسنو این پدیده را نتیجهٔ برداشت نادرست عمومی از محتوای واقعی فرهنگ می‌دانست و امیدوار بود که مباحثات عمومی و اصلاح آموزش و پرورش بتواند دوباره موازنه‌ای برقرار سازد.

○ *آیا نظریهٔ دو فرهنگ هنوز هم مطرح است؟*

مطرح بودن آن بستگی به این دارد که تا چه حد بتوانیم خود را متعلق به فرهنگ ایده‌آلِ موردنظر اسنو بدانیم، فرهنگی که هومر و باخ، گالیله و شکسپیر، تولستوی و اینشتین را همزمان دربردارد. من نگرانم که این امکان تا حد زیادی از میان رفته باشد. درواقع، ایدهٔ رایج کثرت‌گرایی فرهنگی این تصور را ایجاد می‌کند که فرهنگهای بسیار با اعتبارِ یکسان وجود دارند. فرهنگ کبیری که خاستگاه یا پرورشگاه آن اروپاست با سایر فرهنگهای منطقه‌ای مساوی و همتراز قلمداد می‌شود و تداعی آن با مفاهیم توهین‌آمیزی از قبیل امپریالیسم فرهنگی و اروپا محوری، ارزش اخلاقی آن را تنزل می‌دهد. طرفداران محیط‌زیست، علم و تکنولوژی را به خاطر استفاده‌های مخربی که ما از آنها می‌کنیم، سرزنش می‌کنند، و بنابراین جاذبهٔ فرهنگی آنها را باز هم کاهش می‌دهند. جنبهٔ طنزآمیز قضیه این است که همان استدلالهایی که دانشمندان برای توجیه کار خود به کار می‌بردند، حالا علیه آنها به کار می‌رود. گرایشهای ساخت‌زدا و پسامدرن، معیارهای اساسی تشخیص حقیقت علمی از زمان گالیله و بیکن تاکنون را در معرض تردید قرار می‌دهند و می‌کوشند ساختهای ذهنی کاملاً دلبخواه را جایگزین آنها کنند. به این ترتیب، بسیاری از اندیشمندان پرنفوذ نه تنها جزء علمیِ فرهنگ معاصر را نادیده می‌گیرند بلکه آن را ستیزه‌جویانه حذف می‌کنند. این وضعیت ممکن است در نظر من تأسف‌انگیز باشد (و هست) ولی واقعبینانه نیست که به بهبود وضع در آیندهٔ قابل پیش‌بینی امیدوار باشم.

○ *برگردیم به موضوع آیندهٔ ریاضیات. آیا شما شخصاً نظریه‌ای دارید که در مورد آن بگویید: «اگر عمرم کفایت کند، دوست دارم ببینم وضع آن چنین است.»*

نمی‌دانم. دلیلش این است که: در طول زندگی علمی‌ام بارها و بارها تغییر رشته داده‌ام، نه به خاطر آنکه چیزی را جالبتر از چیز دیگر دیده‌ام؛ اصولاً همهٔ موضوعها برای من جالب توجه‌اند، ولی امکان ندارد که آدم در آنِ واحد به چیزهای مختلف بپردازد. استراتژی خوب این است که بر زمینه‌های مختلف، به نوبت، تسلط یابد. دو مبحثی که همیشه مورد علاقهٔ من بوده‌اند، نظریهٔ اعداد از یک سو و فیزیک از سوی دیگر است. گمان می‌کنم از شمّ و شهودی که در هر یک از این دو مبحث حاصل می‌شود، در هر دو مبحث استفاده کرده‌ام. فهم مسائل نظریهٔ اعداد به من در فهم مسائل فیزیک کمک می‌کرد و برعکس. در فهرست ارزشهای شخصی من، لفظ لاتینی varietà [تنوع] که در دورهٔ رنسانس معمول بود، جایگاه رفیعی دارد. غنای زندگی و دنیا ناشی از تنوع تجربه‌ها و اندیشه‌های اندیشمندان بزرگی است که ما می‌کوشیم از آنها تقلید کنیم.

ترجمهٔ سیامک کاظمی

نشر ریاضی، سال ۱۰، شمارهٔ ۱، صص ۶-۱۱

حساب دقیق حقیقی چیست؟

عباس عدالت*

امروزه تقریباً در همهٔ زبانهای برنامه‌نویسی از نمایش اعداد با ممیز شناور برای محاسبات عددی استفاده می‌کنند. در این نمایش، برای نمونه در پایهٔ ۲، اعداد به‌صورت $\pm m \times ۲^e$ نوشته می‌شوند که m مانتیس عدد است و با یک رقم صحیح و تعداد معینی رقم پس از ممیز مشخص می‌شود؛ e توان عدد است که متشکل از تعداد معینی ارقام صحیح است. برای نمونه در دقت ساده[1] مجموعاً ۳۲ بیت برای مشخص کردن علامت ($\pm$) و ارقام موجود در m و e به‌کار گرفته می‌شوند. در نتیجه، مجموعهٔ اعدادی که در نمایش ممیز شناور از آنها استفاده می‌شود یک مجموعهٔ متناهی است و هر عدد حقیقی را باید با یکی از این اعداد تقریب زد. در اثر هر یک از این تقریبها، خطای محاسباتی جدیدی پدیدار می‌شود که امکان دارد این خطاها روی هم انباشته شده و دست آخر موجب خطای بسیار بزرگی در کل محاسبه گردند.

در اینجا برای نمونه، دو مثال از خطاهای محاسباتی ناشی از نمایش با ممیز شناور می‌آوریم.

(۱) دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$a_۰ = ۲$$

$$a_۱ = -۴$$

$$a_{n+۱} = ۱۱۱ - \frac{۱۱۳۰}{a_n} + \frac{۳۰۰۰}{a_n a_{n-۱}}$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که $\lim_{n\to\infty} a_n = ۶$. لیکن اگر a_n را در هر نوع سیستم مبتنی بر ممیز شناور (دقت ساده، دقت مضاعف[2] یا هر دقت بالاتر) به ازای مقادیر مختلف n محاسبه کنیم، به‌نظر خواهد رسید که $\lim_{n\to\infty} a_n = ۱۰۰$. در نتیجه، خطای محاسباتی نه تنها ناچیز نیست بلکه با بالا بردن دقت ممیز شناور هم کاهش نمی‌یابد.

(۲) اکنون دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$b_۰ = ۱٫۵۱۰۰۰۵۰۷۲۱۳۱۸$$

$$b_{n+۱} = \frac{۳b_n^۴ - ۲۰b_n^۳ + ۳۵b_n^۲ - ۲۴}{۴b_n^۳ - ۳۰b_n^۲ + ۷۰b_n - ۵۰}$$

1. single precision 2. double precision

بسته به اینکه محاسبهٔ b_n با کدام کامپیوتر و زبان برنامه‌نویسی انجام شود به‌نظر خواهد رسید که $\lim_{n\to\infty} b_n = ۱, ۲, ۳, ۴$.

در دههٔ اخیر چند پروژهٔ تحقیقاتی دربارهٔ حساب دقیق حقیقی انجام یافته است. اگر بخواهیم محاسبات عددی را بدون خطا اجرا کنیم ناگزیریم نمایشی نامتناهی از اعداد حقیقی را به‌کار گیریم، زیرا برای نمونه بدیهی است که $\sqrt{۲}$ را نمی‌توان به صورت متناهی نمایش داد. مثلاً می‌توانیم یک عدد حقیقی را به صورت حد یک دنبالهٔ کوشی از اعداد گویا یا به صورت اشتراک دنباله‌ای از بازه‌های فشردهٔ تودرتو با نقاط انتهایی گویا نمایش بدهیم. فرض کنید که در حالت کلی نمایش یک عدد حقیقی به صورت دنبالهٔ $a_۰a_۱a_۲a_۳\ldots$ باشد که در آن a_n متعلق به یک مجموعهٔ شمارا (مانند اعداد صحیح یا اعداد گویا) است. در این صورت در این نمایش، تابع حقیقی $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **محاسبه‌پذیر** است هرگاه با ورودی $x = a_۰a_۱a_۲\ldots$ خروجی $f(x) = b_۰b_۱b_۲\ldots$ را بتوانیم طوری تعیین کنیم که به ازای هر عدد طبیعی n، عدد طبیعی m وجود داشته باشد که مقادیر $b_۰, b_۱, \ldots, b_n$ تنها با استفاده از مقادیر $a_۰, a_۱, \ldots, a_m$ قابل محاسبه باشند. از اینجا نتیجه می‌شود که سیستم اعشاری نمایش اعداد برای محاسبهٔ دقیق مناسب نیست، زیرا برای مثال ضرب اعداد در عدد ۳ در این نمایش غیر قابل محاسبه است. درواقع با ورودی $x = ۰٫۳۳۳\ldots$ نمی‌توان حتی رقم اول خروجی $f(x) = ۳x$ را تعیین کرد. نمی‌توانیم اولین رقم را صفر قرار دهیم چون ممکن است پس از یک سلسله رقم ۳ بالاخره رقمی بزرگتر از ۳ در ورودی ظاهر شود و نمی‌توانیم اولین رقم را ۱ قرار دهیم چون امکان دارد سرانجام در ورودی رقمی کوچکتر از ۳ پیدا شود. درواقع، برای محاسبهٔ دقیق باید از یک نمایش اضافی[1] اعداد حقیقی استفاده کرد. سیستم اعشاری اساساً نمایشی غیراضافی است زیرا مثلاً هر عدد گنگ، تنها دارای یک نمایش اعشاری است.

یک مطلب اساسی دیگر، محاسبهٔ دقیق روی اعداد حقیقی را از محاسبه روی اعداد گویا (و در نتیجه محاسبه روی اعداد با نمایش ممیز شناور) کاملاً متمایز می‌نماید. مقایسهٔ اعداد گویا **تصمیم‌پذیر** است یعنی همواره می‌توان در مدت زمان متناهی تعیین کرد که دو عدد داده شدهٔ گویا با هم برابرند یا اینکه یکی بزرگتر از دیگری است. به عکس مقایسهٔ دو عدد حقیقی تصمیم‌پذیر

1. redundant

نیست. درواقع حتی مقایسهٔ یک عدد حقیقی با یک عدد گویا، مثلاً با صفر، نیز تصمیم‌پذیر نیست. این بدان معنی است که صرفنظر از اینکه کدام نمایش اعداد حقیقی را انتخاب نماییم نمی‌توانیم در مدت زمان متناهی تعیین کنیم که یک عدد حقیقی برابر با صفر است یا خیر. پس نتیجه می‌گیریم که در تقسیم اعداد نمی‌توان از تقسیم یک عدد حقیقی بر صفر جلوگیری کرد. لاجرم در حساب دقیق حقیقی باید بینهایت (∞) را به‌عنوان نتیجهٔ یک محاسبه بپذیریم. به همین ترتیب چون نمی‌توانیم مانع ایجاد $\frac{0}{0}$ شویم، باید ابهام ($\perp$) را نیز به‌عنوان نتیجهٔ برخی محاسبات قبول کنیم.

نکات بالا دلایل منسجمی برای استفاده از دستگاه توسعه‌یافتهٔ اعداد حقیقی، $\mathbb{R}^*$، به جای دستگاه اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، هستند. درواقع، $\mathbb{R}^*$ حاصل فشرده‌سازی تک‌نقطه‌ای $\mathbb{R}$ است که همسانریخت با دایره است. معنی نماد ابهام ($\perp$) نیز کل دستگاه توسعه‌یافتهٔ حقیقی است، یعنی نتیجهٔ محاسبه‌ای که به ابهام منجر شود می‌تواند هر عنصری از $\mathbb{R}^*$ باشد. اکنون به این سؤال می‌پردازیم که چه نمایشی برای عناصر $\mathbb{R}^*$ انتخاب کنیم. از آنجا که معنی نماد ابهام درواقع همان $\mathbb{R}^*$ است که خود یک بازهٔ فشردهٔ R^* به‌شمار می‌آید، طبیعی است که هر عنصر $x \in \mathbb{R}^*$ را با دنباله‌ای از بازه‌های فشردهٔ تودرتو و کوچک‌شونده با نقاط انتهایی گویا، $([\frac{a_n}{b_n}, \frac{c_n}{d_n}])$، نمایش دهیم که اشتراکشان $\{x\}$ باشد. روشن است که این یک نمایش اضافی از اعداد حقیقی است. هر یک از این بازه‌ها تقریب بهتری از بازهٔ قبلی برای مقدار x می‌دهد. شایان ذکر است که $[p,q] = [p,\infty] \cup [\infty,q]$ وقتی $p > q$.

در اینجا نمایش جدیدی از اعداد و توابع حقیقی ارائه می‌دهیم که هم دارای شالودهٔ محکم و خواص مناسب ریاضی است و هم به الگوریتمهای کارایی برای محاسبهٔ دقیق منجر می‌شود. در این مورد از دو زمینهٔ تحقیقاتی کاملاً متفاوت بهره‌گیری شده است. زمینهٔ اول، نمایش اعداد حقیقی به‌صورت کسرهای مسلسل است که در چند دههٔ اخیر مورد بررسی قرار گرفته است [Gos72,Vui90,NK95]. زمینهٔ دوم، کاربرد قلمروهای پیوسته[1] در ریاضیات و فیزیک از جمله در محاسبات عددی [Eda97] و همچنین کاربرد آنها در تشکیل نوع داده[2] برای اعداد حقیقی است [DiG93,Esc96]. بقیهٔ این مقاله به تشریح این نمایش جدید از اعداد حقیقی می‌پردازد که به طور بسیار مفصلتر در منابع [EP97,Pot98,EPS98,ES97a,ER98] بررسی شده است.

یک روش بسیار مناسب برای کدسازی دنبالهٔ $[\frac{a_n}{b_n}, \frac{c_n}{d_n}]$، استفاده از تبدیلهای کسری خطی $x \mapsto \frac{ax+c}{bx+d} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ است. بازهٔ $[0,\infty]$ را بازهٔ پایه در نظر می‌گیریم و هر بازهٔ فشردهٔ گویای $[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}]$ را به صورت برد یک تبدیل کسری خطی به روی این بازهٔ پایه می‌نویسیم. در واقع، هرگاه $ad-bc<0$، داریم $[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}] = \phi[0,\infty]$ که در اینجا $\phi : x \mapsto \frac{ax+c}{bx+d}$ و هرگاه $ad-bc<0$، تابع $\phi : x \mapsto \frac{cx+a}{dx+b}$ در همان رابطه صدق می‌کند. از طرف دیگر به راحتی می‌توان نشان داد که هرگاه دو بازهٔ فشردهٔ گویای غیر تک‌نقطه‌ای را با تبدیلهای کسری خطی ϕ و ψ به شکل بالا نشان دهیم، داریم $\phi[0,\infty] \supseteq \psi[0,\infty]$ اگر و تنها اگر تبدیل کسری خطی $\phi^{-1} \circ \psi$ دارای مؤلفه‌های صحیح نامنفی و یا غیر مثبت باشد. یادآوری می‌کنیم که تبدیل کسری خطی $x \mapsto \frac{ax+c}{bx+d}$ را می‌توان با ماتریس $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ نمایش داد. در واقع اگر $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ گروه عمومی خطی ماتریسهای 2×2ی حقیقی ناتکین باشد و M گروه تبدیلهای کسری خطی حقیقی ناتکین، آنگاه همریختی $\Theta : \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{M}$ که ماتریس $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ را به تبدیل کسری خطی $x \mapsto \frac{ax+c}{bx+d}$ می‌برد دارای هستهٔ $\{\lambda I | \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$ است که I ماتریس همانی است.

از آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم که هر عنصر $x \in \mathbb{R}^*$ را می‌توان به صورت ترکیب نامتناهی تبدیلهای کسری خطی یا ضرب نامتناهیِ ماتریسهای 2×2 نشان داد:

$$x = M_0 M_1 M_2 \ldots$$

که در آن $\{x\} = \cap_{n \geq 0} M_0 M_1 \ldots M_n[0,\infty]$ و M_0 یک ماتریس 2×2 با مؤلفه‌هایی از اعداد صحیح است و M_n $(n \geq 1)$ ماتریسهای 2×2 با مؤلفه‌هایی از اعداد طبیعی هستند.

تا اینجا فرض ما بر آن بود که M_n به ازای هر عدد طبیعی n یک ماتریس وارون‌پذیر و یا تبدیل کسری خطی ناتکین است. با استفاده از ماتریسهای تکین می‌توان نمایشی متناهی از اعداد گویا به‌دست داد. توجه کنید که اگر $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ تکین باشد ولیکن دارای ستون $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ نباشد، آنگاه یک تبدیل کسری خطی نمایش می‌دهد که مقدارش ثابت و برابر $\frac{a}{b}$ است، مگر در نقطهٔ $x = -\frac{d}{b} = -\frac{c}{a}$ که در آنجا مقدارش مبهم می‌شود. پس به شرط اینکه نقطهٔ تکین $x = -\frac{d}{b}$ خارج از $[0,\infty]$ قرار داشته باشد یعنی به شرط اینکه همهٔ ضرایب نامنفی و یا نامثبت باشند و $ad-bc=0$، آنگاه می‌توانیم به‌جای $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ بردار $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ و یا عدد گویای $\frac{a}{b}$ را قرار دهیم. در نتیجه اگر n کوچکترین عدد طبیعی باشد به طوری که M_n یک ماتریس تکین از نوع بالا باشد آنگاه ضرب نامتناهی ماتریسها در $x = M_0 M_1 \ldots M_n M_{n+1} \ldots$ به ضرب متناهی $x = M_0 \ldots M_{n-1} M_n = M_0 \ldots M_{n-1} V$ محدود می‌شود که در اینجا بردار V از رابطهٔ $M_n = (V,V)$ به‌دست می‌آید. روشن است که در اینجا x یک عدد گویاست.

بنا بر آنچه گفته شد ضرب نامتناهی ماتریسها نمایشگر همهٔ اعداد دستگاه توسعه‌یافتهٔ حقیقی است و ضرب متناهی ماتریسها که به یک بردار ختم شود نمایشگر اعداد گویاست که شامل $\frac{1}{0} = \infty$ نیز هست. این گونه نمایش اعداد را **ضرب نرمال** می‌نامیم.

اولین ماتریس ضرب نرمال را که می‌تواند دارای اعداد صحیح با علامتهای متفاوت باشد *ماتریس علامت* می‌خوانیم و مابقی ماتریسها را که هر یک دارای اعداد صحیحی است که همگی نامنفی و یا همگی نامثبت هستند *ماتریس رقم* می‌نامیم. این نامگذاری با الهام از دستگاه اعشاری صورت پذیرفته است که در آن هر عدد حقیقی ابتدا با یکی از دو علامت + یا − مشخص می‌شود و سپس دنباله‌ای از ارقام ۰، ۱، ۲، ... ۹، که بدون علامت‌اند مقدار عدد را در سمت چپ و یا راست محور حقیقی مشخص می‌کند. ماتریس علامت نیز ابتدا بازهٔ فشرده‌ای بر روی دایره تعیین می‌نماید که موقعیت کلی عدد مورد نظر را روشن می‌کند و سپس ماتریسهای رقم، قدم به قدم این بازه را تظریف می‌کنند.

1. continuous domains 2. data type

می‌گوییم عدد حقیقی x **محاسبه‌پذیر** است هرگاه برنامه‌ای متناهی در یک زبان عمومی برنامه‌نویسی، مانند ماشین تورینگ[1] و یا $C++$، وجود داشته باشد که خروجی آن عناصر دنباله‌ای از بازه‌های فشردهٔ گویای $([\frac{a_n}{b_n}, \frac{c_n}{d_n}])$ باشد به طوری که $\{x\} = \cap_n [\frac{a_n}{b_n}, \frac{c_n}{d_n}]$. در نمایش اعداد به‌صورت ضرب ماتریسها، عدد حقیقی x محاسبه‌پذیر است اگر برنامه‌ای وجود داشته باشد که خروجی آن دنباله‌ای از ماتریسهای 2×2 با مؤلفه‌هایی از اعداد صحیح تشکیل دهد (M_n) به طوری که (الف) مؤلفه‌های M_n برای $n > 0$ همگی نامنفی باشد و (ب) $x = M_0 M_1 M_2$ به مفهومی که پیشتر ذکر نمودیم، یعنی $\{x\} = \cap_{n \geq 0} M_0 \ldots M_n[0, \infty]$.

برای مثال، $\sqrt{2}$ را به صورت ضرب نامتناهی ماتریسها نشان می‌دهیم. می‌دانیم که کسر مسلسل منظم برای $\sqrt{2}$ برابر است با

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$$

دقت کنید که این کسر مسلسل خود ترکیبی از تبدیلهای کسری خطی است. اگر قرار دهیم

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}$$

آنگاه داریم $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x}$ یا به عبارت دیگر $\sqrt{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$. به همین ترتیب می‌توانیم سایر ماتریسهای یک ضرب نرمال برای $\sqrt{2}$ را به‌دست آوریم

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ldots$$

از طرف دیگر ضربهای نرمال دیگری برای $\sqrt{2}$ وجود دارد زیرا همان طور که تأکید کردیم نمایش ما اضافی است. برای نمونه $\sqrt{2}$، نقطهٔ ثابت تابع $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ است. در نتیجه یک ضرب نرمال دیگر برای $\sqrt{2}$ بدین ترتیب خواهد بود

$$\sqrt{2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\ldots$$

در هر ضرب نرمال برای یک عدد حقیقی $x = M_0 M_1 M_2 \ldots$، هر بخش متناهی اولیهٔ $M_0 \ldots M_n$ بازهٔ گویای $M_0 \ldots M_n[0, \infty]$ را به‌عنوان تقریبی برای x به‌دست می‌دهد، که از تقریب قبلی $M_0 \ldots M_{n-1}[0, \infty]$ بهتر است زیرا این بازهٔ اخیر بازهٔ اولی را شامل می‌شود. در نتیجه اطلاعات[2] یک ماتریس را برد آن ماتریس به روی $[0, \infty]$ تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Info}(M) = M[0, \infty]$$

و به همین ترتیب اطلاعات یک بردار $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ را عدد گویای $\frac{a}{b}$ تعریف می‌کنیم هرگاه a و b هر دو صفر نباشند و در غیر این صورت اطلاعات آن را $\mathbb{R}^*$ تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Info}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{a}{b} & a \neq 0 \text{ یا } b \neq 0 \\ \mathbb{R}^* & a = 0 \text{ و } b = 0 \end{cases}$$

1. Turing Machine 2. information

اکنون به نمایش توابع حقیقی در این چارچوب می‌پردازیم. در اینجا از ایدهٔ گاسپر در [Gos72] برای انجام عملیات اصلی روی کسرهای مسلسل از طریق تبدیلهای کسری خطی دو متغیره استفاده می‌کنیم. این تبدیلها به صورت زیر هستند

$$(x, y) \mapsto \frac{axy + cx + ey + g}{bxy + dx + fy + h} : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$$

که آنها را با تانسور $\begin{pmatrix} a & c & e & g \\ g & d & f & h \end{pmatrix}$ نشان می‌دهیم. بدیهی است که چهار عمل اصلی را می‌توان با انتخاب مناسب ضرایب تانسور انجام داد. برای نمونه $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ تانسور جمع و $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ تانسور ضرب دو عدد در $\mathbb{R}^*$ است.

همچون مورد ماتریسها، اطلاعات یک تانسور را برد آن به روی $([0, \infty], [0, \infty])$ تعریف می‌کنیم:

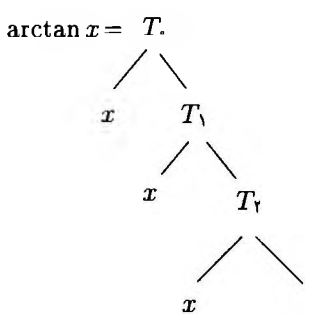
$$\mathrm{Info}T = T([0, \infty], [0, \infty])$$

اکنون مفهوم ضربهای نرمال را به درختهای عبارتی[1] که در آنها تانسورها نیز جای دارند تعمیم می‌دهیم. درخت عبارتی یک درخت دودویی است که هر رأس آن یا یک تانسور است با دو فرزند، یا یک ماتریس است با یک فرزند و یا یک بردار است بدون فرزند که برگ درخت محسوب می‌شود. مانند ضرب نرمال، تنها ریشهٔ یک درخت عبارتی می‌تواند تانسور، ماتریس و یا برداری باشد که مؤلفه‌هایش دارای علامتهای متفاوت هستند. مابقی رئوسِ یک درخت عبارتی تانسورها، ماتریسها یا بردارهایی هستند که مؤلفه‌هایشان همگی نامنفی و یا همگی غیر مثبت هستند.

همان‌گونه که از کسر مسلسل $\sqrt{2}$ برای نمایش این عدد به صورت ضرب نرمال استفاده کردیم، می‌توانیم از کسرهای مسلسلِ توابع ابتدایی نظیر $\arctan x, \tan x, \log x, e^x$ و غیره برای نمایش این توابع به صورت درخت عبارتی استفاده کنیم. به‌عنوان مثال، کسر مسلسل زیر برای $\arctan x$ را در نظر بگیرید.

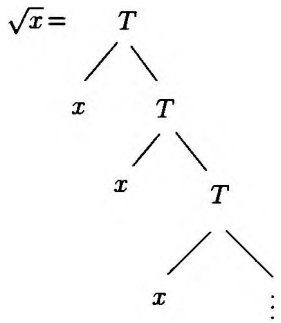
$$\arctan x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{4x^2}{\vdots \atop 2n - 1 + \cfrac{n^2x^2}{\vdots}}}}$$

این کسر مسلسل را می‌توان با استفاده از روشهای مختلف به درخت عبارتیِ



1. expression trees

تبدیل کرد که در آن $T_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ n^2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 2n-1 & 0 \end{pmatrix}$، و فرض شده است که x یک عدد حقیقی مثبت است که به وسیلهٔ یک عبارت درختی یا ضرب نرمال بدون علامت نمایش داده شده است. مثلاً x می‌تواند $\sqrt{2}$ باشد که به صورت یک ضرب نرمال نمایش داده شده است. به عنوان نمونهٔ دیگر، می‌توان مستقیماً نشان داد که



که در آن $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ & 1 & 0 & 2 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

همان‌گونه که ضرب نرمالْ دنباله‌ای از بازه‌های فشردهٔ تودرتو و کوچک‌شونده را نمایش می‌دهد، درخت عبارتیْ یک مجموعهٔ پالایش‌شده[1] از بازه‌های فشرده را نمایش می‌دهد. در واقع، هرگاه یک درخت عبارتی را بریده و تبدیل به یک درخت متناهی کنیم و به جای هر شاخهٔ بریده شده بازهٔ $[0, \infty]$ را قرار دهیم آنگاه ترکیبی متناهی از تبدیلهای کسری خطی یک و دو متغیره به دست می‌آوریم که بر بازهٔ $[0, \infty]$ اثر می‌کند و در نتیجه، یک بازهٔ فشرده حاصل می‌شود. مجموعهٔ بازه‌های فشرده‌ای که از طریق برشهای مختلف درخت عبارتی به صورت فوق به‌دست می‌آید پالایش شده است و اشتراک آنها برابر مقدار درخت عبارتی است. برای مثال درخت عبارتی $\arctan\sqrt{2}$ را که از طریق جایگزینی x در درخت عبارتی $\arctan x$ با یک ضرب نرمال برای $\sqrt{2}$ به دست می‌آید در نظر بگیرید. آنگاه اشتراک کلیهٔ بازه‌های فشرده ناشی از درختهای متناهی فوق برابر $\{\arctan\sqrt{2}\}$ خواهد بود.

برای محاسبهٔ یک درخت عبارتی نظیر $\arctan\sqrt{2}$، آن را به یک ضرب نرمال تبدیل می‌کنیم تا بتوانیم با هر دقت دلخواه مقدار تقریبی آن را به‌دست آوریم. توجه کنید که جهت سیر اطلاعات در هر درخت به سمت بالاست. برای نمونه، اگر ریشهٔ درخت یک تانسور T باشد، آنگاه تابع دو متغیره‌ای داریم که ورودی آن دو زیردرختِ تانسور هستند. برای محاسبهٔ درخت باید ببینیم که آیا در تانسور ریشه اصولاً اطلاعاتی موجود است یا نه. به عبارت دیگر آیا $T([0, \infty], [0, \infty]) \neq \mathbb{R}^*$؟ اگر چنین بود، می‌توانیم ماتریس M را طوری از T استخراج کنیم که $\mathrm{Info}M \supseteq \mathrm{Info}T$. فرض کنید $T = (T_1, T_2)$ که T_1 و T_2 دو ماتریس 2×2ی تشکیل‌دهندهٔ T هستند. پس از استخراج $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ریشهٔ درخت یعنی T تبدیل به $M^\dagger T = (M^\dagger T_1, M^\dagger T_2)$ می‌شود که در اینجا $M^\dagger$ تبدیل کسری خطی وارون M با ضرایب صحیح است، یعنی $MM^\dagger = M^\dagger M = ad - bc$. اکنون M اولین ماتریس یعنی ماتریس علامتِ ضرب نرمال برای درخت عبارتی است.

1. filtered

اگر در T اطلاعاتی نبود یعنی اگر $\mathrm{info}T = \mathbb{R}^*$، آنگاه باید از زیردرختهای موجود در T اطلاعات جذب کنیم تا بتوانیم پس از آن از T ماتریسی استخراج کنیم. قواعد مربوط به جذب اطلاعات همان قواعد مربوط به ترکیب تبدیلهای کسری خطی یک و دو متغیره است. برای مثال به آسانی می‌توان نشان داد که برای تانسور $T = (T_1, T_2)$ و ماتریس M همواره رابطهٔ زیر صادق است: $T(x, My) = T'(x, y)$ به‌طوری که $T' = (T_1M, T_2M)$. به همین شکل قاعده‌ای برای جذب ماتریس از متغیر اول به T موجود است و همچنین برای جذب یک بردار به‌عنوان متغیر اول و یا دوم به T.

برای همهٔ توابع اصلی (چهار عمل اصلی، توان، e^x، $\log x$، $\tan x$، $\arctan x$ و غیره) درختهایی عبارتی وجود دارد که می‌توان مقدار آنها را از طریق فوق با دقت دلخواه محاسبه کرد. همانگونه که گفتیم در این چارچوب همهٔ ماتریسهایِ با مؤلفه‌های صحیح، به‌عنوان ماتریس علامت و همهٔ ماتریسهایِ با مؤلفه‌های صحیح نامنفی یا نامثبت، به‌عنوان ماتریس رقم پذیرفته می‌شوند. در اینجا دو اشکال اساسی پیش می‌آید. یکی اینکه بزرگی اعداد صحیح در یک ماتریس ممکن است هیچگونه تناسبی با اطلاعات آن ماتریس نداشته باشد. در نتیجه، یک ماتریس با اعداد بسیار بزرگ صحیح ممکن است تنها تقریب ضعیفی از عدد حقیقی مورد نظر ما به‌دست دهد، که از نظر استفادهٔ متناسب از حافظه و منابع کامپیوتری غیر قابل قبول است. از طرف دیگر، در نمایش اعداد حقیقی به‌صورت ضرب نرمال، آهنگ انتشار اطلاعات یکنواخت نیست زیرا ماتریسهای مختلف می‌توانند به درجات کاملاً متفاوتی بازه‌های تقریبی را تظریف کنند. در نتیجه، چارچوب مناسبی برای تحلیل پیچیدگی مکانی و زمانی الگوریتمهای عددی در این شرایط به‌دست نمی‌آید.

راه‌حل این مشکلات این است که، همانند دستگاه اعشاری، ماتریسهای پذیرفته شده در ضرب نرمال را به یک مجموعهٔ متناهی محدود نماییم. ابتدا از ماتریسهای علامت شروع می‌کنیم. ماتریس $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ماتریس دوران دایره به‌اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ درجهت عقربه‌های ساعت است که مولد یک گروه دوری از مرتبه ۴ است:

$$S_- = S_0^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_\infty = S_0^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$S_+ = S_0^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

می‌توان ثابت کرد که این تنها گروه متناهی از دَوَرانهای دایره است، که دارای یک نمایش ماتریسی با اعداد صحیح است به‌طوری که اطلاعات ماتریسهای گروه با یکدیگر همپوشانی دارند. اکنون به ماتریسهای رقم می‌پردازیم. نخست متذکر می‌شویم که دستگاه دودویی علامتدار برای نمایش اعداد حقیقی که از ارقام مجموعهٔ $\{-1, 0, 1\}$ به جای $\{0, 1\}$ استفاده می‌کند به‌وسیلهٔ سه تابع زیر مشخص می‌شود

$$f_i : x \longmapsto \frac{x+i}{2} : [-1, 1] \to [-1, 1] \quad (i \in \{-1, 0, 1\})$$

درواقع، هرگاه در این دستگاه $x = i_1 i_2 i_3 \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{2^n}$،

$$\{x\} = \bigcap_{n\geq 1} f_{i_1} \cdots f_{i_n}[-1,1] \text{ آنگاه } (i_n \in \{-1,0,1\})$$

از نظر اهمیتی که این نمایش اضافی در حساب کامپیوتری دارد، ماتریسهای رقم را طوری انتخاب می‌کنیم که از طریق تابع $S_0 : [0,\infty] \to [-1,1]$ با سه تابع $f_i : [-1,1] \to [-1,1]$، به‌ازای $i = -1,0,1$، مزدوج شوند. یعنی سه ماتریس رقم را بدین‌ترتیب تعیین می‌کنیم: $D_i = S_0^{\dagger} f_i S_0$، به‌ازای $i = -1,0,1$، یا

$$D_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D_0 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نتیجهٔ جالبی که به‌دست می‌آید، این است که عدد حقیقی x که در دستگاه دودویی علامتدار دارای نمایش $i_1 i_2 i_3 \cdots$ است همچنین دارای نمایش $S_0 D_{i_1} D_{i_2} \cdots$ در ضرب نرمال است. توجه کنید که $\text{info} D_{-1} = [0,1]$، $\text{info} D_0 = [\frac{1}{3}, 3]$ و $\text{info} D_1 = [1,\infty]$.

چهار ماتریس علامت S_0، S_{-1}، S_∞، S_+ و سه ماتریس رقم D_{-1}، D_0، D_1 نمایشی اضافی از اعداد حقیقی را به‌صورت ضرب نرمال تشکیل می‌دهند که آن را نمایش با ممیز شناور دقیق در پایهٔ ۲ می‌نامیم. گفتنی است که سه تابع $D_i : [0,\infty] \to [0,\infty]$، به‌ازای $i = -1,0,1$، نسبت به متر $d(x,y) = |S_0(x) - S_0(y)|$ در بازهٔ $[0,\infty]$ توابع منقبض‌کننده با ضریب انقباض $\frac{1}{2}$ هستند. در نتیجه در نمایش با ممیز شناور دقیق، آهنگ انتشار اطلاعات به‌صورت یکنواخت نسبت به متر d صورت می‌گیرد. در ضمن اندازهٔ ارقام در ماتریسهای رقم $(0,1,2,3)$ متناسب با ضریب انقباض‌کننده این ماتریسها، یعنی $\frac{1}{2}$، است.

در مجموع، نمایش اعداد حقیقی با ممیز شناور دقیق چارچوب مناسبی برای محاسبات دقیق عددی است. ولی باید ببینیم که در نمایش دقیق اعداد چگونه می‌توان تابعی را از طریق پیوند دو تابع، که قلمرو هر یک بخشی از $\mathbb{R}^*$ است، تعریف نمود. در اینجا بار دیگر به مسألهٔ تصمیم‌ناپذیری مقایسهٔ اعداد حقیقی بر می‌خوریم. در محاسبه روی اعداد گویا می‌توان برای نمونه تابعی را چنین تعریف کرد

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x &\longmapsto \begin{cases} g(x) & x < 0 \\ h(x) & x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

که در آن $g : \mathbb{Q}^- \to \mathbb{Q}$ و $h : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ توابع داده شده‌ای هستند. اما به‌دلیل تصمیم‌ناپذیری مقایسهٔ اعداد حقیقی چنین تعریفی برای توابع حقیقی امکان پذیر نیست. برای حل این مشکل، متغیر حقیقی را با دو عدد گویا به‌طور موازی مقایسه می‌کنیم. چون عدد حقیقی مزبور حداکثر می‌تواند برابر یکی از دو عدد گویا باشد، یکی از دو مقایسهٔ فوق در زمان متناهی به نتیجه می‌رسد، که از آن می‌توان برای تعریف تابع حقیقی استفاده کرد. به‌طور مشخص فرض کنید a و b دو عدد مختلف گویا باشند، مثلاً $0 < a < b < \infty$. همچنین فرض کنید توابع $g : [0,b] \to \mathbb{R}^*$ و $h : [a,\infty] \to \mathbb{R}^*$ داده شده‌اند به‌طوری که $h(x) = g(x)$ به‌ازای $x \in [a,b]$. در این صورت می‌توانیم تابع

$$\begin{cases} f : [0,\infty] \longrightarrow \mathbb{R}^* \\ \quad x \longmapsto \begin{cases} g(x) & x \leq b \\ h(x) & x \geq a \end{cases} \end{cases}$$

را تعریف کنیم. این نوع ساختار را، که در آن تابع را به‌طور موردی تعریف می‌کنیم، «اگر اضافی[1]» می‌نامیم [EPS98]. «اضافی» از این نظر که تابع در بازهٔ $[a,b]$ به دو صورت مختلف ولی برابر تعریف شده است. توجه کنید که این روشِ تعریف تابع مانند ادامهٔ تحلیلی[2] توابع مختلط است. می‌دانیم که هرگاه دو تابع تحلیلی مانند g و h به روی یک بازهٔ باز مانند (a,b) برابر باشند، آنگاه هر یک ادامهٔ تحلیلی دیگری به‌شمار می‌رود.

موضوع دیگر، مسألهٔ پیچیدگی است. برخی نتایج اولیه در زمینهٔ پیچیدگی مکانی و زمانی الگوریتمها در چارچوب ممیز شناور دقیق به‌دست آمده است [Hec97,Hec97a,Hec97b]. به‌طور خلاصه، پس از جذب یا استخراج n ماتریس رقم از یک تانسور (یا ماتریس) دلخواه، حداقل یکی از مؤلفه‌های ماتریس دارای اندازهٔ بیت n خواهد بود، مگر در موارد استثنائی که اندازهٔ آن کراندار باقی می‌ماند. پیچیدگی زمانی این محاسبات نیز برابر پیچیدگی ضرب دو عدد صحیح با اندازهٔ بیت n است. بر این اساس پیچیدگی زمانی و مکانی الگوریتمهای مربوط به توابع اولیه باید بررسی شود.

برخی تحقیقات نیز در زمینهٔ نوع دادهٔ حقیقی[3] انجام پذیرفته است. هدف این است که در یک زبان برنامه‌نویسی که دارای نوع دادهٔ بولی[4] و نوع دادهٔ صحیح[5] است، نوع داده‌ای برای اعداد حقیقی اضافه شود که معرف نمایش ضرب نرمال برای اعداد حقیقی و درختهای عبارتی برای توابع حقیقی گردد. مناسبترین زبانهای برنامه‌نویسی برای این منظور زبانهای برنامه‌نویسی تابعی[6] هستند. برای مثال در [EPS98]، زبان برنامه‌نویسی PCF[7] که دارای نوع دادهٔ بولی و نوع دادهٔ صحیح است به زبان کاملتری با نوع دادهٔ حقیقی توسعه یافته است. در این زبان جدید قواعدی برای تحویل قطعی[8] عبارتهای محاسباتی تعریف شده‌اند که قدم به قدم مقدار عددی یک عبارت را محاسبه می‌کنند. ثابت می‌شود که قواعد فوق معنای عبارتها یا به زبان دیگر مقدار آنها را تغییر نمی‌دهند و در نتیجه زبان برنامه‌نویسی ما دارای کفایت محاسباتی[9] است. زبان برنامه‌نویسی دیگری با نوع دادهٔ حقیقی در [Pot98] تشریح شده است.

چارچوب کلی نمایش اعداد بر مبنای ضرب نرمال و همچنین چارچوب ممیز شناور دقیق در برخی از زبانهای برنامه نویسی از جمله C، $C++$، کمل[10]، میراندا[11] و هسکل[12] پیاده‌سازی شده است. اکنون پروژه‌ای برای پیاده کردن این چارچوب در جاوا[13] در دست اجراست.

1. redundant if data type 2. analytic continuation 3. real number 4. Boolean data type 5. integer data type 6. functional programming languages 7. Programming Language for Computable Functions 8. deterministic reduction rules 9. computational adequacy 10. Caml 11. Miranda 12. Haskel 13. Java

یکی از شاخه‌های دیگر تحقیق در حساب دقیق حقیقی کاربردهای مختلف آن در زمینه‌های گوناگون است. تاکنون الگوریتمهای کارایی برای محاسبهٔ دقیق ریشه و نقطهٔ ثابت یک تابع حقیقی به‌دست آمده و پیاده‌سازی شده‌اند [ER98]. همچنین الگوریتمهایی برای محاسبهٔ دقیق انتگرال یک تابع حقیقی استنتاج و پیاده‌سازی شده‌اند [Krz98].

در خاتمه متذکر می‌شویم که مهمترین مسأله در استفاده از حساب دقیق حقیقی کارایی کمتر آن از لحاظ پیچیدگی زمانی و مکانی نسبت به محاسبات ممیز شناور است. در نتیجه یکی از مهمترین وظایف تحقیقی بعدی افزایش کارایی الگوریتمهای ممیز شناور دقیق از جمله از طریق پیاده کردن آنها در سخت افزار است.

با ذکر دو مسألهٔ حل نشده به مقاله حاضر پایان می‌دهیم.

الف) حدس زده می‌شود که هر تابع حقیقی که بتوان آن‌را از طریق یک درخت عبارتی نمایش داد یک تابع برخه‌ریخت است. به‌عکس هر تابع برخه‌ریخت[1] حقیقی را می‌توان به‌صورت یک درخت عبارتی نمایش داد.

ب) آیا می‌توان نوع دادهٔ مختلطی از طریق تبدیلهای کسری خطی با ضرایب متشکل از اعداد گاوسی (یعنی اعدادی به‌صورت $a + ib$ که a و b اعداد صحیح هستند) تشکیل داد، که کارایی نوع دادهٔ حقیقی را داشته باشد؟ یادآوری می‌کنیم که هر تبدیل کسری خطی مختلط، هر قرص صفحهٔ مختلط را به یک قرص می‌نگارد. لیکن مشخص ساختن تبدیلهای کسری خطی که یک قرص پایه (برای مثال نیمصفحهٔ راست) را به‌درون خود بنگارد، از لحاظ محاسباتی بسیار پیچیده‌تر از مورد حقیقی آن است. در ضمن، یافتن مرکز و شعاع قرصی که برد یک تبدیل کسری خطی به روی قرص پایه باشد از لحاظ محاسباتی گران است. با وجود این مشکلات، درختهای عبارتی توابعی چون $\tan x$ و $\arctan x$ که در [Pot98] آمده است، از طریق ماتریسهای مزدوج مختلط به یکدیگر تبدیل می‌شوند، اگر چه اساس ریاضی این تبدیلها هنوز روشن نیست. حدس زده می‌شود که بررسی کامل نمایش اعداد از طریق تبدیلهای کسری خطی در صفحهٔ مختلط نه‌تنها به سؤالات بالا جواب دهد بلکه به شناخت بهتر نوع دادهٔ حقیقی منجر گردد.

سپاسگزاری

این مقاله در زمانی که در تهران مهمان مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات بودم تهیه شده است. از الهام کاشفی به‌خاطر کمک ایشان به ویرایش مقاله سپاسگزارم.

مراجع

[DiG93] P. Di Gianantonio, *A Functional Approach to Real Number Computation*, Ph.D. thesis, University of Pisa (1993).

[Eda97] A. Edalat, "Domains for computation in mathemetics, physics and exact real arithmetic", *Bulletin of Symbolic Logic*, (4) **3** (1997) 401-452.

1. meromorphic

[EP97] A. Edalat and P. J. Potts, "A new representation for exact real numbers", in *Proceedings of Mathematical Foundations of Programming Semantics 13* (1977), edited by S. Brookes and M. Mislove, URL: `http://www.elsevier.nl/locate/entcs/volume6.html`.

[EPS98] A. Edalat and P.J. Potts and P. Sünderhauf, "Lazy computation with exact real numbers", *Proceedings of ICFP98*, URL: `http://theory.doc.ic.ac.uk/~ae` (1998).

[ER98] A. Edalat and F. Rico, "Root finding in exact real arithmetic using linear fractional transformations", *Proceedings of Real Numbers and Computers III* (1998).

[ES97a] A. Edalat and P. Sünderhauf, "A domain theoretic approach to computability on the real line", to appear in *Theoretical Computer Science*, URL: `http://theory.doc.ic.ac.uk/people/Edalat/reals.ps.gz`.

[Esc96] Escardó, M. H., "PCF extended with real numbers", *TCS*, (1) **162** (1996) 79-115.

[Gos72] W. Gosper, *Continued Fraction Arithmetic*, MIT (1972).

[Hec97] R. Heckmann, "The appearance of big integers in exact real arithmetic based on linear fractional transformations", in *Proc. Foundations of Software Science and Computation (FoSSaCS '98)*, Springer-Verlag (1998).

[Hec97a] R. Heckmann, "Contractivity of linear fractional transformations", in *Third Real Numbers and Computers Conference (RNC3)*, edited by J.-M. Chesneaux and F. Jézéquel and J.-L. Lamotte and J. Vignes, (1998).

[Hec97b] R. Heckmann, "Big integers and complexity issues in exact real arithmetic", Presented at the third Comprox workshop (Sept. 1997 in Birmingham), accepted for publication in *ENTCS* (*Electronic Notes in Theoretical Computer Science*), **13** (1998).

[Krz98] M. Krznaric, *Numerical Integration in Exact Real Arithmetic*, M.Sc. thesis, Imperial College (1998).

[NK95] A. Nielsen and P. Kornerup, "MSB-first digit serial arithmetic", *J. of Univ. Comp. Scien.*, (7) **1** (1995) 523-543.

[Pot98] P. Potts, *Exact Real Arithmetic Using Mobius Transformations*, Ph.D. thesis, Imperial College (1998).

[Vui90] J. E. Vuillemin, "Exact real computer arithmetic with continued fractions", *IEEE Transactions on Computers*, (8) **39** (1990) 1087-1105.

******

* عباس عدالت، کالج امپریال، لندن، انگلستان

`ae@doc.ic.ac.uk`

نشر ریاضی، سال ۱۰، شمارهٔ ۱، صص ۱۲-۲۰

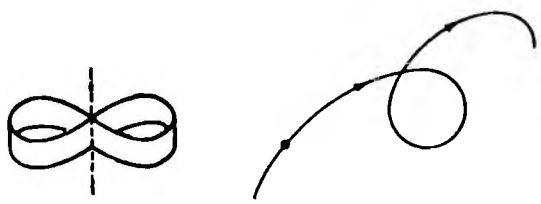
ابررویه‌های فضای هذلولوی

سید محمدباقر کاشانی*

مقدمه

از بدو ابداع هندسهٔ تحلیلی و به‌خصوص پس از به‌کارگرفته شدن حساب دیفرانسیل و انتگرال، خمها و رویه‌ها در فضای اقلیدسی (به‌ویژه در $\mathbb{R}^3$) همواره مورد توجه و مطالعهٔ ریاضیدانان بوده‌اند. ولی کشفهای گاوس در سال ۱۸۲۷ مسیر هندسه دیفرانسیل را از اساس تغییر داد و آن را به‌سوی مطالعهٔ مفهوم مجرد خمینهٔ هموار ــ فضای زمینهٔ هر هندسه ــ و همچنین نظریه‌های ریاضی مهم دیگر رهنمون شد. گاوس در قضیهٔ مشهورش نشان داد که مفهومی از خمیدگی رویه (که امروزه به‌نام او خمیدگی گاوسی نامیده می‌شود) وجود دارد که فقط به چگونگی اندازه‌گیری طول خمهای روی رویه بستگی دارد. این کشف مهم باعث ارائهٔ تعریف رویهٔ مجرد که روی آن اندازه‌گیری طول کمان به‌صورتی میسر است، گردید. پس از آن ریمان در سال ۱۸۵۴ مفهوم خمینه‌های مجرد با بعد دلخواه (خارج از فضای اقلیدسی) را که روی آنها طول کمان تعریف‌شدنی است عرضه کرد.

از این زمان به بعد مطالعهٔ «زیرخمینه‌ها»ی خمینه‌های مجرد (همراه با مفهوم اندازه‌گیری طول کمان) نیز به‌تدریج بر اثر نیاز و علاقه آغاز شد و به‌عنوان یکی از شاخه‌های پرجنب‌وجوش هندسهٔ دیفرانسیل ظاهر گشت. نظر به اینکه در این مطالعه، مفهوم اندازه‌گیری طول کمان نقش اساسی را ایفا می‌کند همواره فرض می‌شود مفهوم اندازه‌گیری طول کمان روی زیرخمینه از مفهوم اندازه‌گیری طول کمان در خمینهٔ زمینه‌ای که آن را دربردارد به ارث رسیده است. در این صورت می‌گوییم زیرخمینه به‌وسیلهٔ غوطه‌ورسازی حافظ متریک در خمینهٔ زمینه نشانده شده است. توپولوژی این زیرخمینه‌ها لزوماً از توپولوژی خمینهٔ زمینه آنها القا نشده است. به‌همین دلیل شکلهایی نظیر شکل (۱) به‌عنوان «زیرخمینه‌هایی» که با حفظ متریک غوطه‌ور شده‌اند،



شکل۱

در $\mathbb{R}^3$ قابل مطالعه‌اند. در مطالعاتی که خواص موضعی زیرخمینه مدنظر است همسایگیهای به‌اندازهٔ کافی کوچک زیرخمینه دارای توپولوژی القایی و البته مفهوم طول کمان القایی از خمینهٔ زمینه می‌باشند.

مطالعهٔ غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک از یک خمینهٔ ریمانی M^n با خمیدگی مقطعی ثابت c به یک خمینهٔ ریمانی دیگر $\widetilde{M}^{n+p}$ با خمیدگی مقطعی $\tilde{c}$ با کارهای الی کارتان آغاز شده است. ازجمله، او نشان داد اگر $c < \tilde{c}$، وجود چنین غوطه‌ورسازیی ایجاب می‌کند که $p \geq n-1$. بررسی او محدود به خواص موضعی غوطه‌ورسازیها بود که به‌طور کلی خواصی پیچیده هستند. با فرض شرایط سراسری نظیر تمام‌بودن یا فشرده‌بودن، گاه نتایج مشخصی به‌دست می‌آید. برای حالت $c = \tilde{c}$ و $p = 1$ (ابررویه)، نتایج سراسری زیر به‌دست آمده است.

الف) *حالت اقلیدسی* ($c = \tilde{c} = 0$). اگر خمینهٔ ریمانی تخت[1] و تمام

1. flat

تابلو توضیحات

۱. فرض کنید $f : (M^n, g) \to (M^{\sim n+p}, \tilde{g})$ یک نگاشت هموار بین خمینه‌های ریمانی باشد. f را **غوطه‌ورسازی حافظ متریک** نامند هرگاه

$$\tilde{g}(TfX, TfY) = g(X,Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

۲. فرض کنید ∇ و $\tilde{\nabla}$ به‌ترتیب الصاقهای لوی چیویتا برای M و $\tilde{M}$ باشند. در این صورت داریم

$$\tilde{\nabla}_X TfY = Tf(\nabla_X Y) + II(X,Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

$II(X,Y) \in (Tf(TM))^{\perp}$ یک *میدان تانسوری است که دومین فرم اساسی* f *(یا* M *در* $\tilde{M}$*) نامیده می‌شود*. این میدان تانسوری درواقع میزان تغییرشکل M در $\tilde{M}$ را نشان می‌دهد. چنانچه میدان برداری $Z \in (Tf(TM))^{\perp}$ یافت شود به‌طوری که $g(X,Y)Z = II(X,Y)$، f را *تماماً نافی*[1] نامند؛ اگر این وضعیت در یک نقطهٔ $p \in M$ رخ دهد، نقطهٔ p را نافی گویند. در صورتی‌که $II(X,Y) \equiv 0$، f (یا M در $\tilde{M}$) را *تماماً ژئودزیک*[2] نامند. واضح است که اگر M (در $\tilde{M}$) تماماً ژئودزیک باشد تماماً نافی است ولی عکس آن در حالت کلی درست نیست.

به‌طور شهودی و ساده می‌توان گفت در حالتی که M (در $\tilde{M}$) تماماً ژئودزیک است تغییرشکل آن در $\tilde{M}$ (خمیدگی نسبی آن در $\tilde{M}$) صفر است و به تعبیر فیزیکی میزان خمیدگی M از دید ناظران M و $\tilde{M}$ یکی است. در حالتی که M تماماً نافی است میزان خمیدگی نسبی آن در $\tilde{M}$ در همهٔ جهات مماس بر M یکی است و این خمیدگی نسبی فقط در جهت میدان برداری Z است.

ساده‌ترین مثال برای حالت تماماً ژئودزیک عبارت است از $\mathbb{R}^n$ نشانده‌شده در $\mathbb{R}^m$، $n \leq m$، که

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_{n+1} = \ldots = x_m = 0\}$$

ساده‌ترین مثال برای حالت تماماً نافی عبارت است از کرهٔ S^n نشانده‌شده در $\mathbb{R}^{n+1}$

$$S^n = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\}$$

۳. **خمیدگی ریمانی** خمینهٔ ریمانی (M,g) با الصاق لوی چیویتا، ∇، عبارت است از میدان تانسوری زیر

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$$

خمیدگی ریچی M. عبارت است از میدان تانسوری

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}\{V \mapsto R(X,V)Y\} \; \forall X, Y, V \in \mathcal{X}(M)$$

خمیدگی مقطعی M. به‌ازای بردارهای مستقل خطی $u, v \in T_pM$، خمیدگی مقطعی M نسبت به صفحهٔ تولیدشده توسط u، v عبارت است از

$$K(u,v) = \frac{g(R(v,w)v, w)}{g(v,v)g(w,w) - (g(v,w))^2}$$

خمیدگی میانگین M در نقطهٔ $p \in M$ عبارت است از: $H_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} II(e_i, e_i)$ که $\{e_1, \ldots, e_n\}$ یک پایهٔ یکهٔ متعامد T_pM است.

خمیدگی *اصلی*: فرض کنید $\xi \in (Tf(TM))^{\perp}$. قرار می‌دهیم

$$A_\xi X = (-\tilde{\nabla}_X \xi) \text{ مؤلفهٔ مماسی } \quad \forall X \in \mathcal{X}(M)$$

در این صورت در هر نقطهٔ $p \in M$، $A_\xi : T_pM \to T_pM$ یک نگاشت خطی خودالحاق است که عملگر شکل M در $\tilde{M}$ نامیده می‌شود. هر مقدار ویژهٔ A را یک خمیدگی اصلی M در امتداد ξ می‌نامند. رابطهٔ بین A_ξ و دومین فرم اساسی M به‌صورت زیر است

$$\tilde{g}(II(X,Y), \xi) = g(A_\xi X, Y) \; \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

۴. **همنهشتی**[3]: فرض کنید $M \subset \overline{M}$ زیرخمینهٔ ریمانی $\overline{M}$ و $N \subset \overline{N}$ زیرخمینهٔ ریمانی $\overline{N}$ باشد. یک زوج ایزومتری از $M \subset \overline{M}$ به $N \subset \overline{N}$ عبارت است از ایزومتری $\Phi : \overline{M} \to \overline{N}$، چنانکه $\Phi|_M$ یک ایزومتری از M به N باشد. چنانچه $\overline{M} = \overline{N}$، Φ یک همنهشتی از M به N نامیده می‌شود.

۵. **معادلهٔ گاوس و کوداتسی**: برای زیرخمینهٔ ریمانی $M \subset \overline{M}$ که M و $\overline{M}$ هر دو دارای خمیدگی مقطعی ثابت c می‌باشند معادلهٔ گاوس به‌صورت

$$\tilde{g}(II(X,X), II(Y,Y)) - \tilde{g}(II(X,Y), II(X,Y)) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

می‌باشد. در حالت خاصی که M ابررویه است، معادلهٔ بالا به‌صورت ساده‌تر زیر درمی‌آید (A عملگر شکل M در $\overline{M}$ است)

$$g(AX,X)g(AY,Y) - (g(AX,Y))^2 = 0 \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

معادله کوداتسی برای زیرخمینهٔ ریمانی $M \subset \overline{M}$ به‌صورت

$$(\tilde{\nabla}_Z II)(Y,X) = (\tilde{\nabla}_Y II)(Z,X) \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$$

می‌باشد و در حالتی که M ابررویه است به‌شکل ساده‌تر

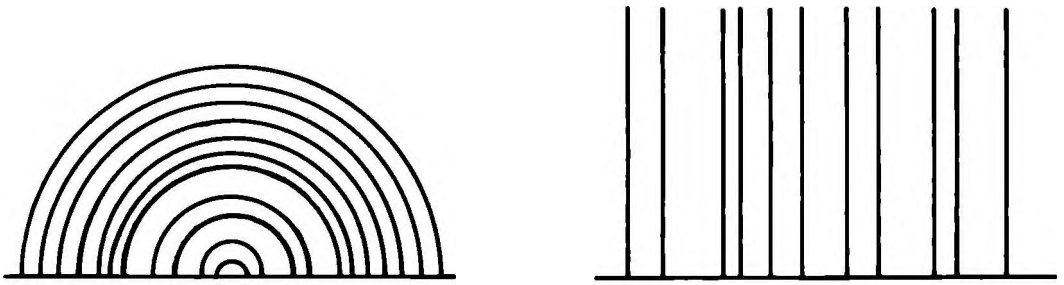
$$(\nabla_X A)(Y) = (\nabla_Y A)(X) \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

درمی‌آید

۶. **صلبیت**[4]. زیرخمینهٔ ریمانی $M \subset \overline{M}$ در $\overline{M}$ صلب است اگر برای هر غوطه‌ورسازی حافظ متریک $f : M \to \overline{M}$، ایزومتری $\phi \in \mathrm{Iso}(\overline{M})$ موجود باشد چنانکه $\phi \circ f = i_M$ که $i_M : M \to \overline{M}$ نگاشت شمول است.

---

1. totally umbilic 2. totally geodesic 3. congruence
4. rigidity



(الف) (ب)

شکل۲

M^n با حفظ متریک در $\mathbb{R}^{n+1}$ عوطه‌ور شده باشد، آنگاه M^n عبارت است از یک *استوانهٔ nبعدی که روی خمی مسطح بنا شده است*، یعنی $M = \mathbb{R}^{n-1} \times \gamma$ که $\mathbb{R}^{n-1}$ یک زیرفضای اقلیدسی $(n-1)$بعدی از $\mathbb{R}^{n+1}$ و γ خمی است که در صفحهٔ عمود بر $\mathbb{R}^{n-1}$ واقع است. این مطالب را هارتمن و نیرنبرگ ثابت کرده‌اند [۷].

ب) *حالت کروی* $(c = \tilde{c} = 1)$. اگر کرهٔ nبعدی S^n به‌وسیلهٔ f به‌عنوان زیرخمینهٔ ریمانی در S^{n+1} با حفظ متریک غوطه‌ور شده باشد، آنگاه S^n به‌عنوان یک کرهٔ nبعدی (بزرگ) در S^{n+1} نشانده شده است. یعنی برای یک ایزومتری $\phi \in \mathrm{Iso}(S^{n+1})$،

$$\phi(f(S^n)) = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in S^{n+1} : x_{n+2} = 0\}$$

این مطلب حالت خاصی از قضیهٔ اُنیل و استیل است [۱۶].

ج) *حالت هذلولوی* $(c = \tilde{c} = -1)$. در این حالت وضعیت بسیار پیچیده است. در سال ۱۹۷۳، نومیزو در [۱۳] سؤال زیر را مطرح کرد. مطلوب است یافتن کلیهٔ غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک از $H^n(-1)$ به $H^{n+1}(-1)$، حتی به‌ازای $n = 2$. او خود در آن مقاله سه نوع متمایز از غوطه‌ورسازیهای حافظِ متریک غیرتماماً ژئودزیک[1] از H^2 به H^3 ارائه داد.

در این مقاله ضمن ارائهٔ دو مثال از مقالهٔ [۱۳] و مرورکارهای تحقیقاتی نومیزو، فروس، آبه، هاس، هو، ژائو، مُری، و تاکاهاشی در این زمینه، طبق روند تاریخی، به معرفی ابررویه‌های با خمیدگی ثابت ۱− در $H^{n+1}(-1)$ می‌پردازیم و به پاسخ کامل سؤال نومیزو دست می‌یابیم. همچنین، همراه با توصیف کار تحقیقاتی مُرون و کیانگ، ابررویه‌هایِ با خمیدگی ریچیِ ثابت و خمیدگی میانگین ثابت در H^{n+1} را معرفی می‌کنیم.

مطالب اصلی

حداقل دو روش برای ارائهٔ غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک از H^n به H^{n+1} وجود دارد. یک روش عبارت است از ساختن یک زیرخمینهٔ M^n در H^{n+1} و نشان‌دادن اینکه M^n با متریک القایی با H^n ایزومتریک است. روش دیگر عبارت است از ارائهٔ یک میدان تانسوری A از نوع $(1,1)$ روی H^n که در معادلات گاوس و کوداتسی

$$\langle AX, X\rangle\langle AY, Y\rangle - \langle AX, Y\rangle^2 = 0$$
$$(\nabla_X A)(Y) = (\nabla_Y A)(X)$$

صدق کند (در اینجا ∇ اتصاق لوی چیویتا[1] روی H^n است و X و Y میدانهای برداری روی H^n هستند). آنگاه بنا بر قضیهٔ اساسی ابررویه‌ها در فضای هذلولوی (مشابه قضیهٔ ۲.۷ از فصل ۷ در [۱۰]) یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک از H^n به H^{n+1} وجود دارد که A عملگر شکل آن است. در حالت کلی جهت پوچ[2] A : $\{X \in TH^n : \langle AX, Y\rangle = 0 \ \ \forall Y \in TH^n\}$ یک برگ‌بندی روی H^n تعریف می‌کند که برگهای آن *زیرخمینه‌های تماماً ژئودزیک*، H (برگ‌بندی ژئودزیک) هستند.

پیچیدگی حالت هذلولوی (حتی برای $n = 2$) را می‌توان با ارائهٔ برگ‌بندی‌های ژئودزیک متمایز مختلف روی H^2 نشان دارد (شکل ۲). توجه کنید که در شکل ۲، (الف) و (ب) متمایزند زیرا در (الف) همهٔ ژئودزیکها از یک نقطهٔ در ∞ می‌گذرند در حالی که در (ب) نقاط بینهایت دور ژئودزیکها متمایزند. در حالت اقلیدسی ، به‌آسانی دیده می‌شود که فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ به‌طور اساسی یک برگ‌بندی ژئودزیک از بعد $n-1$ دارد. یعنی هر دو برگ‌بندی ژئودزیک $\mathbb{R}^n$ توسط یک ایزومتری $\mathbb{R}^n$ بر هم منطبق می‌شوند (هر برگ یک برگ‌بندی به‌طور ایزومتریک بر برگی از برگ‌بندی دیگر تصویر می‌شود). در حالت کروی، واضح است که S^n هیچ برگ‌بندی ژئودزیک کامل از بعد $(n-1)$ نمی‌پذیرد. زیرا تنها ابررویه‌های تماماً ژئودزیک کامل در S^n عبارت‌اند از کره‌های $S^{n-1} \subset S^n$ و واضح است که هر دو چنین ابررویه‌ای برای $n \geq 2$ همدیگر را قطع می‌کنند.

۱. **مثال.** ابتدا یک «حاصلضرب تابیده[3]» روی $H^n \times H^p$ تعریف می‌کنیم و به‌عنوان کاربرد مستقیم آن، مثالی از یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک از H^n به H^{n+1} تعریف می‌کنیم که یک «استوانهٔ nبعدی» در H^{n+1} تلقی می‌شود (حالت خاص $n = 2$، اولین مثال غوطه‌ورسازی از H^2 به H^3 است).

1. non-totally-geodesic

1. Levi-Civita connection
2. null direction of A
3. warped product

برای تثبیت قراردادها ابتدا $H^n(-1)$ را تعریف می‌کنیم

$$H^n = H^n(-1) = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}_1 : -x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = -1, x_0 \geq 1\} \underset{\text{زیرخمینهٔ ریمانی}}{\subseteq} \mathbb{R}^{n+1}_1$$
$$= (\mathbb{R}^{n+1}, \langle , \rangle)$$
$$\langle x, y\rangle = -x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

(این تعریف $H^n(-1)$ ایزومتریک با تعریف دیگر به‌صورت

$$H^n(-1) = \big(\{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}, dx^2 = \frac{1}{x_n^2}(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)\big)$$

است).

نگاشت $\phi : H^n \times H^p \to H^{n+p}$ را به‌صورت

$$\phi(x, y) = (y_0 x_0, y_0 x_1, \dots, y_0 x_n, y_1, \dots y_p)$$

در نظر بگیرید که در آن

$$x = (x_0, \dots, x_n) \in H^n, y = (y_0, \dots, y_p) \in H^p$$

نگاشت ϕ یک وابرریختی (هموار) است. متریک $d\sigma^2$ روی H^{n+p} برحسب متریکهای dx^2 روی H^n و dy^2 روی H^p به‌صورت $d\sigma^2 = y_0^2 dx^2 + dy^2$ *قابل بیان است*. بدین جهت H^{n+p} را *حاصلضرب تابیدهٔ* H^n و H^p می‌نامند. اکنون *استوانهٔ* n*بعدی* در H^{n+1} را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. نگاشت $\phi : H^2 \times H^{n-1} \to H^{n+1}$ را در نظر می‌گیریم، برای خم (عادی) داده شدهٔ $\gamma : \mathbb{R} \to H^2$ که برحسب طول قوس s پارامتری شده است، حاصلضرب ریمانی $M^n = \mathbb{R} \times H^{n-1}$ و نگاشت $f : M \to H^{n+1}$ را به‌صورت $f(s, y) = \phi(\gamma(s), y)$ تعریف می‌کنیم. به‌آسانی دیده می‌شود که f یک غوطه‌ورسازی است. نگاشت f (یا به‌طور هندسی تصویر آن) *استوانهٔ* n*بعدی ساخته‌شده روی خم مسطح* γ نامیده می‌شود. به‌ویژه وقتی $n = 2$، مفهوم استوانه در H^3 به‌دست می‌آید. خواص این استوانه درگزارهٔ زیر آمده است.

۲. گزاره. [۱۳] فرض کنید $\gamma : \mathbb{R} \to H^2$ یک خم هموار باشد که به‌وسیلهٔ طول قوس s پارامتری شده است. استوانهٔ nبعدی ساخته شده روی γ در H^{n+1} با H^n ایزومتریک است. خم γ در $M \cong f(M)$ یک ژئودزیک است. خمیدگیهای اصلی M همگی صفرند جز یک خمیدگی که برابر $k(s)/y_0$ (در نقطهٔ $(s, y) \in M$) است، $k(s)$ خمیدگی γ به‌عنوان یک خم در H^2 است. بنابراین M تماماً ژئودزیک است اگر و فقط اگر γ یک ژئودزیک در H^2 باشد.

حالت خاص زیر یک نشانندهٔ حافظ متریک (هموار) از H^2 به H^3 است که تماماً ژئودزیک نمی‌باشد. فرض کنید $\gamma : \mathbb{R} \to H^2$ خمی با فرمول $\gamma(s) = (\frac{1+s^2}{2}, s, \frac{s^2}{2})$ باشد. خمیدگی γ برابر مقدار ثابت یک است. H^2 را به‌عنوان یک صفحه در H^3 در نظر بگیرید؛ استوانهٔ M^2 در H^3، ساخته شده روی γ، تصویر یک نشانندهٔ حافظ متریک $f : H^2 \to H^3$ است. خمیدگی اصلی ناصفر استوانه در این حالت عبارت است از $1/y_0$ که در $(0, 1]$ تغییر می‌کند. (توجه کنید که در این مثال، رویه به‌طور صریح ساخته شده است).

۳. مثال. γ را مطابق حالت خاص در مثال ۱ در نظر بگیرید. میدان برداری یکهٔ عمود بر γ عبارت است از

$$Y(s) = (-\frac{s^2}{2}, -s, 1 - \frac{s^2}{2})$$

نگاشت $x : \mathbb{R}^2 \to H^2$ را با فرمول

$$x(s, t) = (\cosh t)\gamma(s) + (\sinh t)Y(s)$$

در نظرگیرید. به‌آسانی دیده می‌شود این نگاشت یک وابرریختی است، بنابراین یک دستگاه مختصات سراسری (s, t) روی H^2 تعریف می‌کند. میدانهای برداری $x_s = \frac{\partial}{\partial s}$ (مماس بر sـخمها برای هر tی ثابت) و $x_t = \frac{\partial}{\partial t}$ (مماس بر tـخمها برای هر s ثابت) به‌وسیلهٔ فرمولهای زیر داده می‌شود

$$x_s = (se^{-t}, e^{-t}, se^{-t}),$$
$$x_t = (\sinh t - \frac{s^2 e^{-t}}{2}, -se^{-t}, \cosh t - \frac{s^2 e^{-t}}{2})$$

چون میدان برداری $\partial x_s/\partial t = (-se^{-t}, -e^{-t}, -se^{-t})$ برابر $-x_s$ است، برای التصاق لوی چیویتا، ∇، روی H^2 داریم $\nabla_{x_t} x_s = -x_s$. از آنجاکه x_t و x_s جابه‌جا می‌شوند ($[x_t, x_s] = 0$) داریم $\nabla_{x_s} x_t = -x_s$. حال عملگر شکل A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A(x_s) = \lambda x_s, \quad A(x_t) = 0$$

که $\lambda = \lambda(s, t)$ یک نگاشت مناسب است. معادله کوداسی که عبارتست از رابطهٔ $\nabla_{x_s}(A(x_t)) = \nabla_{x_t}(A(x_s))$ باید برآورده شود. این معادله در اینجا به‌صورت $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \lambda$ است، بنابراین داریم $\lambda(s, t) = \mu(s)e^t$ که $\mu = \mu(s)$ یک نگاشت هموار دلخواه است.

پس برای هر انتخاب نگاشت $\mu(s)$، قضیهٔ اساسی برای رویه‌های واقع در H^3 وجود یک غوطه‌ورسازی از H^2 به H^3 با خمیدگیهای اصلی 0 و $\mu(s)e^t$ را تضمین می‌کند. به‌ویژه می‌توان μ را یک نگاشت ناصفر ثابت گرفت، در این حالت A هیچ‌وقت صفر نمی‌شود و خمیدگی اصلی ناصفر روی M^2 بیکران است (این مثال را با مثال ۱ مقایسه کنید. در این مثال غوطه‌ورسازی f از طریق میدان تانسوری A داده شده است).

واضح است که این دو مثال همنهشت نیستند زیرا خمیدگی اصلی ناصفر در مثال ۱، کراندار و در مثال ۲ بیکران است.

برگ‌بندی ژئودزیک

اگر غوطه‌ورسازی حافظ متریک $f : H^n \to H^{n+1}$ *هیچ نقطهٔ نافی* نداشته باشد، عملگر شکل f، یعنی A، در هر نقطه دارای اندیس پوچی $(n-1)$ است. اندیس پوچی در x عبارت است از بعد

$$\{X : X \in T_x H^n, A(X) = 0\} = T_0(x)$$

در این حالت، برگ‌بندی پوچی T_0 *انتگرال‌پذیر* است و هر برگ، یک *زیرخمینهٔ تماماً ژئودزیک کامل* $(n-1)$بعدی است. به‌طور کلی یک برگ‌بندی kبعدی روی یک خمینهٔ *ریمانی را ژئودزیک نامند اگر هر برگ یک زیرخمینهٔ kبعدی تماماً ژئودزیک کامل باشد*. غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک، در مثالهای ۱ و ۲ نقطهٔ نافی ندارند و می‌توان دید برگ‌بندیهای ژئودزیک وابسته به آنها (برگ‌بندی پوچی T_0) به‌وسیلهٔ هیچ ایزومتری H^2 همنهشت نیستند. برعکس به‌ازای هر برگ‌بندی ژئودزیک T_0 روی H^2، غوطه‌ورسازی حافظ متریک $f : H^2 \to H^3$ وجود دارد چنانکه T_0، برگ‌بندی پوچی عملگر شکل آن (معرفی شده در بالا) باشد.

معادلهٔ کوداتسی که باید عملگر شکل فوق‌الذکر در آن صدق کند، یک معادلهٔ دیفرانسیل است که باید خمیدگیهای اصلی ناصفر در آن صادق باشد. توجه کنید که مثال ۲ درواقع با این روش ساخته شد.

فروس در همان سال ۱۹۷۳ در [۵] نشان داد که چگونه می‌توان همهٔ برگ‌بندیهای ژئودزیک $(n-1)$بعدی روی H^n را به‌دست آورد و اینکه هر برگ‌بندی ژئودزیک روی H^n برگ‌بندی پوچی یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک بدون نقطهٔ نافی از H^n به H^{n+1} است. او نتایج زیر را در این خصوص به‌دست آورده است.

۴. قضیه. (قضیهٔ ۳ از [۵]): فرض کنید J بازه‌ای باز در $\mathbb{R}$ باشد و $q : J \to H^n$ یک خم با سرعت واحد و خمیدگی $\kappa \leq 1$ باشد. همچنین فرض کنید $\pi : N(q) \to J$ کلاف قائم q و $\overline{q} : N(q) \to TH^n$ ترفیع معمولی q $(\tau_{H^n} \circ \overline{q} = q \circ \pi)$ باشد، و نیز $\exp : TH^n \to H^n$ نگاشت نمایی H^n باشد. قرار دهید $E = \exp \circ \overline{q} : N(q) \to H^n$.

در این صورت E یک غوطه‌ورسازی ۱ـ۱ است. اگر $J = \mathbb{R}$، آنگاه E یک وابرریختی است که برگ‌بندی $N(q)$ به‌وسیلهٔ تارها را به یک برگ‌بندی $F(q)$ از H^n تبدیل می‌کند. برگهای برگ‌بندی اخیر ابررویه‌های تماماً ژئودزیک H^n هستند که خم q بر آنها عمود است.

۵. نتیجه. (نتیجهٔ ۱ از [۵]). فرض کنید F یک برگ‌بندی H^n به‌وسیلهٔ ابررویه‌های تماماً ژئودزیک H^n باشد، آنگاه یک خم با سرعت واحد $q : \mathbb{R} \to H^n$ و با خمیدگی $\kappa \leq 1$ وجود دارد چنانکه $F = F(q)$.

ایدهٔ اثبات. این نتیجه به‌آسانی از قضیهٔ بالا و این مطلب به‌دست می‌آید که برای هر برگ‌بندی H^n به‌وسیلهٔ خانواده‌ای از ابررویه‌های تماماً ژئودزیک آن، یک خم هموار کامل در H^n عمود بر برگهای برگ‌بندی وجود دارد که خمیدگی آن کمتر یا مساوی یک است.

۶. قضیه (قضیه ۴ از [۵]). فرض کنید $q : \mathbb{R} \to H^n$ یک خم با سرعت واحد و خمیدگی نابیشتر از ۱ و $\lambda_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$ یک نگاشت هموار باشد. همچنین فرض کنید $F(q)$ برگ‌بندی H^n القا شده توسط q باشد (به قضیهٔ قبل رجوع کنید). آنگاه غوطه‌ورسازی حافظ متریک $f : H^n \to H^{n+1}$ بدون نقطهٔ نافی وجود دارد به‌طوری که:

i) یک میدان برداری یکهٔ عمود بر f وجود دارد که عملگر شکل f وابسته به این میدان برداری به‌صورت $A\dot{q} = \lambda_0 \dot{q}$ است.

ii) برگ‌بندی پوچی f با $F(q)$ یکی است.

ایدهٔ اثبات. به موجب قضیهٔ اساسی برای ابررویه‌ها کافی است وجود میدان تانسوری از نوع $(1,1)$، A روی H^n را ثابت کنیم که از رتبهٔ ۱ باشد و روی بردارهای مماس بر برگهای $F(q)$ صفر شود و در رابطهٔ $A\dot{q} = \lambda_0 \dot{q}$ و نیز معادلهٔ کوداتسی صدق کند. درواقع A باید به‌صورت $A(0) = \lambda g(0, Y)Y$ باشد که $\lambda : H^n \to \mathbb{R} - \{0\}$ چنان است که $\lambda \circ q = \lambda_0$ و Y میدان برداری یکه روی H^n عمود بر برگهای برگ‌بندی داده شده است. در این صورت معادلهٔ کوداتسی به‌ازای همهٔ میدانهای برداری X عمود بر Y به‌صورت $d\lambda(X) = \lambda g(X, \nabla_X Y)$ است. برای اثبات برقراری این معادله، ۱ـفرم w به‌صورت $w(Z) = g(Z, \nabla_Y Y)$ تعریف می‌شود چنانچه برای هر برگ $L \in F(q)$، $i_L : L \hookrightarrow H^n$ نگاشت شمول باشد. دیده می‌شود که معادلهٔ کوداتسی فوق معادل است با

$$d(\log|\lambda| \circ i_L) = i_L^* w$$

ثابت می‌شود فرم $i_L^* w$ بسته و در نتیجه دقیق است و درواقع رابطهٔ فوق برقرار است.

۷. نتیجه (نتیجهٔ ۲ از [۵]). هر برگ‌بندی H^n به‌وسیلهٔ ابررویه‌های تماماً ژئودزیک عبارت است از برگ‌بندی پوچی یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک بدون نقطهٔ نافی از H^n به H^{n+1}.

دو نتیجهٔ بالا توصیف کاملی از برگ‌بندیهای H^n ارائه می‌دهند. این برگ‌بندیها به‌صورت برگ‌بندیهای پوچ غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک بدون نقطه نافی ظاهر می‌شوند.

نتایج نومیزو و فروس، غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک بدون نقطهٔ نافی از H^n به H^{n+1} را مشخص می‌کند. آبه و هاس در سال ۱۹۹۳ در [۱] خانوادهٔ بزرگتری از غوطه‌ورسازیها از H^n به H^{n+1} را مشخص کرده‌اند. قبل از آنکه قضیهٔ مهم آنها را بیان کنیم باید مفهوم تورق[1] را معرفی نماییم.

۸. تعریف. فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز از H^n باشد که مؤلفه‌های همبندی آن را به U_i، $i = 1, 2, \ldots$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید هر U_i دارای برگ‌بندی C^∞، $\mathscr{F}_i$ به‌وسیلهٔ ابررویه‌های تماماً ژئودزیک کامل باشد. $\mathscr{F}_U$ عبارت است از اجتماع مجزای $\mathscr{F}_i$ها. در این صورت سه‌تایی $(U, \mathscr{F}_U, H^n - U)$ یک تورق C^∞ برای H^n خوانده می‌شود.

حال فرض کنید $f : H^n \to H^{n+1}$ یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک و A عملگر شکل این غوطه‌ورسازی باشد. از رابطهٔ

$$\langle AY, Z\rangle AX = \langle AX, Z\rangle AY$$

1. lamination

برای هر $X,Y,Z \in TH^n$ نتیجه می‌شود $\mathrm{rank}A \leq 1$. قرار دهید $U = \{x \in H^n : \mathrm{rank}A = 1\}$، U در H^n باز است و به‌وسیلهٔ میدان پوچی نسبی[1] A برگ‌بندی می‌شود که برگهای مربوطه، ابررویه‌های تماماً ژئودزیک کامل هستند. U متشکل از حداکثر تعدادی شمارا مؤلفهٔ همبندی باز می‌باشد که هر کدام از آنها به‌وسیلهٔ برگهای فوق برگ‌بندی شده است. $H^n - U$ مجموعه‌ای بسته است و عبارت است از نقاطی که A برابر صفر است. $H^n - U$ غالباً مجموعهٔ نافی f نامیده می‌شود. سه‌تایی $\mathcal{L}_f = (U, \mathscr{F}_U, H^n - U)$ تورق C^∞ روی H^n وابسته به غوطه‌ورسازی f خوانده می‌شود. $\mathcal{L}_f$ به‌طور یکتا توسط f مشخص می‌گردد.

۹. قضیه ([۱]). برای تورق C^∞ داده شده روی H^n، خانواده‌ای از غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک از H^n به H^{n+1} وجود دارد چنانکه برگ‌بندیهای پوچی القاشده توسط تمام اعضای خانواده به‌وسیلهٔ آن تورق مشخص می‌شود.

ایدهٔ اثبات . درواقع ابتدا گزاره زیر ثابت می‌شود و سپس با تغییرات مختصری در گزاره، قضیه نتیجه می‌شود.

۱۰. گزاره (گزارهٔ ۱ از [۱]). فرض کنید تورق C^∞ $(U, \mathscr{F}_U, H^2 - U)$ که U مجموعهٔ بازی در H^2 است، داده شده باشد. در این صورت غوطه‌ورسازی حافظ متریک $f : H^2 \to H^3$ وجود دارد چنانکه تورق وابسته به آن دقیقاً $(U, \mathscr{F}_U, H^n - U)$ است. درواقع بینهایت غوطه‌ورسازی از این نوع وجود دارد.

برای اثبات این گزاره نیز با استفاده از تورق داده شده میدان تانسوری A از نوع $(1,1)$ چنان ساخته می‌شود که در معادلات گاوس و کوداتسی صدق کند. آنگاه با به‌کار بردن قضیهٔ اساسی برای ابررویه‌ها، وجود f اثبات می‌شود.

قضیهٔ ۹ ضمن اینکه نتایج نومیزو و فروس را دربردارد، مثالهایی از غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک با مجموعه نقاط نافی ارائه می‌دهد. درواقع کلیهٔ مجموعه‌های نقاط نافی از این روش به‌دست می‌آیند. با وجود این، این روش کاستی هم دارد. مثلاً یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک تحلیلی با نقاط نافی را نمی‌توان از این روش به‌دست آورد.

آنچه تاکنون گفته شد، همگی جوابهای جزئی به سؤال نومیزو در [۱۳] است. در سال ۱۹۹۷، هو و ژائو در دو مقالهٔ [۸] و [۹] سؤال فوق را در حالت $n = 2$ به‌طور کامل پاسخ دادند. نتایج آنها به‌شرح زیر است.

۱۱. قضیه ([۹]). هر غوطه‌ورسازی حافظ متریک از $H^2(-1)$ به $H^3(-1)$ متناظر با یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل مونژ-آمپر[2] به‌صورت زیر است

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right) = 0, \xi = (\xi_1, \xi_2) \in D = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \|\xi\| < 1\} \tag{1}$$

به‌عکس، برای هر جواب u از معادلهٔ فوق، تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} g_{ij} = \lambda^{-4}(\lambda^2 \delta_{ij} + \xi_i \xi_j) & \lambda = \sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \\ h_{ij} = \lambda^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} & i,j = 1,2 \end{cases} \tag{2}$$

در این‌صورت u یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک از $H^2(-1)$ به $H^3(-1)$ را مشخص می‌کند که $g = (g_{ij})$ و $h = (h_{ij})$ به ترتیب اولین و دومین فرم اساسی آن هستند.

ایدهٔ اثبات . لم زیر جوهر اصلی اثبات است.

لم (گزارهٔ ۳.۳.۱ از [۱۴]). فرض کنید (M, g) یک خمینهٔ ریمانی با خمیدگی ثابت c (احتمالاً صفر) و T یک میدان تانسوری کوداتسی روی M باشد (یعنی T میدان تانسوری از نوع $(1,1)$ و متقارن است و به‌ازای هر X، Y، و Z متعلق به TM، $(\nabla_X T)(Y,Z) = (\nabla_Y T)(X,Z)$، ∇ التصاق لوی چیویتا روی M است). آنگاه برای هر نقطه از M همسایگی U و یک نگاشت هموار $f : U \to \mathbb{R}$ وجود دارد که در U رابطهٔ زیر برقرار است: $T \equiv \mathrm{Hess} f + cfg$. به‌علاوه اگر M ساده‌همبند باشد، آنگاه چنین نمایش T در سراسر M برقرار است. به‌عکس روی هر خمینهٔ ریمانی (M, g) با خمیدگی ثابت c، هر نگاشت حقیقی هموار f یک میدان تانسوری کوداتسی به‌صورت $T = \mathrm{Hess} f + cfg$ تعریف می‌کند.

اکنون با توجه به اینکه h دومین فرم اساسی غوطه‌ورسازیِ داده شدهٔ یک میدان تانسوری کوداتسی است، با به‌کاربردن لم بالا داریم $h = \mathrm{Hess} f - fg$ برای یک $f : H^2 \to \mathbb{R}$ مناسب. معادلهٔ گاوس برای h معادل است با $\det h = 0$ یعنی $\det(\mathrm{Hess} f - fg) = 0$. با تغییر مختصری در این معادله، معادلهٔ مونژ-آمپر به‌دست می‌آید.

از طرف دیگر، اگر u یک جواب هموار معادلهٔ (۱) باشد، آنگاه hای که به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۲) تعریف می‌شود یک میدان تانسوری کوداتسی روی $H^2(-1)$ است و g و h یک غوطه‌ورسازی (هموار) حافظ متریک از $H^2(-1)$ به $H^3(-1)$ را مشخص می‌کند که معادلهٔ (۱)، معادلهٔ گاوس آن است.

۱۲. قضیه (گزارهٔ ۱ از [۸]). هر غوطه‌ورسازی حافظ متریک از $H^2(-1)$ به $H^3(c)$، $c < -1$، متناظر با یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل مونژ-آمپر به‌صورت زیر است

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right) = \frac{-c-1}{(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^2}, \tag{3}$$
$$\xi = (\xi_1, \xi_2) \in D = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \|\xi\| < 1\}$$

به‌عکس، برای هر جواب u از معادلهٔ (۳) تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} g_{ij} = \lambda^{-4}(\lambda^2 \delta_{ij} + \xi_i \xi_j), \quad \lambda = \sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \\ h_{ij} = \lambda^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \end{cases} \tag{4}$$

آنگاه u یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک از $H^2(-1)$ به $H^3(c)$ مشخص می‌کند که g و h فوق به‌ترتیب اولین و دومین فرم اساسی آن هستند.

اثبات مشابه اثبات قضیه قبل است.

1. relative null distribution 2. Monge-Ampère

۱۳. قضیه (قضیهٔ ۱ از [۸]). به‌ازای هر $\varphi \in C^\infty(\partial D)$، معادلهٔ دیفرانسیل همراه با شرایط مرزی زیر

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right) = \frac{-c-1}{(1-\xi_1-\xi_2)^2} \text{ در } D \text{ و } u=\varphi \text{ روی } \partial D \qquad (5)$$

دارای جواب یکتای محدب $u \in C^\infty(D) \cap C^\infty(\partial D)$ است. همچنین جواب u از معادلهٔ (۵) به‌وسیلهٔ معادلات (۴)، یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک هموار از $H^2(-1)$ به $H^3(c)$ با خمیدگیهای اصلی کراندار مشخص می‌کند.

اثبات این قضیه طولانی و حاوی تکنیکها و جزئیات زیاد است که از ارائه آن صرف‌نظر می‌کنیم. علاقه‌مندان به مرجع [۸] رجوع کنند.

۱۴. نکته. فرض کنید $M_1^3(c)$ خمینهٔ نیمه‌ریمانی ۳بعدی ساده‌ـهمبند کامل با اندیس یک و خمیدگی ثابت c باشد. اگر $c=0$، $M_1^3(c)$ فضای مینکوفسکی $\mathbb{R}_1^3$ است. اگر $c>0$ (یا $c<0$)، $M_1^3(c)$ عبارت است از شبه‌کرهٔ سه‌بعدی $S_1^3(c)$ (یا فضای شبه‌هذلولوی $H_1^3(c)$). حال $c>-1$ و غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک از $H^2(-1)$ به $M_1^3(c)$ را در نظر بگیرید. در این صورت دو قضیهٔ قبل با تغییر مختصر زیر برقرار است. $H^3(c)$ را به $M_1^3(c)$ تبدیل کنید و سمت راست معادلات (۳) و (۴) را به $\frac{c+1}{(1-\xi_1^2-\xi_2^2)^2}$.

۱۵. نکته. هانو و نومیزو در [۶] ثابت کرده‌اند که $H^2(-1)$ در $\mathbb{R}_1^3$ صلب (رک. تابلو توضیحات) نیست. درواقع، در این مرجع یک، خانواده یک‌پارامتری از نشانده‌های حافظ متریک ناهمنهشت از $H^2(-1)$ به $\mathbb{R}_1^3$ ارائه شده است. از طرف دیگر، لی در [۱۱]، به‌عنوان یک حالت خاص، رویه‌های کامل، فضا مانند (یعنی رویه‌هایی که طول بردارهای ناصفر مماس بر آنها مثبت است) و محدب با خمیدگیهای اصلی کراندار و خمیدگی گاوسی (مشخص‌شده) در $\mathbb{R}_1^3$ را رده‌بندی کرده است.

سرانجام آبه، مُری، و تاکاهاشی در [۲] به‌طور کامل به سؤال نومیزو که در سال ۱۹۷۳ مطرح کرده بود پاسخ دادند. نتیجهٔ مهم آنها به‌صورت زیر قابل بیان است. برای بیان قضیه‌های آنها ابتدا لازم است چند مطلب مقدماتی آورده شود.

فرض کنید Λ یک مجموعه حداکثر شمارا و $r_\alpha(t)$، $c_{1\alpha}(t)$، ...، $c(t)_{n-1,\alpha}$ نگاشتهای هموار حقیقی تعریف شده روی $J_\alpha=(a_\alpha,b_\alpha)\subset(0,\infty)$ به‌ازای هر $\alpha\in\Lambda$ باشد که در شرایط زیر صدق می‌کنند

$$r_\alpha(t) \neq 0, \sum_{i=1}^{n-1} c'_{i\alpha}(t)^2 \le 1 \qquad (6)$$

تعریف می‌کنیم

$$q_\alpha : (a_\alpha,b_\alpha)\times(0,\pi)^{n-1} \to \mathbb{R}_+^n = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_n>0\}$$
$$q_\alpha(t,\theta_2,\dots,\theta_n)=(\dots, t\sin\theta_{2\alpha}\dots\sin\theta_{i\alpha}\cos\theta_{i+1\alpha}+c_{i\alpha}(t),\dots)$$

۱۶. قضیه (قضیهٔ ۱.۱ از [۲]). برای غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک داده شدهٔ $f: H^n \to H^{n+1}$. یک خانوادهٔ حداکثر شمارا از nتایی‌های $\{r_\alpha(t), c_{1\alpha}(t),\dots,c_{n-1,\alpha}(t)\}$ متشکل از نگاشتهای هموار حقیقی تعریف شده روی $J_\alpha=(a_\alpha,b_\alpha)$ وجود دارد که در شرط (۶) و شش شرط دیگر (که برای اختصار از ذکر آنها خودداری می‌شود) صدق می‌کند. همچنین ایزومتری ρ از H^n وجود دارد چنانکه درایه‌های عملگر شکل A مربوط به غوطه‌ورسازی $f\circ\rho$ به‌وسیلهٔ فرمولهای زیر داده می‌شود:

$$a_{ij}(q_\alpha(t,\theta_2,\dots,\theta_n)) = r_\alpha(t)\sigma_i\sigma_j\sigma_n/\tau$$
$$\alpha_{ij}(Z)=0, Z\in\mathbb{R}_+^n\setminus\cup_\alpha\Omega_\alpha$$
$$\Omega_\alpha = q_\alpha(J_\alpha\times(0,\pi)^{n-1}) \qquad (7)$$

که $\sigma_i=\sin\theta_2\dots\sin\theta_i\cos\theta_{i+1}$، $i=1,2,\dots,n$

$$\tau = 1+\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k c'_{k\alpha}(t)$$

در اینجا فرض می‌کنیم

$$\theta_n = 0, c_{n\alpha}(t)\equiv 0, \forall\alpha\in\Lambda, \sigma_1=\cos\theta_2$$

به‌عکس به‌ازای هر خانوادهٔ حداکثر شمارا از nتایی‌های $\{r_\alpha(t), c_{1\alpha}(t),\dots,c_{n-1,\alpha}(t)\}$ از نگاشتهای حقیقی هموار تعریف شده روی $(a_\alpha,b_\alpha)\subset(0,\infty)$ که در شرایط قبل صدق کند، یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک f از H^n به H^{n+1} وجود دارد که عملگر شکل آن، A دارای درایه‌های a_{ij} است که فرمول (۷) به‌دست می‌دهد.

برای بیان قضیهٔ بعدی آبه بیان مطالب زیر لازم است.

فرض کنید $k>0$ (به‌ترتیب $k>1$) عددی ثابت و $\tau(k)$ (به‌ترتیب $\rho(k)$) یک ایزومتری از $(\mathbb{R}_+^2, g_0)$ طبق تعریف زیر باشد

$$\tau(k)(x,y)=(x+k,y), (\rho(k)(x,y))=(kx,ky)) \quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$$

در اینجا g_0 عبارت است از متریک پوآنکاره روی $\mathbb{R}_+^n$ که به‌صورت زیر است

$$g_0 = x_n^{-2}(dx_1^2+\dots+dx_n^2)$$

گروه کلاینی Γ_i، $i=1,2$، به این شکل تعریف می‌شود

$$\Gamma_1=\{\tau(mk): m=0,\pm1,\pm2,\dots\}$$
$$\Gamma_2=\{\rho(k^m): m=0,\pm1,\pm2,\dots\}$$

۱۷. قضیه (قضیهٔ ۲.۱ از [۲]). به‌ازای هر ثابت $k>0$ یک خانوادهٔ یک‌پارامتری از غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک $f(k,\lambda)$، $0\le\lambda<\epsilon$ از چندگونای هموار $(\mathbb{R}_+^2,g_0)/\Gamma_1$ به $(\mathbb{R}_+^3,g_0)$ وجود دارد. به‌ازای هر ثابت $k>1$ یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک از چندگونای هموار $(\mathbb{R}_+^2,g_0)/\Gamma_2$ به $(\mathbb{R}_+^3,g_0)$ وجود دارد.

ایدهٔ اثبات . با انتخاب یک خم γ در $\mathbb{R}^2$، غوطه‌ورسازی حافظ متریک $p:(\mathbb{R}_+^2,g_0)\to(\mathbb{R}_+^3,g_0)$ با فرمول $p(u,v)=(\gamma(u),v)$ را در نظر می‌گیریم؛ به‌کمک این غوطه‌ورسازی و قضیهٔ تابع ضمنی، وجود یک، خانوادهٔ یک پارامتری از خمها به‌صورت $\gamma(0,\lambda):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$، $-\epsilon<\lambda<\epsilon$،

$\epsilon > 0$، که همهٔ اعضای خانوادهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب k هستند، نشان داده می‌شود. این خانواده چنان است، که به‌ازای λ و μی متفاوت متعلق به $[0, \epsilon)$، خمهای $\gamma(0, \lambda)$ و $\gamma(0, \mu)$ همنهشت نیستند. بنابراین یک خانوادهٔ یک پارامتری از غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک $f(.,.,\lambda) : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^3_+$ تعریف شده با فرمول $f(u, v, \lambda) = (\gamma(u, \lambda), v)$ با شرط

$$f(u + k, v, \lambda) \equiv f(u, v, \lambda)$$

که $(u, v) \in \mathbb{R}^2_+$، $\lambda \in [0, \epsilon)$، وجود دارد. برای گروه کلاینی Γ_1، خانوادهٔ یک پارامتری از غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک

$$F(.,.,\lambda) : (\mathbb{R}^2_+, g_0)/\Gamma_1 \to (\mathbb{R}^3_+, g_0)$$

با تعریف $F(\pi(u, v), \lambda) = f(u, v, \lambda)$ وجود دارد که $\mathbb{R}^2_+/\Gamma_1$ دارای ساختار هموار و متریک القاشده از افکنش طبیعی $\pi : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+/\Gamma_1$ می‌باشد.

برای گروه Γ_2، نشان داده می‌شود که یک رویهٔ دوار در H^3 به‌وسیلهٔ غوطه‌ورسازی حافظ متریک $f : (\mathbb{R}^2_+, g_0) \to (\mathbb{R}^3_+, g_0)$ با فرمول زیر مشخص می‌شود

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = (\sqrt{1 + a^2} + \cos\theta)^{-1}(a\cos(a^{-1}\log r),$$
$$a\sin(a^{-1}\log r), \sin\theta)$$

که در آن $0 < r < \infty$ و $0 < \theta < \pi$.

حال می‌توان نشان داد که f غوطه‌ورسازی حافظ متریک زیر را القا می‌کند

$$F : (\mathbb{R}^2_+, g_0)/\Gamma_2 \to (\mathbb{R}^3_+, g_0),$$
$$F(\pi(u, v)) = f(u, v) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2_+$$

و $\pi : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+/\Gamma_2$ افکنش معمولی است.

سرانجام می‌خواهیم خانوادهٔ بزرگتری از ابررویه‌های H^{n+1} را معرفی نماییم. این خانواده توسط مُرون و کیانگ در [۱۲] بررسی شده است. نتایج آنها به‌شرح زیر است.

مُرون و کیانگ حدس زیر را مطرح و سعی کرده‌اند به مطالعهٔ حدس و یافتن پاسخی مثبت (حداقل جزئی) برای آن بپردازند.

حدس. فرض کنید M یک ابررویهٔ کامل با خمیدگی ریچی نامنفی و خمیدگی میانگین ثابت در H^{n+1} باشد. آنگاه M عبارت است از یک کرهٔ فاصله‌ای ژئودزیک[1]، یا یک کرهٔ ساعتی[2] یا یک ابراستوانهٔ ژئودزیک.

ابتدا لازم است تعریف سه اصطلاح مطرح شده در حدس بالا ارائه شود.

۱۸. تعریف. مقصود از یک *کرهٔ فاصله‌ای ژئودزیک*، در H^{n+1} عبارت است از مجموعهٔ نقاطی از H^{n+1} که فاصله‌شان تا یک نقطهٔ H^{n+1} مقداری ثابت باشد. یک *ابراستوانه*، خمینه‌ای ریمانی ایزومتریک با $R \times S^{n-1}$ است که در H^{n+1} به‌عنوان کلاف کروی عمودی یک ژئودزیک نشانده شده است.

1. geodesic distance sphere 2. horosphere

در حاصلضرب $R \times S^{n-1}$، R نشانگر یک خط (ژئودزیک کامل) است. یک *کرهٔ ساعتی* در H^{n+1} عبارت است از یک ابررویهٔ تخت (نافی) در H^{n+1} که از تقاطع یک ابرصفحهٔ $\mathbb{R}^{n+2}_1$ با H^{n+1} به‌دست می‌آید.

اکنون به بیان قضایای اثبات‌شده توسط مُرون و کیانگ که در راستای پاسخ به حدس آنهاست می‌پردازیم.

۱۹. قضیه (قضیهٔ ۱ از [۱۲]). فرض کنید M یک ابررویهٔ فشرده در H^{n+1} با خمیدگی ریچی نامنفی و خمیدگی میانگین ثابت باشد، آنگاه M یک کرهٔ فاصله‌ای ژئودزیک (تماماً نافی) است.

ایدهٔ اثبات. ابتدا نشان داده می‌شود دومین فرم اساسی M موازی است و در نتیجه M ایزوپارامتریک می‌باشد (یعنی خمیدگیهای اصلی M ثابت است. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد ابررویه‌های ایزوپارامتریک به [۳] مراجعه کنید). چون M فشرده است از نتایج [۱۷] به‌دست می‌آید که M یک کرهٔ ژئودزیک است (توجه کنید که این نتیجه مرتبط با حالت خاصی از قضیهٔ الکساندروف[1] است که می‌گوید هر ابررویهٔ فشرده نشانده شده در فضای اقلیدسی یا هذلولوی با خمیدگی میانگین ثابت یک کرهٔ مدور است، [۴]).

برای بیان قضیهٔ بعدی به مطلب زیر نیاز داریم.

به‌موجب گزارهٔ ۵ از [۱۲] چنانچه M ابررویه‌ای کامل، نافشرده و با خمیدگی ریچی نامنفی و خمیدگی میانگین ثابت در H^{n+1} باشد، آنگاه خمیدگی مقطعی M نامنفی است. در این صورت به موجب نتیجه‌ای کلاسیک، M با یک کلاف برداری همسانریخت است. پایهٔ این کلاف برداری را جوهر[2] M نامند. جوهر M خمینه‌ای فشرده با خمیدگی مقطعی نامنفی است.

۲۰. قضیه (قضیهٔ ۲ از [۱۲]). فرض کنید M یک ابررویهٔ کامل (نافشرده) در H^{n+1} با خمیدگی ریچی نامنفی و خمیدگی میانگین ثابت باشد. در این صورت خمیدگی مقطعی M نامنفی است. همچنین فرض کنید یکی از دو شرط زیر برقرار است:

۱. جوهر M به یک نقطه تقلیل نمی‌یابد.

۲. جوهر M به یک نقطهٔ p تقلیل می‌یابد و $||\text{grad}Q|| < \infty$ و کره‌های ژئودزیک با مرکز p، محدب هستند. (Q خمیدگی ریچی است).

آنگاه M در صورت برقراری شرط اول یک ابراستوانهٔ ژئودزیک و در صورت برقراری شرط دوم یک کرهٔ ساعتی است.

ایدهٔ اثبات. ابتدا نشان داده می‌شود M ایزوپارامتریک است (گزاره‌های ۶ و ۸ از [۱۲])، سپس با به‌کار بردن رده‌بندی ابررویه‌های ایزوپارامتریک [۳]، نتیجه (حالت ابراستوانهٔ ژئودزیک) به‌دست می‌آید. برای حالت دوم ابتدا نشان داده می‌شود $||A||^2$ (A عملگر شکل M است) ثابت و در نتیجه M ایزوپارامتریک است. با توجه به اینکه جوهر M به یک نقطه تقلیل می‌یابد تنها امکان برای M این است که یک کرهٔ ساعتی باشد.

سپاسگزاری

از آقای دکتر شهشهانی به خاطر پیشنهادهای مفید و اصلاحات ارزنده‌شان صمیمانه سپاسگزارم.

1. A. D. Aleksandrov 2. soul

مراجع

1. K. Abe, A. Haas, "Isometric immersions of H^n into H^{n+1}", *Proc. Symp. Pure Math.* AMS, Vol 54, part 3 (1993) 23-30.

2. K. Abe, H. Mori, H. Takahashi, "A parametrization of isometric immersions between hyperbolic spaces", *Geom. Ded.*, **65** (1997).

3. T. Cecil, P. Ryan, *Tight and Taut Immersions of Manifolds*, Pitman (1985) 31-46.

4. J. H. Eschenburg, "Maximum principle for hypersurfaces", *Manuscripta Math.* **64** (1989) 55-75.

5. D. Ferus, "On isometric immersions between hyperbolic spaces, *Math. Ann.*, **205** (1973) 193-200.

6. J. Hano, K. Nomizu, "On isometric immersion of the hyperbolic plane into the Lorentz-Minkowski space, *Math. Ann.* **262** (1983) 245-253.

7. P. Hartman, L. Nirenberg, "On spherical image maps whose Jacobian do not change signs", *Amer. J. Math*, **81** (1969) 901-920.

8. Z. J. Hu. Hu, G. S. Zhao, "Classification of isometric immersions of the hyperbolic space H^2 into H^3, *Geom. Ded.*, **65** (1997) 47-57.

9. _____. "Isometric immersion from the hyperberbolic space $H^2(-1)$ into $H^3(-1)$", *Proc. Amer. Math. Soc.* (9) **125** (1997) 2693-2697.

10. S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundation of Differential Geometry*, vol I, II, Wiley Interscience (1963,1969).

11. A-M. Li, "Space-like hypersurfaces with constant Gauss curvature in Minkowski space", *Arch. Math.* **64** (1995) 534-551.

12. J-M. Morvan, W. B-Qiang, "Hypersurfaces with constant mean curvatures in hyperbolic space from", *Geom Ded.*, **59** (1996) 197-222.

13. K. Nomizu, "Isometric immersions of the hyperbolic plane into the hyperbolic space", *Math. Ann.* **205** (1973) 181-192.

14. V. Oliker, U. Simon, "Codazzi tensors and equations of Monge-Ampère ...," *J. Reine Angew. Math.* **342** (1983) 35-63.

15. B. O. Neill: Semi-Riemannian Geometry, Acad Press, (1983).

16. B. O' Neill, E. Stiel, "Isometric immersions of constant curvature manifolds", *Michigan Math.* J., **10** (1963) 335-339.

17. R. Walter: "Compact hypersurfaces with a constant. higher mean curvature function", *Math. Ann.*, **270** (1985) 125-145.

* * * * * *

* سید محمدباقر کاشانی، دانشگاه تربیت مدرس

kashanim@net1cs.modares.ac.ir

صد سال نمایش گروههای متناهی (بخش I)•

ت. ی. لم*
ترجمهٔ علیرضا جمالی

مقدمه

ایده‌های ریاضی در هر مبحثی، طی دوره‌ای از زمان، بارها کشف شده و بسط می‌یابند، بنابراین معمولاً تعیین زمان مشخصی برای یک کشف ممکن نیست. ولی در حالتهای نادری یک کشف با چنان رخداد خاص و بی‌نظیری توأم شده که خودِ کشف با آن رخداد تداعی می‌شود. نمونهٔ بسیار معروفِ آن، کشف کواترنیونها [چهارگانها] به توسط همیلتن است، که همواره گردش مشهور او را در ۱۶ اکتبر ۱۸۴۳ درکنارهٔ کانال سلطنتی دوبلین به‌یاد می‌آورد. حک کواترنیونها به وسیلهٔ او بر سنگی از پل بروم[1] چنان شور و احساسی به این داستان بخشیده که تاریخ ۱۶ اکتبر ۱۸۴۳ همواره به‌عنوان تاریخ تولد کواترنیونها بر صفحات کتابهای تاریخ ریاضیات نقش می‌بندد. نمونهٔ دیگری حدود پنجاه سال بعد به منصّهٔ ظهور رسید — و این بار عبارت بود از خلق نظریهٔ نمایشهای گروههای متناهی. در ۱۲ آوریل ۱۸۹۶، فردیناندگئورگ فروبنیوس نخستین نامهٔ خود را به ریشارد ددکیند نگاشت تا ایده‌های تازه‌اش در بارهٔ تجزیهٔ یک چندجمله‌ای همگنِ خاص وابسته به گروهی متناهی، موسوم به «دترمینان گروهی» را شرح بدهد. این نامه، دو نامهٔ دیگر به فاصلهٔ کوتاهی (در ۱۷ آوریل و ۲۶ آوریل ۱۸۹۶) در پی داشت، و تا آخر آوریل همان سال، فروبنیوس مبانی نظریهٔ سرشتهای گروههای متناهی را به‌دست آورده بود. زمان بیشتری برای بسط کامل ایدهٔ نمایش گروهها لازم بود، اما اینک همان مکاتبه[2]های مشهور فروبنیوس-ددکیند در آوریل ۱۸۹۶، در نظر مورخان مهمترین رخدادی است که تولد نظریهٔ نمایش گروههای متناهی را رقم می‌زند.

1. Brougham Bridge 2. Briefwechsel

من به‌عنوان طلبهٔ جبر همواره مجذوب نظریهٔ نمایش گروهها بوده‌ام. سی سال پیش هنگامی که رسالهٔ دکتری خود را می‌نوشتم به این موضوع به‌طور تفننی پرداختم، و از آن موقع، همواره به کار گیرنده و تحسین‌کنندهٔ این موضوع بوده‌ام. هنگامی که دریافتم آوریل ۱۹۹۶ یکصدمین سالگرد کشف نظریهٔ نمایش گروههای متناهی است، به شدت وسوسه شدم که به نوعی «تجلیل» از این رویداد دست زنم. در مارس ۱۹۹۶، صرفاً به تصادف، آلن واینشتین مسؤول سمینارهای بخش، تلفنی با من تماس گرفت تا شخصی را برای سخنرانی در سمینار [هفتگی برکلی] معرفی کنم. پیش از آنکه گوشی تلفن را بگذارم، متوجه شدم که خودم «داوطلب» سخنرانی برای بزرگداشت یکصدمین سال نظریهٔ نمایش گروهها شده‌ام. از اینکه خود را به‌عنوان سخنران سمینار پیشنهاد کردم، همیشه شرمنده خواهم بود، ولی در عوض فرصتی دست داد تا داستانهای جذاب مربوط به تولد نظریهٔ نمایشها را در ۱۸ آوریل ۱۹۹۶ یعنی تقریباً درست یکصد سال پس از اینکه فروبنیوس نخستین نامهٔ مشهور خود را در بارهٔ دترمینان گروهی به ددکیند نوشت، تعریف کنم. همین سخنرانی با تغییراتی در ماه مه در دانشگاه ایالتی اوهایو، و سپس در ژوئن همان سال درکنفرانس «جنبه‌های ریاضیات» در دانشگاه محل تحصیلم، دانشگاه هونگ‌کونگ، تکرار شد. به خاطر وظایف اداریم در MSRI [مؤسسهٔ تحقیقات علوم ریاضی]، نگارش این مقاله به‌مدت بیش از یک سال به‌عهدهٔ تعویق افتاد. در یک فرصت مطالعاتی پاییزی در ۱۹۹۷ سرانجام موفق شدم این مقاله را به پایان ببرم، بنابراین اینک با خرسندی این نوشته را که با تأنّی از روی سخنرانی خود تهیه کرده‌ام تقدیم می‌دارم. صورتِ اندکی طولانیتر با تفصیلات فنی‌تری همزمان در مجموعهٔ مقالات کنفرانس

«جنبه‌ها»، از انتشارات دانشگاه هونگ‌کونگ منتشر خواهد شد. به‌خصوص، بعضی از برهانها را که در این مقاله نیامده‌اند، می‌توان در آن مجموعه پیدا کرد.

انکار و ارجاع

شاید پیش از آنکه سعی کنیم به خواننده بگوییم که این مقاله چیست، نخست باید به او بگوییم که این مقاله چه چیزی نیست. گزارش جامعی از تاریخ نظریهٔ نمایش گروههای متناهی دست‌کم به یک جلد کتاب نیاز دارد، که از کارهای پیشگامانهٔ مولین، کارتان، ددکیند، فروبنیوس، برنساید آغاز شود و تا بازنویسی مبانی این موضوع به توسط شور، نوتر، و سپس تا کار بنیادی براوئر در دو نظریهٔ نمایشهای معمولی و مدولی گروهها ادامه یابد، کاری که با برنامهٔ عظیم رده‌بندی گروههای ساده (که یقیناً بی‌مدد نظریهٔ سرشتها ممکن نبوده است) به اوج تکامل خود رسید. تدوین چنین گزارش جامعی بهتر است به اهل فن واگذار شود، و مایهٔ مسرت من شد که پی بردم پرفسور چارلز کرتیس چنین کتابی [Cu_2] را در سلسله کتابهای تاریخ ریاضیات انجمن [ریاضی آمریکا] تهیه می‌کند. در سخنرانی یکساعتهٔ من، فرصتم در حدی بود که صحنه‌های اندکی از این داستان بزرگ را، با تکیه بر منشأ نظریهٔ نمایشها به مناسبت صدمین سالگرد آن، به حضار عرضه کنم. از این‌رو، با تاریخچه‌ای از ریاضیات قرن نوزدهم، مروری بر کار ددکیند، فروبنیوس، و برنساید، آغاز کردیم، و به صحبت مختصری در بارهٔ شور و نوتر پرداخته، و پس از آن با اتمام وقت، «نفس راحتی کشیدیم». این گزارش نسخه‌ای مبسوط از سخنرانی من است[1]، ولی به هر حال مجمل و داستان‌گونه است و جای نوشته‌ها و مراجع محققانه‌تر را در این زمینه نمی‌گیرد. از جملهٔ مراجع اخیر، مقالات هاوکینز [$H_2 - H_1$] را که از دیدگاه یک مورخ ریاضی نگاشته شده، و آثار کرتیس [Cu_2، Cu_1] و لدرمن [L_1] را که از دیدگاه ریاضیدانان نوشته شده است، توصیه می‌کنیم. از میان مقالاتی که نظریهٔ نمایشها را در چهارچوب گسترده‌تر آنالیز همساز مرور می‌کنند، نوشتهٔ مکی [Ma] و نَپ [Kn] را توصیه می‌کنیم. همچنین مقالهٔ اخیر کُنراد [Con] که شامل برهانهای مشروح و مثالهای جالب محاسباتی نیز هست، اثری خواندنی برای کسانی است که متن ریاضی را با استفاده از قلم و کاغذ مطالعه می‌کنند.

با توجه به اینکه بیشتر مطالب از منابع موجود (سابق‌الذکر) استخراج شده‌اند، ادعایی مبنی بر اصالت مطالب این مقاله نداریم. در نگارش آن کوشش بر این بوده تا توازنی بین ریاضیات و ابعاد انسانی آن ایجاد کنیم؛ بعضی از توضیحات در بارهٔ ریاضیدانان و رخدادهای ریاضی که جنبهٔ تفسیری‌تری دارند از من است. امیدواریم که، با ادغام تاریخ و ریاضیات، و با بیان داستان به سبک خودمانیِ سمینارها، توانسته باشیم مطلبی خواندنی و آموزنده در بارهٔ منشأ نظریهٔ نمایش گروههای متناهی ارائه دهیم.

من بسیار مدیون چارلز کرتیس هستم. او با بزرگواری فصلهای مختلفی از کتاب در دست انتشارش [Cu_2] را در اختیارم قرار داد، و مایهٔ بسی مسرت است که از وی، کیت کنراد، هندریک لنسترا، مونیکا وزیرانی، و اعضای هیأت ویراستاران *نوتیسز*، به جهت تذکرات، پیشنهادها، و اصلاحاتشان سپاسگزاری کنم.

زمینهٔ نظریهٔ گروهها در اواخر قرن نوزدهم

پیش از شروع داستان، شاید نگاهی سریع به صحنهٔ نظریهٔ گروهها در اروپا در دهه‌های آخر قرن نوزدهم مناسبت داشته باشد. چنانچه عصر گاوس، کوشی، و گالوا را سرآغاز پیدایش نظریه گروهها بدانیم، قدمت این موضوع در اواخر قرن نوزدهم به بیش از نیم قرن می‌رسید. فلیکس کلاین، ریاضیدان نوخاستهٔ آلمانی، برنامهٔ ارلانگن خود را در ۱۸۷۲، با اعلام اینکه نظریهٔ گروهها محور اصلی در مطالعهٔ هندسه‌های گوناگون است، رسماً مطرح کرد؛ در همین سال لودویگ سیلو، معلم نروژی دبیرستان، نخستین برهانها را از قضیه‌هایش که امروز قضایای معروفی هستند، در جلد پنجم *ماتیماتیشه آنالن* منتشر کرد. آرتر کیلی و کامی ژوردان عالمان بلامنازع نظریهٔ گروههای آن دوران بودند. در بین نخستین رساله‌ها در نظریهٔ گروهها، *رسالهٔ جانشانیها و معادلات جبری*[1] ژوردان (۱۸۷۰) و رسالهٔ نتو[2] با عنوان *نظریهٔ جانشانیها و کاربردهای آن در جبر*[3] (۱۸۸۲) قرار داشتند. هر دو کتاب در بارهٔ نظریهٔ گروههای جایگشتی بودند که در آن زمان مترادف با خود نظریهٔ گروهها بود. (تنها مورد استثنایِ قابل ذکر، کار فون دایک[4] در ۱۸۸۲ـ۱۸۸۳ در بارهٔ گروههایی بود که با مولدها و رابطه‌ها تعریف می‌شوند.) یکی از رایجترین کتابهای جبر در آن عصر کتاب *دورهٔ جبر عالیِ*[5] *سره*[6] بود که جلد دوم آن (چاپ سوم، ۱۸۶۶) حاویِ تعداد مناسبی از گروههای جانشانیها بود. بعدها بود که به گروههای مجرد، شاید نخستین بار در قالب کتاب درسی، در *کتاب درسی جبر*[7] وبر، پرداخته شد. مؤلفان مقاله‌های نظریهٔ گروهها همواره دقیق نبودند، و درواقع گاهی مرتکب اشتباه می‌شدند. ظاهراً اوتو هولدر سنت نوشتن مقالات طولانی را در نظریهٔ گروهها، با تحلیلِ گروهها به طریقِ حالت به حالت، پایه گذاشت ولی او نیز تعداد اندکی از حالتها را از قلم می‌انداخت. حتی آرتر کیلی کبیر، که شهرت داشت به اینکه «از هر کاری که در هر شاخهٔ ریاضیات انجام یافته کاملاً آگاه است» [C. صص ۲۶۵ـ۲۶۶]، در اواخر ۱۸۷۸، با ارائهٔ فهرست عاری از دقتِ سه گروه از مرتبهٔ ۶ در مقاله‌اش [Ca] مندرج در نخستین شمارهٔ *آمریکن جورنال آو متمتیکس*، خوانندگان خود را گیج کرد.

تا آنجا که به نمایش گروهها مربوط می‌شود، چیز زیادی مشهود نبود. کلاین در تحقیقات خود در دهه‌های ۱۸۷۰ و ۱۸۸۰ یقیناً ماتریسها را برای درک گروهها به‌کار بسته است، اما وی این کار را تنها برای چند گروه مشخص انجام داد، و اشاره‌ای به یک نظریهٔ محتمل در کار نبود. در نظریهٔ اعداد، نماد لژاندرِ $\left(\frac{a}{p}\right)$ (که در آن p یک عدد اول فرد است) شاید نخستین نمونهٔ یک «سرشت[8]» را فراهم آورد. این نماد مقادیر خود را از $\{\pm 1\}$ می‌گیرد و برحسب متغیر a ضربی است. گاوس نمادهای مشابهی را در بحث راجع به

۱. برای صرفه‌جویی در جا، بخش مربوط به شور و نوتر در مقالهٔ حاضر آورده نشده است. خوانندگان علاقه‌مند به تحقیقات شور و نوتر در نظریهٔ نمایشها می‌توانند به [Cu_2، La، L_2] مراجعه کنند.

1. Traité des Substitutions et des Équations Algébriques
2. Netto 3. Substitutionentheorie und Ihre Anwendungen auf die Algebra 4. von Dyck 5. Cours d'Algèbre Supérieure
6. Serret 7. Lehrbuch der Algebra 8. character

مجموعهای گاوسی و صورتهای دومجذوری بهکار برد، اما مجاز دانست که این نمادها مقادیر ریشه‌های واحد را بگیرند. در کار دیریکله در بارهٔ اعداد اول در یک تصاعد هندسی، Lـسری دیریکلهٔ

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

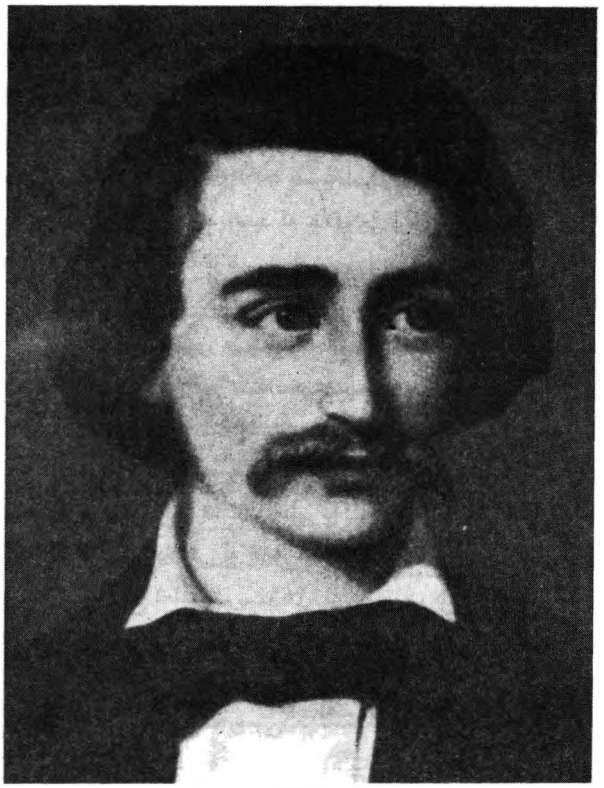
به نحو بارزی یک «سرشت به پیمانهٔ k» مانند χ تشکیل می‌دهد، که برحسب n ضربی است، و در حالتی که n نسبت به k اول نباشد، صفر است. در مورد تعریف مجرد سرشت (آبلی) مدیون ریشارد ددکیند هستیم. ددکیند در یکی از ملحقات خود به درسهای دیریکله در نظریهٔ اعداد [D]، در حدود ۱۸۷۹، یک سرشت روی یک گروه آبلی متناهی G را به‌طور صوری به صورت یک همریختی از G به گروه ضربی اعداد مختلط ناصفر تعریف کرد. سرشتهای G، با ضرب نقطه به نقطهٔ توابع، گروهی مانند $\hat{G}$ (موسوم به گروه سرشتی) تشکیل می‌دهند که عدد اصلی آن با $|G|$، یعنی عدد اصلی خودِ گروه G، برابر است. روابط تعامد بین سرشتها به اثبات رسیدند، و در جلد II *کتاب درسی* وِبِر گنجانده شدند. در این مرحله، صحنه برای کشف نظریهٔ کلی سرشتهای گروههای متناهی دلخواه آماده شده بود.

ددکیند و دترمینان گروهی

برای دانشجویان امروزیِ ریاضیات تعمیم تعریف سرشت با در نظر گرفتن همریختیهای D ازگروهی مانند G به‌توی $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (گروه ماتریسهای مختلط $n\times n$ وارونپذیر) و با تعریفِ $\chi_{D(g)}=\mathrm{trace}(D(g))$، $(g\in G)$، برای به‌دست آوردن یک سرشت، امری بسیار عادی است. اما این کار، گامی ساده برای ریاضیدانان قرن نوزدهم نبود. از این‌رو کشف مفهوم سرشتها برای گروههای کلی می‌بایست مسیر پرپیچ و خمی را، از میان چیزی که ددکیند آن را *دترمینان گروهی* نامید، طی می‌کرد.

ریشارد ددکیند (۱۸۳۱ـ۱۹۱۶)، یکی از آخرین پیروان مکتب مشهور گاوس درگوتینگن، استاد مسلم جبر مجرد درآلمان دراواخر قرن نوزدهم بود. اگرچه شغل آموزگاری را در یک مؤسسهٔ محلی در زادگاه خود براونشوایک[1] به مقام استادی در یک دانشگاه اسم و رسم‌دار ترجیح داد، ولی تأثیری که در ریاضی بر جای گذاشت شاید همانند تأثیر کارل وایرشتراس بود. مهمترین دستاوردهای ددکیند در حوزهٔ نظریهٔ اعداد بود. وی در مطالعهٔ شکلِ مبین یک هیأت عددی نرمال با یک پایهٔ نرمال، به دترمینان مشابهی در نظریهٔ گروهها رسید. با مفروض بودن یک گروه متناهیِ G، فرض می‌کنیم $\{\chi_g : g\in G\}$ مجموعهٔ نامعینهای تعویضپذیر باشد، و یک ماتریس $|G|\times|G|$ که سطرها و ستونهایش به‌وسیلهٔ اعضای G اندیسگذاری می‌شوند تشکیل می‌دهیم که درایهٔ (g,h)ام آن با $\chi_{gh^{-1}}$ تعریف می‌شود. (می‌توانستیم درایهٔ (g,h)ام را χ_{gh} بگیریم (همان‌گونه که ددکیند ابتدا این کار را کرد)، ولی تفاوت دو ماتریس فقط در جایگشتی از ستونها می‌بود.) دترمینان $(\chi_{gh^{-1}})$ به «دترمینان گروهی» موسوم شد؛ به تأسی از ددکیند آن را با $\Theta(G)$ نشان می‌دهیم.

۱. این مؤسسه امروز دانشگاه صنعتی براونشوایک است.



ریچارد ددکیند

در حالتی که G یک گروه *آبلی* است، $\Theta(G)$ کاملاً به فرمهای خطی روی $\mathbb{C}$، با سرشتهای G، به‌صورتِ

$$\Theta(G)=\prod_{\chi\in\hat{G}}\left(\sum_{g\in G}\chi(g)\chi_g\right) \qquad (۱.۴)$$

تجزیه می‌شود، که در آن $\hat{G}$ گروه سرشتی G است. برهان خیلی ساده است. درواقع، به‌ازای یک $\chi\in\hat{G}$ ثابت، سطر gام دترمینان را در $\chi(g)$ ضرب کرده و همهٔ سطرها را جمع می‌کنیم. در ستون hام خواهیم داشت

$$\sum_{g\in G}\chi(g)\chi_{gh^{-1}}=\left(\sum_{g'\in G}\chi(g')\chi_{g'}\right)\chi(h) \qquad (۲.۴)$$

بنابراین، به‌ازای هر سرشت مانند χ، $\Theta(G)$ بر $\sum_{g\in G}\chi(g)\chi_g$ بخشپذیر است. چون تعدادِ $|G|$ سرشت متمایز وجود دارد، و این سرشتها فرمهای خطی متمایز به‌دست می‌دهند، (۱.۴) نتیجه می‌شود. تجزیهٔ $\Theta(G)$ قطعاً بدون سابقه نبوده است. در حالتی که G دوری است، «ماتریس گروهی» $(\chi_{gh^{-1}})$ دقیقاً یک ماتریس دوری است، و تجزیهٔ دترمینان آن برحسب ریشه‌های $|G|$ام واحد بر ریاضیدانان قرن نوزدهم کاملاً معلوم بوده است.

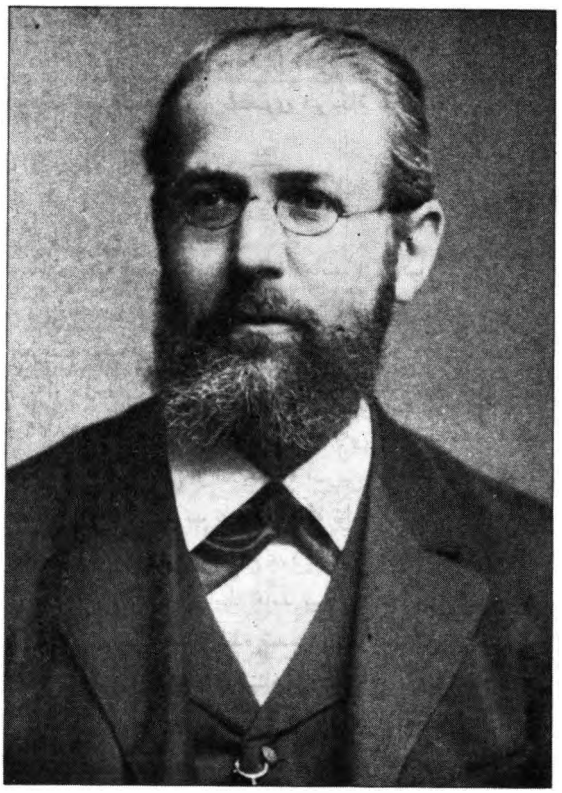
در حالتی که G یک گروه دلخواه است، می‌توان با «آبلی‌سازی»، گروهی مانند $G/[G,G]$ تشکیل داد که در آن $[G,G]$ زیرگروه (نرمال) تولید شده با تعویضگرهای G است. برهان فوق باز هم (حداقل) $|G/[G,G]|$ عامل

خطی از $\Theta(G)$ را به‌دست می‌دهد، که با سرشتهای $G/[G,G]$ متناظرند. به هر حال این عوامل دیگر شامل همهٔ مقادیر دترمینان گروهی نخواهند بود. به‌عنوان مثال، اگر $G=[G,G]$، این فقط عامل بدیهی $\sum_{g\in G}\chi_g$ را به‌دست می‌دهد. ددکیند مانند بسیاری از ریاضیدانان قرن نوزدهم در محاسبه متبحر بود. وی $\Theta(G)$ را صریحاً برای نخستین گروه غیرآبلی S_3 محاسبه کرد و به این نتیجه رسید که علاوه بر عوامل خطی $\sum_{g\in G}\chi_g$ و $\sum_{g\in G}\operatorname{sgn}(g)\chi_g$ متناظر با سرشت بدیهی و سرشت علامتیِ $G/[G,G]$، دترمینان گروهی $\Theta(G)$ یک عامل باقیمانده دارد که مربع یک عامل درجهٔ دوم تحویل‌ناپذیر است. وی همچنین محاسبات مشابهی را با گروه کواترنیونی مرتبهٔ ۸ انجام داد، و به این نکتهٔ عجیب رسید که، اگر هیأت اسکالر از $\mathbb{C}$ به «دستگاههای ابرمختلط» مناسب (یا «جبرها» در اصطلاحات جاری) توسیع داده شود، در هر دو مثال او، $\Theta(G)$ مانند حالت آبلی به فرمهای خطی تجزیه خواهد شد. ددکیند به‌طور پراکنده در سالهای ۱۸۸۰ و ۱۸۸۶ در این مسأله کار کرد، ولی به نتایج قطعی دست نیافت. وی در نامه‌ای به فروبنیوس به تاریخ ۲۵ مارس ۱۸۹۶، که عمدتاً در بارهٔ گروههای همیلتنی بود، به گشت‌وگذارهای جنبی خود در دترمینان گروهی، به انضمام تجزیهٔ (۱.۴) در حالت آبلی و اندیشه‌هایش در مورد نقش احتمالی دستگاههای ابرمختلط در حالت کلی، اشاره می‌کند. نامهٔ بعدی به تاریخ ۶ آوریل ۱۸۹۶، مشتمل است بر دو مثال غیرآبلی که خود پیدا کرده بود به همراه حدسیاتی دایر بر اینکه تعداد عوامل خطی $\Theta(G)$ باید برابر با $|G/[G,G]|$ باشد. اما، با این احساس که خود او نمی‌تواند به چیزی در این مسأله دست یابد، از فروبنیوس دعوت کرد تا به این موضوع بپردازد. چنانکه معلوم شده است، همین دو نامهٔ ددکیند بود که به خلق نظریهٔ سرشتها برای گروههای غیرآبلی مجرد انجامید.

فردیناند گئورگ فروبنیوس (۱۸۴۹ـ۱۹۱۷)

فروبنیوس که هجده سال کوچکتر از ددکیند بود، خود تا ۱۸۹۶ شهرت زیادی به‌دست آورده بود. او تحصیلات ریاضی خود را در دانشگاه مشهور برلین زیر نظر استادان برجسته نظیر کومر، کرونکر، و وایرشتراس انجام داد. وی رساله‌ای تحت راهنمایی وایرشتراس در ۱۸۷۰ در بارهٔ حل معادلات دیفرانسیل با سریها نوشت، و پس از آن مدت کوتاهی در گیمنازیوم و دانشگاه به تدریس پرداخت. دانشگاه برلین به‌طور سنتی مرکز تربیت اعضای هیأت علمی برای پلی‌تکنیکوم زوریخ (اینک دانشگاه فنی سویس) بود، بنابراین مایهٔ تعجب نبود که فروبنیوس در ۱۸۷۵ برای تصدی مقام استادی به زوریخ منتقل شود.

فروبنیوس در طول هفده سال تصدی خود در دانشگاه فنی سویس با کسب دستاوردهایی در مباحث بسیار متنوعی از ریاضیات، به‌خصوص در معادلات دیفرانسیل خطی، توابع بیضوی و تتا با یک یا چند متغیر، نظریهٔ دترمینانها و ماتریسها، و فرمهای دوخطی، به شهرت رسید. در اواخر دههٔ ۱۸۸۰ وقتی تأثیر او در نظریهٔ گروههای متناهی نیز احساس شد، بیش از پیش آشکار شد که پرداختن به اشیای جبری را ترجیح می‌دهد. در ۱۸۸۷ نخستین برهان قضیه‌های سیلو را برای گروههای مجرد (به‌جای گروههای

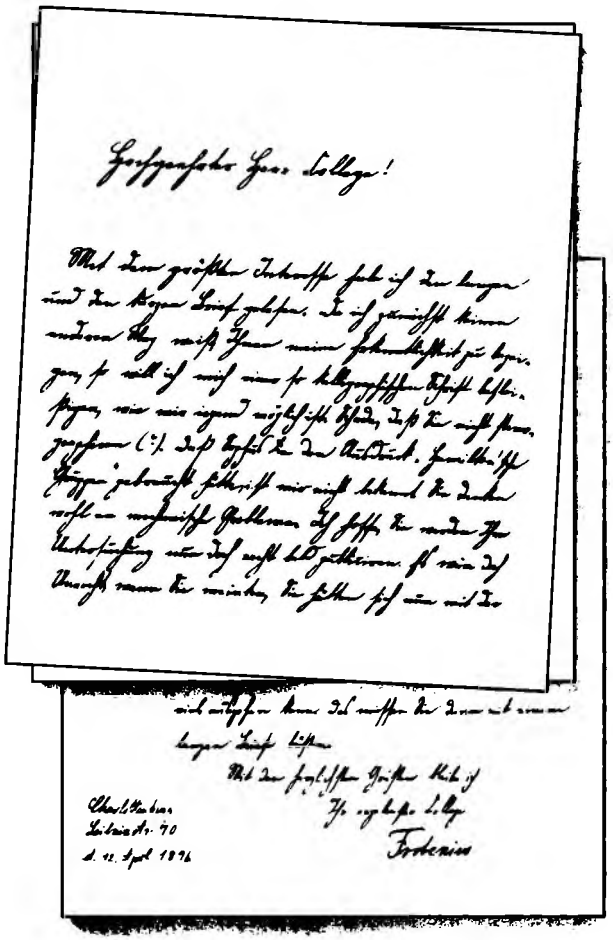


فردیناند گئورگ فروبنیوس

جایگشتی) منتشر کرد[1]؛ برهان استقرایی او برای وجود یک گروه سیلو با استفاده از معادلهٔ رده‌ای، برهانی است که هنوز هم به‌کار می‌رود. همان سال مقالهٔ مهمی در نظریهٔ گروهها نوشت [F:(۳۶)]؛ این مقاله تحلیل هوشمندانهٔ او را از هم‌مجموعه‌های دوگانه در یک گروه متناهی عرضه می‌دارد، و شامل فرمول شمارشی مشهور کوشی-فروبنیوس است، که هم‌اکنون در ترکیبیات متداول است. همهٔ این کارهای فروبنیوس در نظریهٔ گروهها، بی‌آنکه خود مطلع باشد، او را آماده می‌ساخت تا بزرگترین هدیه را به ریاضیات ارزانی دارد: نظریهٔ سرشتهای گروه، که او در آستانه ابداع آن بود.

از حیث شغلی، اوایل دههٔ ۱۸۹۰ زمان تحول برای فروبنیوس بود. با درگذشت لئوپولد کرونکر در دسامبر ۱۸۹۱، یک کرسی استادی در دانشگاه برلین خالی شد. برای همه سخت غیرمنتظره بود که از فرزند محبوب سابق دانشگاه، فردیناند گئورگ فروبنیوس، دعوت به‌عمل آید. فروبنیوس در چهل و سه سالگی و در اوج قدرت خلاقه‌اش، به‌وضوح جانشین شایسته‌ای برای کرونکر بود. ولی چندان آشکار نبود که خود کرونکر [اگر زنده بود] این انتخاب را تأیید می‌کرد. کرونکر با ایمان پرشور به این شعارش که «خدا اعداد صحیح را آفرید، باقی کار آدمی است»، تقریباً هرکسی را که کارهای ریاضیش

۱. به نظر می‌آید که تأخیر بسیار زیادی در انتشار [F:(۵۳)] پیش آمده است. (منظور از [F:(۵۳)]، مقالهٔ (۳۵) در مجموعه آثار او [F] است.) فروبنیوس این مقاله را در مارس ۱۸۸۴ به مجلهٔ کرله ارسال کرد، ولی مقاله در ۱۸۸۷ منتشر شد و تا این زمان چند مقالهٔ بعدی فروبنیوس که تعمیمهای متعددی از قضیه‌های سیلو را دربرداشتند در *گزارشهای فرهنگستان علوم برلین* منتشر شده بودند.



بخش بالایی قسمتی از صفحهٔ اول نامهٔ فروبنیوس به ددکیند به تاریخ ۱۲ آوریل ۱۸۹۶ است. این نامه با عبارت «عالیجناب آقای همکار!»، تعارف متداول بین همکاران در زمان فروبنیوس، شروع شده است. بخش پایینی قسمتی از صفحهٔ آخر نامه است که فروبنیوس آن را با عبارت «همکار ارادتمند شما، فروبنیوس» امضا کرده، و در حاشیهٔ چپ آن نشانی منزل خود، «شارلوتنبورگ، خیابان لایب‌نیتس، شمارهٔ ۷۰»، را نوشته، و تاریخ نامه را ۱۲ آوریل ۱۸۹۶ ذکر کرده است. نامه در شش ورق بزرگ نوشته شده، که هر ورق متشکل از چهار صفحه است.

لازم می‌دانم از لطف کلارک کیمبرلینگ به خاطر در اختیار گذاشتن نسخه‌ای از این نامه سپاسگزاری کنم. جامعهٔ ریاضی بسیار مدیون کیمبرلینگ است که نامه‌های فروبنیوس به ددکیند (و مکاتبات متعدد دیگر ددکیند را در بین کاغذهای به‌جا مانده در مایماک امی‌نوتر از نو کشف کرد. شرایط جالب ناظر بر کشف این نامه‌ها در صفحهٔ وب کیمبرلینگ

URL http://www.evansville.edu/~CK6/bstud/dedek.html

تشریح شده‌اند.

ت. ی. ل.

به اعداد حقیقی و متعالی مربوط می‌شد، سخت مورد انتقاد قرار داده بود. حملات او به علمای نظریهٔ توابع چنان بی‌رحمانه و جنجالی بود که یک بار کارل وایرشتراس استاد قدیمی را به گریستن واداشت. کرونکر احتمالاً از قبول اینکه جانشین او شاگرد وایرشتراس باشد، طفره می‌رفت، ولی پیداست که این انتخاب در دست او نبود.

فروبنیوس در شارلوتنبورگ واقع در حومهٔ برلین متولد شده بود. هفده سال دوری از وطن زمان زیادی بود، و در آن دوران مردم تمایل بارزی به گذراندن عمر خود در زادگاهشان داشتند. از این‌رو فروبنیوس به دنبال احضاری که از برلین شد، با شادمانیِ بسیار خانواده‌اش را در ۱۸۹۳ به آلمان برگرداند، و در خانهٔ جدیدش در شمارهٔ ۷۰ خیابان لایب‌نیتس، شارلوتنبورگ، اقامت گزید. در همان سال، وی به عضویت فرهنگستانِ معتبر علوم پروس انتخاب شد. فروبنیوس با درگذشت کرونکر و کومر و با رسیدن وایرشتراس معلم سابقش به سن هشتاد سالگی، یکی از مشعلداران اصلی مکتب ریاضی برلین از آن زمان به بعد شد.

اگرچه فروبنیوس پیشتر در نظریهٔ گروهها خبره شده بود، قبل از ۱۸۹۶ هرگز تعریف دترمینان گروهی به گوش او نخورده بود[1]. با وجود این، متخصص بزرگی در نظریهٔ دترمینانها بود، و درواقع در پژوهش پیشین خود در توابع تتا و جبر خطی، به دترمینانهایی که تا اندازه‌ای مشابه دترمینان گروهی بودند پرداخته بود. در نتیجه، مسألهٔ ددکیند در مورد تجزیهٔ دترمینان گروهی توجه آنی او را به خود جلب کرد. او شیفتهٔ تجزیهٔ $\Theta(G)$ به توسط ددکیند در حالت آبلی شد، اما مطمئن نبود که اعداد ابرمختلط ابزار مناسب را برای تعمیم آن فراهم خواهد آورد. بنابراین فقط شروع به بررسی تجزیهٔ $\Theta(G)$ روی هیأت اعداد مختلط کرد، و با سرعت شگفت‌انگیزی بر این مسأله تسلط یافت. وی که تقریباً دیوانه‌وار کار می‌کرد، در کمتر از یک ماه نظریهٔ عمومی سرشتهای گروههای متناهی را ابداع کرد، و این نظریهٔ تازه کشف شده را برای حل مسألهٔ تجزیه در مورد دترمینان گروهی به‌کار بست. وی کشفیات خود را در سه نامهٔ مفصل به ددکیند، به تاریخ ۱۲، ۱۷، و ۲۶ آوریل ۱۸۹۶ شرح داد. این نامه‌ها به همراه چند نامهٔ دیگر در مکاتبات فروبنیوس-ددکیند که در حال حاضر در بایگانیهای دانشگاه فنی براونشوایک نگهداری می‌شوند، اینک نخستین اسناد مکتوب در مورد ابداع نظریهٔ سرشتهای گروههای متناهی هستند.

با توجه به اینک نامه‌های فروبنیوس پیش از این به تفصیل در نوشته‌های هاوکینز و کرتیس (سابق‌الذکر) تحلیل شده‌اند، سعی خواهیم کرد از زاویهٔ دیگری به آنها بنگریم. با فرض اینکه با مخاطبان امروزی صحبت می‌کنیم، ابتدا به اینکه چگونه می‌توان دترمینان گروهی را با استفاده از ابزارهای کنونی

۱. ددکیند هیچ‌کدام از کشفیات خود را در این زمینه منتشر نکرده بود.

نظریهٔ نمایش تجزیه کرد، می‌پردازیم. پس از این بازنگری، به‌کار فروبنیوس برمی‌گردیم، و شرح می‌دهیم که او چگونه مسأله تجزیهٔ $\Theta(G)$ را در ۱۸۹۶ حل کرد و در همان ضمن، نظریهٔ سرشتها را ابداع نمود.

درواقع یک دلیل استراتژیک نیز برای رهیافت ما موجود است. اگرچه ابتدا دترمینان گروهی بود که فروبنیوس را به ابداع سرشتهای گروه هدایت کرد، ولی نظریهٔ نمایش گروهها دیگر به‌وسیلهٔ دترمینانهای گروهی بسط نیافت. درواقع، کتابهای درسیِ اندکی در نظریهٔ نمایشها حتی به این موضوع اشاره می‌کنند، بنابراین تا اندازه‌ای محتمل است که دانشجویان امروزیِ نظریهٔ نمایشها هرگز در مورد دترمینان گروهی چیزی نشنیده باشند. بنابراین بخش ذیل که قسمتی از کارهای فروبنیوس را با روشهای جدید نظریهٔ نمایشها توضیح می‌دهد، پیوند مناسبی بین رهیافت قدیم و جدید برقرار خواهد ساخت.

تجزیهٔ $\Theta(G)$ برای خوانندگان امروزی

درواقع، کارهایی در این بخش انجام خواهیم داد جملگی «امروزی» نیستند. امی نوتر از آنچه در اینجا می‌آوریم آگاه بود، و خواننده به‌آسانی می‌تواند این موضوع را با خواندن شرح او در بارهٔ دترمینان گروهی در مقالهٔ بنیادیش در زمینهٔ نظریه نمایش [N: بخش ۲۳، صص. ۶۸۵ـ۶۸۶] تحقیق کند. درواقع، مطابق معمول، نوتر به‌طور کلیتر «دستگاه‌ـماتریسها» و «دستگاه‌ـدترمینانها» را روی احتمالاً جبرهای ناانیساده[1] در نظر گرفت. برای هدفی که ما داریم، کافی است جبر گروهی $\mathbb{C}G$ را در نظر بگیریم: این جبر مشتمل است بر ترکیبات خطیِ متناهیِ صوری مانند $\sum_{g\in G} a_g g$، $(a_g \in \mathbb{C})$، که به‌طور طبیعی جمع و ضرب می‌شوند.

چنانکه در بخش پیش توضیح دادیم، یک *نمایش* گروهِ G به معنی یک همریختیِ گروهی مانند $D : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ است؛ عدد n را *بُعد* (یا درجهٔ) این نمایش گویند. نمایش D را *تحویل‌ناپذیر* می‌نامند هرگاه هیچ زیرفضای (نابدیهیِ) $\mathbb{C}^n$ تحت عمل $D(G)$ ناوردا نباشد. هر نمایش D (تحویل‌ناپذیر یا تحویلپذیر) یک *سرشت*، مانند $x_D : G \to \mathbb{C}$

$$\chi_D(g) = \mathrm{trace}(D(g)) \qquad (g \in G)$$

به دست می‌دهد. دو نمایش nبعدی D و D' را *هم‌ارز* گویند هرگاه ماتریسیِ مانند $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر g از G، $D'(g) = U^{-1}D(g)U$. در این صورت، به‌وضوح $\chi_D = \chi_{D'}$. برعکس، هرگاه $\chi_D = \chi_{D'}$ و G یک گروه متناهی باشد، طبق یک حکم اساسی در نظریهٔ نمایش، هم‌ارزی D و D' تضمین می‌شود.

اینک چشم‌انداز خود از دترمینان گروهی را با معرفی یک دترمینان به‌ازای هر نمایش دلخواه یک گروه متناهی G، به‌صورت زیر گسترش می‌دهیم. با مفروض بودن یک نمایش $D : G \to GL_n(\mathbb{C})$، مانند قبل، مجموعه‌ای از نامعینهای $\{\chi_g : g \in G\}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم

$$\Theta(G)_D = \det\left(\sum_{g\in G} \chi_g D(g)\right) \qquad (۱.۶)$$

1. nonsemisimple

اینک سه حکم ذیل را متذکر می‌شویم:

۱. اگر $\sum_{g\in G} \chi_g g$ را به‌عنوان عضو «عام» $\mathbf{x}$ از جبر گروهی $\mathbb{C}G$ تلقی کنیم، ماتریس $\sum_{g\in G} \chi_g D(g)$ فوق درست همان $D(\mathbf{x})$ با بسط D به یک همریختی $\mathbb{C}$ـجبری $\mathbb{C}G \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ است. درواقع، بسیاری از اوقات مناسب است که تصور کنیم نمایش D به‌وسیلهٔ این همریختی جبری «داده شده است».

۲. $\Theta_D(G)$ تنها به ردهٔ هم‌ارزی نمایش D بستگی دارد، زیرا مزدوجی از ماتریسهای نمایش‌دهنده، دترمینانها را تغییر نخواهد داد.

۳. *در حالتی که D نمایش منظم است* (و بنابراین $D(g)$ ماتریس جایگشتی وابسته به ضرب، چپ g بر G است)، $\Theta_D(G)$ دقیقاً دترمینان گروهی $\Theta(G)$ است. درواقع، ماتریس $\chi_{g'}D(g')$ در ستون hام دارای درایهٔ $\chi_{g'}$ در سطر $g'h$ام، و درایهٔ صفر در دیگر جاهاست. بنابراین، $\sum_{g'\in G} \chi_{g'}D(g')$ در ستون hام درست درایهٔ $\chi_{gh^{-1}}$ را در سطر gام دارد.

به‌وضوح داریم $\Theta_{D_1\oplus D_2}(G) = \Theta_{D_1}(G)\Theta_{D_2}(G)$. بنابراین، برای محاسبهٔ $\Theta(G)$، ابتدا می‌توان نمایش منظم را به مؤلفه‌های تحویل‌ناپذیر آن «تجزیه» کرد. این روش، روش استانده‌ای در نظریهٔ نمایش گروههای متناهی است که از قضیهٔ اساسی ساختاریِ ماشکه[1] و ودربرن[2] در بارهٔ $\mathbb{C}G$ بهره می‌گیرد. بر طبق این قضیه

$$\mathbb{C}G \cong \mathbb{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \times \ldots \times \mathbb{M}_{n_s}(\mathbb{C}) \qquad (۲.۶)$$

که در آن n_iها چنان‌اند که $\sum_i n_i^2 = |G|$. تصویرکردن از $\mathbb{C}G$ به روی $\mathbb{M}_{n_i}(\mathbb{C})$، iامین نمایش مختلط تحویل‌ناپذیر D_i را به‌دست می‌دهد، و، با استفادهٔ مختصری از نظریهٔ حلقه‌ها، از (۲.۶) ملاحظه می‌شود که نمایش منظم با $\oplus_i n_i D_i$ هم‌ارز است. اینک نتیجهٔ زیر را می‌آوریم.

لم ۳.۶. *هر $\Theta_{D_i}(G)$ یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر روی $\mathbb{C}$ است، و به‌ازای هر j که $j \neq i$، با $\Theta_{D_j}(G)$ متناسب نیست.*

برهان. در اینجا نکتهٔ اساسی این است که اگر بنویسیم $D_i(\mathbf{x}) = (\lambda_{jk}(\mathbf{x}))$، آنگاه فرمهای خطیِ $\lambda_{jk}(\mathbf{x})$ روی $\mathbb{C}$ مستقل خطی‌اند، درواقع، فرض می‌کنیم $\sum_{j,k} c_{jk}\lambda_{jk}(\mathbf{x}) = 0$، که در آن $c_{jk} \in \mathbb{C}$. چون $D_i : \mathbb{C}G \to \mathbb{M}_{n_i}(\mathbb{C})$ *پوشاست*، مقادیر مناسبی از χ_gها را در $\mathbb{C}$ می‌توان چنان پیدا کرد که $D_i(\mathbf{x})$ یک یکاماتریس $E_{j.k.}$ شود. با قرار دادن این مقادیرِ χ_gها در $\sum_{j,k} c_{jk}\lambda_{jk}(\mathbf{x}) = 0$، ملاحظه می‌کنیم که هر $c_{j.k.}$ صفر است. با اثبات استقلال خطی $\lambda_{jk}(\mathbf{x})$ها، می‌توان این فرمهای خطی را به یک پایهٔ فضای همهٔ فرمهای خطی برحسب $\{\chi_g : g \in G\}$ توسیع داد. این پایه اینک به‌عنوان متغیرهای جدید برای حلقهٔ چندجمله‌ای $\mathbb{C}[\chi_g : g \in G]$ به‌کار خواهد رفت، و برحسب این متغیرهای جدید، کاملاً معلوم است که $\det(\lambda_{jk}(\mathbf{x}))$ تحویل‌ناپذیر است.

برای اثبات آخرین گزاره در (۳.۶)، کافی است ملاحظه کنیم که $\Theta_{D_i}(G)$ واقعاً نمایش D_i را معین می‌کند. به این منظور، $\Theta_{D_i}(G)$ را به‌عنوان یک چندجمله‌ای برحسب χ_1 در نظر می‌گیریم. چون $D_i(1) = I_{n_i}$، χ_1

1. Maschke 2. Wedderburn

تنها در قطر $D_i(\mathbf{x})$ ظاهر می‌شود. با نوشتن $D_i(g) = (a_{jk}(g))$، داریم $\lambda_{jj}(\mathbf{x}) = \sum_{g\in G} a_{jj}(g)\chi_g$، و بنابراین

$$\begin{aligned}\Theta_{D_i}(G) &= \prod_{j=1}^{n_i} \lambda_{jj}(\mathbf{x}) + \dots \\ &= \chi_1^{n_i} + \sum_{g\in G\setminus\{1\}} \chi_{D_i}(g)\chi_1^{n_i-1}\chi_g + \dots .\end{aligned} \tag{۴.۶}$$

بنابراین، این عامل تحویل‌ناپذیر سرشتِ χ_{D_i} را معین می‌کند، و، چنانکه پیشتر دیدیم، χ_{D_i} [خودِ] D_i را معین می‌کند، همان چیزی که می‌خواستیم. □

بنابر ملاحظات فوق نتیجه می‌شود که

$$\Theta(G) = \prod_{i=1}^{s} \Theta_{D_i}(G)^{n_i} \tag{۵.۶}$$

تجزیهٔ *کامل* دترمینان گروهی به عوامل تحویل‌ناپذیر روی $\mathbb{C}$ است. در اینجا، چون نمایش D_i دارای بعد n_i است، درجهٔ عامل تحویل‌ناپذیر $\Theta_{D_i}(G)$ همان n_i است ــ که با چندگانگیِ ظهور $\Theta_{D_i}(G)$ در $\Theta(G)$ یکی است. همچنین، از (۲.۶) معلوم می‌شود که s عبارت است از $\mathbb{C}$ـبعدِ $Z(\mathbb{C}G)$ (مرکز $\mathbb{C}G$)، که با تعداد رده‌های مزدوجی G معین می‌شود. بدین نکته اندکی بعد، در بخش آتی باز خواهیم گشت.

از (۴.۶) و (۵.۶)، به‌وضوح ملاحظه می‌شود که تجزیهٔ $\Theta(G)$ کاملاً با سرشتهای تحویل‌ناپذیر G در ارتباط‌اند.

تعریف نخست فروبنیوس از سرشتها(ی تحویل‌ناپذیر)

البته، توصیف کارآمد تجزیهٔ $\Theta(G)$ در بخش پیش تا حد زیادی مبنی بر دیدگاه امروزی بود. پیشروان ریاضیات فاقد چنین دیدگاهی بودند و تنها می‌بایست به خوش‌اقبالی و عزم راسخ امید می‌بستند. چنانکه همه می‌دانیم، بیشتر اوقات، برداشتن گام نخست در ریاضیات در هر جهت تازه‌ای، دشوارترین گامهاست. فروبنیوس واقف بود که نیاز به ابداع یک نظریهٔ جدید سرشتها برای تجزیهٔ دترمینان گروهی دارد، ولی برخلاف ما، کار را اساساً بدون داشتن سر نخ شروع کرد. بنابراین، پی‌بردن به اینکه وی واقعاً چگونه از عهدهٔ یافتن نخستین پرتو در یک دالان ظلمانی برآمد، بسیار آموزنده خواهد بود.

همان‌طور که پیشتر اشاره کردیم، «نمایش گروهها» در واژگان ریاضیدانان قرن نوزدهم وجود نداشت، بنابراین تعریف امروزی «سرشت» در ۱۸۹۶ در دسترس فروبنیوس نبود؛ بلکه او هنگام کار با $\mathbb{C}$ـجبر تعویضپذیر خاصی که بعداً تشخیص داد که $Z(\mathbb{C}G)$، مرکز جبر گروهی، است نخستین بار به تعریف سرشتها رسید. به منظور تشریح سریع ایده‌های او، باز هم آسانتر است که از اطلاعات امروزی خوانندگان سود ببریم، اگرچه سعی خواهیم کرد در بارهٔ مشکلاتی که فروبنیوس به سبب در دست نداشتن روشهای امروزی با آنها روبه‌رو می‌شد توضیحاتی بدهیم. شالودهٔ نظری توصیفِ زیر، مفهوم جبر نیمسادهٔ تعویضپذیر روی $\mathbb{C}$ است.

فرض کنیم g_j $(1 \le j \le s)$ مجموعهٔ کاملی از نماینده‌های رده‌های مزدوجی یک گروه متناهی G باشد (با فرض $g_1 = 1$)، و فرض کنیم عناصر $C_j \in \mathbb{C}G$ «مجموعهای رده‌ای» (مجموعهای اعضای مزدوج با g_j) باشند. می‌دانیم (و به آسانی ثابت می‌شود) که این C_jها یک $\mathbb{C}$ـپایه برای $Z(\mathbb{C}G)$ به‌دست می‌دهند، که ثابتهای ساختاری $\{a_{ijk}\}$ آن با معادلهٔ

$$C_jC_k = \sum_i a_{ijk}C_i \tag{۱.۷}$$

تعریف می‌شود. در اینجا، با تقریب یک مضرب (که اندازهٔ iامین ردهٔ مزدوجی است)، a_{ijk} تعداد سه‌تاییهایی مرتب $(\chi, y, z) \in G^3$ است به‌طوری که $\chi \sim g_j$، $y \sim g_k$، $z \sim g_i$، و $z = \chi y$. (در اینجا، " $\sim$ " به معنی مزدوج‌بودن در G است.) فروبنیوس با در نظر گرفتن معادله‌ای مانند $\chi yw = 1$ به‌جای $\chi y = z$، این اعداد را با اندکی تفاوت در کار آورد؛ تفاوت تنها مربوط به علامت است. نکته اینجاست که او با این ثابتها، که تعداد جوابهای چنین معادلاتی را در گروهها مشخص می‌کنند، خیلی زیاد آشنا بود. اینک چیزی را که قدری جدیدتر است، یعنی تجزیهٔ (۲.۶)ی ودربرن را، در کار می‌آوریم. با مرکزگیری از این تجزیه، خواهیم داشت

$$Z(\mathbb{C}G) = \mathbb{C}\epsilon_1 \times \dots \times \mathbb{C}\epsilon_s \tag{۲.۷}$$

که در آن $\epsilon_i \in \mathbb{C}G$ها خودتوانها[1]ی مرکزی مناسبی‌اند که به‌ازای $i \neq j$، $\epsilon_i\epsilon_j = 0$. از (۲.۷) می‌دانیم که $Z(\mathbb{C}G)$ (تعویضپذیر و) نیمساده است. فروبنیوس به جوانب این زبان فنی امروزی مجهز نبود، بنابراین به جای آن ناچار شد مقدار زیادی محاسبات موردی با اعداد $\{a_{ijk}\}$ انجام دهد تا شرطی را که امروز به شرط اثر برای نیمسادگی مشهور است، بررسی کند. در هر حال، فروبنیوس این کار را انجام داد، بنابراین توانست این اطلاعِ مربوط به نیمسادگی را، ولو به‌طور ضمنی، به‌کار برد.

با شروع از (۲.۶)، فرض کنیم $D_i : \mathbb{C}G \to \mathbb{M}_{n_i}(\mathbb{C})$ نگاشتی تصویری باشد که iامین نمایش تحویل‌ناپذیر را به‌دست دهد، و فرض کنیم χ_i سرشت متناظر باشد: $(\chi_i(g) = \mathrm{trace}(D_i(g)))$. چون D_i مرکز را به مرکز می‌نگارد، به‌ازای $c_{ij} \in \mathbb{C}$ مناسبی داریم

$$D_i(C_j) = c_{ij}I_{n_i} \tag{۳.۷}$$

با محاسبهٔ اثرها، نتیجه می‌شود $h_j\chi_i(g_j) = n_ic_{ij}$ که در آن h_j عدد اصلی jامین ردهٔ مزدوجی است. بنابراین

$$c_{ij} = \frac{h_j\chi_i(g_i)}{n_i} = \frac{h_j\chi_i(g_j)}{\chi_i(1)} \tag{۴.۷}$$

از (۳.۷) داریم $C_j = \sum_i c_{ij}\epsilon_i$؛ به‌خصوص

$$C_j\epsilon_i = c_{ij}\epsilon_i \tag{۵.۷}$$

پس $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_s\}$ پایه‌ای برای $Z(\mathbb{C}G)$ مرکب از ویژه‌بردارهای مشترک برای عملگرهای (تعویضپذیر) ضرب از چپ در $\{C_1, \dots, C_s\}$ است.

1. idempotents

ویژه‌مقدارهای عملگر ضرب از چپ در C_j عبارت‌اند از c_{ij}ها که در (۴.۷) تعریف شده‌اند.

ما نتایج بالا را خیلی سریعتر از آنچه فروبنیوس به‌دست آورد، پیدا کردیم، زیرا او مجبور بود نتایج اصلی را از مقالهٔ پیشین خود [F : (۵۱)] در مورد عملگرهای تعویضپذیر گرد آورد تا وجود و استقلال ویژه‌بردارها را نشان دهد، و برهان استقلال به‌طور جدی به خاصیت نیمسادگی فوق‌الذکر $Z(\mathbb{C}G)$ بستگی دارد. مقالهٔ [F : (۵۱)] او، نخستین مقاله از مقالات سه‌گانهٔ مشهورش در ۱۸۹۶ [F : (۵۱)، (۵۳)، (۵۴)] در گزارشهای *فرهنگستان علوم برلین*، به‌نوبهٔ خود از کارهای متقدم وایرشتراس، ددکیند، و مطالعه در بارهٔ دستگاههای ابرمختلط تعویضپذیر ملهم بود. اما، با روشهای جدید، همهٔ کار فروبنیوس را می‌توان مانند فوق در چند سطر انجام داد.

این کار که انجام شد، می‌توان ویژه‌مقدارهای c_{ij} را برای تعریف مقدارهای سرشتی $\chi_i(g_i)$ از طریق معادلهٔ (۴.۷) به‌کار گرفت. (البته ابتدا باید $n_i = \chi_i(1)$ را بدانیم، ولی این مسأله‌ای نسبتاً جزئی است[1].) هر چند این راه پیچ در پیچ به نظر می‌آید، ولی دقیقاً به همین طریق بود که فروبنیوس نخست در [F : (۵۳)] سرشتهای χ_i را به‌صورت توابع رده‌ای بر G تعریف کرد؛ و بعد از تعریف χ_iها، بی‌درنگ روابط تعامد اول و دوم را بین سرشتها (ی تحویل‌ناپذیر) به‌دست آورد (تابلو را ببینید).

$$\sum_{g\in G} \chi_i(g)\overline{\chi_j(g)} = \delta_{ij}|G|$$

$$\sum_i \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)} = \delta_{g,h}|C_G(g)|$$

این روابط اول و دوم تعامد بین سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ_i که فروبنیوس آنها را در [F : (۵۳)] ثابت کرد به‌عنوان محکی در نظریهٔ سرشتهای گروههای متناهی باقی مانده است. در اینجا δ_{ij}ها دلتاهای معمولی کرونکراند، و $\delta_{g,h}$ برابر ۱ است هرگاه g و h در G مزدوج باشند، و در غیر این‌صورت برابر ۰ است؛ $C_G(g)$ مرکزساز g در G را نشان می‌دهد.

اگرچه امروزه رهیافت بسیار ساده‌تری را به سرشتها (از طریق نمایشها) در دست داریم، رهیافت اصلی که فروبنیوس در پیش گرفت، به هیچ‌وجه فراموش‌شدنی نیست. در حال حاضر نتایج فوق‌الذکر فروبنیوس به صورت زیر باقی است:

قضیهٔ ۶.۷. *ثابتهای ساختاری $\{a_{ijk}\}$ و جدول سرشتی $(\chi_i(g_j))$ یکدیگر را معین می‌کنند.*

درواقع، فرض می‌کنیم a_{ijk}ها داده شده باشند. در این صورت a_{1jk}ها h_jها را معین می‌کنند و χ_iها طبق بحث بالا معین می‌شوند. برعکس، اگر χ_iها مفروض باشند، با به‌کارگیری دومین رابطه تعامد، با محاسبه‌ای، فرمولی صریح که a_{ijk} را برحسب مقادیر سرشتی مختلف بیان می‌کند به‌دست می‌آید.

قضیهٔ فروبنیوس، قضیهٔ (۶.۷)، به‌عنوان نتیجه‌ای بسیار مهم در نظریهٔ سرشتها باقی مانده است. جزء لاینفک برهانش، مبین این نتیجه است که $\mathbb{Q}$ـارشهٔ[1] مقادیر یک سرشت تحویل‌ناپذیر مانند χ همواره یک هیأت عددی جبری است، که امروزه به هیأت سرشتی χ موسوم است و بیان صریح a_{ijk}ها برحسب مقادیر سرشتی دارای کاربردهای جالب متعدد در ساختن و مطالعهٔ گروههای ساده است؛ مرجع مناسبی برای این موضوع مقالهٔ هیگمن [Hi] است.

فروبنیوس از همان ابتدا تشخیص داد که سرشتهای یک گروه اشیایی با ویژگی حسابیِ بسیار مهم‌اند. وی در [F : (۵۳)، بخش ۲، معادلهٔ (۱۵)] اظهار داشت که ثابتهای c_{ij} جملگی اعداد صحیح جبری‌اند[2]، و بعداً در [F : (۵۴)، بخش ۱۲] ثابت کرد که مقادیر سرشتی نیز اعداد صحیح جبری‌اند. با استفاده از این مطالب و اولین رابطهٔ تعامد، او به این نتیجهٔ مهم حسابی رسید که هر درجهٔ سرشتی n_i، مرتبهٔ گروه G را می‌شمارد.

مقالهٔ فروبنیوس در بارهٔ دترمینان گروهی

با انتشار مقالهٔ سرشت گروه [F : (۵۳)]، فروبنیوس سرانجام توانست کاربردهایی را که در ذهنش برای مسألهٔ تجزیهٔ ددکیند در مورد دترمینان گروهی داشت، به دنیا عرضه کند. این کار را در مقالهٔ نهایی [F : (۵۴)] از سلسله مقالات ۱۸۹۶ انجام داد. با توجه به اینکه هیچ‌یک از روشهای امروزی ما در دسترسش نبود، تجزیهٔ $\Theta(G)$ به برداشتن گام بسیار بلند دیگری نیاز داشت.

فروبنیوس ابتدا تجزیهٔ $\Theta(G)$ را به‌صورت زیر نوشت:

$$\Theta(G) = \prod_{i=1}^{t} \Phi_i^{e_i} \qquad (1.8)$$

که در آن Φ_iها عوامل تحویل‌ناپذیر (همگن) از درجهٔ، مثلاً، f_iاند. پس از تجدید مقیاس می‌توان فرض کرد که هر Φ_i جمله‌ای مانند $\chi_1^{f_i}$ دارد؛ به این ترتیب Φ_iها به‌طور یکتا (صرف‌نظر از ترتیب ظهورشان) معین می‌شوند. باقی کار توصیف Φ_iها و تعیین نماهای e_i در (۱.۸) است. اگر رهیافت جدید به $\Theta(G)$ را اختیار کنیم و کاری را که در بخش پیش در بارهٔ تجزیهٔ آن انجام دادیم مفروض بگیریم، اطلاعات زیر را در دست خواهیم داشت:

۱. فروبنیوس در مورد این مسأله اندکی دچار ابهام بود، و این سبب شد هاوکینز [H۲:ص.۲۳۹] تذکر دهد که در [F : (۵۳)] «سرشتها هرگز به‌طور کامل تعریف نمی‌شوند.» اما [F : (۳۵)] متضمن اطلاعات بسیار زیادی است که می‌توان این مسأله را از یک روش یا روشی دیگر از نو حل کرد. به‌عنوان مثال، به محض اینکه نسبتهای $\chi_i(g_j)/\chi_i(1)$ را به‌ازای هر j بدانیم، $\chi_i(1)$ را می‌توان از اولین رابطهٔ تعامد معین کرد.

1. span

۲. یک برهان کارآمد جدید به قرار زیر است. چون حلقهٔ $\sum_i \mathbb{Z}C_i$ یک گروه آبلیِ متناهیِ مولد است، هر C_i روی $\mathbb{Z}$ صحیح است. با به‌کار بردن این مطلب در مورد (۵.۷)، می‌بینیم که همین حکم به‌ازای هر c_{ij} راست است.

(۱) تعداد (t) عاملهای تحویل‌ناپذیر متمایز در (۱.۸) برابر است با s، تعداد رده‌های مزدوجی در G.

(۲) به‌ازای هر i، f_i (درجهٔ Φ_i) با چندگانگی e_i در (۱.۸) برابر است.

اما، برای فروبنیوس هر یک از این گزاره‌ها نیازمند برهان بود. (۱) خیلی دشوار نبود؛ وی با استفاده از روابط تعامد که در [F : (۵۳)] عرضه کرد، به بررسی آن پرداخت (تابلو را ببینید). ولی (۲) یک مسألهٔ مبارزطلب واقعی بود! البته (۲) را همهٔ مثالهایی که بر فروبنیوس و ددکیند معلوم بود تأیید می‌کردند. اما فروبنیوس شخص محتاطی بود، و هر شخص محتاطی می‌داند که تعداد اندکی مثالِ خیلی ساده شده در ریاضیات، ممکن است کاملاً گمراه‌کننده باشد! بنابراین در ابتدا فروبنیوس آمادهٔ قبول رابطهٔ $e_i = f_i$ نبود. این امر موقعیت مناسبی برای دانشجویان تاریخ ریاضیات فراهم کرده است، زیرا آنان در اینجا فرصتی استثنایی دارند تا مستقیماً، از طریق نامه‌های فروبنیوس به ددکیند، دریابند که چگونه فروبنیوس با این مسأله دست و پنجه نرم می‌کرد (و گاه نمی‌کرد[1]). او ابتدا (۲) را در حالتِ عاملهای خطی $(f_i = ۱)$ حل کرد، که مشکل نبود؛ سپس موفق به حل آن در حالت عاملهای درجهٔ دوم $(f_i = ۲)$ شد، که بسیار مشکل بود. او نامه‌ای به ددکیند نوشت و درخواست کرد تا وی را در مورد مثالهای ناقض ممکن یاری دهد؛ در این میان، چند مثال از عاملهای درجهٔ سوم را برای تأیید (۲) محاسبه کرد. این موضوع را محرمانه با ددکیند در میان گذاشت که چگونه گاه با مشغول داشتن خود به فعالیتهای کاملاً بی‌ربط، مانند رفتن به نمایشگاه بازرگانی همراه همسرش، و سپس بازدید از نمایشگاه آثار هنری، مطالعهٔ رمان در خانه، یا زدودن کرم حشرات از درختان میوهٔ خود، سعی در «نیل به اثبات $e_i = f_i$» داشته است. در ادامه، در نامهٔ ۴ ژوئن ۱۸۹۶ خود به ددکیند، که حاکی از شوخ‌طبعی ظریف اوست، نوشت:

> امیدوارم رازکار مرا نزد کسی فاش نکنی. اثر عظیم من در باب *روشهای تحقیق ریاضی* (با پیوستی در بارهٔ شکارکرم حشرات)، که آن راز را مورد استفاده قرار می‌دهد، بعد از مرگ من منتشر خواهد شد.

کتاب معهود فروبنیوس هیچ‌گاه منتشر نشد، ولی از قرار معلوم هنوز «روشهای تحقیق ریاضی» او به‌طور گسترده در بین استادان ریاضی و دانشجویان دوره‌های عالی آنها به کار بسته می‌شود. کشمکش فروبنیوس با مسألهٔ $e_i = f_i$ پنج ماه طول کشید، ولی با یادداشت شادی‌بخشی به انجام رسید: او سرانجام در اواخر سال ۱۸۹۶ از عهدهٔ اثبات آن با کلیت تمام برآمد. با این کار توانست مقالهٔ [F : (۵۴)] خود را در بارهٔ دترمینان گروهی بنویسد. در بخش ۹ این مقاله، نوشت:

> نمای توان، آنجا که دترمینان گروهی شامل یک عامل اول است، برابر با درجهٔ آن عامل است،

و آن را «قضیهٔ بنیادی دترمینانهای گروهی» نامید. این قضیه بی‌تردید گوهر تابناک کار فناناپذیر او در نظریهٔ سرشتها در ۱۸۹۶ بود. برهان فروبنیوس نمایش شگفت‌انگیزی از اعجازِ فنی بود، که چهار و نیم صفحه از زیتسونگز بریشته[1] را به خود اختصاص می‌داد. البته، امروز اثبات این قضیهٔ بنیادی چنانکه در بخش پیشین در مورد تجزیهٔ $\Theta(G)$ انجام دادیم. خیلی آسانتر است. رهیافتی که در آن بخش به‌کار رفت همچنین به‌وضوح نشان داد که چگونه عاملهای تحویل‌ناپذیر $\Theta(G)$ با سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ_i متناظرند: با تقریب یک جایگشت، Φ_i در (۸.۱) همانا $\Theta_{D_i}(G)$ در (۴.۶) است، بنابراین متناظر است با سرشت $\chi_i := \chi_{D_i}$ (و البته $e_i = f_i = n_i$). معادلهٔ (۴.۶) نشان داد که ضریب $\chi_1^{n_i-1}\chi_g$ در Φ_i، به‌ازای $g \neq ۱$، عبارت است از $\chi_i(g)$. به‌طور کلی، ضریبهای دیگر را نیز می‌توان صریحاً معین کرد. فروبنیوس ابتدا به استقراء، اقدام به توسیع هر χ_i از تابعی یکتایی به یک تابع nتایی (به‌ازای هر $n \geq ۱$)کرد؛ هر $\chi_i(g_1, \ldots, g_n)$ یک تابع چندجمله‌ای از مقادیر χ_i است. (به‌عنوان مثال، برای شروع استقراء، $\chi_i(g,h) = \chi_i(g)\chi_i(h) - \chi_i(gh)$.) فروبنیوس سپس با این «$n$ـسرشتها»ی تعریف شده، Φ_i را به‌وسیلهٔ فرمول قابل توجه زیر [F : (۵۴)، بخش ۳، معادلهٔ (۱۵)] معین کرد:

$$n_i! \cdot \Phi_i = \sum \chi_i(g_1, g_2, \ldots, g_{n_i})\chi_{g_1}\chi_{g_2}\cdots\chi_{g_{n_i}} \qquad (۲.۸)$$

که در آن مجموعیابی روی همهٔ n_iتاییها از اعضای G است. با این فرمول همهٔ ضریبهای Φ_i به‌صورت توابع چندجمله‌ای از مقادیر سرشتی معمولی $\{\chi_i(g) : g \in G\}$ محاسبه می‌شود. تاکنون، متخصصان نظریهٔ گروهها از این سرشتهای «از مراتب بالا» استفادهٔ اساسی نکرده‌اند؛ احتمالاً، در این مورد می‌توان کارهای بیشتری انجام داد.

پیش از آنکه دترمینان گروهی را رها کنیم، باید به ذکر چند تحول نسبتاً شگفت‌انگیز تازه بپردازیم. می‌دانیم که سرشتهای یک گروه برای تعیین گروه کافی نیستند؛ به‌عنوان مثال، گروه دووجهی و گروه کواترنیونی از مرتبهٔ ۸ جدولهای سرشتی یکسان دارند. با وجود این، فورمنک و سیبلی [FS] ثابت کرده‌اند که دترمینان گروهی $\Theta(G)$ گروه G را معین می‌کند، و هونکه و جانسن [HJ] نشان داده‌اند که ۱ـسرشتها، ۲ـسرشتها، ۳ـسرشتهای G (فوق‌الذکر) نیز برای تعیین G کافی‌اند. این نتایجِ تازه کشف شده می‌توانست اسلاف دست‌اندرکاران نظریهٔ دترمینانهای گروهی را شگفت‌زده کند.

تاکنون تنها به بحث در بارهٔ دترمینان گروهی در مشخصهٔ صفر (یعنی، روی اعداد مختلط) پرداخته‌ایم. ل. ی. دیکسن در مقالات متعددی در ۱۹۰۲ و ۱۹۰۷، به مطالعهٔ دترمینان گروهی روی هیأتهایی با مشخصهٔ $p > ۰$ پرداخته بود. در زمینهٔ تحقیقات دیکسن، به مقاله عالی کُنراد [Con] مراجعه کنید.

محصول: ۱۸۹۷ـ۱۹۱۷

فروبنیوس در همان مقدمهٔ نخستین مقاله‌اش در بارهٔ سرشت گروه [F : (۵۳)] عقیدهٔ خود را مبنی بر اینکه نظریهٔ جدید سرشتها به غنی‌سازیِ اساسی و پیشرفت چشمگیر نظریهٔ گروههای متناهی منجر خواهد شد، ابراز می‌دارد. در بیست سال باقیماندهٔ عمرش، با توان به ظاهر پایان‌ناپذیرش، پانزده مقاله دیگر در نظریهٔ گروهها (علاوه بر مقالات متعدد در سایر زمینه‌ها)، برای بسط

۱. شرح ما ازکار عظیم فروبنیوس در اینجا مبتنی بر شرح مستند و عالی هاوکینز [H_2، H_3] است.

1. Sitzungsberichte

سرشتهای گروه و نمایش گروهها و به‌کار بستن آنها در نظریهٔ گروههای متناهی، نوشت. خلاصه‌ای از این بخش از داستان را در اینجا می‌آوریم.

۱. نخستین تحول مهم بعد از مقالات سه‌گانهٔ ۱۸۹۶ عبارت بود از اینکه فروبنیوس موفق به معرفیِ صوری مفهوم نمایش گروه و مرتبط‌ساختن آن با دترمینان گروهی شد؛ وی این کار را هم به تأسی از پیشنهاد ددکیند انجام داد. ملاحظهٔ اینکه چگونه فروبنیوس این تعریف را فرمولبندی کرد، از جنبهٔ تاریخی مفید است؛ بنابراین مستقیماً از منبع [F : (۵۶)، بخش ۲] نقل‌قول می‌کنیم:

> فرض کنیم $\mathfrak{G}$ یک گروه مجرد، و A، B، C، ... اعضای آن باشند. به عضو A ماتریس (A) را، به عضو B ماتریس (B) را، و به همین ترتیب، چنان نظیر می‌کنیم که گروه $\mathfrak{G}'$ با گروه $\mathfrak{G}$ یکریخت[1] باشد، یعنی $(A)(B) = (AB)$. در این صورت گوییم که جانشانیها یا ماتریسهای (A)، (B)، (C)، ... گروه $\mathfrak{G}$ را *نمایش می‌دهند*.

این تعریف گرچه در نظر خوانندهٔ امروزی اندکی خام و ناشیانه است، ولی اساساً همان تعریف امروزی نمایش گروه است. همچنین فروبنیوس برای نخستین بار در [F : (۵۶)، بخش ۴، رابطهٔ (۵)] متذکر شد سرشتهایی که وی در [F : (۵۳)] تعریف کرده است با اثرهای ماتریسهای نمایش‌دهندهٔ نمایشهای تحویل‌ناپذیر (یا، به اصطلاح خودِ او، «اولیه») به‌دست داده می‌شوند. در نظر فروبنیوس، تحویل‌ناپذیری نمایش D با تحویل‌ناپذیری دترمینان آن، $\Theta_D(G)$، تعریف می‌شد. مفهوم تحویل‌ناپذیری در سالهای بعد دستخوش تجدیدنظرها و فرمولبندیهای مجدد متعدد قرار گرفت.

این امر از اهمیت زیادی برخوردار است که فروبنیوس در [F : (۵۶)]، صریحاً به تأثیرپذیری از مقالات مولین، که از طریق اتوارت اشتودی به نظر او رسیده بود، اذعان کرد. روش توانای مولین در مورد تحلیل جبرگروهی به‌عنوان یک دستگاه ابرمختلط، ملهم از روشهای جبر لیِ کیلینگ و الی کارتان بود. این روش، تا حد زیادی متضمن دستاوردهای آتی ماشکه، ودربرن، و نوتر بود؛ در ضمن این روش امروزه به یکی از راههای مطالعهٔ نظریهٔ نمایشها بسیار نزدیکتر است. درک مولین از مفهوم نیمسادگی (و توانایی او در کاربردِ مؤثر آن) شاخص کار او بود، گرچه این کار در میان معاصرین او چندان شناخته نشد. اما، فروبنیوس تردیدی در تحسین آن نکرد، و به [H_1] به‌عنوان «اثری ممتاز» اشاره کرد ([F : (۵۶)، ص. ۹۲]). فروبنیوس حتی به محض اطلاع از اینکه مولین در دورپات[2] تنها یک مدرس غیررسمی[3] است، به ددکیند متنفذ نوشت که در صورت امکان به پیشرفت شغلی مولین کمک کند. با وجود این، کار مولین نسبتاً ناشناخته ماند؛ امروزه اساساً از او به خاطر فرمول تابع مولدش در نظریهٔ ناورداهای چندجمله‌ای یاد می‌کنند. خوشبختانه امروز خوانندگان می‌توانند تحلیل ممتازی از کارهای مولین در نظریهٔ نمایشها را در مقالهٔ هاوکینز [H_2] ملاحظه کنند.

۲. در دو مقالهٔ بعدی [F : (۵۷)، ۵۸)]، فروبنیوس «ترکیب» سرشتها را (که اینک موسوم به حاصلضرب تانسوری سرشتهاست) معرفی کرد، و رابطهٔ بین سرشتهای یک گروه و سرشتهای زیرگروههای آن را به‌دست آورد. از دستاورد اخیر، مفهوم بسیار مهم *نمایشهای القایی* پدید آمد. به‌راستی بر اثر نبوغ است که او تنها در ظرف چند سال پس از ابداع نظریهٔ سرشتهای خود، قانون برجستهٔ تقابل را برای نمایشهای القایی مطرح کرد، که امروزه با نام او همراه است. دو مقالهٔ [F : (۵۷)، (۵۸)] برخی از تواناترین ابزارها را برای کاربردهای فراوان نظریهٔ نمایشها در نظریهٔ ساختاری گروهها که در قرن بیستم پیدا شد، فراهم آوردند.

امروزه ما روشهای جبرهای گروهی، تابعگونهای هوم[1]، حاصلضربهای تانسوری، و غیره را در دست داریم، که هر چیزی را ساده و «طبیعی» می‌سازند. اما در ریاضیات «طبیعی‌بودن» تنها تابعی از زمان است. چیزی که امروز برای ما طبیعی است در پایان قرن نوزدهم وجود هم نداشت. برای اثبات احکام اصلی دربارهٔ نمایشهای القایی و ترکیبهای سرشتها، فروبنیوس توانست تنها به یک وسیله توسل جوید، یعنی به دترمینان گروهی. در حقیقت، ملاحظهٔ اینکه چگونه فروبنیوس دترمینان گروهی را به یک اسب بارکش واقعی در نظریهٔ نمایش تبدیل کرد، و آن را در مقاله‌ای به دنبال مقاله‌ای دیگر برای پیش روی در موضوع به‌کار بست، برای خوانندگان معاصر به‌راستی حیرت‌آور خواهد بود! اگرچه جای اغلب (نه همهٔ) برهانهای دترمینان گروهیِ فروبنیوس را برهانهای جدید ساده‌تری گرفته‌اند، به عقیدهٔ من این برهانها به‌عنوان شایسته‌ترین گواهِ توانایی شگرف و مهارت تمام عیار یک ریاضیدان قرن نوزدهم باقی می‌مانند.

۳. محاسبات فروبنیوس در مورد سرشتهای برخی ازگروههای خاص تأثیر عمیقی در نظریهٔ نمایشها داشته است، این محاسبات با سرشتهای گروههای تکمدولی تصویریِ $\mathrm{PSL}_2(p)$، که وی آنها را پیشتر در مقالهٔ [F : (۵۳)] در نظریهٔ سرشتها محاسبه کرده بود، آغاز می‌شود. این کار، سالها بعد، در مبحث بسیار غنی نظریهٔ نمایش گروههای متناهیِ از نوع لی به‌بار نشست[2]. فروبنیوس پیشتر در اوایل کار در [F : (۵۳)، پایان بخش ۸] به این نتیجه رسیده بود که مقادیر سرشتی گروههای متقارن جملگی اعداد صحیح گویا هستند. اندکی پس از آن، در [F : (۶۰)، (۶۱)] او به تنهایی باب تحقیق در نظریهٔ نمایش گروههای متقارن S_n و گروههای متناوب A_n را گشود. رده‌بندی و تحلیل او از سرشتها (و در نتیجه از نمایشها)ی S_n مقدم بر کار کشیش آلفرد یانگ بود، و مبانی مستحکمی را برای بسیاری از کارهای آتی دربارهٔ توابع متقارن در قرن حاضر بنیاد نهاد. فروبنیوس در [F : (۶۰)] توابع مولد خاصی را از مقادیر سرشتی S_n ساخت، و این توابع مولد را معین کرد. بنابراین، دستکم علی‌الاصول، از عهدهٔ محاسبهٔ سرشتهای S_n روی هر ردهٔ مزدوجی مفروض برآمد. به یاد ماندنی‌ترین حالت این محاسبه، فرمول دترمینانی فروبنیوس برای درجه‌های سرشتی S_n است: فروبنیوس به‌ازای یک سرشت تحویل‌ناپذیر χ_λ متناظر با افراز $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ از n (که در آن $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r \geq 0$)، ثابت کرد (رک. [F : (۶۰)، بخش ۳،

۱. در عصر فروبنیوس، این اصطلاح مانع از چند به یک بودن نگاشت $A \mapsto (A)$ نبود.

2. Dorpat

۳. Privatdozent، مدرسی [در دانشگاههای آلمان] که از دانشگاه حقوق رسمی دریافت نمی‌کند و حق‌الزحمه‌اش از طرف دانشجویان تأمین می‌شود. ـم.

1. Hom-functors

۲. این جریان اندکی طنزآمیز است، زیرا معروف بود که فروبنیوس به کارهای سوفوس لی به دیدهٔ تحقیر می‌نگرد.

معادلهٔ(۶)] که

$$\chi_\lambda(1) = n!\det\left(\frac{1}{(\lambda_i - i + j)!}\right)_{1\le i,j\le r}$$
$$= \frac{n!\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)}{\mu_1!, \mu_2!, \ldots, \mu_r!} \qquad (1.9)$$

که در آن $\mu_i = \lambda_i + r - i$ و $\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)$ دترمینان واندرموند با پارامترهای μ_i است. همین فرمول را یانگ مستقلاً به‌دست آورد، اما از قرار معلوم در اینجا فروبنیوس بر او تقدم داشته است. خیلی بعد، فرمول دترمینانی فروبنیوس-یانگ برای درجه‌های سرشتی (برای S_n) به‌صورت ترکیبیاتیِ هم‌ارز دیگری برحسب «قلابِ طولها[1]»ی $h_{ij}(\lambda)$ در نمودار فررز[2] افراز λ درآمد: فرمول قلابِ طول فریم-رابینسن-ثِرال[3] درجه‌های سرشتی را از نو به‌صورت

$$\chi_\lambda(1) = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}(\lambda)} \qquad (2.9)$$

در می‌آورد. امروزه نظریهٔ نمایشهای S_n در کانون جبر و ترکیبیات قرار دارد، و با بسیاری از شاخه‌های ریاضیات محض و کاربردی در تلاقی است.

۴. فروبنیوس حتی پیش از تحقیقاتش در نظریهٔ سرشتها علاقهٔ شدیدی به گروههای حلپذیر متناهی پیدا کرده بود، و دو مقاله در بارهٔ آنها در ۱۸۹۳ و ۱۸۹۵، با تکیه بر وجود و ساختار زیرگروههایشان، منتشر ساخته بود. در اوان تحویل قرن، علاقهٔ وی به این موضوع با ابداع نظریهٔ تازه‌اش در باب سرشتهای گروه تشدید شد. او بعداً سه مقالهٔ دیگر در سلسله مقالات گروههای حلپذیر، و تعدادی مقاله در زمینهٔ گروههای چندگانه-متعددی نوشت، که در برخی از آنها نظریهٔ سرشتها را به‌کار برد. یکی از جالبترین نتایج او (در [F : (۶۳)، ص. ۱۹۹.]) از مبانی هر درس پیشرفته در نظریهٔ نمایش گروههای متناهی است:

قضیهٔ ۳.۹. *اگر G یک گروه متناهی باشد که بر مجموعه‌ای به‌طور متعدی چنان عمل کند که هیچ عضوِ $G\setminus\{1\}$ بیش از یک نقطه را ثابت نگه ندارد، در این صورت مجموعهٔ اعضایِ عاری از نقطهٔ ثابتِ G با عضو همانی تشکیل زیرگروهی (نرمال) از G مانند K می‌دهند. (اگر $K \subseteq G$، G را یک گروه فروبنیوس، و K را هستهٔ فروبنیوس می‌نامند. هر پایدارساز تک‌نقطه‌ای عمل را متمم فروبنیوس می‌گویند.*

برهان فروبنیوس برای این قضیه با استفاده از سرشتهای القایی و مفهوم هستهٔ یک نمایش تحویل‌ناپذیر، پس از گذشت یک قرن هنوز جذابیت و افسونگری خود را از دست نداده است. نکتهٔ قابل توجه‌تر اینکه، برهانی از این گزارهٔ ظاهراً ساده که صرفاً مبتنی بر نظریهٔ گروهها باشد تاکنون پیدا نشده است؛ بنابراین استدلال اصلی فروبنیوس در [F : (۶۳)] به‌عنوان *تنها* برهان (۳.۹) بر جای مانده است! سالها بعد، با الهام از قضیهٔ فروبنیوس، نظریهٔ سرشتهای استثنایی براور-سوزوکی[4] شکل گرفت و تساسنهاوس[5] به رده‌بندی گروههای دوگانه-متعددی فروبنیوس پرداخت، و آنها را به رده‌بندی

1. hook-lengths 2. Ferrers 3. Frame-Robinson-Thrall
4. Brauer-Suzuki 5. Zassenhaus

شبه‌هیأتهای متناهی مربوط ساخت. نظریهٔ گروههای فروبنیوس، در ضمن، محرکی برای ج. گ. تامسن ریاضیدان نامی صاحب مدال فیلدز شد، که در رسالهٔ شیکاگوی خود (۱۹۵۹) این حدس با سابقه را که هسته‌های فروبنیوس گروههای *پوچتوان* اند ثابت کند.

۵. فروبنیوس با شاگردش ایسایی شور[1] مفهوم *اندیس* (یا *نشانگر*)

$$s(\chi) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^2) \qquad (4.9)$$

سرشت تحویل‌ناپذیر χ را معرفی و ثابت کرد که $s(\chi)$ مقادیرش را از $\{1, -1, 0\}$ می‌گیرد. در این نظریهٔ فروبنیوس-شور، χها به سه نوع متمایز تقسیم می‌شوند: $s(\chi) = 1$ هرگاه χ از یک نمایش حقیقی ناشی شود، $s(\chi) = -1$ هرگاه χ از یک نمایش حقیقی ناشی نشود ولی دارای مقدار حقیقی باشد، و $s(\chi) = 0$ هرگاه χ دارای مقدار حقیقی نباشد. اندیسهای فروبنیوس-شور متضمن اطلاعات مهم در بارهٔ یک گروه Gاند که از جدول سرشتی G فراتر می‌رود: به‌عنوان مثال می‌توان تعداد جذرهای یک عضو $g \in G$ را از طریق اندیسها در (۴.۹) به‌وسیلهٔ عبارت $\sum_\chi s(\chi)\chi(g)$ محاسبه کرد، نتیجه‌ای که در نظریهٔ گروهها حائز اهمیت است. فروبنیوس و شور، در ارتباط با کارشان در سرشتهای نوع اول، این نتیجهٔ جالب را نیز که هر نمایش متعامد مختلطِ یک گروه متناهی با یک نمایش متعامدِ حقیقی هم‌ارز است، ثابت کردند.

فروبنیوس و نظریهٔ اعداد

با توجه این امر که هر توسیع نرمال هیأتهای عددی K/F به یک گروه گالوای متناهی $G = \mathrm{Gal}(K/F)$ منجر می‌شود، خویشاوندی نزدیکی بین نظریهٔ اعداد و نظریهٔ گروهها برقرار می‌شود. بنابراین، کاربرد داشتن نظریهٔ سرشتهای فروبنیوس در نظریهٔ اعداد نباید موجب تعجب شود. اما، تأثیرگذاری واقعیِ این دو نظریه بر هم در طول عمر فروبنیوس به‌وقوع نپیوست، و تا دههٔ ۱۹۲۰، هنگامی که نظریهٔ جبری و تحلیلی اعداد به‌اندازهٔ کافی بسط یافت، به تعویق افتاد.

ایدهٔ به‌کاربردن نمایشهای گروههای گالوا در نظریهٔ اعداد نخستین بار در ۱۹۲۳ در کار آرتین ظاهر شد. آرتین به‌ازای هر سرشت χ روی یک گروه گالوای $G = \mathrm{Gal}(K/F)$، به‌صورتی که در پاراگراف پیش ذکر شد، تابعی را که اینک به *L-تابع آرتین* $L(s, \chi, K/F)$ وابسته به χ موسوم است، معرفی کرد. این تابعی برحسب یک متغیر مختلط s ($|s| > 1$) است، که اطلاعات در بارهٔ χ و نیز در مورد اولهای F و K را کُدگذاری می‌کند. به‌عنوان مثال، وقتی χ سرشت بدیهی (به‌ترتیب سرشت منظم) G است، $L(s, \chi, K/F)$ تابع زتای ددکیندِ F (به‌ترتیب، K) است. (تابع زتای ددکیندِ یک هیأت عددی، به نوبهٔ خود، عبارت است از یک تعمیم مستقیم تابع زتای ریمان برای عددهای گویا.) در نظریهٔ آرتین در مورد L-تابعها به دو طریق از کار فروبنیوس استفاده شده است. نخست، آرتین ثابت کرد که در حالتی که G آبلی است و $\chi(1) = 1$، L-تابعهای او بر L-تابعهایی که پیشتر مورد مطالعهٔ هِکه[2] قرار گرفته بودند، منطبق هستند. این امر نیازمند حداکثر استفاده از قانون تقابل آرتین بود، که آرتین با به‌کار بردن ایده‌های برهان

1. Issai Schur 2. Hecke

چبوتاریف[1] در مورد یک حدس فروبنیوس (اینک موسوم به قضیهٔ چگالی چبوتاریف) آن را ثابت کرد. دوم، آرتین، ثابت کرد که، در حالت غیرآبلی، سرشتهای القایی فروبنیوس میانگینهای تام را برای ارتباط Lـتابعهای آرتین با Lـتابعهای هِکِهٔ (آبلی) فراهم می‌آورد. بعداً، براور کار آرتین را با اثبات اینکه هر سرشت G ترکیب صحیحی از سرشتهای القاشده از سرشتهای ۱ـبعدیِ زیرگروههایِ مناسبی از G است، تکمیل کرد. براور با این قضیهٔ نیرومند استقرایی ثابت کرد که $L(s,\chi,K/F)$ به یک تابع برخه‌ریخت در $\mathbb{C}$ توسیع می‌یابد، و اینکه خارج‌قسمت تابعهای زتای ددکیند $\zeta_K(s)/\zeta_F(s)$ یک تابع تام است. در این کار (که برای آن براور در ۱۹۴۹ جایزهٔ فرانک نلسن کولِ انجمن را به‌دست آورد)، رابطهٔ متقابل بین نظریهٔ سرشتها و نظریهٔ اعداد به‌بار نشست. بعدها، نمایشهای گروههای گالوا به مبحث مهمی در نظریهٔ فرمهای مدولی تبدیل شد، که داستان دیگری دارد.

پی‌گفتار

در حدود صد سال پیش، ددکیند مسألهٔ تجزیهٔ دترمینان خاصی را که به یک گروه وابسته است برای فروبنیوس مطرح کرد. حل این مسألهٔ مجرد فروبنیوس را به ابداع نظریهٔ سرشتها، و در نتیجه نظریهٔ نمایشهای گروههای متناهی هدایت کرد. امروزه، این نظریه‌ها ابزارهایی اساسی برای شاخه‌های متعدد جبر فراهم می‌آورند، و تعمیمهای آنها به حالت گروههای توپولوژیک و گروههای لی نقش مهمی را در آنالیز همساز ایفا می‌کنند. در عین حال، سرشتهای گروه و نمایشها به‌طور گسترده‌ای در بسیاری از حوزه‌های کاربردی، مانند طیف‌سنجی، بلورشناسی، مکانیک کوانتومی، نظریهٔ مولکولی مداری، و نظریهٔ میدان لیگاند به‌تدریج مورد استفاده قرار گرفته‌اند. به نظر می‌رسد که این موارد استعمال گوناگونِ حیرت‌آور که با کار نظریِ صرفِ ددکیند و فروبنیوس ممکن شده است، کاری که دهها سال مقدم بر آن کاربردها بوده است، نمونهٔ بارز دیگری از «کارایی بی‌دلیلِ» شگرف ریاضیات است.

مراجع

[C] F. Cajori, *Teaching and history of mathematics in the U.S.* (W. P. Durfee quotation, 265-266), Washington, 1890.

[Ca] A. Cayley, *Desiderata and suggestions*, Amer. J. Math. **1**(1878), 50-52.

[Con] K. Conrad, *The origin of representation theory*, to appear.

[Cu$_1$] C. W. Curtis, *Representation theory of finite groups: from Frobenius to Brauer*, Math. Intelligencer **14** (1992), 48-57.

[Cu$_2$], *Frobenius, Burnside, Schur and Brauer. Pioneers of representation theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, to appear.

[D] P. G. Lejeune Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 3rd ed., published and supplemented by R. Dedekind, Vieweg, Braunschweig, 1879.

[FS] E. Formanek and D. Sibley, *The group determinant determines the group*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 649-656.

1. Tchebotarëv

[F] F. G. Frobenius, *Gesammelte Abhandlungen*, I, II, III (J.-p., Serre, ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[H$_1$] T. Hawkins, *The origins of the theory of group characters*, Archive Hist, Exact Sci. **7** (1971), 142-170.

[H$_2$]_____, *Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory*, Archive Hist. Exact Sci. **8** (1971), 243-287.

[H$_3$]_____, *New light on Frobenius' creation of the theory of group characters*, Archive Hist. Exact Sci. **12** (1974), 217-243.

[H$_4$]_____, *The creation of the theory of group characters*, Rice Univ. Stud. **64** (1978), 57-71.

[Hi] G. Higman, *Construction of simple groups from character tables*, Finite Simple Groups (M. B. Powell and G. Higman, eds.), Academic Press, London-NewYork, 1971.

[HJ] H.-J. Hoehnke and K. W. Johnson, *The 1-, 2-, and 3-characters determine a group*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **27** (1992), 243-245.

[Kn] A. Knapp, *Group representations and harmonic analysis from Euler to Langlands*, I, II, Notices Amer. Math. Soc. **43** (1996), 410-415, 537-549.

[La] T. Y. Lam, *Representation theory*, Emmy Noether: A Tribute to Her Life and Work (J. Brewer and M. K. Smith, eds.), Marcel-Dekker, NewYork-Basel, 1981, pp. 145-156.

[L$_1$] W. Ledermann, *The origin of group characters*, J. Bangladesh Math. Soc. **1** (1981), 35-43.

[L$_2$]_____, *Issai Schur and his school in Berlin*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 97-106.

[Ma] G. Mackey, *Harmonic analysis as exploitation of symmetry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **3** (1980), 543-698.

[M$_1$] T. Molien, *Über Systeme höherer complexer Zahlen*, Math. Ann. **41** (1893), 83-156.

[M$_2$]_____, *Eine Bemerkung zur Theorie der homogenen Substitutionsgruppen*, S'Ber. Naturforscher-Ges. Univ. Jurjeff (Dorpat) **11** (1897), 259-274.

[N] E. Noether, *Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*, Math. Zeit. **30** (1929), 641-692.

* * * * * *

• T. Y. Lam, "Representations of finite groups: a hundred years, part I", *Notices Amer. Math. Soc.*, (3) **45** (1998).

[ترجمهٔ بخش دوم این مقاله که اصل آن در شمارهٔ ۴ از جلد ۴۵ نوتیسز چاپ شده، در شمارهٔ آیندهٔ نشر ریاضی خواهد آمد.]

* ت. ی. لم، دانشگاه کالیفرنیا، آمریکا

lam@math.berkeley.edu.

صدق ریاضی*

پال بناسراف
ترجمهٔ ضیاء موحد

اگرچه عنوان این کنفرانس «صدق ریاضی» است، به مباحث وسیعتر دیگری هم خواهم پرداخت، مباحثی که صدق ریاضی مفهوم مرکزی آنهاست و خود مبتنی بر این هستند که چگونه می‌توان صدق را در ریاضیات به درستی توضیح داد. مهمترین این مباحث مبحث معرفت ریاضی است. حرف من این است که دو نوع علاقهٔ کاملاً مختلف وجود دارد که هر کدام جداگانه انگیزهٔ تعبیرهایی از ماهیت صدق ریاضی شده است: (۱) علاقه به داشتن یک نظریهٔ دلالت‌شناسی همگن که در آن، دلالت‌شناسی قضایای ریاضی هم‌سوی دلالت‌شناسی گزاره‌های دیگر زبان باشد[1] و (۲) علاقه به اینکه این تعبیر از صدق ریاضی با معرفت‌شناسی معقولی پیوند خورده باشد. فرضیهٔ کلّی من این است که کم یا بیش همهٔ تعبیرهایی را که از مفهوم صدق منطقی می‌کنند می‌توان در خدمت یکی از این دو علاقه به قیمت صرف‌نظر کردن *از* دیگری دانست. از آن جایی که این باور دیگر را هم دارم که هر تعبیر کافی و وافی باید هر دو علاقه را برآورد، به این نتیجه رسیده‌ام که هیچ ترکیبی از دلالت‌شناسی و معرفت‌شناسی نیست که مدعی تعبیری از صدق و معرفت هم در داخل هم در خارج ریاضیات باشد و مرا عمیقاً ناراضی نکند. زیرا، چنانکه اشاره خواهم کرد، تعبیرهایی از صدق که مقولهٔ ریاضی و غیرریاضی را به روشهای مشابهی بررسی می‌کند به قیمت نامفهوم گذاشتن این مسأله تمام می‌شود که چگونه اصلاً می‌توانیم معرفت ریاضی داشته باشیم؛ از سوی دیگر، تعبیرهایی که برای قضایای ریاضی شرایط صدقی تعیین می‌کنند که تحقق آنها را می‌توانیم به‌وضوح بدانیم، این کار را به قیمت ناتوانی در ربط دادن این شرایط صدق با هر نوع تحلیلی از جمله‌ها می‌کنند، هر نوع تحلیلی که نشان دهد چگونه شرایط تعیین شده شرایط صدق آن جمله‌هاست. آنچه را گفتم، اگر بخواهم منظور خود را روشن کنم، باید تا حدی به‌تفصیل بیان کنم و امیدوار نیستم که در این متن محدود بتوانم این کار را انجام دهم. اما تلاش خواهم کرد که مطلب را به اندازه‌ای روشن کنم که خود بتوانید داوری کنید که آیا احتمالاً در این ادعا چیزی هست یا نه.

۱. من اینجا به تسامح این افسانه را باور می‌کنم که برای «گزاره‌های دیگر زبان» دلالت‌شناسی *داریم*، یا به عبارت دقیقتر، به تسامح باور می‌کنم که طرفداران دیدگاههایی که متکی به این علاقه‌اند، اغلب چنین فکر می‌کنند که، دست‌کم برای بخشهایی از زبان که اهمیت فلسفی دارد، این دلالت‌شناسی را دارند.

من این نکته را بدیهی فرض می‌کنم که هر تعبیر فلسفی رضایت‌بخشی از صدق، ارجاع[1]، معنی، و معرفت باید همهٔ این موارد را در بربگیرد و برای همهٔ گزاره‌هایی که این مفاهیم در مورد آنها اعمال می‌شود، کارا باشد[2] تعبیری از معرفت که برای گزاره‌های تجربی معینی در مورد اشیای فیزیکی با ابعاد متوسط کارا به‌نظر رسد اما در مورد معرفت نظری‌تر کارایی نداشته باشد رضایت‌بخش نیست ــ نه تنها به این دلیل که تمامیت ندارد بلکه به این دلیل که چه‌بسا نادرست هم باشد، حتی به عنوان تعبیرِ چیزهایی که به‌نظر می‌رسد در مورد آنها کفایت کامل دارد. اگر جز این فکر کنیم، گذشته از پیامدهای دیگر، از وابستگیهای متقابل معرفت خود در زمینه‌های مختلف غفلت کرده‌ایم. در مورد تعبیرهای صدق و ارجاع نیز وضع به همین منوال است. نظریهٔ صدق برای زبانی که با آن حرف می‌زنیم، استدلال می‌کنیم، نظریه و ریاضیات می‌سازیم، باید به همان نحو برای جمله‌های مشابه شرایط صدق مشابه به دست دهد. شرایط صدقی که به دو جملهٔ حاوی سور نسبت می‌دهیم باید به نحو مشابه نقش سورها را نشان دهد. هرگونه انحراف از چنین نظریهٔ همگنی باید انگیزهٔ بسیار نیرومندی داشته باشد تا ارزش بررسی پیدا کند. برای مثال، چنین انحرافی می‌تواند در نظریه‌ای ظاهر شود که از نقش سورها در استدلال ریاضی تعبیری به دست دهد متفاوت از نقش آنها در استدلالهای عادی روزانه در مورد مداد، فیل و معاون رئیس جمهور.

1. reference

۲. درواقع در این مقاله حرفی برای گفتن در باب معنی ندارم و عقیده‌ام این است که این مفهوم به حق بدنام است اما من به این دلیل آن را طرد نمی‌کنم. بررسیهای اخیر و چشمگیرترین آنها، بررسی کریپکی، دلالت بر این دارد که آنچه زمان درازی در باب معنی، یعنی "sense" به اصطلاح فرگه، گفته‌اند ارتباطش با صدق خیلی کمتر از آن است که فرگه و اخلاف بلافصل او می‌پنداشتند. آنچه نزدیکترین پیوند را با صدق دارد، ارجاع است و به همین دلیل من توجه خود را محدود به ارجاع خواهم کرد. اگر این را مسلم فرض کنیم که ارجاع می‌تواند تغییر کند بدون آنکه تغییر متناظری در معنی صورت گیرد، و صدق مربوط به ارجاع است آنگاه بحث از معنی تا حد زیادی بیرون از مجموعهٔ مسائلی خواهد بود که در این مقاله به آن می‌پردازیم. این اشاره‌ها را نباید به جای استدلال گرفت؛ اینها توضیحی بیش نیستند.

داوید هیلبرت در مقالهٔ «در باب بینهایت»[1] بر چنین تعبیری تأکید می‌کند. این تعبیر را به اختصار در پایین آورده‌ام. پایینتر از آن دربارهٔ شرایطی که انتظار دارم یک نظریهٔ کلی رضایت‌بخش صدق برای زبان داشته باشد، بیشتر صحبت خواهم کرد و همچنین دربارهٔ اینکه چگونه چنین تعبیری باید با آنچه تعبیر معقولی از معرفت می‌دانم پیوند یابد. در اینجا کافی است بگویم که اگرچه اغلبْ، مناسب آن است که بحث خود را با زبان نظریه‌های صدق ریاضی عرضه کنم، باید همیشه به خاطر داشت که آنچه واقعاً محل بحث است دیدگاه جامع فلسفی ماست. در این مقاله استدلال خواهم کرد که این دیدگاه به‌*عنوان دیدگاهی جامع* رضایت‌بخش نیست ــ نه به این دلیل که از قرار معلوم تعبیر رضایت‌بخشی از صدق ریاضی نداریم یا ظاهراً تعبیر رضایت‌بخشی از معرفت ریاضی نداریم ــ بلکه بیشتر به این دلیل که تعبیری نداریم که این دو را به نحو رضایت‌بخشی با هم جمع کند. امید من این است که در نهایت فراهم آوردن چنین تعبیری ممکن باشد و امید بیشتر آنکه این مقاله با نمایانتر کردن موانعی که در این راه است به پیدایش چنین تعبیری کمک کند.

I. دو نوع تعبیر

به دو جملهٔ زیر توجه کنید:

(۱) دست‌کم سه شهر بزرگ قدیمیتر از نیویورک وجود دارد.
(۲) دست‌کم سه عدد تام بزرگتر از ۱۷ وجود دارد.

آیا این دو جمله شکل دستوری‌ـمنطقی یکسانی دارند؟ به بیان دقیقتر، آیا هر دو شکل زیر را دارند:

(۳) دست‌کم سه FG وجود دارد که نسبت R با a دارند*؟

در اینجا «دست‌کم سه ... وجود دارد» سور عددی است که می‌توان آن را به روش معمول منطقی به سورهای وجودی، متغیرها و این همانی تحلیل کرد**؛ «F» و «G» با دو محمول یک موضعی جایگزین می‌شوند، R با محمول دو موضعی، و a با نام عضوی از دامنهٔ تعبیر سورها. شرایط صدق (۱) و (۲) چیست؟ آیا تا حدودی متناظر با هم‌اند؟ در اینجا ابهام «بزرگ» و «قدیمیتر از» و ویژگیهای صفتهای متواطی و مشکک را در زبان که به موجب آن «شهر بزرگ» نه به معنای «بزرگ» و «شهر» بلکه بیشتر (اگرچه نه دقیقاً) به معنای بزرگ، در نسبت *با* شهر است در نظر نمی‌گیریم. از این پیچیدگیها که بگذریم آشکارا چنین به‌نظر می‌رسد که (۳) به دقت صورت منطقی (۱) را نشان می‌دهد و بنابراین (۱) صادق است اگر و تنها اگر مداول «a» («نیویورک») نسبت نشان داده شده با «R» («x قدیمیتر است از y») را با دست‌کم سه عضو (از دامنهٔ تعبیر سورها) که محمولهای جانشین «F» و «G» («بزرگ» و «شهر») را صدق‌پذیر کنند داشته باشد. به‌نظر من این آن چیزی است که یک شرط صدق مناسب باید به ما بگوید و فکر می‌کنم این حرف درستی باشد. بنابراین اگر (۱) صادق است بدین دلیل است که شهرهای معلومی در نسبت معلومی با یکدیگر قرار دارند.

اما دربارهٔ (۲) چه باید گفت، آیا می‌توان اینجا نیز (۳) را صورت منطقی (۲) و نشان‌دهندهٔ شرایط صدق *آن* دانست؟ این پرسش، پرسش مهملی به‌نظر می‌رسد که به‌وضوح پاسخ آن این است که «البته». اما در تاریخ این موضوع (فلسفهٔ ریاضیات) پاسخهای فراوان دیگری وجود دارد. بعضیها (مثل خود من در گذشته و حال[1]) که مایل نیستند، به علت پیامدهای آن، تعبیر دلالت‌شناختی «استاندارد» را با دیدگاه افلاطونی در باب ماهیت اعداد ترکیب کنند از اسم دانستن ارقام پرهیز کرده‌اند و در نتیجه شکل (۳) را شکل منطقی (۲) نمی‌دانند. داوید هیلبرت، (نگاه کنید به پانوشت ۱ در ستون سمت راست) راهی متفاوت اما به همین اندازه مخالف، در پیدا کردن تعبیری رضایت‌بخش از کاربرد مفهوم بینهایت در ریاضی، برگزیده است. به یک تعبیر، هیلبرت مجموعه‌ای از احکام و روشها (احکام و روشهای ریاضیات «شهودی») را به عنوان مجموعه‌ای که نیازی به توجیه بیشتر ندارند، برمی‌گزیند. فرض کنید که اینها همه به معنایی که دقیقاً مشخص نشده است «متناهیانه تحقیق‌پذیر» باشند. از نظر هیلبرت احکامی از حساب که این خاصیت را ندارند ــ نوع احکام معینی که شامل سورها هستند ــ ابزارهایی هستند برای رفتن از احکام «حقیقی» یا «متناهیانه تحقیق‌پذیر» به احکام «حقیقی» به همان معنایی که ابزارگرایان در علوم طبیعی نظریه‌ها را راهی می‌دانند برای رفتن از جمله‌های مشاهده‌ای به جمله‌های نظری. هیلبرت این احکام «نظری» ریاضی را «عناصر ایده‌آلی» می‌نامید، و معرفی آنها را به معرفی نقاط «واقع در بینهایت» در هندسهٔ تصویری تشبیه می‌کرد: این عناصر را برای ساده‌تر کردن و زیباتر و آراسته‌تر کردن نظریه معرفی می‌کنیم، نظریه دربارهٔ اشیایی که به آنها توجه واقعی داریم. اگر معرفی آنها به تناقضی نینجامد و آن فایده‌های دیگر را هم داشته باشند کار ما موجه است: این است دلیل جستجوی برهان سازگاری برای نظام کامل حساب مرتبهٔ اول.

اگر این تقریر مجمل از دیدگاه هیلبرت، درست باشد، نشان می‌دهد که هیلبرت همهٔ احکام سور را از نظر دلالت‌شناسی هم‌ارز یکدیگر نمی‌دانست. برای حساب، به گونه‌ای که هیلبرت آن را می‌دید، یافتن دلالت‌شناسی بسیار دشوار است، اما چه دشوار باشد چه نباشد، تعبیر این دلالت‌شناسی از سور در (۲) محققاً موافق تعبیر آن از سور در (۱) نخواهد بود. نظر هیلبرت که به اجمال آوردیم نفی کامل این است که (۲) براساس شکل منطقی (۳) ساخته شده باشد.

بنابر تعبیر دیگری از این گونه، شرایط صدق جمله‌های حساب بر مبنای استنتاج‌پذیری صوری آنها از مجموعهٔ معینی از اصول داده می‌شود. هنگامی که بخواهیم این دیدگاهها را در اسناد صدق و کذب به جمله‌های بستهٔ[2] حساب به‌کار بریم، قضایای ناتمامیت آنها را از بُن ویران می‌کند. این دیدگاهها را دست‌کم

---

۱. ترجمه و تجدید چاپ در
Paul Benacerraf and Hilary Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics*, 2nd edn. (Cambridge: Cambridge University Press, 1983), 183-201.

* «F» و «G» در (۱) دو محمول «شهر» و «بزرگ» و در (۲)، «عدد» و «کامل» و «R» در (۱) نسبت «قدیمیتر» و در (۲) نسبت «بزرگتر» و «a» در (۱) «نیویورک» و در (۲) «۱۷» در ترجمه به زبان صوری منطق است. ـم.

** تحلیل (۳) به صورت
$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(Fx\&Fy\&Fz\&Gx\&Gy\&Gz\&x \neq y\&y \neq z\&x \neq z\&Rxa\&Rya\&Rza)$
است. ـم.

۱. نگاه کنید به این مقالهٔ من:
"What Numbers Could Not Be", *Philosophical Review*, 74/1 (Jan. 1965): 47-73.

2. closed

تا حد سازگاری درونی نظام و با تسامحی در روش استنتاج (مثلاً با کاربرد قاعدهٔ ω در استنتاجهای مجاز) یا با چشم‌پوشی از تمامیت، می‌توان حفظ کرد. من چنین دیدگاههایی را، به دلیل اینکه اصطلاح بهتری ندارم و به دلیل اینکه تقریباً همیشه با جنبه‌های نحوشناختی[1] (ترکیبیاتی) جمله‌ها پیوند خورده‌اند، دیدگاههای «ترکیبیاتی» صدق ریاضی می‌نامم. اندیشهٔ اصلی دیدگاههای ترکیبیاتی این است که اسناد صدق و کذب به جمله‌های حساب بر مبنای مشخصات نحوشناختی (معمولاً برهانی) آنهاست. اغلب، صدق چنین تعریف می‌شود: استنتاج پذیریِ (صوری) از اصول معین (اغلب ادعای فروتنانه‌تری می‌کنند ــ ادعایِ صدق در S، که S نظام خاص مورد نظر است). در هر صورت، در چنین موردهایی، صدق، آشکارا برحسب ارجاع، دلالت یا صدق‌پذیری[2] تعریف نمی‌شود و از محمول «صدق» تعریفی نحوشناختی به دست می‌دهند.

همچنین بعضی دیدگاههایِ مربوط به صدق در حساب که بر مبنای آنها ادعا کرده‌اند اصول پئانو در باب مفهوم عدد تحلیلی است، به تعبیر من، «ترکیبیاتی» است. تعبیرهای مبتنی بر قرارداد[3] هم، چنین هستند زیرا آنچه آنها را قراردادی می‌سازد تقابل میان آنها و تقریر «رئالیستی» است که (۲) را بر مبنای (۳) همانند (۱) می‌داند.

و بالاخره به تمایزی دیگر می‌رسیم. به صرف اینکه دیدگاهی گزاره‌های ریاضی را به گزاره‌هایی دربارهٔ مسائل ترکیبیاتی، چه به نحو خودارجاع، چه جز آن، تعبیر کند، ترکیبیاتی شمرده نمی‌شود. زیرا چنین دیدگاهی ممکن است گزاره‌های ریاضی را، به روش «استاندارد»، برحسب نامها و سورهایی که دارند و برحسب صفتهایی که به عضوهای دامنهٔ تعبیرشان نسبت می‌دهند، تحلیل کند ــ یعنی مفهوم زیربنایی صدق همان مفهوم تارسکی باشد. تفاوت در این است که اگرچه طرفداران آن در تحلیل خود از زبان ریاضی، رئالیست هستند اما از افلاطونیان در این مسأله جدا می‌شوند که عالَم ریاضی را منحصراً شامل اشیاء ریاضی نامتعارف می‌دانند یعنی ریاضیات برای آنان محدود به فراریاضیات و از این نظر محدود به نحو است.

ارزیابی خود را از محاسن نسبی این رهیافتهای گوناگون به صدق جمله‌هایی چون (۲) به بخشهای بعد موکول می‌کنم. در اینجا تنها می‌خواهم تفاوت میان دیدگاههایی را که نحوشناسی روشنی (دلالت‌شناسی روشنی) برای احکام ریاضی دارند با دیدگاههایی روشن کنم که، با کنار نهادن چنین نحوشناسی و دلالت‌شناسی مشهودی، می‌خواهند شرایط صدق را بیان کنند (یا توزیع صدق و کذب موجود را مشخص کنند و تعبیری از آن به دست دهند) آن هم بر مبنای ملاحظاتی که آشکارا نه نحوشناختی است نه دلالت‌شناختی. در نهایت استدلال خواهم کرد که هر نوع تقریری محاسن و معایب خود را دارد: هر یک به مؤلفهٔ مهمی از تقریر فلسفی جامع منسجمی از صدق و معرفت می‌پردازد.

اما این مؤلفه‌ها چیستند و چگونه با یکدیگر مرتبط‌اند؟

II. دو شرط

الف. نخستین مؤلفهٔ چنین دیدگاه جامعی با مفهوم صدق ارتباط مستقیمتری دارد. برای منظور فعلی ما می‌توان آن را این شرط دانست که نظریهٔ صدق جامعی وجود داشته باشد که بر مبنای آن بتوان تأیید کرد که تعبیر آن از صدق ریاضی درواقع تعبیری از صدق ریاضی است. این تعبیر باید مستلزم

1. syntatic 2. satisfaction 3. convention

شرایط صدقی برای قضایای ریاضی باشد که به‌وضوح شرایط صدق آنها باشد (نه اینکه، برای مثال، صرفاً شرایط قضیه بودن آنها در یک نظام صوری باشد). البته این بدان معنی نیست که قضیه‌ای از نظام صوری بودن نمی‌تواند شرط صدقی برای جمله‌ای یا مجموعه‌ای از جمله‌ها باشد. بلکه می‌خواهیم نظریه‌ای که قضیه بودن را به عنوان شرط صدق عرضه می‌کند *رابطهٔ میان صدق و قضیه بودن را هم توضیح دهد*.

بیانِ دیگر شرط اول ما این است که هر نظریه‌ای در باب صدق ریاضی با نظریه‌ای عمومی از صدق ــ نظریه‌ای از نظریه‌های صدق ــ توافق داشته باشد، نظریه‌ای که تأیید کند که جمله‌هایی که آن تعبیر «صادق» می‌داند درواقع هم صادق باشند. به‌نظر من این کار تنها می‌تواند براساس نظریه‌ای کلی برای، حداقل، زبان به عنوان یک کل انجام شود (فرض من این است که به روشی مناسب پارادوکس‌ها را کنار می‌گذاریم). شاید عملی بودن این شرط در مورد فعلی به این درخواست بینجامد که ابزار دلالت‌شناسی ریاضیات بخشی از زبان طبیعی مورد استفاده باشد و بنابراین هر تعبیر *دلالت‌شناختی* که می‌خواهیم از اسمها یا به‌طورکلی از اسمهای خاص، محمولها و سورها در زبان مادری بدهیم مشتمل بر آن بخشهایی از زبان مادری باشد که آن را زبان ریاضی[1] می‌شناسیم.

پیشنهاد من این است که اگر می‌خواهیم این شرط را برآوریم نباید به تعبیری رضایت دهیم که نتواند (۱) و (۲) را به روش مشابه با الگوی (۲) تطبیق دهد. ممکن است *تفاوتهایی* وجود داشته باشد اما این تفاوتها به گمان من در سطح تحلیل مدلول اسمهای خاص و محمولها خود را نشان می‌دهند. فرض من این است که چنین تعبیری تنها تعبیر تارسکی است و ویژگی ذاتی آن تعریف صدق است برحسب ارجاع (یا صدق‌پذیری) و بر مبنای نوع خاصی از تحلیل نحوشناختی-دلالت‌شناختیِ زبان و بنابراین هر تحلیل مقبولی از صدق ریاضی باید تحلیل از مفهومی باشد که دست‌کم به معنای تارسکی مفهوم صدق باشد. به اعتقاد من، با امعان نظر بیشتر، این شرط با همهٔ تعبیرهایی که «ترکیبیاتی» نامیدم، ناسازگار است. از طرف دیگر تعبیری که (۲) را با (۱) و (۳) وفق می‌دهد به‌وضوح این شرط را برمی‌آورد، همچنان که شکلهای دیگر آن تعبیر را.

ب. پیش‌فرض شرط دوم من برای دیدگاه جامع این است که همهٔ ما معرفت ریاضی داریم و این معرفت به دلیل ریاضی بودن چیزی از معرفت کم ندارد. اما از آن جایی که معرفت ما معرفت به گزاره‌های صادق است، برای اینکه تعبیری از صدق ریاضی پذیرفتنی باشد باید با امکانِ داشتن معرفت ریاضی سازگار باشد: شرایط صدق قضایای ریاضی نباید چنان باشد که اطلاع ما را از برآورده‌شدن آن شرایط ناممکن کند. این بدان معنی نیست که صدقهایی ناشناختنی نمی‌توانند وجود داشته باشند بلکه بدین معنی است که همهٔ صدقها هم نمی‌توانند ناشناختنی باشند، زیرا بعضی از آنها را می‌شناسیم. بنابراین کمترین شرط این است که تعبیری رضایت‌بخش از صدق ریاضی باید با امکان دانستنی بودن بعضی از آنها سازگار باشد. به بیان قویتر، مفهوم صدق ریاضی، بدان گونه که توضیح داده شد، باید در تقریر جامعی از معرفت چنان ادغام شود که نشان دهد چگونه معرفتی را که از ریاضی داریم، داریم. در ریاضیات هر دلالت‌شناسی پذیرفتنی باید با یک معرفت‌شناسی پذیرفتنی هماهنگ باشد. برای مثال اگر می‌دانم که کلیولند میان نیویورک و شیکاگو واقع است بدین دلیل است که نسبتی میان شرایط صدق آن جمله و باور فعلی و

1. mathematese

«ذهنی» من وجود دارد (تعبیر ما از صدق و معرفت هرچه باشد، باید به این نحو در ارتباط با هم باشند). در ریاضیات هم به همین نحو باید امکان آن وجود داشته باشد که آنچه را برای صدق p لازم است با اعتقاد من که p، ارتباط دهیم. اگر چه این بسیار مبهم است، فکر می‌کنم می‌توان دید که چگونه شرط دوم بر تعبیرهایی که شرط اول را برمی‌آورند خط بطلان می‌کشد و به بسیاری از تعبیرهای دیگر که چنین نیستند میدان می‌دهد. زیرا هر تعبیر «استاندارد» متعارف (دست‌کم در مورد نظریهٔ اعداد و نظریهٔ مجموعه‌ها) شرایط صدق را برحسب شرایط صدق اشیایی به دست می‌دهد که ماهیت آنها، آنها را فراتر از دسترس ابزارهایی (برای مثال، ادراک حسی) قرار می‌دهد که برای ما شناخته شده‌ترند. از سوی دیگر تعبیرهای «ترکیبیاتی» معمولاً خاسته از حساسیت به همین واقعیت است و از این رو تقریباً همیشه مولود ملاحظات معرفت‌شناختی است. محاسن این تعبیرها در این است که تعبیری که از قضایای ریاضی به دست می‌دهند مبتنی بر روشهایی است که در توجیه صدق در ریاضی به‌کار می‌بریم: یعنی، برهان. تعجب‌آور نیست که به *اعتبار* چنین تعبیرهایی از صدق ریاضی، دیگر در مورد اینکه چگونه می‌توانیم معرفت ریاضی پیدا کنیم رمز و رازی وجود ندارد. در اینجا آنچه نیاز داریم تنها تقریری است از توانایی خود در یافتن برهانهای صوری و بررسی آنها[1]. در هر صورت اگر این بادکنک را در این نقطه فشار بدهیم در طرف صدق متورم می‌شود یعنی، هرچه مفهوم برهان را دقیقتر و محکمتر کنیم تعریف برهان با خواص ترکیبیاتی (به‌جای دلالت‌شناختی) پیوند نزدیکتری می‌یابد و چنین به‌نظر می‌رسد که ارتباط دادنِ آن با صدقِ آنچه از این راه «اثبات شده»، دشوارتر می‌شود.

بنابراین دو شرط داریم که هر یک جداگانه ضرری نمی‌رساند. در این مقاله، در مجموع از هر دو دفاع بیشتری خواهم کرد و با استدلال قویتری نشان خواهم داد که این دو با هم تقریباً هر تعبیری را که تاکنون از صدق ریاضی داده شده است، طرد می‌کنند. همچنین دو رهیافت اساسی به صدق ریاضی را که در بالا بدان اشاره شد به‌ترتیب بررسی خواهم کرد و در پرتو دو اصل اساسی که می‌خواهم پیشنهاد کنم مزایای هر یک را نسبت به دیگری خواهم سنجید. امیدوارم که این دو اصل خود در جریان این بررسی تا حدی روشن و تأیید شوند.

III. دیدگاه استاندارد

تعبیری «افلاطونی» را که (۲) را به شکل (۳) تحلیل می‌کند «دیدگاه استاندارد» می‌نامم. محاسن این دیدگاه زیاد است و ارزش آن را دارد که پیش از پرداختن به نقایص آن، محاسنش را ذکر کنیم.

همان‌گونه که گفتیم این تقریر شکل منطقی گزاره‌های ریاضی را با شکل تجربی مشابه آنها یکسان می‌گیرد یعنی گزاره‌های ریاضی و تجربی به شکلی یکسان شامل محمولها، اسمهای خاص، سورها و غیره هستند.

اما در مورد جمله‌هایی که از اسمها، محمولها و سورها ساخته نشده‌اند (یا به درستی تحلیل‌پذیر به آنها نباشند) چه باید گفت؟ به بیان نزدیکتر با موضوع، در مورد جمله‌هایی که به آن نوع زبانی تعلق ندارند که تارسکی برای آن صدق را تعریف کرده است چه باید گفت؟ به‌نظر من برای چنین زبانهایی (اگر وجود داشته باشند) به همان نوع تعبیری از صدق نیاز داریم که تارسکی برای زبانهای «ارجاعی» آورده است. فرض من این است که شرایط صدق برای زبانی (برای مثال، زبان انگلیسی [یا فارسی]) که زبان ریاضی بدان متعلق است باید به روش تارسکی ساخته و پرداخته شود. بنابراین تا حدی، این پرسش بخش قبل را که: شرایط صدق (۲) را چگونه می‌توان بیان کرد، می‌توان چنین تعبیر کرد که آیا بخشی از زبان طبیعی که در آن ریاضیات انجام می‌شود باید همان‌گونه تحلیل شود که، به اعتقاد من، مناسب بسیاری از بخشهای دیگر زبان است؟ اگر چنین است، تردیدهای من (که خلاصه‌ای از آن را در بخش بعد خواهم آورد) دربارهٔ اینکه چگونه می‌توان معرفت ریاضی را در یک معرفت‌شناسی کلی جای داد به‌وضوح موجه خواهد بود ــ اگرچه با ترمیم مناسبی در نظریه شاید بتوان از آنها رهایی یافت. از طرف دیگر، اگر ریاضیات به روش ارجاعی تحلیل شود آنگاه نه تنها نیاز به تعبیری از صدق (یعنی دلالت‌شناسی) برای این نوع زبان تازه داریم بلکه به *نظریهٔ تازه‌ای از نظریه‌های صدق* هم نیاز داریم که صدق در زبانهای ارجاعی (تسویری) را به صدق در این زبانهای تازه (که به روش تازه‌ای تحلیل می‌شوند) ارتباط دهد. اگر این تعبیر تازه را هم داشته باشیم باز هم مسألهٔ تعبیر معرفت ریاضی حل نشده باقی می‌ماند، اما احتمالاً مسألهٔ آسانتری خواهد بود زیرا وضع دلالت‌شناختی تازهٔ ریاضیات را در اغلب موارد ملاحظات معرفت‌شناختی پیش آورده است. در هر صورت در این مقاله در مورد این شق دیگر، بحث جدی نخواهم کرد، زیرا فکر نمی‌کنم هیچ کس تاکنون آن را عملاً انتخاب کرده باشد. زیرا این انتخاب علی‌رغم مقبولیت ظاهری و اولیهٔ آن به‌وضوح به معنای رد تعبیر «استاندارد» از معرفت ریاضی و نشاندن دلالت‌شناسی دیگری به جای آن است[1]. نظریه پردازان «ترکیبیات» که با آنان بحث کرده‌ام یا به آنان ارجاع داده‌ام هم خدا را می‌خواهند و هم خرما را: اینان ندانسته‌اند که شرایط صدقی که تعبیرشان برای زبان ریاضی فراهم می‌آورد با دلالت‌شناسی ارجاعی که مناسب آن زبان می‌دانند پیوند نیافته است. شاید نزدیکترین نامزد استثنایی دیدگاه هیلبرت باشد، دیدگاهی که خلاصه‌ای از آن را در آغاز این مقاله آورده‌ام. اما تعقیب بیشتر این دیدگاه ما را از هدف خودِ در اینجا دور می‌کند. بنابراین به ستایش خود از «دیدگاه استاندارد» بازمی‌گردیم.

یکی از مزایای اساسی این دیدگاه این است که شرایط صدق نظریه‌های ریاضی منفردی که چنین تعبیر شده‌اند، همان جمله‌های بازگشتی را دارند که خویشاوندان تجربیِ نه چندان بلندمرتبهٔ آنها. به عبارت دیگر، همهٔ اینها را می‌توان بخشهایی از زبانی واحد دانست که برای آن، صرف نظر از موضوع فرعی مورد مطالعه، تعبیر واحدی از سورها به دست می‌دهیم. نظامهای ریاضی و تجربی به اعتبار شکل منطقی از هم متمایز نمی‌شوند. اهمیت این مزیت را پیش از این متذکر شدم: یعنی آن نظریهٔ منطقی-دستوری که در زمینه‌های ساده‌تر و مهارپذیرتر به‌کار می‌بریم در اینجا بیشتر نیاز ما را برمی‌آورد. برای ما یک تعبیر یکنواخت کافی است و نیازی به اختراع تعبیر دیگری برای ریاضیات نداریم. این تعبیر برای هر نظریهٔ دستوری که با یک دلالت‌شناسی مناسب برای صدق گره خورده باشد، صادق است. طرفداری

۱. البته انجام درست این کار وظیفه‌ای است سنگین. اما بار سنگین توضیح دلالت‌شناسی نظام و چگونگی معرفت بدان را از دوش ما برمی‌دارد و در عوض بر توانایی ما در تعیین خواص اشیای صوری که به شکل نحوشناختی خاصی تعریف شده‌اند، تکیه می‌کند.

۱. گاهی فکر می‌کنم این یکی از کارهایی است که هیلری پاتنم در مقالهٔ بحث‌انگیز خود «ریاضیات بدون مبانی»

'Mathematics Without Foundations', *Journal of Philosophy*, 64/1 (19 Jan. 1976):5-22.

می‌خواهد انجام دهد.

من از نظریه‌ای که نظریهٔ تارسکی می‌نامم صرفاً خاسته از این واقعیت است که تنها تعبیر کلی منظمی که از صدق داریم تعبیری است که تارسکی به ما داده است. یکی از پیامدهای صرفه‌جویانهٔ دیدگاه استاندارد این است که در آن همهٔ نسبتهای منطقی حکم یکسانی دارند و با تغییر موضوع تغییر نمی‌کنند. درواقع به ما کمک می‌کنند که مفهوم «موضوع» را تعریف کنیم. قاعده‌های استنتاج یکسانی می‌توان به‌کار برد و کاربرد آنها را همان نظریه‌ای توجیه می‌کند که تعبیر عادی ما از استنتاج را توجیه می‌کند و ما را از به‌کار بردن ملاک دوگانه بی‌نیاز می‌سازد. اگر دیدگاه استاندارد را طرد کنیم استنتاجهای ریاضی نیاز به توجیه تازه و خاصی پیدا خواهند کرد. اما در این دیدگاه کاربردهای استاندارد استنتاج با سورها با نوعی برهان سازگاری توجیه می‌شوند. صورت‌بندی نظریه‌ها در منطق مرتبهٔ اول برای توجیهِ خود نیاز به این تضمین (که قضیهٔ تمامیت فراهم می‌آورد) دارند که همهٔ نتایج منطقی اصول به شکل قضیه از آنها استخراج شوند. تعبیر استاندارد این تضمین را می‌دهد. اکنون پاسخهای روشن ما کارا به‌نظر می‌رسند. طرد دیدگاه استاندارد یعنی طرد این پاسخها و به دنبال پاسخهای تازه‌ای گشتن.

تا اینجا از مزایای این تعبیر سخن گفتم و اما معایب آن.

چنانکه پیش از این ذکر شد، عیب اساسی دیدگاه استاندارد این است که به‌نظر می‌رسد این شرط را که تعبیر جامع ما از صدق ریاضی باید با تعبیر جامع ما از معرفت پیوند داشته باشد نقض می‌کند. کاملاً واضح است که، برای برملا کردن این عیب، باید طرحی از یک دلالت‌شناسی که دست‌کم تا حدی آن را درست می‌دانم، به دست دهم، طرحی که براساس آن صدقهای ریاضی، در تعبیر استاندارد، مستلزم برساختن معرفت نباشند. این طرح نیاز به گشت‌وگذاری در مباحث عمومی معرفت‌شناسی دارد. این کار را برای وقت دیگر می‌گذارم. و در اینجا به ذکر چکیدهٔ کوتاهی از جنبه‌های مهم دیدگاهی اکتفا می‌کنم که بیشتر به مسألهٔ ما مربوط می‌شود.

IV. تعبیر علّی معرفت

من در معرفت تعبیر علّی[1] را می‌پسندم. بنا بر این تعبیر برای اینکه فرد X بداند جملهٔ S صادق است باید نسبتی علّی میان X و مصادیق نامها، محمولها و سورهای S وجود داشته باشد. از این گذشته، در ارجاع هم به نظریهٔ علّی اعتقاد دارم و از این‌رو صدق S با اینکه از سر علم S را تصدیق کنیم ارتباط علی‌مضاعفی پیدا می‌کند. امید است آنچه پس از این می‌آید ابهام این حکم را برطرف کند.

برای اینکه هرمیونه بداند شیء سرخی که در دست دارد سیب است، لازم است (یا دست‌کم نیاز به آن دارد) که در وضعِ (احتمالاً روانی) معینی باشد[2].

همچنین اوضاع و احوال دیگر هم باید مساعد باشند ــ دست‌کم تا حدی که اجازه دهند شیئی که در دست گرفته است سیب باشد. افزون بر این ــ و این بخشی است که بر آن تکیه می‌کنم ــ در شرایط عادی این امر که شیئی که هرمیونه در دست دارد سیب است باید در توضیح علّی از باور او که شیء سرخی که در دست دارد سیب است، به طریق مناسبی دخیل باشد. اما «طریق مناسب» چیست؟ در این باره توضیحی نخواهم داد. بعضی از نویسندگان آثاری منتشر کرده‌اند که به‌نظر می‌رسد در پی این توضیح باشند[1]، و علی‌رغم تفاوتهایی که دارند ظاهراً در یک مسألهٔ شهودی همه اتفاق نظر دارند، مسأله‌ای که فکر می‌کنم درست باشد، هرچند مشخص کردن آن بسیار دشوار است.

از آنچه هم‌اکنون خواهم گفت می‌توان فهمید که چنین دیدگاهی باید درست و زیربنای ادراک ما از معرفت باشد. فرض کنید ادعا کرده‌اند که X می‌داند که p.* اما ما فکر می‌کنیم که X نمی‌تواند بداند که p. اکنون چه دلیلی می‌توانیم برای نظر خود ارائه دهیم؟ اگر قبول داشته باشیم که X توانایی استنتاجهای عادی را دارد و p هم درواقع صادق باشد و غیره و غیره، آنگاه باید چنین استدلال کنیم که X نمی‌توانسته است به شواهد و دلایل مناسب دسترسی داشته باشد یعنی مُخبر ضعیف چهاربعدی زمانی-مکانی X ارتباط علّی لازم را با زمینه‌های صدق جملهٔ p برای X برقرار نکرده است و X شواهد کافی برای دفاع از استنتاج خود (اگر چنین استنتاجی مناسب باشد) نداشته است. جملهٔ p شرایطی بر چگونگی وضع جهان تحمیل می‌کند. معرفت ما از جهان به اضافهٔ اطلاع ما از شرایطی که p معین می‌کند یعنی شرایط صدق p، اغلب به ما خواهند گفت که فرد معینی نمی‌توانسته است به شواهد کافی برای معرفت به p دسترسی داشته باشد و بنابراین ادعای معرفت او را نفی می‌کنیم.

در حال حاضر، این تعبیر از معرفت، در مورد اشیایی با اندازه‌های متوسط، تعبیری است در مسیر درست. از نظر علّی این تعبیر متضمن ارجاع مستقیم به امور معلوم است و از این طریق متضمن ارجاع به خود اشیاء. از این گذشته چنین معرفتی (به خانه، درخت، قارچ، ظرف نان) ناظر به واضحترین موارد است و از نظر توضیح، آسانترین موارد.

سایر موارد معرفت را می‌توان براساس استنتاجهایی که مبتنی بر چنین مواردی هستند توضیح داد، اگرچه باید بستگیهای درونی متقابلی میان آنها وجود داشته باشد. این بدان معنی است که شامل معرفت ما به قانونهای کلی و نظریه‌ها و از طریق آنها شامل معرفت ما به آینده و بسیاری از مسائل گذشته باشد. این تعبیر نزدیک به راههایی است که تجربه‌گرایان پیشنهاد کرده‌اند اما با اصلاح و ترمیم حساسی که شرایط علی مذکور در بالا به مسأله افزوده است. تعبیرهای جدید، این اصلاح را به حساب نمی‌آورند زیرا می‌خواهند تمایز دقیقی میان «کشف» و «توجیه» بگذارند.

خلاصه آنکه جملهٔ p را همراه با معرفتهای دیگر خود به‌کار می‌بریم تا دامنهٔ شواهد مربوط و ممکن را مشخص کنیم. ما آنچه از X (دانندهٔ مفروض)

1. causal account

۲. می‌خواهم، در صورت امکان، از هرگونه موضع‌گیری در مجموعهٔ مباحث فلسفهٔ ذهن یا روانشناسی در باب ماهیت حالات روانی پرهیز کنم. در این مورد هر نظری که بنا بر آن هرمیونه با نگاه کردن به یک گربهٔ حقیقی روی یک فرش حقیقی بتواند بداند که گربه روی فرش است برای من کافی است. اگر نگاه کردن به گربه‌ای بر روی فرش هرمیونه را در حالتی قرار دهد که مایل باشید آن حالت را حالتی فیزیکی یا روانی یا حتی فیزیولوژیک بنامید، من هیچ ایرادی ندارم به شرطی که چنین حالتی، اگر حالت معرفت هرمیونه باشد، از نظر علّی به نحو مناسبی مرتبط با بودن گربه روی فرش باشد، هنگامی که هرمیونه نگاه می‌کند. اگر چنین حالتی وجود نداشته باشد بدا به حال دیدگاه من.

۱. بعضی از این آثار عبارت‌اند از:

Gilbert H. Harman, *Thought* (Princeton, Princeton University Press, 1973); Alvin I. Goldman, 'A Causal Theory of Knowing', *Journal of Philosophy*, 64/12 (22 June 1967): 357-72; Brian Skyrms, 'The Explication of "X knows that p" ', *Journal of Philosophy*, 64/12 (22 June 1967):373-89.

* «p» جمله‌ای است خبری مانند «این درخت سرو است» و «X» نام فردی مانند حسن است. بنابراین «X می‌داند که p»، در این مورد، یعنی: حسن می‌داند که این درخت سرو است. ـ م.

می‌دانیم به‌کار می‌بریم تا مشخص کنیم آیا نوع مناسبی از کنش و واکنش می‌توانسته است وجود داشته باشد یا نه، آیا باور فعلی X به جملهٔ p به نحو علّی و به طریق مناسب با امر واقع که ناشی از صدق p است ارتباط دارد یا نه ــ آیا شواهد او مأخوذ از دامنه‌ای که p مشخص کرده، هست یا نه. اگر نه، X نمی‌توانسته است بداند که p. ارتباط میان امری که اگر p صادق باشد، واقع می‌شود با علل باور X به p می‌تواند تغییرگسترده‌ای پیداکند. اما همیشه ارتباطی هست و این ارتباط، زمینه‌های باور X به موضوع و محتوای p را گزارش می‌کند.

باید بتوان ارتباط مناسبی میان شرایط صدق p (که با تعریف مناسبی از صدق برای زبانی که p جمله‌ای از آن است داده شده) و زمینه‌های معرفت ما به p برقرار کرد ــ دست‌کم در مورد جمله‌هایی که اطلاع از صدق آنها ذاتی ما نیست بلکه باید برای رسیدن به آن *تلاش کنیم*. اگر جز این باشد ارتباطی میان *داشتن آن زمینه‌ها* و *باور به اینکه جمله‌ای صادق است* برقرار نمی‌شود. داشتن آن زمینه‌ها را نمی‌توان در توضیح معرفت به p دخالت داد. نمی‌توان رابطهٔ میان p و توجیه باور به p بر مبنای آن زمینه‌ها برقرار کرد. اما برای معرفتی که به درستی نوعی از باور صادق موجه شمرده می‌شود این ارتباط باید برقرار شود. (البته نیازی نیست که هر معرفتی باور صادق موجه باشد تا معرفت، درست محسوب شود.)

با این مقدمه اکنون دیگر تعجب‌آور نیست اگر بگوییم جمع میان *این* دیدگاه در باب معرفت و دیدگاه استاندارد در باب صدق ریاضی، فهم امکان معرفت ریاضی را دشوار می‌کند. برای مثال، اگر اعداد همان ذواتی باشند که معمولاً فرض می‌شوند آنگاه نمی‌توان ارتباطی میان شرایط صدق قضایای نظریهٔ اعداد و شواهد مرتبط با افرادی که تصور می‌کنیم معرفت ریاضی دارند، برقرار کرد.[1] دیگر توجیه اینکه چگونه به قضایای نظریهٔ اعداد معرفت پیدا می‌کنیم ناممکن خواهد شد. و این شرط دوم برای توجیه صدق ریاضی برآورده نمی‌شود زیرا هیچ توجیهی از این امر نداریم که چگونه شرایط صدق قضایای ریاضی برآورده می‌شوند. در اینجا این پاسخ واضح هم که بعضی از قضایا صادق‌اند اگر و تنها اگر از اصول معینی به کمک قاعده استخراج شده باشند، کمکی نمی‌کند. زیرا، آنچه مسلم است می‌توانیم تأکید کنیم که *آن* شرایط برآورده شده‌اند. اما در این حالت که صدق مستقیماً به روش استاندارد تعریف شده است آنچه کم داریم رابطهٔ صدق و برهان است. خلاصه آنکه اگرچه ممکن است شرط صدق بعضی قضایای نظریهٔ اعداد این باشد که از اصول معلومی با قواعد معلومی استنتاج شده باشند اما اگر بنا بر این باشد که این شرط پیوندی میان صدق و معرفت برقرار کند و اگر به کمک برهانهاست که ما به صدقهای ریاضی علم پیدا می‌کنیم آنگاه این شرط صدق باید خود از تعبیری از صدق نتیجه شده باشد.

البته اگر در نظریهٔ مجموعه‌ها تعبیری از حساب داده شود، نحوشناسی و دلالت‌شناسی *حساب* را می‌توان چنان تقریر کرد که شرایطی را که وضع کرده‌ایم در ظاهر برآورند. اما این به‌وضوح به دور باطل می‌انجامد زیرا در مورد نظریهٔ مجموعه‌ها همان پرسشهایی را باید مطرح کرد که برحسب آنها پاسخها تدوین می‌شوند.

۱. برای بیان شکی معقول در مورد این نکته و نکته‌های مربوط دیگر رجوع کنید به:
Mark Steiner, 'Platonism and the Causal Theory of Knowledge', *Journal of Philosophy*, 70/3 (8 Feb. 1973): 57-66.

V. دو مثال

از صدق ریاضی و معرفت ریاضی تعبیرهای فراوانی کرده‌اند. نظریاتی که تاکنون از آنها دفاع کردم می‌خواهیم در مورد همهٔ این تعبیرها به‌کار رود. اما به جای پرداختن به همهٔ آنها، بقیهٔ این مقاله را به بررسی دو دیدگاه مهم اختصاص خواهم داد: یکی دیدگاه «استاندارد» و دیگری دیدگاه «ترکیبیاتی». نخست از تعبیر استاندارد به بیان کورت گودل آغاز می‌کنم که یکی از صریحترین و روشنترین بیانهاست.

گودل خیلی خوب می‌داند که در تعبیر رئالیستی (یعنی استاندارد) از صدق ریاضی، توضیح چگونگی معرفت ما به اصول بنیادی باید ارتباط مناسبی با چگونگی تعبیر ما از ابزار ارجاعی نظریه داشته باشد. از این رو، در بحث از اینکه چگونه می‌توان مسألهٔ پیوستار را حل کرد، و پس از اینکه دانستیم نمی‌توان آن را از اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها استنتاج کرد، تصویر زیر را ترسیم می‌کند[1]:

> ... واضح است که شیئهای نظریهٔ مجموعه‌های ترامتناهی به جهان فیزیکی تعلق ندارند و حتی پیوند غیر مستقیم آنها با تجربهٔ فیزیکی بسیار ضعیف است.
>
> ... اما علی‌رغم دور بودن آنها از تجربهٔ حسی، از شیئهای نظریهٔ مجموعه‌ها نیز چیزی شبیه ادراک داریم و این از این واقعیت معلوم می‌شود که اصولْ خود را به عنوان [گزاره‌های] صادق بر ما تحمیل می‌کنند. من هیچ دلیلی نمی‌بینم که به این نوع ادراک، یعنی شهود ریاضی، اطمینان کمتری داشته باشیم تا به ادراک حسی که به ساختن نظریه‌های فیزیکی و امید بستن به اینکه ادراکهای حسی آینده با آنها سازگار درآیند، ترغیبمان می‌کند، و افزون بر این، ترغیبمان می‌کند که باورکنیم پرسشی که اکنون تصمیم‌ناپذیر است بی‌معنی نیست و چه‌بسا درآینده تصمیمی در مورد آن گرفته شود. تناقضهای نظریهٔ مجموعه‌ها بعید است که برای ریاضیات بیشتر از آن گرفتاری ایجاد کنند که فریبکاریهای حواس برای فیزیک ایجاد می‌کنند. کاملاً ممکن است شهودهای ریاضی تازه به تصمیم‌گیری دربارهٔ مسأله‌هایی مانند فرضیهٔ پیوستار کانتور بینجامد.

این تصویر مرا هم دلگرم می‌کند هم نگران می‌سازد. نگران از این نظر که بدون توجیه این امر که چگونه اصول «خود را به عنوان [گزاره‌های] صادق به ما تحمیل می‌کنند»، مقایسه آنها با ادراک حسی و علوم فیزیکی محتوای چندانی نخواهد داشت. زیرا آنچه در اینجا کم داریم دقیقاً همان چیزی است که اصل دوم من طلب می‌کند. یعنی تقریری از پیوند میان قوای معرفتی ما و اشیایی که می‌شناسیم. در علوم فیزیکی دست‌کم نقطهٔ شروع چنین تقریری، را داریم. در اینجا تنها آن باورهایی را معرفت می‌دانیم که بتوانیم آنها را به شکل مناسبی با قوای معرفتی خود ارتباط دهیم. ادراک ما از علم پابه‌پای ادراک ما از خود به عنوان عالِم پیش می‌رود. البته میان این دو تشابهی *ظاهری* وجود دارد زیرا به قول گودل، صحت اصول را با نتایج

1. Kurt Gödel, 'What Is Cantor's Continuum Problem?', revised version in Benacerraf and Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics*, 2nd edn., 483-4.

[ترجمهٔ فارسی: کورت گودل، «مسألهٔ پیوستار کانتور چیست؟»، ترجمهٔ ضیاء موحد، نشر ریاضی، سال ۲، شمارهٔ ۱ (فروردین ۱۳۶۸)، صص ۴۶ـ۵۴.]

اصول که به‌نظر می‌رسد «ادراک حسی» مستقیمتری (شهود روشنتری) از آنها داریم، «محقق» می‌کنیم اما از اینکه چگونه می‌توانیم حتی به این نتایج روشنتر علم پیدا کنیم، حرفی زده نمی‌شود. برای مثال نتایج «تحقیق‌پذیر» اصول بینهایت‌های بالاتر، گزاره‌هایی (تصمیم‌ناپذیر بدون این اصول) از نظریهٔ اعدادند که خود با محاسبه، تا حد هر عدد صحیح مفروضی، تحقیق‌پذیرند. اما برای اینکه این داستان سرانجامی داشته باشد باید به ما بگوید، *اگر این محاسبات همان معنایی را دارند که تعبیر استاندارد می‌خواهد*، چگونه به احکام محاسبات این حساب معرفت پیدا می‌کنیم. *این* چیزی است که نمی‌گوید. بنابراین، تشابه، تشابهی است ظاهری.

این بود جنبه‌هایی از این دیدگاه که مرا نگران می‌سازد. شاید جنبهٔ مهمتر و به‌نظر من دلگرم کننده، این است که ظاهراً توافقی با گودل داریم که گودل را بر آن داشته است تا تناظری میان ریاضیات و علوم تجربی برقرار کند. گمان می‌کنم گودل دریافته است که باید به گونه‌ای شکافی را که تعبیر رئالیستی و افلاطونی او از قضایای ریاضی ایجاد کرده است، پر کند، یعنی شکاف میان موجوداتی که موضوع ریاضی هستند و انسانی که می‌خواهد به آنها معرفت پیدا کند. گودل به جای وررفتن با شکل منطقی قضایای ریاضی یا با ماهیت اشیای معلوم ریاضی، قوهٔ خاصی را در انسان وضع می‌کند که به کمک آن با این اشیا «ارتباط پیدا می‌کنیم». به‌نظر می‌رسد در تحلیل مسألهٔ بنیادی با هم موافقیم اما به‌وضوح در بحث معرفت‌شناسی ــ یعنی دربارهٔ راههایی که برای شناختن اشیا به روی ما باز است ــ توافقی نداریم.

اگر تعبیر ما از معرفت تجربی پذیرفتنی باشد تا حدی برای این است که می‌خواهیم در مورد معرفتِ نظری خود، که در بدو امر روشن نیست چگونه توجیه علمی را باید در آن گنجانید، این ارتباط را آشکار کنیم. بنابراین وقتی به ریاضیات می‌رسیم نداشتن توجیهی منسجم از اینکه چگونه شهود ریاضی ما با صدق قضایای ریاضی مرتبط است، توجیه کلی ما را خدشه‌دار می‌کند.

به‌عنوان یک حاشیهٔ تاریخی مبتنی بر متون قدیم، نامعقول نیست اگر بگوییم افلاطون در توضیح علم ما به مُثل، با توجه به ماهیتی که برای آنها قائل بود، به مفهوم *یادآوری*[1] متوسل می‌شد.[2]

دیدگاه «ترکیبیاتی» در مورد صدق ریاضیات ریشه‌های معرفت‌شناختی دارد. این دیدگاه با این مقدمه آغاز می‌کند که «اشیا»ی ریاضیات هرچه باشند معرفت ما محصول برهانهاست. برهانها را می‌نویسند یا می‌گویند یا می‌توانند بنویسند یا بگویند (و به عقیدهٔ بعضی باید بنویسند یا بگویند)؛ ریاضیدانان می‌توانند آنها را بررسی کنند و در مورد درستی آنها به توافق برسند. بیشتر از طریق این برهانهاست که به معرفت ریاضی می‌رسیم و آن را به دیگران انتقال می‌دهیم. خلاصه آنکه، این جنبه از معرفت ریاضی یعنی ابزارهای (اساساً زبانی) ایجاد و انتقال، پشتیبان دیدگاههایی هستند که آنها را «ترکیبیاتی» می‌نامم.

این دیدگاهها با توجه به نقش برهانها در حصول معرفت، مبانی صدق را در همین برهانها جستجو می‌کنند. دیدگاههای ترکیبیاتی از اینجا نیرو می‌گیرند که دریافته‌اند افلاطونیان نیل به معرفت را در لفافه‌ای از رمز و راز پیچیده‌اند. اگر به این دریافت این باور را هم بیفزاییم که ریاضیات کودکی است که ما خود پدر او هستیم (بنا بر این دیدگاهها، کشف ریاضی به‌ندرت کشفی است در مورد حقیقتی مستقل از ما) دیگر تعجب‌آور نیست اگر در توضیح تولد آن به اعمالی توجه کنیم که به نطفه بستن آن انجامیده است. بسیاری از توجیه‌هایی که از صدق ریاضی می‌کنند متعلق به این مقوله‌اند. شاید هم بتوان گفت تقریباً همه متعلق به این طرز تفکرند. من به تعدادی از آنها به‌اجمال اشاره کرده و نظر هیلبرت را در مقالهٔ «در باب بینهایت» خیلی کوتاه بررسی کرده‌ام. آخرین مثالی که می‌خواهم بررسی کنم توجیه‌های دیدگاه قراردادیان[1] است یعنی مجموعهٔ دیدگاههایی که صدق در منطق و ریاضی را محصول قراردادهای صریح می‌دانند و منظورشان از قراردادها اصلهای موضوع نظریه است. شاید در اینجا نیز با درهم آمیختن دیدگاههایی که طرفداران آنها به احتمال قریب به یقین می‌خواهند جدا از هم نگه داشته شوند، رعایت انصاف را نکرده باشم.

کواین در مقالهٔ کلاسیک خود در این موضوع[2]، با این نظر که صدقهای *منطقی* را باید محصول قرارداد دانست، با روشنی و قاطعیت برخورد کرده است، برخوردی به‌مراتب بهتر از آنچه از خود می‌توانم انتظار داشته باشم. کواین می‌گوید از آنجا که باید صدقِ بینهایت جمله را توجیه کنیم، توجیه باید کلی باشد نه مورد به مورد. اما توجیه کلی تنها با اصول کلی امکان‌پذیر است و اگر بنا باشد از ابتدا هیچ اطلاعی از منطق نداشته باشیم نمی‌توانیم موردهای منفرد را از اصول کلی استخراج کنیم: برای این کار نیاز به منطق داریم.

اگرچه این دلیل قانع کننده به‌نظر می‌رسد، می‌خواهم دلیل دیگری بیاورم اما نه از آن رو که این اسب مرده باز هم شلاق می‌خواهد بلکه از آن رو که دلیل کواین محدود به منطق است و دیگر آنکه نکته‌های مهمی که می‌خواهم آشکار کنم از دلیل کواین چنان که باید آشکار نمی‌شود. درواقع کواین در برابر طرفداران قراردادی بودن صدق در منطقْ اصولی را گردن می‌نهد که من می‌خواهم آنها را نفی کنم. کواین در مقابله با قراردادیان در مورد نیاز داشتن به توصیفی کلی از بینهایت صدقِ منطقی قبول می‌کند که اگر تعداد صدقهایِ منطقی متناهی بود طرفداران قراردادی بودن صدق شاید می‌توانستند حرف خود را به کرسی بنشانند. کواین می‌گوید:

> اگر اسناد صدق می‌توانست، به جای بینهایت بار در هر زمان، مورد به مورد انجام بگیرد، مشکل حلّ می‌شد؛ صدقهای منطق ... یکی پس از دیگری طبق دستور مشخص می‌شد و مسألهٔ استنتاج آنها از قراردادهای کلیتر پیش نمی‌آمد. (ص. ۳۴۴)

یعنی اگر می‌توانستیم راهی پیدا کنیم که جمله‌های منطق، صدق و کذب خود را آشکارا نشان دهند، اعتراض به طرفداران قرارداد رفع می‌شد زیرا صدق و کذب تمام جمله‌ها را تعیین کرده بودیم و این همان چیزی است که می‌خواستیم.

تعجب من از این است که نوشتن مورد به مورد کلمهٔ «صادق» بدین گونه، چه کار مهمی را می‌تواند انجام دهد. بدون شک برای مشخص کردن مفهوم «صدق» کافی نیست که به هر جمله‌ای از زبان ارزشی نسبت دهیم [فرض کنید زبان ما، زبان مرتبهٔ اولی برای نظریهٔ مجموعه‌ها باشد] (حالا هر جمله‌ای را که تعداد اداتهای شرط آن زوج باشد «صادق» فرض کنید).

1. anamnesis

۲. آنگاه روح، از آنجا که فانی نیست، و بارها متولد شده و همهٔ موجودات را دیده است، چه در این جهان چه در آن جهان، به همهٔ آنها معرفت دارد. (Plato, Meno, 81)

1. conventionalists

2. W. V. Quine, 'Truth by Convention', repr. in Benacerraf and Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics*, 2nd edn., 329-54.

چنین اِسناد ارزشی با محمول «صادق» چه تعینی به مفهوم صدق می‌بخشد؟ تنها کاربرد این کلمهٔ دوهجایی که کافی نیست. پیشنهاد تارسکی این بوده است که صدق‌پذیری قرارداد T شرط لازم و کافی تعریف صدق برای زبان خاصی است.[1] صرف توزیع (بازگشتیِ) صدق و کذب میان جمله‌ها را می‌توان تا حدّ نظریه‌ای از صدق که قرارداد T را صادق کند، بالا برد. می‌توان به این نظریه به بهای مصادره به مطلوب دل خوش کرد و از مفهوم ترجمه که در صورت‌بندی قرارداد T مندرج است چشم پوشید. در اینجا آنچه از دست می‌دهیم هر چند بیان آن دشوار است، ابزاری است که تارسکی در تعریفهای صدق به‌کار برده است، یعنی تحلیل صدق برحسب مفاهیم «ارجاعیِ» نامگذاری، حمل، صدق‌پذیری و تسویر. تعریفی که جمله‌های متداول بازگشتی را در صورتهای متداول دستوری به‌کار نبرد اگر قرارداد T را هم صدق‌پذیر کند، چه‌بسا کافی نباشد. توضیح باید از طریق ارجاع و صدق‌پذیری داده شود و از این گذشته باید با تعبیری از ارجاع هم همراه باشد. اما دفاع از این ادعای آخر پیچیده‌تر از آن است که اینجا بدان بپردازیم[2].

مقالهٔ کواین: «صدق به اعتبار قرارداد» مبین آن است که برای تعیین صدق و کذب همهٔ متنهایی که شامل کلمه‌ای هستند کافی است مدلول آن کلمه را معین کنیم. ممکن است چنین باشد اما به شرطی که از پیش مفهوم صدق را داشته باشیم و آنگاه مدلول کلمهٔ مورد نظر خود را در تعریف صدق جستجو کنیم. اما اینکه بخواهیم خود مفهوم صدق را هم از این طریق معین کنیم به‌وضوح تلاشی است نادرست. با این کار همان ابزاری را دور انداخته‌ایم که باعث گردید آن روش برای مفاهیم دیگر مؤثر از کار درآید. صدق و ارجاع دست در دست هم دارند. مفهوم ما از صدق به میانجی مفاهیمی عمل می‌کند که تارسکی در تعریف صدق برای زبانهای مورد نظر خود، به‌کار برده است. سهم تارسکی از قرارداد T بسیار فراتر می‌رود و شامل قالبهایی کلی در تعریف صدق هم می‌شود. اگر تحلیل صدق برای زبان با ابزارهای متداول حمل، تسویر و غیره انجام نگیرد، رضایت‌بخش نخواهد بود.

اگر این حرفها نزدیک به واقع باشد آنگاه روشن می‌شود که چرا دیدگاههای «ترکیبیاتی» در مورد ماهیت صدق ریاضی، به‌نظر من موفق نیستند. به‌نظر نمی‌رسد که این دیدگاهها در تعبیر صدق، طریق لازم را بپیمایند یعنی از طریق موضوع گزاره‌هایی که تعریف صدق آنها داده می‌شود. آنها با انگیزهٔ ملاحظات معرفت‌شناسی به شرایطی از صدق می‌رسند که برآورده شدن یا برآورده نشدن آنها را، ما موجودات فانی می‌توانیم تحقیق کنیم اما بهایی که می‌پردازند این است که نمی‌توانند ارتباطی میان این «شرایط صدق» و صدق گزاره‌های مربوطه برقرار کنند.

حتی اگر این نکته مسلّم شود که صدقهای منطق مرتبهٔ اول خاسته از قراردادها نیستند باز هم ممکن است ادعا کنند که بقیهٔ ریاضیات (برای منطق‌گرایان، نظریهٔ مجموعه‌ها و برای دیگران، نظریهٔ مجموعه‌ها، نظریهٔ اعداد و موضوعهای دیگر) مرکب از قراردادهایی هستند که در منطق مرتبهٔ اول صورت‌بندی می‌شوند. این دیدگاه هم در معرض این انتقاد است که چنین مفهومی از قرارداد مستلزم صدق نیست[1] و درواقع هم روشن است که نیست. زیرا، حتی اگر انتقادهای کلیتر را نادیده بگیریم، پس از ثابت نگه‌داشتن منطق، چه‌بسا معلوم شود که قراردادهایی که بدین طریق وضع کردیم حاوی تناقض‌اند. بنابراین نمی‌توان مطمئن بود که وضع قراردادها *ضامن* صدق باشند. اما اگر *ضامن* صدق نباشند چه چیزی مواردی را که صدق را ضمانت می‌کنند از مواردی که نمی‌کنند متمایز می‌کند؟ اینکه بگوییم سازگاری اصول با هم ضامن صدق است، پاسخ درستی نیست. اصرار بر این گفته یعنی تلقی نادرست از اهمیت این امر که *ناسازگاری دلیل* آن است که به صدق دست نیافته‌ایم. باز هم دلیل عمیقتر این است که وضع اصول، ارتباطی میان گزاره‌ها و موضوع آنها برقرار نمی‌کند ــ وضع ایجاد کنندهٔ صدق نیست. نهایت اینکه مجموعهٔ شرایط صدقِ (تعبیرهایِ) سازگار با وضعها را محدود می‌کند. اما این کافی نیست.

برای روشن کردن این نکته، جملهٔ معروف راسل را نقل می‌کنیم: «روش «وضع کردنِ» آنچه می‌خواهیم مزیتهای فراوانی دارد؛ این مزیتها همان مزیت دزدی است بر کار طاقت‌فرسای شرافتمندانه»[2]. از دیدگاهی که من از آن دفاع می‌کنم این جمله صادق نیست. زیرا در دزدی دست‌کم چیزی به‌دست می‌آید، در حالی که از تعریف ضمنی، وضع اصول قراردادی و نظایر آنها صدق به‌دست نمی‌آید. اینها نه تنها نقص اخلاقی بلکه نقص عملی هم دارند.

******

• این مقالهٔ ترجمهٔ متن سخنرانی پال بناسراف (Paul Benacerraf) با عنوان "Mathematical truth" در همایشی دربارهٔ «صدق ریاضی» است که به همت انجمن فلسفهٔ آمریکا و انجمن منطق نمادی در ۲۷ دسامبر ۱۹۷۳ برگزار شده است. متن اصلی نخستین بار در

Journal of Philosophy, (19) **70** (1973) 661-80

و سپس در جاهای دیگری از جمله در

The Philosophy of Mathematics, edited by W. D. Hart, Oxford University Press (1997)

به چاپ رسیده است.

پال بناسراف استاد فلسفهٔ دانشگاه پرینستن آمریکاست.

1. Alfred Tarski, 'The Concept of Truth for Formalized Languages', repr. in Tarski, *Logic, Semantics, and Metamathematics* (NewYork: Oxford University Press, 1956), 152-278. قرارداد T در صفحات ۱۸۷ـ۱۸۸ به‌صورت زیر ذکر شده است:

قرارداد T. تعریف صوری درستی از نماد «Tr» که در فرازبان صورت‌بندی شده *تعریفی کافی از صدق نامیده می‌شود*، اگر:

α) همهٔ جمله‌هایی که از دو شرطی «$x \in \mathrm{Tr}$ اگر و تنها اگر p» ساخته می‌شوند از نتایج آن باشند. "x" نامی است از هر جملهٔ زبان مورد بحث و p ترجمهٔ آن جمله به فرازبان است.

β) جملهٔ «به ازای هر $x \in \mathrm{Tr}$ آنگاه $x \in \mathrm{S}$» (یعنی "$\mathrm{Tr} \subseteq S$") از نتایج آن باشد.

۲. برای بحثی عالی از دیدگاهی مشابه رک.

Hartry Field, 'Tarski's Theory of Truth', *Journal of Philosophy*, 69/13 (13 July 1972): 347-75.

۱. همین استدلالها را در مورد دیدگاهی می‌توان کرد که احتمالاً تفاوتی با این یکی ندارد، دیدگاهی که در پاسخ به این پرسش، که چگونه بدانیم اصول موضوع صادق‌اند (زبان را با آموختن این اصول می‌آموزیم)، اصول موضوع را *تعریفهای ضمنی* مفاهیم موجود در آنها می‌داند (برخلاف دیدگاهی که چگونگی فهم مفاهیم تازه را شرح می‌دهد.)

2. Bertrand Russell. *Introduction to Mathematical Philosophy*. (London: Allen and Unwin, 1919), 71.

سنّت پربار حل معادله*

جری کزدان*

ترجمهٔ مهدی مجیدی ذوالبنین

معادله حل‌کردن یکی از موضوعهای اصلی در ریاضیات است. محور بحث من در این زمینه این است که ریاضیات کلاسیک و جدید چنان درهم تنیده شده‌اند که ریاضیات معاصر بصیرتی واقعی و روشهایی برای فهم مسائل سنتی به‌دست می‌دهد.

در بخش دوم که طولانی هم هست بعضی روشها را که به حل معادلات کمک می‌کنند مورد بحث قرار می‌دهم. در آنجا مبحث تقارنْ گسترده است زیرا این مقولهٔ اساسی در درسهای ریاضی آن طور که باید مورد توجه قرار نمی‌گیرد. در بخش سوم دو روش مختلف برای اثبات اینکه معادلات دارای جواب هستند ارائه می‌شود. بیشتر قطعات مقاله مستقل هستند؛ بنابراین می‌توانید به‌طور مستقیم به سراغ مثالها که جذابتر هستند بروید.

یکی از اجزای معادله حل‌کردن که من تأکید کافی بر آن نکرده‌ام نقش اساسی نابرابریهاست. آنها همه جا در کمین هستند: الگوریتم اقلیدسی و کاربرد قضیهٔ نقطهٔ ثابت براور دو نمونه‌ای هستند که این نکته در مورد آنها کمتر واضح است. در صورتِ پرداختن به نابرابریها آن‌طور که شایستهٔ آنهاست، ماهیت این مقاله که از نسخهٔ طولانیتر [۱۰] گرفته شده است تغییر می‌کرد.

۱. مقدمه

هر چند ریاضیدانان قبل از سال ۱۵۳۵ به فرمولی برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم $p(x) := x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ دست یافته بودند ولی حتی بدون این فرمول نیز می‌توان به‌راحتی نشان داد که اگر x_1، x_2، x_3 ریشه‌های معادله باشند، با بسط دادن $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ مثلاً به‌دست می‌آوریم

$$x_1 + x_2 + x_3 = -b \qquad (1)$$

مستقیماً نتیجه می‌شود که اگر ضرایب یک چندجمله‌ای درجهٔ سه گویا باشند و دو تا از ریشه‌ها نیز گویا باشند، آنگاه ریشهٔ سوم نیز چنین است. این نتیجه سرنخی به‌دست ما می‌دهد: حتی بدون در اختیار داشتن فرمولی برای جواب یک معادله، ممکن است بتوان اطلاعات مفیدی دربارهٔ آن به‌دست آورد.

اندکی پس از حل معادلهٔ درجهٔ سه، معادلهٔ درجهٔ چهار در حالت کلی حل شد. مسألهٔ مبارزطلب بعدی معادلهٔ درجهٔ پنج بود. اگر ضرایب

$$p(x) := x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \qquad (2)$$

حقیقی باشند، برای هر x بزرگ مثبت داریم $p(x) > 0$، در حالی که برای هر x بزرگ منفی داریم $p(x) < 0$. بنابراین اگر نمودار چندجمله‌ای $y = p(x)$ را رسم کنید، از نظر هندسی بدیهی است که این نمودار محور xها را دست‌کم یک بار قطع می‌کند و در نتیجه دست‌کم یک ریشهٔ حقیقی x_1 برای $p(x) = 0$ وجود دارد. حال چندجمله‌ای $q(x) := p(x)/(x - x_1)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ چهار است که برای چهار ریشهٔ آن فرمولهایی در اختیار داریم. بدین ترتیب معلوم شد که هر چندجمله‌ای درجهٔ پنج دارای پنج ریشه است (که بعضی از آنها ممکن است تکراری یا مختلط باشند). اما آبل نشان داد علی‌رغم اطلاع از وجود این پنج ریشه، برای آنها فرمولی کلی تنها بر اساس اعمال معمولی حساب و ریشه‌گرفتن نمی‌تواند وجود داشته باشد. در استدلال آبل فرمولهایی نظیر (۱) اهمیت اساسی داشتند.

ریاضیدانان خود را با معضل جالب توجهی روبه‌رو می‌دیدند. از یک طرف ثابت کرده بودند که این ریشه‌ها وجود دارند اما از طرف دیگر نشان داده بودند که برای آنها هرگز نمی‌توان یک فرمول جبری پیدا کرد. آن اثبات وجودی امروزه قضیهٔ *اساسی جبر* نامیده می‌شود، و فهم موانعی که در برابر یافتنِ فرمول برای ریشه‌ها وجود دارد، موضوع *نظریه گالواست*. هر دوی اینها از ستونهای اصلی گسترش آتیِ ریاضیات بودند. مقدر چنین بود که فرمولهای جواب معادلات درجهٔ سه و چهار صرفنظر از نقش اساسی تاریخیشان، امروزه در موزه جای گیرند و به دلیل پیچیدگی زیاد به‌ندرت به‌کار روند.

اثبات اینکه چندجمله‌ای درجهٔ پنج (۲) همواره دست‌کم یک ریشهٔ حقیقی دارد یکی از نخستین اثباتهای وجودی «محض» بود. هر چند این

اثبات بدیهی پنداشته می‌شد، در قرن نوزدهم ریاضیدانان به آن علاقه‌مند شدند، زیرا در آن فرض شده بود که محور اعداد حقیقی هیچ «سوراخی» ندارد. چه می‌شد اگر در محور اعداد، درست در جایی که آن ریشه می‌بایست قرار می‌گرفت سوراخی وجود می‌داشت؟ چگونه می‌توان این ویژگی «بی‌سوراخی» را با دقت تعریف کرد؟ این همان ویژگیِ *تمام بودن (کمال)* است. تمام بودن در مسائلی که مستلزم فرایندهای حدی هستند اهمیت اساسی دارد.

۲. گامهایی به سوی حل معادله

نخستین مسأله در حل معادله مشخص نمودن این نکته است که آیا اصلاً جوابی وجود دارد یا نه. دانسته‌های ما دربارهٔ معادلات چندجمله‌ای حاکی است که این مسأله را باید از مسألهٔ مهم پیدا کردنِ صریح جوابها جدا کرد. به علاوه در بسیاری از حالتها که می‌دانیم جوابی وجود دارد ولی «فرمولی» در دست نیست، ویژگیهای کیفی جواب مورد نیازند.

۱.۲ فرمولی برای جواب پیدا کنید. معمولاً هیچ نوع فرمولی وجود ندارد. فهم جوابی که به‌صورت سری توانی یا فوریه داده می‌شود مشکل است. جوابهای عددی، مخلوطی درهم و برهم از اعداد هستند که برای استخراج هر نوع اطلاعات مفید باید آنها را رمزگشایی کرد. گفتهٔ همینگ که «هدف محاسبه بصیرت است، نه اعداد» در مورد بیشتر محاسبات علمی صادق است.

بعضی مسائلِ مقدماتی هستند که فرمولی برای جواب آنها وجود ندارد، اما الگوریتمی برای پیدا کردن جواب موجود است. حتی در این حالتها گاهی ممکن است اثباتی غیرساختنی برای وجود جواب را ترجیح بدهید.

یک نمونه از این موارد، حل (پیمانهٔ m) $ax \equiv b$ است که در آن a و m نسبت به‌هم اول‌اند. چون (پیمانهٔ m) $x \equiv a^{-1}b$ جواب است، باید (پیمانهٔ m) a^{-1} را پیدا کنیم. یک راه این است که توجه کنیم اعداد a، $2a$، ...، $(m-1)a$ همگی به پیمانهٔ m از یکدیگر مجزا هستند؛ پس یکی از آنها باید به پیمانهٔ m برابر ۱ باشد. این اثباتِ وجود a^{-1}، هیچ راهی برای یافتن a^{-1}، مگر از طریق آزمون و خطا، نشان نمی‌دهد. این یک اثبات وجودیِ غیرساختنی برای جواب (پیمانهٔ m) $ax \equiv 1$ است. یکی از اثباتهای ساختنی به مسألهٔ معادل یعنی حل $ax - my = 1$ برای عددهای صحیح x و y می‌پردازد. الگوریتم اقلیدسی این مسأله را به‌طور صریح حل می‌کند (رک. [۴، بخش ۸.۱]). چون در kاُمین گام این الگوریتم می‌توان باقیمانده را طوری انتخاب کرد که قدرمطلق آن حداکثر برابر نصف مقدار باقیماندهٔ قبلی باشد، باقیماندهٔ جدید می‌تواند حداکثر برابر $a/2^k$ باشد؛ در نتیجه حداکثر $\log a/\log 2$ گام مورد نیاز است. (این از معدود مواردی است که موضوع مهم کارایی یک الگوریتم را در نظر می‌گیریم).

۲.۲ مسألهٔ معادلی پیدا کنید که ساده‌تر باشد. شاید تعویض متغیر آشناترین فن برای ساده کردن یک مسأله باشد. یک مثال کوچک از این موضوع، چندجمله‌ای درجهٔ سوم $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ است. به این چندجمله‌ای به‌عنوان یک سری تیلر نگاه کنید. چون مشتق دوم در نقطه‌ای که $6ax + 2b = 0$، برابر صفر است، تعویض متغیر $z = 6ax + 2b$ (یا انتقال $z = x + \frac{b}{3a}$) چندجمله‌ای ساده‌تر $q(z) = \alpha z^3 + \gamma z + \delta$ را که جملهٔ درجهٔ دوم ندارد به‌دست می‌دهد. اگر ضرایب معادلهٔ اصلی گویا باشند، ضرایب معادلهٔ جدید نیز چنین خواهند بود و ریشه‌های گویای معادلهٔ جدید با ریشه‌های گویای معادلهٔ اصلی در تناظرند. این کار، تعمیم روش «مربع کامل کردن» است. همین‌طور با یک انتقال می‌توان ضریب a_{n-1} را در $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots$ حذف کرد.

با استفاده از این مطالب می‌توانیم نشان دهیم هر ریشهٔ مضاعف یک *چندجمله‌ای درجهٔ سه با ضرایب گویا، گویاست*. به‌کمک تعویض متغیرمان کافی است این موضوع را برای $q(z) = \alpha z^3 + \gamma z + \delta$ نشان دهیم. پس باید نشان دهیم اگر $q(r) = 0$ و $q'(r) = 0$، آنگاه r گویاست. اما از $0 = q'(r) = 3\alpha r^2 + \gamma$ نتیجه می‌شود که $\alpha r^3 = -(\frac{\gamma}{3})r$. بنابراین $0 = q(r) = -(\frac{\gamma}{3})r + \gamma r + \delta$، یعنی، $r = -3\delta/2\gamma$، که گویاست. از (۱) و از اینکه $x_1 = x_2 = r$، نتیجه می‌شود که سومین ریشهٔ q (و در نتیجه p) گویاست.

اکنون می‌توانید برای چندجمله‌ایهای درجهٔ سه با ضرایب گویا که یک ریشهٔ مضاعف (لزوماً گویای) r دارند همهٔ *نقاط گویای* (x, y) روی «خم بیضوی» $y^2 = p(x)$ را پیدا کنید. منظور از نقطهٔ گویای (x, y) این است که x و y هر دو گویا هستند. این نقاط محل برخورد خطهای راست گذرنده از $(r, 0)$ و دارای شیب گویا با خم هستند. تمرین دیگری در این زمینه این است که نشان داده شود نقاط گویایِ روی دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ محل برخورد خطهای راست گذرنده از $(1, 0)$ و دارای شیب گویا با دایره هستند. یک نتیجهٔ ساده، فرمولی است که برای همهٔ «سه‌تاییهای فیثاغورسی» به‌دست می‌آید. سه‌تاییهای فیثاغورسی اعداد صحیحی مانند a و b و c هستند که $a^2 + b^2 = c^2$.

نمونه‌ای دیگر از یافتن یک مسألهٔ معادلِ ساده‌تر، تعویض متغیر (یعنی تغییر پایه) در یک معادلهٔ ماتریسی به‌منظور قطری‌کردن ماتریس (در صورت امکان) می‌باشد. همین ایده را می‌توانیم در مورد دستگاهی از معادلات دیفرانسیل

$$Lu := u' + Au = f \qquad (3)$$

به‌کار ببریم که در آن $u(t)$ و $f(t)$ بردار و $A(t)$ یک ماتریس مربعی است. برای تبدیل معادله به معادله‌ای ساده‌تر، تعویض متغیری به شکل $u = Sv$ را جستجو می‌کنیم که در آن $S(t)$ ماتریسی وارونپذیر باشد. در برخی کاربردها، این تبدیل را یک *تبدیل مقیاسی* می‌نامند. برای پیداکردن یک S مفید، چنین محاسبه می‌کنیم

$$f = Lu = u' + Au = (Sv)' + A(Sv) = Sv' + (S' + AS)v \qquad (4)$$

سمت راست این معادله هنگامی ساده‌ترین شکل را دارد که S جواب معادلهٔ ماتریسی زیر باشد

$$LS = S' + AS = 0 \quad , \quad S(0) = I \qquad (5)$$

انتخاب $S(0) = I$ برای تضمین وارونپذیری S است. در این شرایط حل‌کردن (۴) فقط شامل انتگرالگیری از $v' = g$ است که در آن $g = S^{-1}f$.

با انتخاب چنین Sای و نوشتن $D := d/dt$، بازنویسی (۴) به‌صورت $f = Lu = SDv = SDS^{-1}u$ آموزنده است. به‌ویژه $L = SDS^{-1}$. مشاهده می‌شود که هر عملگر دیفرانسیل خطی عادی L، «مزدوج» یا «معادل مقیاسیِ» D است. پس به این نتیجهٔ احتمالاً غیرمنتظره می‌رسیم که هر

عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه اول L با عملگر سادهٔ D معادل است؛ این نکته باعث می‌شود که مطالعهٔ عملگرهای دیفرانسیل خطی عادی بسیار آسانتر از مطالعهٔ عملگرهای دیفرانسیل جزئی باشد. همچنین به‌طور صوری داریم $L^{-1} = SD^{-1}S^{-1}$. چون D^{-1} چیزی جز انتگرالگیری (و افزودن یک ثابت) نیست، فوراً نتیجه می‌گیریم که جواب عمومی معادلهٔ ناهمگن $Lu = f$ به‌صورت زیر است

$$u(t) = L^{-1}f = S(t)C + S(t)\int_0^t S^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \quad (۶)$$

که در آن $C = u(0)$. ماتریس S که با (۵) تعریف می‌شود همان *جواب ماتریسی اساسی* است که معمولاً در معادلات دیفرانسیل عادی با آن برخورد می‌کنیم. متأسفانه بیشتر وقتها به جای اینکه این ماتریس به‌طور مستقیم برای تبدیل L به عملگر دیفرانسیل ساده‌تر D معرفی شود، به‌عنوان شگردی برای حل معادلهٔ ناهمگن مطرح می‌شود. گاهی مناسب است *تابع گرین* $G(t,\tau) := S(t)S^{-1}(\tau)$ را وارد کارکرده، (۶) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$u(t) = u(0) + \int_0^t G(t,\tau)f(\tau)d\tau \quad (۷)$$

در این صورت عملگر انتگرال با هستهٔ $G(t,\tau)$ را L^{-1} می‌گیریم. این انتگرال را می‌توان تعبیر فیزیکی کرد و رهیافت (معادل) دیگری برای حل (۳) به‌دست آورد.

معمولاً نمی‌توان S را به‌طور صریح پیدا کرد. اما در بعضی موارد، مثل تک‌معادله‌ها یا دستگاههای 2×2 با ضرایب ثابت، می‌توانید محاسبات را انجام داده، فرمولهای کلاسیک را به‌راحتی به‌دست آورید.

آنچه ما «تعویض متغیر» می‌نامیم بخشی از یک شیوهٔ اساسی است که هر کسی از دوران کودکی با آن آشناست. برای روشن‌شدن این شیوه، فرض کنید مسأله‌ای دارید مانند $\mathscr{P}$ که به یک زبان دیگر، مثلاً لاتین بیان شده است. برای حل آن، ابتدا آن را به زبان خودتان ترجمه کنید (T)، صورت ترجمه‌شده ($\mathcal{Q}$) را حل کنید، آنگاه آن را به زبان اصلی برگردانید (T^{-1}). به شکل نمادی، اگر از راست به چپ بخوانیم، داریم $\mathscr{P} = T^{-1}\mathcal{Q}T$؛ شکل ۱ را ملاحظه کنید. هدف این است که چارچوب جدید و T طوری انتخاب شوند که مسألهٔ جدید $\mathcal{Q}$ از $\mathscr{P}$ ساده‌تر شود. قطری‌کردن یک ماتریس و استفاده از یک تبدیل لاپلاس دو مثال آشنای ریاضی در این مورد هستند.

همین ایده ــ ولی با شکلی متفاوت ــ در مبحث تقارن نیز مفید است (بخش ۶.۲). در آنجا می‌بینیم که یافتن یک T به طوری‌که صورت جدید

$$\begin{tikzcd}
\text{قبلی} \arrow[r, "\mathscr{P}", "\text{(صورت اصلی)}"'] \arrow[d, "T"'] & \text{قبلی} \\
\text{جدید} \arrow[r, "\mathcal{Q}", "\text{(صورت قبلی)}"'] & \text{جدید} \arrow[u, "T^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

شکل۱

همان صورت قبلی باشد، $\mathscr{P} = T^{-1}\mathscr{P}T$، عبارت است از تشخیص دادن تقارنهای مسأله. به‌عنوان یک مثال زبانی عامیانه [به انگلیسی]، ملاحظه کنید که گزارهٔ "madam I'm Adam" از انتها به ابتدا نیز به همین صورت خوانده می‌شود. اینجا T عمل خواندن از انتها به ابتداست.

حساب وردشها روشی بنیادی برای صورتبندی دوبارهٔ برخی مسائل در اختیار ما می‌گذارد. اگر A یک ماتریس خودالحاق در $\mathbb{R}^n$ باشد، حل‌کردن $Ax = b$ معادل است با یافتن یک نقطهٔ بحرانی تابع عددی $J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle x, b\rangle$، که در آن، ضرب داخلی متعارف در $\mathbb{R}^n$ مورد نظر است. برای مشاهدهٔ این موضوع، اگر x یک نقطهٔ بحرانی $J(x)$ باشد و قرار دهیم $\varphi(\epsilon) = J(x + \epsilon v)$، که v یک بردار و ϵ یک عدد است، آنگاه طبق تعریف نقطهٔ بحرانی، $\varphi'(0) = 0$. اما $\varphi'(0) = \langle Ax - b, v\rangle$. بنابراین برای هر بردار v، $\langle Ax - b, v\rangle = 0$. چون v دلخواه است نتیجه می‌شود $Ax - b = 0$ و این همان چیزی است که ادعا شد.

همین‌طور ادعا می‌کنیم که حل معادلهٔ لاپلاس $\Delta u = 0$ در یک ناحیهٔ Ω، با شرط مرزی $u(x,y) = f(x,y)$ برای (x,y) روی مرز Ω، معادل است با پیدا کردن یک نقطهٔ بحرانیِ تابعک

$$J(u) := \frac{1}{2}\int\int_\Omega (u_x^2 + u_y^2)dxdy \quad (۸)$$

در میان همهٔ توابع هموار مناسبی که در شرط مرزی بالا صدق می‌کنند.

می‌خواهیم این مطلب را نشان دهیم. برای سهولت فرض کنید u تابعک J را مینیمم کند. همچنین فرض کنید $h(x,y)$ تابعی هموار در Ω باشد که در یک همسایگیِ مرز صفر است. در این صورت مقادیر مرزیِ $u + th$ همان مقادیر مرزی u است و تابع $\varphi(t) = J(u + th)$ در $t = 0$ یک مینیمم دارد. بنابراین

$$0 = \frac{dJ(u+th)}{dt}\Big|_{t=0} = \int\int_\Omega (u_x h_x + u_y h_y)dxdy$$

اکنون به‌صورت جزءبه‌جزء انتگرالگیری کرده (قضیهٔ دیورژانس)، مشاهده می‌کنیم که جملهٔ مرزی به‌وجود نمی‌آید، زیرا h روی مرز صفر است:

$$0 = -\int\int_\Omega (u_{xx} + u_{yy})hdxdy = -\int\int_\Omega (\Delta u)hdxdy \quad (۹)$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که u در معادلهٔ لاپلاس $\Delta u = 0$ صدق می‌کند زیرا اگر برای مثال در یک قرص کوچک در Ω، $\Delta u > 0$، آنگاه می‌توانستیم h را طوری در نظر بگیریم که در این قرص مثبت، و در خارج از آن صفر باشد. اما در این صورت سمت راست (۹) مثبت می‌بود و این تناقض است. به‌طور خلاصه، مشاهده می‌کنیم که مینیمم‌سازهای J، توابعی همساز، $\Delta u = 0$، هستند. درواقع تنها چیزی که از آن استفاده کردیم این بود که u یک نقطهٔ بحرانی $J(u)$ است. معادلهٔ $\Delta u = 0$، *معادلهٔ اویلر-لاگرانژ* مسألهٔ وردشیِ پیداکردن نقاط بحرانی $J(u)$ نامیده می‌شود.

یکی از مزایایِ وارد کارکردنِ یک مسألهٔ وردشی این است که بعضی از ویژگیها، مانند وجود جواب یا یک «قانون بقا» قابل دسترستر می‌شوند. در بخشهای ۶.۲ ت و ۱.۳ دوباره به این مطلب برمی‌خوریم. (کتابهای [۶]، [۷] و [۹] را ببینید).

۳.۲ دوگانی: مسأله‌ای مرتبط با مسألهٔ موردنظر پیدا کنید که مفید واقع شود. در نظر من، دوگانی مهم‌ترین و مرموزترین موضوع در این مقاله است. احساس من این است که دوگانی نخستین بار در هندسهٔ تصویری، آنجا که نقشهای نقطه‌ها و خطها با هم تعویض می‌شوند پدیدار شده است. لاگرانژ الحاقیِ یک عملگر دیفرانسیل را در قرن هجدهم معرفی کرد، در حالی که به نظر می‌رسد الحاقیِ یک ماتریس در قرن نوزدهم به‌کار گرفته شده باشد. مکانیک لاگرانژی و مکانیک همیلتنی دوگان یکدیگرند: زیستگاه مکانیک لاگرانژی کلاف مماس و زیستگاه مکانیک همیلتنی کلاف کتانژانت است. در حساب وردشها ــ از جمله در برنامه‌ریزی خطی ــ مسائلی وجود دارند که دوگان یکدیگرند. کوهومولوژی دوگان هومولوژی است. حتی در بیان کلمات قصار نیز دوگانی حربه‌ای جا افتاده است: «با دیگران همان طوری رفتار کنید که دوست دارید با شما رفتار کنند» و گفتهٔ جان اِف. کندی که «... نپرسید کشورتان برای شما چه می‌تواند انجام دهد، بپرسید شما برای کشورتان چه می‌توانید انجام دهید.» من نمی‌دانم چطور مفهوم دوگانی را آنقدر دقیق سازم که همهٔ نمونه‌های شناخته‌شدهٔ ریاضی را دربربگیرد و معرفی اشیاء دوگان جدید را آسان کند.

در بخش ۵.۲ کاربرد دوگانی در جبر خطی را ذکر خواهیم کرد. در اینجا به پیروی از لاگرانژ، الحاقیِ صوری L^* یک عملگر خطی دیفرانسیل L را تعریف می‌کنیم. از ضرب داخلی توابع با مقادیر حقیقی: $\langle\varphi,\psi\rangle = \int \varphi\psi dx$ استفاده می‌کنیم. در این صورت L^* با قاعدهٔ معمول زیر تعریف می‌شود: برای همهٔ توابع هموار u و v که در خارج یک مجموعهٔ فشرده صفر هستند

$$\langle u, L^*v\rangle = \langle Lu, v\rangle$$

از آن جهت توابعی را که خارج از یک مجموعهٔ فشرده صفر هستند انتخاب کردیم که به هنگام انتگرالگیری جزءبه‌جزء، جمله‌های انتگرال روی مرز به‌وجود نیایند. استفاده از کلمهٔ «صوری» به این دلیل بود که الحاقیِ اکید، مستلزم یک فضای هیلبرت (تمام) و در نظر گرفتن شرایط مرزی است.

اگر $L := d/dt$، آنگاه با یک انتگرالگیری جزءبه‌جزء مشخص می‌شود که

$$\langle Lu, v\rangle = \int u'v dt = -\int uv' dt = \langle u, L^*v\rangle$$

بنابراین، الحاقی صوری $L := d/dt$ عبارت است از $L^* = -d/dt$. همین‌طور، اگر $A(t)$ یک ماتریس و $u(t)$ یک بردار باشند، آنگاه الحاقی صوری $Lu := u' + A(t)u$ عبارت است از $L^*v = -v' + A^*(t)v$. دو بار انتگرالگیری جزءبه‌جزء نشان می‌دهد که الحاقی صوری دستگاه مرتبهٔ دوم $Mu := u'' + A(t)u$ عبارت است از $M^*v = v'' + A^*(t)v$. به‌ویژه اگر A متقارن باشد، آنگاه M به‌طور صوری خودالحاق است؛ این واقعیت در مکانیک کوانتومی ــ جایی که با یک ضرب داخلی مختلط، عملگر خودالحاق id/dt در معادلهٔ شرودینگر ظاهر می‌شود ــ اهمیت بنیادی دارد.

اگر u یک جواب دستگاه همگن $Lu := u' + A(t)u = 0$ و v یک جواب دستگاه الحاقی $L^*v = -v' + A^*(t)v = 0$ باشند، آنگاه حاصلضرب داخلی نقطه به نقطهٔ آنها مقداری ثابت است. درواقع

$$\frac{d}{dt}(v\cdot u) = v'\cdot u + v\cdot u' = A^*v\cdot u - v\cdot Au = 0 \qquad (۱۰)$$

با توجه به اینکه $v\cdot u$ با ضرب ماتریسی v^*u برابر است، محاسبه‌ای مشابه نشان می‌دهد که اگر $S(t)$ و $T(t)$ به‌ترتیب جوابهای ماتریسی (نه لزوماً مربعی) $LS = 0$ و $L^*T = 0$ باشند، آنگاه

$$T^*(t)S(t) = \text{ثابت} \qquad (۱۱)$$

به‌ویژه اگر A، S و T ماتریسهایی مربعی با $S(0) = T(0) = I$ باشند (در این صورت مانند (۵)، S و T *جوابهای ماتریسی اساسی* هستند)، خواهیم داشت

$$T(t) = S^{-1*}(t) \quad \text{یعنی} \quad T^*(t)S(t) = I \qquad (۱۲)$$

اگر فرمول (۱۱) ظاهری جالب توجه ندارد، به‌دلیل بی‌نقص بودن تغییر قیافهٔ آن است. این فرمول تعمیم فراگیری است از $e^te^{-t} = 1$ که مربوط به حالت خاص $Lu := u' + u$ و $L^*v = -v' + v$ است، و نیز از $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. این فرمول در یک چارچوب فیزیکی ممکن است بیانگر نوعی قانون بقا باشد. برای اثبات $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$، دستگاه مرتبهٔ دوم $Mw := w'' + Cw = 0$ را در نظر بگیرید که در آن $C(t)$ یک ماتریس $n\times n$ است. دستگاه الحاقی متناظر عبارت است از $M^*z = z'' + C^*z$. فرض کنید $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ به‌ترتیب جوابهای (برداری یا ماتریسی) $M\varphi = 0$ و $M^*\psi = 0$ باشند. در این صورت $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ حالت خاصی از اتحاد

$$\psi^{*\prime}(t)\varphi(t) - \psi^*(t)\varphi'(t) = \text{ثابت}$$

است. این حالت خاص، حالتی است که در آن C ماتریس 1×1 همانی باشد، $\varphi(t) = \cos t$ و $\psi(t) = \sin t$. این اتحاد یک نتیجهٔ عادیِ اتحاد بنیادی (۱۱) است و به‌دست آوردن آن نیازمند اطلاع اضافی نیست؛ فقط $w'' + C(t)w = 0$ را به‌صورت یک دستگاه مرتبهٔ اول بنویسید؛ این‌کار را با استفاده از روند معمول یعنی گرفتن $u_1 := w$ و $u_2 := w'$ انجام دهید.

۴.۲ خانوادهٔ همهٔ جوابها را شناسایی کنید. چه تعداد جواب وجود دارد؟ آیا یکتایی مطلوب است؟ اگر چنین است، چه شرایطی یکتایی جواب را تضمین می‌کند؟ اگر برخی از پارامترهای مسأله را اندکی دستکاری کنید، آیا جوابها هم فقط اندکی تغییر می‌کنند؟ این وابستگیِ پیوسته به پارامترها در مسائل مربوط به زندگی واقعی که در آنها داده‌ها تنها در حد تقریب معلوم هستند بسیار اساسی است. این وابستگی در مسائلی که با کامپیوتر حل می‌شوند نیز اهمیت دارد؛ کامپیوتر هم خطاهای گردکردن ایجاد می‌کند (زیرا فقط تعدادی متناهی از ارقام اعشاری را به‌کار می‌برد) و هم خطاهای بُرش (زیرا به‌جای فرایندهای حدی نظیر انتگرالگیری تعدادی متناهی عملیات گسسته انجام می‌دهد و نتایج را به تقریب به‌دست می‌آورد).

برای مثال، طبق قضیهٔ روشه در آنالیز مختلط، ریشه‌های یک چندجمله‌ای $p(z)$ به‌طور پیوسته به ضرایب آن وابسته‌اند یعنی، اگر $p(z)$ در قرص کوچک $|z-c| < r$ دارای k ریشه باشد و اگر ضرایب p را اندکی دستکاری کنیم، آنگاه چندجمله‌ای دستکاری شده نیز درست k ریشه در این قرص خواهد داشت. یک نتیجهٔ این قضیه این است که مقدارهای ویژهٔ یک ماتریس به‌طور پیوسته به درایه‌های آن وابسته‌اند. مثال $x^2 = \pm\epsilon$ نشان می‌دهد که اگر فقط ریشه‌های حقیقی در نظر گرفته شوند، این ادعاها ممکن است *غلط* باشد.

این مثال $x^2 = \epsilon$ برای ϵهای نزدیک صفر همچنین نشان می‌دهد که حتی با در نظرگرفتن ریشه‌های مختلط، ممکن است جواب، تابع مشتق‌پذیری از پارامترها نباشد. در مقابل، قضیهٔ تابع ضمنی به‌سادگی نشان می‌دهد که ریشه‌های ساده به‌طور هموار به پارامترها وابسته‌اند. اثباتی از این موضوع ارائه می‌دهیم. فرض کنید یک چندجمله‌ای $p(x,c)$ داریم که به‌طور هموار به پارامتر c وابسته است و در $c = c_0$ یک ریشهٔ x_0 داریم، یعنی $p(x_0, c_0) = 0$. چون x_0 یک ریشهٔ ساده است، $\partial p(x,c_0)/\partial x|_{x=x_0} \neq 0$. بنابراین، طبق قضیهٔ تابع ضمنی، به‌ازای هر c نزدیک c_0، جواب یکتایی مانند $x = x(c)$ برای $p(x,c) = 0$، نزدیک x_0 وجود دارد. این جواب به‌طور هموار به c وابسته است. در این اثبات لازم نیست p یک چندجمله‌ای باشد. از این مطلب نتیجه می‌شود که مقدارهای ویژهٔ سادهٔ یک ماتریس به‌طور هموار به درایه‌های آن ماتریس وابسته‌اند.

بررسی این امر که وقتی قضیهٔ تابع ضمنی قابل کاربرد نیست چه رخ می‌دهد، در *نظریهٔ انشعاب*[1] و در مطالعهٔ *تکینه‌های نگاشتها* انجام می‌شود. این دو موضوع یکی هستند، هر چند از خاستگاههای مختلف و با دیدگاههای متفاوتی برآمده‌اند؛ [۱] و [۸] را ببینید. پدیدهٔ جدید مهمی که اتفاق می‌افتد این است که ممکن است چندین جواب منشعب شوند و یا اینکه جوابها ناپدید شوند؛ چنین حالتی مثلاً در مورد جوابهای حقیقی $x^2 = \epsilon$ روی می‌دهد؛ به‌ازای $\epsilon < 0$ جواب حقیقی وجود ندارد در حالی که به‌ازای $\epsilon > 0$ دو جواب هست. مطالعهٔ کلاسیک خم‌شدن یک ستون باریک در اثر فشار که به‌وسیلهٔ اویلر انجام شد، یکی از جلوه‌های اولیه و شایان توجه نظریهٔ انشعاب بود. [۱۶، صص. ۱۶۷ـ۱۶۹].

مثال بعدی ما خانوادهٔ همهٔ جوابها را در مورد برخی معادلات چندجمله‌ای روشن می‌کند. در دبیرستان معادلات درجهٔ دوم یک متغیری و دستگاههای معادلات خطی را حل می‌کنیم. اینها گامهای اولیه در راه شناسایی جوابهای دستگاهی متشکل از k معادلهٔ چندجمله‌ای $f_1(z) = 0$، $f_2(z) = 0$، ...، $f_k(z) = 0$، با n مجهول $z = (z_1, \ldots, z_n)$ است. از روی تجربه می‌دانیم که ساده‌ترین حالت، مجاز دانستن جوابهای مختلط است. اگر تعداد معادله‌ها بیش از تعداد مجهولها باشد ($k > n$)، معمولاً جوابی وجود ندارد، یعنی صفرهای مشترکی نداریم [*مسألهٔ مبارزطلب*: این را مثلاً برای توابع هموار داخواه f_j به‌صورت دقیق بیان و سپس اثبات کنید] در حالی‌که اگر تعداد مجهولها از تعداد معادله‌ها بیشتر باشد معمولاً تعداد نامتناهی جواب وجود دارد. اگر تعداد معادله‌ها و تعداد مجهولها برابر باشند، معمولاً تعدادی متناهی جواب وجود دارد. این حکم، با وجودی که درست به نظر می‌رسد، بدیهی نیست و در مورد توابع هموار نادرست است: $\sin x = 0$ که یک معادله با یک مجهول است، تعداد نامتناهی جواب دارد ــ البته اگر سری تیلر آن به‌عنوان یک چندجمله‌ای از درجهٔ بینهایت در نظرگرفته شود، این امر چندان هم غیرمنتظره نیست.

بزو[2] این مطلب را در مورد دو معادلهٔ چندجمله‌ای دومتغیرهٔ

$$f(x,y) = 0, \quad g(x,y) = 0 \qquad (۱۳)$$

دقت بخشید. او ثابت کرد که اگر f از درجهٔ k و g از درجهٔ l باشند، درست به تعداد kl جواب وجود دارد که ممکن است مختلط هم باشند، مگر اینکه f و g دارای یک عامل مشترک چندجمله‌ای (غیرثابت) باشند [۱۵].

از لحاظ هندسی، چنین تصور کنید که دو معادلهٔ (۱۳) دو خم C_1 و C_2 را مشخص می‌کنند. در این صورت جوابهای مشترک (۱۳) عبارت‌اند از نقاط تقاطع این دو خم.

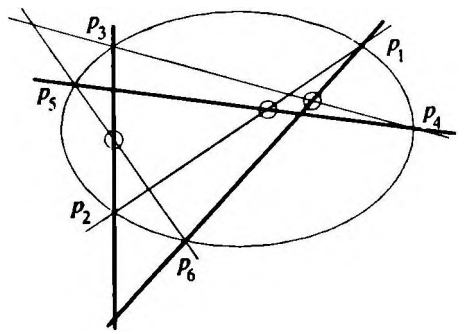
حال (۱۳) را در حالت خاصی که f و g هر دو، چندجمله‌ای درجهٔ سه باشند بررسی می‌کنیم. فرض کنید آنها در نُه نقطهٔ $p_1 = (x_1, y_1)$، ...، p_9 یکدیگر را قطع کنند. تا اینجا با وضعیتی کلی سروکار داریم. اما حالا فرض کنید که شش تا از این نقاط، p_1، ...، p_6 تصادفاً روی یک مقطع مخروطی Γ قرار داشته باشند، پس آنها ریشه‌های یک چندجمله‌ای درجهٔ دو مانند $q(x,y) = 0$ که Γ را تعریف می‌کند نیز هستند. طبق قضیهٔ بزو می‌دانیم که C_1 و Γ یکدیگر را در شش نقطه قطع می‌کنند. اینکه C_2 و Γ نیز یکدیگر را در *همان* شش نقطه قطع کنند حالتی کاملاً استثنایی است. برای سادگی همچنین فرض کنید که مقطع مخروطی Γ تحویل‌ناپذیر است، یعنی حاصلضرب دو چندجمله‌ای غیرثابت از درجهٔ پایینتر نیست (این وضعیت هنگامی رخ می‌دهد که Γ حاصلضرب، دو چندجمله‌ای خطی و در نتیجه متشکل از دو خط راست باشد). ادعا می‌کنیم که سه نقطهٔ باقیماندهٔ p_7، p_8، p_9 روی یک خط راست قرار دارند.

یک اثبات جبری برای این ادعا می‌آوریم. توجه کنید که برای هر ترکیب خطی $h(x,y) := \alpha f(x,y) + \beta g(x,y)$، خم درجهٔ سوم C که با $h = 0$ تعریف می‌شود خودبه‌خود نقاط تقاطع C_1 و C_2 را شامل می‌شود. نقطهٔ دیگری مانند v روی مقطع مخروطی Γ بگیرید و α و β را طوری انتخاب کنید که v نیز یک صفرِ h بشود. در آن صورت خم درجهٔ سوم C نیز مقطع مخروطی Γ را در هفت نقطهٔ v، p_1، ...، p_6 قطع می‌کند. اما طبق قضیهٔ بزو، C و Γ دارای $6 = 2 \times 3$ نقطهٔ تقاطع هستند مگر اینکه h و q عامل مشترکی داشته باشند. پس باید عامل مشترکی وجود داشته باشد. چون q تحویل‌ناپذیر است، این عامل مشترک باید خود q باشد. بنابراین $h(x,y) = q(x,y)r(x,y)$ که با توجه به درجه‌ها، $r(x,y)$ یک چندجمله‌ای خطی است. پس p_7، p_8، p_9 که صفرهای $h = 0$ هستند ولی صفرهای $q = 0$ نیستند، ریشه‌های چندجمله‌ای خطی $r = 0$اند و بنابراین روی یک خط راست قرار دارند.

با تعبیری از این موضوع می‌توان یک قضیهٔ کلاسیک پاسکال را به‌دست آورد. شش نقطهٔ داخواه p_1، ...، p_6 واقع بر یک مقطع مخروطی را به هم وصل کنید تا یک «شش‌ضلعی» به‌دست آید که ممکن است خودش را هم قطع کند. چند اصطلاح در مورد شش‌ضلعیها ذکر می‌کنیم: یک جفت از یالها را *متقابل* می‌نامیم در صورتی که دو یال بین آنها قرار داشته باشند (مانند $\overline{p_1p_2}$ و $\overline{p_4p_5}$). نقاط تقاطع یالهای متقابل را *نقاط قطری* می‌نامیم. پس هر شش‌ضلعی سه نقطهٔ قطری دارد (در شکل ۲ دور آنها دایره کشیده شده است). قضیهٔ پاسکال می‌گوید این سه نقطه همواره روی یک خط راست قرار دارند.

برای اثبات آن، یالهای متناوب شش ضلعی، یعنی $\overline{p_1p_2}$، $\overline{p_3p_4}$، $\overline{p_5p_6}$ و $\overline{p_2p_3}$، $\overline{p_4p_5}$، $\overline{p_6p_1}$ را در نظر بگیرید؛ دو مثلث ایجاد می‌شود که اضلاع آنها این یالها را شامل‌اند. با در نظر گرفتن حاصلضرب سه چندجمله‌ای خطی که به‌وسیلهٔ اضلاع هر کدام از مثلثها مشخص می‌شوند، به هر مثلث

1. bifurcation theory 2. Bezout



شکل۲

یک چندجمله‌ای درجهٔ سه نسبت می‌دهیم. توجه کنید که در اینجا هر مثلث اجتماع سه خط کامل است، نه اجتماع پاره‌خطهایی که رأسها را به هم وصل می‌کنند. نقاط p_1، ...، p_6 به‌اضافهٔ سه نقطهٔ قطری، نُه نقطهٔ تقاطع این دو مثلث هستند. اکنون نتیجهٔ جبری قبل را به‌کار ببرید. برای در نظر گرفتن امکان توازیِ برخی از اضلاع متقابل که نقاط تقاطع آنها در بینهایت خواهند بود، بهتر است در صفحهٔ تصویری کار کنیم.

استدلال جبری را می‌توان بلافاصله تعمیم داد: *فرض کنید* $f(x,y)=0$ و $g(x,y)=0$ *چندجمله‌ایهایی از درجهٔ* n *باشند که یکدیگر را در* n^2 *نقطه قطع می‌کنند. اگر* kn *تا از این نقاط روی یک خم تحویل‌ناپذیر که با یک چندجمله‌ای درجهٔ* k *تعریف می‌شود قرار داشته باشند، آنگاه* $n(n-k)$ *نقطهٔ باقیمانده روی خمی قرار دارند که با یک چندجمله‌ای درجهٔ* $n-k$ *تعریف می‌شود.* این تعمیم نشان‌دهندهٔ قدرت رهیافت جبری است.

۵.۲ اگر لزوماً جوابی وجود ندارد، موانع را پیدا کنید. اگر معادله‌ای فاقد جواب است، فهمیدن دلیل آن مهم است. اگر بخواهید خط راست $p=at+b$ را با k نقطهٔ داده شده که به‌صورت تجربی به‌دست آمده‌اند تطبیق بدهید، بعید است بتوانید ضرایب a و b را چنان انتخاب کنید که دقیقاً با داده‌ها جور شود. در چنین وضعیتی به دنبال یک جواب تقریبی «بهینه» می‌گردند. یک رهیافت نوعی برای حل تقریبی $F(x)=y$، پیداکردن جوابی مانند x_0 است که خطای $E(x)=||F(x)-y||$ را مینیمم کند. انتخاب یک نرم مناسب (یا متریکی دیگر) برای اندازه‌گیری خطا، تصمیم مهمی است که شخص باید بگیرد. معمولاً از نرمی استفاده می‌شود که از ضربی داخلی القاء شود؛ در این صورت این روش، *روش کمترین مربعات نامیده می‌شود.*

حال فرض کنید می‌خواهید معادله‌ای را حل کنید که باور دارید در شرایط مناسبی *باید* جوابی دقیق داشته باشد. پس لازم است این شرایط را معین کنید و آنها را بفهمید.

ساده‌ترین مثال، دستگاه معادلات جبری خطی $Ax=y$ است. طبق قضیه‌ای بنیادی در جبر خطی، که در آن از معادلهٔ الحاقی (دوگانی) استفاده می‌شود، به‌ازای yای داده شده، شرط لازم و کافی برای وجود دست‌کم یک جواب این است که y بر همهٔ جوابهای z معادلهٔ الحاقی همگن، $A^*z=0$، عمود باشد. همین گفته در مورد مسائل مقدار مرزی بیضوی خطی نیز درست است ــ در آنجا این موضوع به‌نام *جایگزین فردهلم*[1] شناخته می‌شود. برای ملاحظهٔ بحث و اثباتی از این مطالب در حالت آموزندهٔ معادلات دیفرانسیل عادی به [۱۰] مراجعه کنید.

1. Fredholm Alternative

مثال بعدی شمه‌ای از این مطالب را در مورد یک معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی ساده نشان می‌دهد. به خاطر بیاورید که انحنای [خمیدگی] $k(x)$ یک خم هموار $y=y(x)$ به‌صورت زیر داده می‌شود

$$k(x)=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)' \qquad (۱۴)$$

عکس مسأله این است که برای تابع هموار داده شدهٔ $k(x)$، $0<x<1$، خم همواری مانند $y=y(x)$ پیدا کنیم که این تابع انحنای آن باشد.

انحنای دایره‌ای به شعاع R برابر $\frac{1}{R}$ است. بنابراین اگر $k(x)\equiv 2$، آنگاه نیمدایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$ جواب مسألهٔ ماست. اما اگر $k(x)\equiv 4$، آنگاه دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ تنها در نیمی از بازهٔ مطلوب $0<x<1$ جواب مسأله را به‌دست می‌دهد. این موضوع باعث می‌شود حدس بزنیم که اگر جوابی وجود داشته باشد، آنگاه انحنا نمی‌تواند در قسمت بزرگی از بازه، به‌دلخواه بزرگ باشد.

برای پیدا کردن یک مانع، از دو طرف (۱۴) انتگرالگیری می‌کنیم

$$\int_0^x k(t)dt=\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}-\frac{y'(0)}{\sqrt{1+y'(0)^2}} \qquad (۱۵)$$

قرار می‌دهیم $\gamma=y'(0)/\sqrt{1+y'(0)^2}$؛ در این صورت $|\gamma|\le 1$. از (۱۵) شرط محدودکنندهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\int_0^x k(t)dt\le 1-\gamma\le 2, \quad 0\le x\le 1$$

این نابرابری حدس ما را مبنی بر اینکه «انحنا نمی‌تواند در قسمت بزرگی از بازه، به‌دلخواه بزرگ باشد» در خود دارد. در حالت ثابت‌بودن انحنا، $k(x)\equiv c>0$، به‌ازای $x=1$ شرط بالا به‌صورت $c\le 2$ درمی‌آید که کاملاً دقیق است. برای kی غیرثابت، یک شرط لازم و کافی این است که ثابتی چون γ، $\gamma\in[-1,1]$، وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $0<x<1$، $|\int_0^x k(t)dt+\gamma|<1$. اگر فرض کنیم خم محدب باشد، یعنی $k(x)>0$، آنگاه می‌توانیم γ را برابر -1 انتخاب کرده، به این شرط لازم و کافی ساده برسیم که $\int_0^1 k(t)dt\le 2$. لازم‌بودن این شرط نتیجهٔ فوری (۱۵) است، حال آنکه کافی بودن آن از حل (۱۵) نسبت به $y'(x)$ و انتگرالگیری نتیجه می‌شود. به‌طور ضمنی، مماسهای قائم $(y'(x)=\pm\infty)$ را در داخل بازه مجاز ندانسته‌ایم اما در نقاط مرزی، این مماسها مجاز هستند ــ مانند حالت مربوط به نیمدایرهٔ به شعاع $\frac{1}{2}$.

در صورت استانداردی از این مسأله، شرایطی مرزی مانند $y(0)=0$، $y(1)=0$ نیز وضع می‌شود. من لذتِ یافتن شرایط لازم و کافی برای حل این مسألهٔ مقدار مرزی در حالت خاصِ مربوط به خم محدب را به شما واگذار می‌کنم. اگر بپذیریم جوابی برای این مسألهٔ مقدار مرزی وجود دارد، آیا این جواب یکتاست؟

مشکلات در اینجا ناشی از *سرتاسری‌بودن* این مسأله برای تمام بازهٔ $0<x<1$ است. اگر به یک جواب موضعی که فقط در یک همسایگی $x=0$ تعریف شده است رضایت بدهیم، آنگاه همواره جوابی وجود دارد.

شناخت ما از عواملی که مانع وجود جواب برای یک معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی می‌شوند بسیار ناقص است؛ بسیاری از موانع شناخته شده، از قضیهٔ نوتر که در بخش ۶.۲ ت ذکر خواهد شد به‌دست می‌آیند.

۶.۲ از تقارن بهره بگیرید. الف) *تقارن ساده.* مثالی آشنا از تقارن در جبر، در مورد چندجمله‌ای $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ با ضرایب حقیقی دیده می‌شود. در این حالت ضرایب تحت مزدوج‌سازی مختلط ناوردا هستند: $\overline{a_j} = a_j$. بنابراین برای هر عدد مختلط z داریم

$$\overline{p(z)} = \sum \overline{a_k z^k} = \sum a_k \overline{z}^k = p(\overline{z})$$

و اگر z یک ریشهٔ مختلط باشد، $\overline{z}$ نیز چنین است. ماهیت تقارنیِ مزدوج‌سازی در اعداد مختلط هنگامی روشنتر می‌شود که برای عملگر مزدوج‌سازی مختلط نماد دیگری به‌کار ببریم: می‌نویسیم $T(z) = \overline{z}$. پس، همانی $T^2 =$ و $(Tp)(z) = T(p(z))$. برای یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی، $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$ به این معنی است که $Tp = pT$، یعنی T و p با هم جابه‌جا می‌شوند؛ اگر این را به شکل $TpT^{-1} = p$ بنویسیم، مطلب روشنتر خواهد شد، یعنی p تحت خودریختی T ثابت می‌ماند. دستاورد عمیق گالوا در نظریهٔ حل معادلات چندجمله‌ای، این بود که نشان داد چگونه از تقارنهای مربوطه بهره‌برداری شود.

گونه‌ای از این استدلال برای حل معادلهٔ $F(x) = c$ نیز سودمند است. فرض کنید F با نگاشتی مانند T جابه‌جا می‌شود، $TF = FT$، و c تحت T ناورداست: $T(c) = c$. اگر x_0 جوابی برای $F(x) = c$ باشد، آنگاه x_0 لزوماً ناوردا نیست، اما $T(x_0)$ نیز یک جواب است. اگر به علاوه بدانید که جواب $F(x) = c$ یکتاست، آنگاه $T(x_0) = x_0$، یعنی این جواب x_0 تحت T ناورداست. در این‌جا سه مثال مشابه را مشاهده می‌کنید.

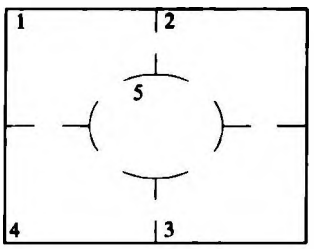
i) فرض کنید f یک همسانریختی کرهٔ $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ و

$$\varphi : (x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$$

تبدیلی تقارنی نسبت به صفحهٔ استوا باشند. و نیز فرض کنید $c \in S^2$ توسط φ ثابت نگاه داشته شود، یعنی $\varphi(c) = c$؛ پس c روی استوا، $z = 0$، قرار دارد. همچنین فرض کنید f و φ جابه‌جا شوند: $f \circ \varphi = \varphi \circ f$. اگر $f(p_0) = c$، آنگاه $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ نیز تحت φ ناورداست و در نتیجه p_0 نیز روی استوا قرار دارد. پس f استوا را به‌روی خودش می‌نگارد.

ii) در این مثال $u(x,t)$ جواب معادلهٔ موج $u_{xx} - u_{tt} = 0$ در بازهٔ $-1 \le x \le 1$ است. فرض کنید u در شرایط مرزی $u(-1,t) = u(1,t) = 0$ صدق کند. اگر مکان اولیهٔ $u(x,0)$ و سرعت اولیهٔ $u_t(x,0)$ هر دو تابعهایی زوج باشند، یعنی تحت نگاشت $T : x \to -x$ ناوردا باشند، آنگاه جواب $u(x,t)$ نیز چنین است. این امر نتیجهٔ یکتایی جواب معادلهٔ موج با شرایط اولیهٔ داده شده می‌باشد.

یکتایی اثباتی ساده دارد. اگر u و v هر دو جوابهایی با مکان و سرعت اولیهٔ یکسان باشند، آنگاه $w := u - v$ نیز جوابی از معادلهٔ موج است، ولی $w(x,0) = w_t(x,0) = 0$. فرض کنید $E(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(w_t^2 + w_x^2)dx$ «انرژی» در زمان t باشد. با محاسبه‌ای که شامل یک انتگرالگیری جزءبه‌جزء



شکل۳

است، به‌دست می‌آید $\frac{dE}{dt} = 0$، پس $E(t) = E(0)$ (*بقای انرژی*). اما $E(0) = 0$، بنابراین به‌ازای هر t، $E(t) \equiv 0$. در نتیجه $w(x,t)$ ثابت است. چون $w(x,0) = 0$، پس $w(x,t) \equiv 0$، یعنی $u(x,t) \equiv v(x,t)$.

با استفاده از خطی‌بودن این مسأله، حتی بدون برقراری یکتایی نیز می‌توانستیم جوابی ناوردا به‌دست آوریم. فرض کنید $\varphi(x,t)$ جوابی دلخواه باشد. چون $T^2 = I$، پس میانگین $u := \frac{1}{2}(\varphi + T\varphi)$ یک جواب ناورداست. این روش ساخت را می‌توان به‌کمک روش مهم میانگین‌گیری روی گروه تقارنها تعمیم داد. یکی از کاربردهای این در الکترواستاتیک، روش *تصویرهاست*.

iii) مثالی از زنجیر مارکوف. شما در یک آزمایش در «خانه»ای پنج اتاقی قرار گرفته‌اید؛ شکل ۳ را ببینید. در هر ساعت درها باز می‌شوند و شما باید از اتاق فعلی خود به یکی از اتاقهای مجاور نقل‌مکان کنید. با این فرض که اتاقها همگی از نظر میزان جذابیت یکسان هستند، چه درصدی از زمان را در هر اتاق خواهید گذراند؟

برای حل این مسأله، *ماتریس گذر* $M = (m_{ij})$، 5×5 برای این *زنجیر مارکوف* معرفی می‌شود: اگر در حال حاضر در اتاق j به سر می‌برید، m_{ij} احتمال آن است که دفعهٔ بعد در اتاق i باشید. می‌توان بررسی کرد که

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

اعضای M نامنفی هستند و مجموع هر ستون برابر ۱ است: اکنون هر کجا هستید، در مرحلهٔ بعد به یقین در یکی از اتاقها خواهید بود.

به‌کارگیری *بردارهای احتمالِ ستونی* $P = (p_1, \ldots, p_5)$ سودمند است؛ ویژگی این بردارها این است که p_j احتمال حضور در اتاق jاُم در یک زمان معین را به‌دست می‌دهد. بنابراین $0 \le p_j \le 1$ و $\sum p_j = 1$. اگر $P_{\text{حال}}$ نشاندهندهٔ احتمالهای مکان فعلی شما باشد، $P_{\text{بعدی}} = MP_{\text{حال}}$ احتمالهای مکان شما در بازهٔ زمانی بعدی را به‌دست می‌دهد. اگر کسی از اتاق ۱ شروع کند، آنگاه $P_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$ و پس از ساعت اول، $P_1 = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = MP_0$. به همین صورت در پایان ساعت دوم $P_2 := MP_1 = M^2 P_0$ و $P_k := MP_{k-1} = M^k P_0$.

در جستجوی احتمالهای درازمدت، این سؤال را مطرح می‌کنیم که آیا بردارهای احتمال $P_k = M^k P_0$، $k = 1, 2, \ldots$، *مستقل از بردار احتمال*

آغازی $P_\circ$ به سمت یک بردار «تعادل» مانند P همگرا می‌شوند؟ اگر چنین باشد، آنگاه به‌ویژه، $P = \lim M^{k+1}P_\circ = \lim MM^kP_\circ = MP$، یعنی $P = MP$. پس P یک بردار ویژهٔ M با مقدار ویژهٔ ۱ است.

هر چند $\lambda = 1$ همواره یک مقدار ویژهٔ M است (زیرا یک مقدار ویژهٔ M^* با بردار ویژهٔ $(1, \ldots, 1)$ است)، اما حد $M^kP_\circ$ همیشه وجود ندارد. برای مثال، این حد برای ماتریس گذر $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ مربوط به یک «خانهٔ» دواتاقی وجود ندارد. اگر $M = I$، آنگاه حد $M^kP_\circ$ وجود دارد اما از $P_\circ$ مستقل نیست. ولی اگر همهٔ اعضای M (یا توانی از M) مثبت باشند، حد $M^kP_\circ$ وجود دارد و از بردار احتمال آغازی $P_\circ$ مستقل است. ساده‌ترین اثباتی که من برای همگرایی سراغ دارم و در آن از فرض قطری‌پذیربودن M استفاده نمی‌شود، در [۲، ص ۲۵۷] است. در مثال ما همهٔ اعضای M^2 مثبت هستند. می‌ماند اینکه با حل $P = MP$، توزیع احتمال حدی P را پیدا کنیم.

اینجا، جایی است که می‌توانیم از تقارن استفاده کنیم. چون چهار اتاقِ گوشه‌ای یکسان هستند، M باید با ماتریسهای T_{ij} که احتمالهای حضور در اتاقهای گوشه‌ای، یعنی p_i و p_j، $1 \le i, j \le 4$، را با هم تعویض می‌کنند، جابه‌جا شود. چون $M(T_{ij}P) = T_{ij}MP = T_{ij}P$، مشاهده می‌کنیم که $T_{ij}P$ نیز یک بردار ویژهٔ احتمال با مقدار ویژهٔ $\lambda = 1$ است. بنابراین، به‌دلیل یکتاییِ این بردار ویژهٔ احتمال، $T_{ij}P = P$. پس «طبق تقارن» P دارای شکل ویژهٔ $P = (x, x, x, x, y)$ است که در آن $1 = \sum p_i = 4x + y$. حال دستگاه معادلات $P = MP$ تنها شامل دو مجهول x و y است. اولین معادلهٔ این دستگاه، $x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y$ است، یعنی $4x = 3y$. با توجه به $4x + y = 1$ به‌دست می‌آید $x = \frac{3}{16}$، $y = \frac{1}{4}$. بنابراین ۲۵٪ از زمان در اتاق مرکزی و ۱۸/۷۵٪ آن در هر یک از اتاقهای گوشه‌ای سپری می‌شود. تقارنْ محاسبه‌ای را که بالقوه می‌توانست شلوغ و درهم برهم باشد به محاسبه‌ای ساده تبدیل کرد.

شکل ۱ اطلاع بیشتری به‌دست می‌دهد. برای بهره‌گیری از تقارن، به دنبال تعویض متغیرهایی مانند T می‌گردیم به‌طوری که مسألهٔ قبلی $\mathscr{P}$ و مسألهٔ جدید Q یکسان باشند: $\mathscr{P} = T^{-1}\mathscr{P}T$.

ب) *ناوردایی تحت انتقال*. اگر خانواده‌ای از تقارنها موجود باشند، می‌توان اطلاعات بیشتری به‌دست آورد. ما این موضوع را ابتدا در مورد یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت چون $Lu = au'' + bu' + cu$ بررسی می‌کنیم. در اینجا L با *تمام عملگرهای انتقال* T_α که به‌صورت $(T_\alpha u)(x) := u(x + \alpha)$ تعریف می‌شوند جابه‌جا می‌شود، بنابراین به‌ازای هر αی مختلط، $T_\alpha L = LT_\alpha$. این انتقالها گروه پیوسته‌ای از تقارنها هستند: $T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}$. توابع ویژهٔ انتقالها، تابعهای نمایی هستند: $T_\alpha e^{cx} = \mu e^{cx}$ که در آن $\mu = e^{c\alpha}$. ادعا می‌کنیم که این تابعهای نمایی، توابع ویژهٔ L نیز می‌باشند. هر چند نشان دادن این موضوع به‌طور مستقیم کار ساده‌ای است، ما در حالت کلیتر درستی آن را برای هر نگاشت خطی L که با تمام انتقالها جابه‌جا می‌شود اثبات می‌کنیم؛ معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت و معادلات دیفرانسیل جزئی خطی با ضرایب ثابت نمونه‌های دیگری از این قبیل هستند.

می‌نویسیم $q(x; \lambda) = Le^{\lambda x}$. چون $T_\alpha e^{\lambda x} = e^{\lambda\alpha}e^{\lambda x}$، داریم

$$T_\alpha Le^{\lambda x} = T_\alpha(q(x; \lambda)) = q(x + \alpha; \lambda)$$

و

$$LT_\alpha(e^{\lambda x}) = e^{\lambda\alpha}Le^{\lambda x} = e^{\lambda\alpha}q(x; \lambda)$$

با مقایسهٔ اینها در $x = 0$، مشاهده می‌کنیم که اگر نگاشت خطی L با انتقالها جابه‌جا شود، آنگاه به‌ازای هر α، $q(\alpha; \lambda) = q(0; \lambda)e^{\lambda\alpha}$؛ به‌عبارت دیگر، $q(x; \lambda) = q(0; \lambda)e^{\lambda x}$. اگر بنویسیم $Q(\lambda) := q(0; \lambda)$، نتیجه می‌گیریم

$$Le^{\lambda x} = Q(\lambda)e^{\lambda x} \qquad (16)$$

پس به‌ازای هر λ، $e^{\lambda x}$ یک تابع ویژهٔ L است و مقدار ویژهٔ متناظر با آن برابر $Q(\lambda)$ می‌باشد.

به‌طور صوری، از (۱۶) برای پیداکردن جوابی از $Lu = f$ استفاده می‌کنیم. می‌نویسیم $f(x) = \sum f_\lambda e^{\lambda x}$ و به دنبال جوابی چون u به‌صورت $u(x) = \sum u_\lambda e^{\lambda x}$ می‌گردیم. با استفاده از (۱۶)، $Lu = \sum u_\lambda Q(\lambda)e^{\lambda x}$. برای حل معادلهٔ همگن $Lu = 0$، λ را برابر یکی از ریشه‌های $Q(\lambda)$ می‌گیریم. در مورد معادلهٔ ناهمگن $Lu = f$ ضرایب را تطبیق می‌دهیم و نتیجه می‌گیریم $u_\lambda = f_\lambda/Q(\lambda)$. پس $u(x) = \sum[f_\lambda/Q(\lambda)]e^{\lambda x}$ یک جواب است. در این فرمولها می‌توان سریها/انتگرالهای استاندارد فوریه و روشهای تبدیل لاپلاس را بازشناخت. به‌همین دلیل است که سریهای فوریه و تبدیلهای فوریه و لاپلاس این همه در معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت سودمند هستند. مقدار $Q(\lambda)$ برای هر مسأله به‌طور جداگانه تعیین می‌شود. چون $Q(\lambda)$ در مخرج جواب ظاهر می‌شود، صفرهای آن نقش مهمی ایفا می‌کنند. نکته این است که فقط با استفاده از ناوردایی تحت انتقال، می‌دانیم چگونه جلو برویم.

برای اینکه کاربردی فوری از این موضوع را ببینیم، به حالت خاص $Lu = au'' + bu' + cu$ که a و b و c ثابت هستند بازمی‌گردیم. در اینجا $Le^{\lambda x} = (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x}$، بنابراین $Q(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$. به‌ویژه اگر $Q(r) = 0$، آنگاه $u = e^{rx}$ جواب معادلهٔ همگن $Lu = 0$ است؛ حال آنکه اگر $Q(r) \neq 0$، آنگاه $u(x) = e^{rx}/Q(r)$ یک جواب خصوصی معادلهٔ ناهمگن $Lu = e^{rx}$ می‌باشد. اگر $Q(r) = 0$ ولی $Q'(r) \neq 0$، آنگاه با مشتقگیری از (۱۶) نسبت به λ و محاسبهٔ مقدار آن در $\lambda = r$ می‌توان $Lu = e^{rx}$ را حل کرد. به‌همین نحو، اگر r یک ریشهٔ دوگانهٔ $Q(\lambda) = 0$ باشد آنگاه همچنین $Q'(r) = 0$؛ در اینجا مشتقگیری از (۱۶) نسبت به λ و محاسبهٔ مقدار آن در $\lambda = r$ مشخص می‌کند که $u(x) = xe^{\lambda x}$ نیز یک جواب معادلهٔ همگن است، واقعیتی که در درسهای معادلات دیفرانسیل مقدماتی، غالباً برای دانشجو گیج‌کننده است.

یک تفاوت فرهنگی جالب توجه در نحوهٔ نوشتن جواب عمومی $u'' + u = 0$ بین ریاضیدانان و فیزیکدانان وجود دارد. ریاضیدانان می‌نویسند $u(x) = A\cos x + B\sin x$، که بر خطی‌بودن فضای جوابها

تأکید می‌کند در حالی‌که فیزیکدانان می‌نویسند $u(x) = C\cos(x+\alpha)$، که برناوردایی تحت انتقال تأکید می‌ورزد.

به‌عنوان تمرین، از ناوردایی تحت انتقال استفاده کرده، نظریه‌ای برای معادلات تفاضلی خطی مرتبهٔ دو با ضرایب ثابت

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = f(n)$$

ارائه دهید. دنبالهٔ فیبوناتچی $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ با شرایط اولیهٔ $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$، یک حالت خاص است.

ناوردایی تحت عمل ضرب $x \mapsto cx$ با ناوردایی تحت انتقال ارتباط نزدیکی دارد: اگر قرار دهیم $x = e^z$، آنگاه با انتقال‌دادن z، x در مقداری ثابت ضرب می‌شود. با توجه به این نکته، می‌توان به بررسی عملگر دیفرانسیل اویلر $Lu = \alpha x^2 u'' + \beta x u' + \gamma u$ پرداخت که با عملگر تجانسی $x \mapsto cx$ جابه‌جا می‌شود. در اینجا تبدیل مشابه تبدیل فوریه تبدیل مِلین[1] نامیده می‌شود.

عملگر لاپلاس در فضای اقلیدسی تحت انتقالها و تبدیلهای متعامد ناورداست؛ روی یک خمینهٔ ریمانی، لاپلاسین تحت تمام طولاپاییها[2] ناورداست. معادلهٔ موج تحت تبدیلات لورنتس ناورداست (انتهای این بخش را ببینید). نکتهٔ اساسی این است که ناوردایی تحت یک گروه، خودبه‌خود فرمولهایی بنیادی را به دنبال دارد.

پ) *ناورداییهای پیچیده‌تر تحت گروهها.* در مسائل پیچیده‌تر ممکن است تقارنی وجود داشته باشد که تشخیص یا به‌کار بردن آن بدیهی نباشد. سوفوس لی نظریه‌ای را که ما اکنون گروههای لی می‌نامیم خلق کرد تا از تقارن در حل معادلات دیفرانسیل بهره گیرد. نظر وی تعمیم نظریهٔ گالوا به معادلات دیفرانسیل بود. نظریهٔ به‌دست آمده در سرتاسر ریاضیات فوق‌العاده اهمیت پیدا کرده است. به‌عنوان اولین مثال، ملاحظه کنید که معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax^2 + by^2}{cx^2 + dy^2} \qquad a، b، c، d \text{ ثابت}$$

تحت تعویض متغیر (تجانس) $x \mapsto \lambda x$، $y \mapsto \lambda y$ به‌ازای هر مقدار $\lambda > 0$ ناورداست. به‌عبارت دیگر، اگر $y = \varphi(x)$ یک جواب باشد، آنگاه $\lambda y = \varphi(\lambda x)$ نیز چنین است، یعنی $y = \varphi(\lambda x)/\lambda$. این موضوع ما را به فکر می‌اندازد که متغیر جدیدی وارد کار کنیم که تحت این تجانس ناورداست: $w = \frac{y}{x}$. در این صورت w در معادلهٔ $xw' = (a+bw^2)/(c+dw^2) - w$ صدق می‌کند که با جداسازی متغیرها قابل حل است. معادلهٔ $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+p}{cx+dy+q}$ دارای تقارنی از نوع تجانس نسبت به نقطهٔ تقاطع خطهای $ax+by+p = 0$ و $cx+dy+q = 0$ است. لی نشان داد بسیاری از فرمولهای پیچیدهٔ موجود برای حل معادله‌های دیفرانسیل، نمونه‌های خاصی از ناوردایی تحت گروهی از تقارنها هستند. کارهای او نشان داد که بسیاری از شگردهای ترساننده که باعث باختن روحیهٔ دانشجویان کارشناسی می‌شود نمونه‌هایی از بهره‌گیری از تقارن هستند. مثال بعدی چندان ساده نیست، بنابراین اندکی باقاعده‌تر عمل خواهیم کرد.

معادله‌های غیرخطی به شکل $\Delta u = f(x,u)$ به‌کرات در کاربردها پیش می‌آیند. برای نمونه، حالتهای خاصی که در آنها $f(x,u)$ به شکل $|x|^a u^b$ و $|x|^c e^u$ است در اختر فیزیک (معادلهٔ اِمدن-فاولر[1])، آنالیز مختلط و هندسهٔ ریمانی همدیس پیش می‌آیند. ما به اختصار دربارهٔ

$$\Delta u = |x|^c e^u \qquad (۱۷)$$

در $\mathbb{R}^n$ از نظر تقارن بحث می‌کنیم. هرچند رهیافتهایی اصولی برای جستجوی تقارن وجود دارد، در عمل معمولاً سعی می‌کنند حدس بزنند؛ اگر پیداکردن تقارنها به همان سختی حل مسألهٔ اولیه باشد، این روش هیچ کمکی نمی‌کند.

از سمت راستِ (۱۷) چنین برمی‌آید که باید به دنبال گروه تقارنی به شکل $G : (x,y) \mapsto (\alpha x, u+\lambda)$ بگردیم، یعنی تعویض متغیرهای $\tilde{x} = \alpha x$ و $\tilde{u} = u + \lambda$ را که در آن $\alpha > 0$ و λ ثابت هستند امتحان کنیم. فرض کنید $\tilde{\Delta} = \partial^2/\partial\tilde{x}_1^2 + \ldots = \alpha^{-2}\Delta$ لاپلاسین نسبت به این متغیرهای جدید باشد. در این صورت $\tilde{u}(\tilde{x})$ جوابی از $\tilde{\Delta}\tilde{u} = [\alpha^{c+2}e^{\lambda}]^{-1}|\tilde{x}|^c e^{\tilde{u}}$ است. پس اگر بگیریم $\alpha^{c+2}e^{\lambda} = 1$ و لذا $\lambda = -(c+2)\ln\alpha$، آنگاه $\tilde{u}(\tilde{x})$ به‌ازای هر مقدار α یک جواب (۱۷) خواهد بود. به‌عبارت دیگر اگر $u = \varphi(x)$ یک جواب باشد، آنگاه $u(x) - (c+2)\ln\alpha = \varphi(\alpha x)$ نیز چنین است، یعنی به‌ازای هر $\alpha > 0$، $u(x) = \varphi(\alpha x) + (c+2)\ln\alpha$. گروه تقارن عبارت است از $G_\alpha : (x,u) \mapsto (\alpha x, u - (c+2)\ln\alpha)$. این به‌ازای $\alpha = 1$ نگاشت همانی است.

برای ادامهٔ بحث، یادآوری می‌کنیم که لاپلاسین تحت گروه متعامد ناورداست: اگر $u(x)$ یک جواب باشد، $u(Rx)$ نیز برای هر تبدیل متعامد R چنین است. بنابراین معقول است به دنبال جوابهای خاصی به شکل $u = u(r)$، با $r = |x|$ بگردیم که تحت گروه متعامد ناوردا هستند. با نوشتن لاپلاسین در مختصات کروی به

$$u'' + \frac{n-1}{r}u' = r^c e^u$$

می‌رسیم که در آن $u' = du/dr$. می‌دانیم که این معادله تحت تعویض متغیرهای

$$\tilde{r} = \alpha r\ ,\ \tilde{u} = u - (c+2)\ln\alpha \qquad (۱۸)$$

ناورداست. به‌ازای r و uی ثابت، وقتی α را تغییر می‌دهیم، (۱۸) خمی در صفحهٔ $\tilde{r}$، $\tilde{u}$ تعریف می‌کند. طبیعی است مختصات جدیدی تعریف کنیم که در آن این خمها خطهای راستی مثلاً موازی با محور قائم باشند. ما یک تابع $s = s(\tilde{r}(r,u,\alpha), \tilde{u}(r,u,\alpha)) = s(\alpha r, u - (c+2)\ln\alpha)$ می‌خواهیم که روی هر یک از این خمها ثابت باشد؛ این توابع برای انتخاب خمی که روی آن قرار داریم به‌کار می‌رود. تابع دیگر

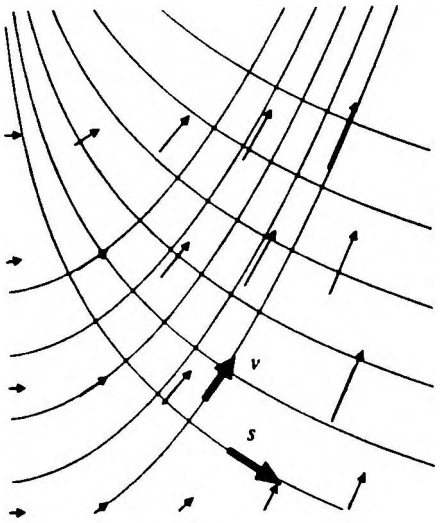
$$v = v(\tilde{r}(r,u,\alpha), \tilde{u}(r,u,\alpha)) = v(\alpha r, u - (c+2)\ln\alpha)$$

به‌عنوان یک پارامتر نرمال‌شده روی این خمها به‌کار می‌رود و طوری انتخاب می‌شود که مشتق سویی v در طول این خمها برابر یک باشد؛ شکل ۴ را ببینید. بنابراین، شرایط عبارت‌اند از

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=1} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=1} = 1 \qquad (۱۹)$$

1. Mellin 2. isometries

1. Emden-Fowler



شکل۴

به کمک قاعدهٔ زنجیری می‌توان اینها را به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$rs_r - (c+2)s_u = 0, \quad rv_r - (c+2)v_u = 1 \qquad (20)$$

که در آن s_r و غیره، مشتقهای جزئی هستند. با استفاده از میدان برداری مماس V بر این خمها داریم

$$V := \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=1}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=1}\frac{\partial}{\partial u} = r\frac{\partial}{\partial r} - (c+2)\frac{\partial}{\partial u}$$

می‌توانیم (۲۰) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$Vs = 0, \qquad Vv = 1$$

V را *مولد بینهایت کوچکِ تقارن* می‌نامند. در این مختصات جدید، با انتگرالگیری از (۱۹)، ناوردایی (۱۸) چنین می‌شود

$$\tilde{s} = s, \qquad \tilde{v} = v + \alpha \qquad (21)$$

یک جواب خاص بدیهی برای معادلهٔ دومِ (۲۰)، $v = \ln r$ است؛ یک جواب بدیهی دیگر $v = -u/(c+2)$ است که آن هم صادق است.

حل معادلهٔ اول (۲۰) سرراست است. رهیافت متعارف برای حل $a(x,y)\psi_x + b(x,y)\psi_y = 0$ و یافتن $\psi(x,y)$، عبارت است از حل معادلهٔ دیفرانسیل عادی $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$ و نوشتن جواب آن به شکل $\psi(x,y) = C$، که C ثابت انتگرالگیری است. این $\psi(x,y)$ جواب این معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقهای جزئی است، همان‌طورکه هر تابعی از آن نیز چنین است. در کاربرد مورد نظر ما جواب $\frac{du}{dr} = -(c+2)/r$ عبارت است از $u = -(c+2)\ln r + C$ و در نتیجه $s := \psi(r,u) = u + (c+2)\ln r$. [رهیافتی دیگر برای به‌دست آوردن $s(r,u)$ این است: α را از معادله‌های (۱۸) حذف کرده به‌دست آورید: $\tilde{u} + (c+2)\ln\tilde{r} = u + (c+2)\ln r$. پس تابع $s = (c+2)\ln r + u$ در طول هر یک از این خمها ثابت است]. چون هر تابعی از s نیز همین ویژگی را دارد، می‌توان از این انعطاف‌پذیری بهره جست و یک s «ساده» انتخاب کرد. در این مختصات جدید، $s = u + (c+2)\ln r$، $v = \ln r$. پس از محاسباتی که بدون زحمت هم نیست، متوجه می‌شویم که $v(s)$ در

$$\ddot{v} = (n-2)[1-(c+2)\dot{v}]\dot{v}^2 - e^s\dot{v}^3$$

صدق می‌کند که $\dot{v} = dv/ds$ و $\ddot{v} = d^2v/ds^2$. چون این معادله شامل خود v نیست، با جایگذاری $w = \dot{v}$ معادله‌ای از مرتبهٔ *اول* برحسب $w(s)$ به‌دست می‌آید. وقتی $n = 2$، یعنی درست در حالتی‌که از نظر کاربردی مورد توجه است، این معادله به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌شود.

یک تمرین مفید، تکرار این تحلیل برای $\Delta u = |x|^a u^b$ در $\mathbb{R}^n$ و توجه به این نکته است که معادلهٔ به‌دست آمده، وقتی $\frac{a+2}{b-1} = \frac{n-2}{2}$، یعنی باز هم در حالتی‌که از لحاظ کاربرد در فیزیک و هندسه مهم است، به‌طور چشمگیری ساده می‌شود. با استفاده از تقارن می‌توان مسائلی را حل کرد که بدون آن حل‌ناپذیرند.

یکی از کاربردهای تحسین‌برانگیز تقارن، محاسبهٔ انرژیِ اولین انفجار اتمی توسط تیلر[1] بود که تنها با بهره‌گیری از تقارن و براساس اندازه‌گیری‌هایی صورت گرفت که از روی عکسهایِ در دسترس همگان انجام شده بود. برای ملاحظهٔ شرحی در این زمینه به [۳، فصل ۱] مراجعه کنید. مرجعهای [۳] و [۱۴] چگونگی بهره‌گیری از تقارن در معادلات دیفرانسیل عادی و جزئی را نشان می‌دهند.

ت) *قضیهٔ نوتر.* بیشتر معادله‌های دیفرانسیل «طبیعی» به‌صورت معادلات اویلر-لاگرانژ در حساب وردشها ظاهر می‌شوند. درواقع، خیلیها بر این باورند که همواره باید معادلات بنیادی را با استفاده از اصول وردشی صورتبندی نمود. قضیهٔ امی نوتر نشان می‌دهد که چگونه از ناوردایی تقارنیِ یک مسألهٔ وردشی، اتحادهای اساسی ازجمله قوانین جدید بقا نتیجه می‌شود. هر چند بعد از دانستن اینکه چه چیزی را باید ثابت کرد می‌توان اثباتهای مستقیم و کوتاهتری برای این قوانین بقا پیدا کرد، طبق یک نظر، تقارن بسیار عمیقتر و بنیادیتر است. به‌علاوه، تقارن روشی برای پیداکردن قوانین جدید بقا در اختیار می‌گذارد. رک. [۶]، [۷]، [۳]، و [۱۴].

ث) *استفاده از تقارن در معادلهٔ پل*[2]. در اینجا راه دیگری برای استفاده از تقارن را مشاهده می‌کنید. می‌خواهیم همهٔ جوابهای صحیح معادلهٔ

$$x^2 - 2y^2 = 1 \qquad (22)$$

را بیابیم. با امتحان کردن می‌توانید فوراً جواب $x = 3$، $y = 2$ را پیدا کنید. آیا جوابهای دیگری هم هست؟ آیا می‌توانید همهٔ جوابها را پیدا کنید؟ این جوابها نقاطی از شبکهٔ اعداد صحیح هستند که روی هذلولی (۲۲) قرار دارند.

می‌نویسیم $X := (x,y)$، $Q(X) := x^2 - 2y^2$ و به جستجوی تقارنی برای هذلولی $Q(X) = 1$ می‌پردازیم که به شکل یک تعویض متغیر خطی $R : (x,y) \mapsto (ax+by, cx+dy)$ باشد و با ماتریس $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ تعریف شده باشد. می‌خواهیم R دارای ویژگی $Q(RX) = Q(X)$ باشد؛ به بیانی صوریتر، به دنبال گروه خودریختی‌های (R) فرم درجهٔ دوم Q هستیم. اگر بتوانیم R را پیدا کنیم و اگر یک جواب $X_1 = (x_1, y_1)$ از $Q(X) = 1$ را داشته باشیم، آنگاه $X_2 := RX_1 = (ax_1 + by_1, cx_1 + dy_1)$ جوابی

1. G. I. Taylor 2. Pell

دیگر است، زیرا $Q(X_2) = Q(RX_1) = Q(X_1) = 1$. بنابراین، شناختن R به ما این امکان را می‌دهد که از روی جوابهای قبلی جوابهای جدید بسازیم.

این خودریختی‌های R، تقارنهای چندجمله‌ای $Q(X)$ را دربرمی‌گیرند، همان‌طورکه دورانهای T (تبدیلهای متعامد) دربرگیرندهٔ تقارنهای چندجمله‌ای آشناتر $P(X) := x^2 + y^2$ هستند زیرا $P(TX) = P(X)$. اگر X_1 نقطه‌ای روی دایره‌ای به مرکز مبدأ باشد، آنگاه $X_2 := TX_1$ نقطهٔ دیگری روی همان دایره است.

در مورد چندجمله‌ای درجهٔ دوم ما تقارنهای بدیهی، $x \mapsto \pm x$ و $y \mapsto \pm y$ هستند. ولی ما بیش از این می‌خواهیم. چون

$$\begin{aligned} Q(RX) &= (ax+by)^2 - 2(cx+dy)^2 \\ &= (a^2 - 2c^2)x^2 + 2(ab - 2cd)xy + (b^2 - 2d^2)y^2 \end{aligned}$$

شرط $Q(RX) = Q(X)$ به این معنی است که $a^2 - 2c^2 = 1$، $ab - 2cd = 0$ و $b^2 - 2d^2 = -2$. اگر a و c را طوری بگیریم که در شرط اول که همان معادلهٔ اصلی (۲۲) است صدق کنند، آنگاه از دو شرط باقی‌مانده نتیجه می‌شود $d = \pm a$ و $b = \pm 2c$. از اینجا همهٔ تقارنهای R چندجمله‌ای درجهٔ دوممان به‌دست می‌آیند.

برای مقاصدی که ما داریم، استفاده از جواب $(3,2)$ که برای (۲۲) پیدا کردیم کفایت می‌کند؛ بنابراین $a = 3$، $c = 2$، $b = 4$، $d = 3$ و $R = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. ما از جواب $X_1 := (x_1, y_1) = (3,2)$ شروع کردیم. با استفاده از این جواب، جوابهای $X_2 = RX_1 = (17,12)$، $X_3 = RX_2 = (99,70)$ و غیره را برای (۲۲) پیدا می‌کنیم. چون $\det R = 1$ و اعضای R اعداد صحیح هستند، هم تقارن R و هم معکوس آن R^{-1} نقاط شبکهٔ اعداد صحیح را به نقاط شبکهٔ اعداد صحیح می‌برند.

نگاشت R دو ویژگی مهم هندسی دارد. برای تشریح آنها، دو نقطهٔ $V_1 := (x_1, y_1)$ و $V_2 := (x_2, y_2)$ روی شاخهٔ سمت راست $(x > 0)$ هذلولی $x^2 - 2y^2 = 1$ در نظر می‌گیریم. این شاخهٔ سمت راست را Γ نامیده می‌گوییم V_1 در *پایین* V_2 است (می‌نویسیم $V_1 \prec V_2$) اگر $y_1 < y_2$. ویژگیهای هندسی اینها هستند:

- R *شاخه را حفظ می‌کند*: اگر نقطه‌ای چون V روی Γ باشد، آنگاه RV نیز چنین است.
- R *ترتیب را روی* Γ *حفظ می‌کند*: اگر $V_1 \prec V_2$ آنگاه $RV_1 \prec RV_2$.

توجه کنید که R^{-1} نیز این ویژگیها را دارد. چون R نگاشت پیوسته‌ای از هذلولی به خودش است، به‌دلیل همبندی، شاخهٔ سمت راست یعنی Γ را به خودش یا به شاخهٔ سمت چپ می‌نگارد. با امتحان‌کردن تصویر یک نقطه، مثلاً $(1,0)$ مشاهده می‌کنیم که تصویر در Γ است. به‌علاوه چون R به‌عنوان نگاشتی از تمام صفحه وارونپذیر است، تحدید آن به Γ نیز وارونپذیر است. بنابراین R به‌عنوان تابعی از مختصهٔ y روی Γ به‌طور یکنوا صعودی یا نزولی است. باز هم با امتحان‌کردن تصویر $(1,0)$ نتیجه می‌گیریم که تحدید R به Γ تابعی صعودی از مختصهٔ y است. این نشان می‌دهد که R ترتیب را روی Γ حفظ می‌کند.

جواب خاص $X_1 := (3,2)$ جواب صحیح مثبتی با کوچکترین مقدار ممکن مثبت برای y_1 است. اگر بنویسیم $X_0 = (1,0)$، این بدان معنی است که $X_0 \prec X_1$ و هیچ جواب صحیح دیگری بین X_0 و X_1 وجود ندارد. چون $Q(RX_1) = Q(X_1) = 1$، ملاحظه می‌کنیم که $X_2 := RX_1 = (17,12)$ نیز جوابی برای (۲۲) است. به‌همین صورت $X_k := (x_k, y_k) = RX_{k-1} = R^k X_0$ به‌ازای هر عدد صحیح مثبت k، جواب صحیح مثبت است. این جوابها از یکدیگر متمایزند زیرا مختصهٔ y آنها صعودی است، بنابراین $X_k \prec X_{k+1}$.

به‌علاوه، اینها *تمام* جوابهای صحیح مثبت هستند. اگر جواب دیگری مانند Z وجود داشته باشد، آنگاه به‌ازای kی مناسبی خواهیم داشت $X_k \prec Z \prec X_{k+1}$. بنابراین $R^{-1}Z$ هم یک جواب دیگر است و چون R ترتیب نقاط روی هذلولی را حفظ می‌کند

$$X_{k-1} = R^{-1}X_k \prec R^{-1}Z \prec R^{-1}X_{k+1} = X_k$$

با ادامهٔ این روند، جوابی چون $R^{-k}Z$ بین X_0 و X_1 به‌دست می‌آوریم، زیرا

$$X_0 = R^{-k}X_k \prec R^{-k}Z \prec R^{-k}X_{k+1} = X_1$$

این موضوع با این واقعیت که $X_1 = (x_1, y_1) = (3,2)$ جواب مثبتی بود که مختصهٔ دوم آن تا حد امکان کوچک بود ناسازگار است. نتیجه می‌گیریم که $Z = R^k X_0$، یعنی *مدار* X_0 پس از عمل مکرر R، تمام جوابهای صحیح را به‌دست می‌دهد.

ماتریس R^k را می‌توان با قطری‌کردن آن به‌طور صریح محاسبه کرد. با این‌کار به‌دست می‌آید $R^k = S\Lambda^k S^{-1}$، که در آن Λ ماتریس قطری مربوط به مقدارهای ویژهٔ R، $3 \pm 2\sqrt{2}$ است و S ماتریسی است که ستونهای آن بردارهای ویژهٔ متناظر، یعنی $(\pm\sqrt{2}, 1)$ هستند؛ این بردارها مجانبهای هذلولی را نیز مشخص می‌کنند. پس $X_k = R^k X_0$ از فرمول صریح زیر به‌دست می‌آید

$$X_k = \left(\frac{(3+2\sqrt{2})^k + (3-2\sqrt{2})^k}{2}, \frac{(3+2\sqrt{2})^k - (3-2\sqrt{2})^k}{2\sqrt{2}}\right) \tag{۲۳}$$

فرمول بالا نشان می‌دهد که چنین فرمولهایی ممکن است پیچیده‌تر ــ و شاید کم‌فایده‌تر ــ از آنچه انتظار دارید باشند. بیشتر فایدهٔ این فرمول در این است که به تعریف R^t برای $-\infty < t < \infty$، به‌صورت $R^t = S\Lambda^t S^{-1}$ می‌انجامد، بنابراین $R^{s+t} = R^s R^t$.

با استفاده از محاسبه‌ای مشابه، پیداکردن تمام تعویض متغیرهای خطی $x' = \alpha x + \beta t$ و $t' = \gamma x + \delta t$ که عملگر موج $\partial^2/\partial t^2 - c^2\partial^2/\partial x^2$ را حفظ می‌کنند، کاری سرراست است. در اینجا c مقداری ثابت است (سرعت صورت یا نور). طبق قاعدهٔ زنجیری داریم

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} = (\delta^2 - c^2\gamma^2)u_{t't'} &+ 2(\beta\delta - c^2\alpha\gamma)u_{x't'} \\ &+ (\beta^2 - c^2\alpha^2)u_{x'x'} \end{aligned}$$

بنابراین می‌خواهیم $\delta^2 - c^2\gamma^2 = 1$، $\beta\delta - c^2\alpha\gamma = 0$ و $\beta^2 - c^2\alpha^2 = -c^2$. ابتدا γ و δ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\delta^2 - c^2\gamma^2 = 1$، سپس قرار می‌دهیم $\alpha = \pm\delta$، $\beta = \pm c^2\gamma$. برای اینکه جهت حفظ شود علامتهای $+$ را به‌کار می‌بریم. چون $c^2\alpha^2 - \beta^2 = c^2$ و $\cosh^2\sigma - \sinh^2\sigma = 1$،

مرسوم است که بنویسیم $\alpha = \cosh\sigma$، $\beta = c\sinh\sigma$. به‌ازای هر σی حقیقی تبدیلی که عملگر موج را حفظ می‌کند عبارت است از

$$x' = (\cosh\sigma)x + (c\sinh\sigma)t$$
$$t' = (\frac{1}{c}\sinh\sigma)x + (\cosh\sigma)t \qquad (۲۴)$$

این را *تبدیل لورنتس* می‌نامند. تبدیلهای لورنتس، طول قوس $ds^2 := dx'^2 - c^2dt'^2 = dx^2 - c^2dt^2$ را نیز در فضا-زمان حفظ می‌کنند و در مطالعهٔ عملگر موج و نسبیت خاص اهمیت اساسی دارند.

در نسبیت خاص، تعویض پارامتر σ در (۲۴) با پارامتر دیگری که از نظر فیزیکی معنی‌دارتر باشد، روشنگر و آموزنده است. اگر محور x با سرعت ثابت V نسبت به محور x' حرکت کند، برای ناظری که روی محور x' است، $x'/t' = V$ سرعت ثابت مبدأ $x = 0$ بر محور x است. اما با قراردادن $x = 0$ در (۲۴) داریم

$$V = \frac{x'}{t'} = c\tanh\sigma$$

پس

$$\cosh\sigma = 1/\sqrt{1-(V/c)^2} \text{ و } \sinh\sigma = (V/c)/\sqrt{1-(V/c)^2}$$

با استفاده از این می‌توانیم تبدیل لورنتس (۲۴) را برحسب سرعت V به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$x' = \frac{x+Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \qquad t' = \frac{(V/c^2)x+t}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \qquad (۲۵)$$

۳. چند روش برای اثبات وجود

روشهای مختلفی برای رسیدن به وجود جواب یک معادله در دست است. ابتدا باید سعی نمود بیانی «ساده» برای جواب پیدا کرد. شاید این‌کار به کمک برخی از روشهایی که تا اینجا مورد بحث قرار گرفتند ممکن باشد. در بحث زیر فرض می‌شود این‌کار تا جای ممکن انجام شده است.

دو نوع روش برای رسیدن به وجود در دست است: روشهایی که جواب مشخصی را می‌سازند و آنهایی که فقط وجود یک جواب را اثبات می‌کنند. به‌عنوان مثال، دو رهیافت وجودی محض برای اثبات وجود جواب ارائه خواهم کرد. علاوه بر اینها فرض می‌کنم که خواننده با روشِ ساختنی متعارفِ تقریبهای متوالی که در آن از نقاط ثابتِ نگاشتهای انقباضی استفاده می‌شود آشناست. این روش در منابع بسیاری ارائه شده است و باید پیش از اینها امتحان شود. گفتهٔ هرمان وایل را به خاطر بیاورید که «وقتی می‌توانید مسأله‌ای را با روشهای ساختنیِ صریح حل و فصل کنید، به استدلالهای وجودی محض رضایت ندهید.» در پرتو این گفته، تأمل دربارهٔ رهیافتهای ساختنی و غیرساختنی برای حل (پیمانهٔ $ax \equiv b(m$ که در بخش ۱.۲ مورد بحث قرار گرفتند مفید است.

۱.۳ روشهای وردشی. یک مثالْ مطلب را به‌روشنی نشان می‌دهد. فرض کنید می‌خواهیم دستگاه معادله‌های

$$x^3 + 2xy - 3y\cos x e^{\sin x} = -7$$
$$y^5 + x^2 - 3e^{\sin x} = 5$$

را حل کنیم. آیا این دستگاه جواب دارد؟ بدون بصیرت بیشتر ممکن است جواب این پرسش بدیهی نباشد. اما این دو معادله بیانگر آن هستند که گرادیان تابع

$$u(x,y) := \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}y^6 + x^2y - 3ye^{\sin x} + 7x - 5y$$

صفر است. پس جوابهای معادلهٔ ما متناظرند با نقاط بحرانی $u(x,y)$. بدیهی است هر قدر از مبدأ دور شویم u بزرگتر می‌شود. بنابراین نقطه‌ای چون (x_0, y_0) وجود دارد که u مقدار مینیمم خود را در آن اختیار می‌کند. این مینیمم جوابی برای معادله‌هایمان به‌دست می‌دهد. مشخص‌کردن اینکه جوابهای دیگری هم هست یا نه نیازمند بررسی مفصلتری است.

این رهیافتْ تکنیک سودمندی است برای اثبات اینکه برخی از معادله‌های دیفرانسیل همیشه دست‌کم یک جواب دارند. این روش، «روش مستقیم در حساب وردشها» نامیده می‌شود. در بخش ۲.۲ دیدیم که جوابهای معادلهٔ لاپلاس $\Delta u = 0$ در یک ناحیهٔ Ω با شرط $u = f$ روی مرز Ω، نقاط بحرانی تابعک

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\int_{\Omega}(u_x^2 + u_y^2)dxdy \qquad (۲۵)$$

هستند. پیروِ مثال ابتدای این بخش، برای پیداکردن یک جواب $\Delta u = 0$، می‌توانیم در میان همهٔ تابعهایی که روی مرز با f برابرند به جستجوی مینیممی برای J بپردازیم. نامنفی‌بودن تابعک J باعث می‌شود شخص چنین حکم کند که J مینیمم خود را تابعی مانند u اختیار می‌کند و وجود جوابی برای $\Delta u = 0$ با مقادیر مرزیِ از پیش داده شده به اثبات می‌رسد. این حکم، *اصل دیریکله* نامیده می‌شود.

پس از اینکه ریمان به‌طور چشمگیری این استدلال را درکارش در آنالیز مختلط به‌کار برد، وایرشتراس خاطرنشان کرد که این «اصل» بدیهی نیست زیرا در مسائلی مشابه، تابعک Jی متناظر فقط دارای اینفیمم است و در ردهٔ تابعهای مجاز مقدار مینیممی اختیار نمی‌کند. با وجود این همگان — ازجمله وایرشتراس — بر این باور بودند که نتایج ریمان در اساس درست هستند. این موضوعْ عامل تسریع‌کننده‌ای در شفاف‌سازی مبانی آنالیز بود که در انتهای قرن نوزدهم انجام شد. ایراد وایرشتراس با کارهای هیلبرت در ۱۹۰۱ و ۱۹۰۹ رفع شد. در این زمینه، تذکر نیچه جالب توجه است: «خطاهای مردان بزرگ قابل احترام‌اند زیرا از کارهایِ درستِ مردان کوچک ثمربخش‌ترند.»

حساب وردشها روش قدرتمندی است برای اثبات جواب داشتن برخی معادله‌ها.

۲.۳ روشهای نقطهٔ ثابت. یک مثال دیگر. فرض کنید می‌خواهید دستگاه معادله‌های

$$3x - 5y = \frac{2x + ye^{2-\sin xy}}{7 + x^2 + y^4} - 13$$
$$2x + 71y = 9 - \cos(xy + 19e^{x-5y})$$

را حل کنید. آیا دست‌کم یک جواب وجود دارد؟ باز هم برای اغلب افراد این موضوع بدیهی نیست. شما به معادله‌ها نگاه می‌کنید ... معادله‌ها به شما نگاه می‌کنند.

سرانجام ممکن است به این فکر بیفتید که این را به شکل $LX = F(X)$ بنویسید که در آن $X = (x, y)$، L ماتریس ۲ × ۲ی سمت چپ است و $F(X)$ قسمت غیرخطیِ سمت راست است. نکتهٔ اساسی این است که تابع برداری $F(X)$ مستقل از X کراندار است. درواقع $||F(X)|| \leq ۱۰۰$ (مقدار کران برای ما اهمیتی ندارد). به‌علاوه ماتریس L وارونپذیر است، پس می‌توانیم معادله‌هایمان را به‌صورت نمادیِ $X = T(X)$ بازنویسی کنیم که در آن $T(X) = L^{-۱}F(X)$. اگر $T(X)$ را نگاشتی از صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ به خودش در نظر بگیریم، آنگاه معادلهٔ $X = T(X)$ به این معنی است که جواب X که دنبالش می‌گردیم یک *نقطهٔ ثابت* نگاشت T است. چون $||F(X)|| \leq ۱۰۰$، می‌دانیم که برای ثابتی مانند R که مستقل از X است، $||T(X)|| \leq R$. (می‌توانیم بگیریم $R = ۱۰۰۰۰$، اما این ارتباطی به چیزهایی که فعلاً مورد نظر ماست ندارد). پس یک نابرابری پیشینی[1] پیدا کرده‌ایم: اگر جوابی برای معادلهٔ ما وجود داشته باشد، باید در قرص بستهٔ $B = \{||X|| \leq R\}$ قرار داشته باشد. چون T هر نقطهٔ X را به توی B می‌نگارد، به‌ویژه خود B را هم به توی B می‌نگارد.

حال می‌توانیم قضیهٔ نقطهٔ ثابت براور را به‌کمک بطلبیم، قضیه‌ای که معمولاً در درسهای توپولوژی اثبات می‌شود. (برای ملاحظهٔ اثباتی زیرکانه با استفاده از قضیهٔ استوکس، [۵، ص ۷۵] را ببینید). قضیهٔ نقطهٔ ثابت براور چنین حکم می‌کند که هر نگاشت پیوسته از یک قرص بسته به خودش باید دست‌کم یک نقطهٔ ثابت داشته باشد. این نقطهٔ ثابت جوابی است که در جستجوی آن هستیم.

قضیهٔ نقطهٔ ثابت شاودر[2]، قضیهٔ براور را به فضاهایِ با بعد نامتناهی تعمیم می‌دهد. این تعمیم احتیاج به یک فرض اضافیِ فشردگی دارد. اگر B فضایی باناخ باشد و $S \subset B$، آنگاه نگاشت پیوستهٔ $T : S \to B$ فشرده است اگر به‌ازای هر مجموعهٔ کراندار $Q \subset S$، مجموعهٔ بستهٔ $\overline{f(Q)}$ فشرده باشد. برای مثال فضاهای باناخ $C(S^۱)$ و $C^۱(S^۱)$، یعنی توابع پیوستهٔ ۲πـتناوبی و توابع پیوسته‌ـمشتق‌پذیر تناوبی روی دایرهٔ $S^۱$ را با نرمهای معمولشان در نظر بگیرید:

$$||u||_{C(S^۱)} = \max_{۰ \leq x \leq ۲\pi} |u(x)|$$

و

$$||u||_{C^۱(S^۱)} = \max_{۰ \leq x \leq ۲\pi} |u(x)| + \max_{۰ \leq x \leq ۲\pi} |u'(x)|$$

شاید برای تأکید بر تناوبی‌بودن بایستی می‌نوشتیم تناوبیC . از قضیهٔ آرزلاـآسکولی[3] نتیجه می‌شود که نگاشت همانی $id : C^۱(S^۱) \hookrightarrow C(S^۱)$ فشرده است. قضیهٔ نقطهٔ ثابت شاودر می‌گوید که اگر $S \subset B$ مجموعه‌ای بسته، محدب و کراندار باشد و اگر $T : S \to S$ نگاشتی فشرده باشد، آنگاه T دارای نقطهٔ ثابت است [۱۳، ص ۳۲]. شاودر آن را به‌خصوص برای عملگرهای دیفرانسیل جزئی طراحی کرده بود. به‌عنوان کاربردی از آن، وجود دست‌کم یک جواب تناوبی $u(x)$ با دورهٔ تناوب ۲π برای

1. a priori 2. Schauder 3. Arzelá-Ascoli

$$u' + u = F(x, u)$$

را تنها با این فرض اثبات می‌کنیم که $F(x, s)$ تابعی هموار است، نسبت به x تناوبی با دورهٔ تناوب ۲π است و به‌طور یکنواخت کراندار است، یعنی $|F(x, s)| \leq k$، که ثابت k مستقل از x و s است.

یک نکتهٔ اساسی این است که معادلهٔ خطی $Lu = u' + u = f(x)$ به‌ازای هر تابع تناوبیِ هموار $f(x)$ یک جواب یکتای ۲πـتناوبی دارد. با محاسبه‌ای مستقیم به‌دست می‌آید

$$u(x) = \frac{۱}{e^{۲\pi} - ۱} \int_۰^{۲\pi} e^{t-x} f(t)dt + \int_۰^x e^{t-x} f(t)dt$$

(معادله را به‌صورت معمول نسبت به $u(x)$ حل کنید، سپس $u(۰)$ را چنان انتخاب کنید که u تناوبی باشد: $u(۲\pi) = u(۰)$). این فرمولْ نابرابری $||u||_{C(S^۱)} \leq ||f||_{C(S^۱)} = ||Lu||_{C(S^۱)}$ را نیز به‌دست می‌دهد. اما $|u'| = |Lu - u| \leq |Lu| + |u|$؛ پس براورد زیر را به‌دست می‌آوریم

$$||u||_{C^۱(S^۱)} \leq ۳||Lu||_{C(S^۱)} \qquad (۲۶)$$

این بدان معنی است که $L^{-۱} : C(S^۱) \to C^۱(S^۱)$ نگاشتی پیوسته است. مسألهٔ خود را به شکل $u = L^{-۱}F(x, u)$ بازنویسی می‌کنیم. پس در جستجوی یک نقطهٔ ثابت نگاشت $T(u) := L^{-۱}F(x, u)$ هستیم. چون T را به‌صورت ترکیب

$$C(S^۱) \xrightarrow{F} C(S^۱) \xrightarrow{L^{-۱}} C^۱(S^۱) \xrightarrow{id} C(S^۱)$$

تعریف کردیم، پس نگاشتی فشرده است. از آنجا که $F(x, s)$ کراندار است، به‌ازای یک ثابت K داریم

$$||T(u)||_{C(S^۱)} \leq K \quad \text{برای هر } u \in C(S^۱)$$

این به‌طور پیشینی ثابت می‌کند که هر جواب uی مسأله‌مان باید در $||u||_{C(S^۱)} = ||T(u)||_{C(S^۱)} \leq K$ صدق کند. فرض کنید S گوی زیر باشد

$$S := \{u \in C(S^۱) : ||u||_{C(S^۱)} \leq K\}$$

قضیهٔ شاودر نشان می‌دهد دست‌کم یک جواب تناوبی $u \in S$ وجود دارد و $u \in C^۱(S^۱)$. با یک استدلال موردی می‌توان نشان داد که اگر $F(x, s)$ هموار باشد، آنگاه جواب u نیز چنین است.

در مورد $Lu := -\Delta u + cu = F(x, u)$ به‌همراه شرایط مرزی مختلف نیز اگر فرض کنیم L وارونپذیر و F کراندار باشد نتیجهٔ مشابهی به‌دست می‌آید. اما برای اثبات یک نابرابری مشابه نابرابری اساسی (۲۶) باید از فضاهای تابعی پیچیده‌تری مانند فضاهای سوبولف استفاده شود.

۴. یک سؤالِ پاسخ داده نشده

وقتی یک مسألهٔ حل‌نشدهٔ به‌ظاهر مقدماتی در نظریهٔ اعداد می‌بینیم تعجب نمی‌کنیم. ولی خیلیها نمی‌دانند که بسیاری معادله‌های دیفرانسیل جزئی

غیرخطی جالب و به‌ظاهر ساده نیز هستند که در مورد آنها اطلاعات ناچیزی داریم؛ فرض کنید $f(x,y)$ تابعی هموار باشد. آیا معادلهٔ مونژ-آمپر

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^{2} = f(x,y) \qquad (۲۷)$$

همواره دست‌کم یک جواب $u(x,y)$ دارد؟ این سؤال، سؤالی معمولی است؛ هیچ شرط اضافی مانند شرایط اولیه یا مرزی وضع نشده است. با این حال هنوز پاسخ آن‌را نمی‌دانیم. بسیاری از حالتهای آن بررسی شده‌اند. اگر $f(x,y)$ دارای بسط سری توانی باشد، می‌توانیم قضیهٔ کوشی-کوالفسکایا را به‌کمک فراخوانده، جوابی به‌صورت سری توانی به‌دست آوریم. اگر $f(0,0) > 0$، می‌توانیم از نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیل جزئی بیضوی استفاده کرده، ثابت کنیم جوابی وجود دارد. اگر $f(0,0) < 0$ به نظریهٔ معادله‌های هذلولوی متوسل می‌شویم. حالت دشوار هنگامی است که $f(0,0) = 0$. این حالت نیز وقتی در نزدیکی مبدأ $f(x,y) \geq 0$، یا وقتی $\nabla f(0,0) \neq 0$، مورد بررسی قرارگرفته است. رک. [۱۱] و [۱۲]. در این باره چیز بیشتری نمی‌دانیم. شاید تابعهای همواری وجود داشته باشند که $f(0,0) = 0$ و در مورد آنها جوابی وجود نداشته باشد.

معادلهٔ دیفرانسیل مشابهی در هندسه مطرح می‌شود. به‌طور موضعی، رویهٔ دوبعدی مجرد با متریک ریمانی، یک همسایگی مبدأ در صفحهٔ u و v است که جزء طول قوس خمهای واقع در آن همسایگی به‌صورت زیر معین می‌شود

$$ds^{2} = E(u,v)du^{2} + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^{2} \qquad (۲۸)$$

با درنظر گرفتن خمهای $u(t)$ و $v(t)$ روی یک رویهٔ دوبعدی با مختصات موضعی u و v در $\mathbb{R}^n$، همواره طول قوسی به این شکل به‌دست می‌آورید. آیا با این کار تمام متریکهای ریمانی مجرد ممکن در حالت خاص رویه‌ها در $\mathbb{R}^3$ به‌دست می‌آید؟ به‌عبارت دیگر، اگر طول قوسی چون ds^2 به شکل (۲۸) داده شده باشد، آیا به‌طور موضعی همواره می‌توان رویه‌ای مثل $x = x(u,v)$، $y = y(u,v)$، $z = z(u,v)$ در $\mathbb{R}^3$ پیدا کرد که طول قوس آن همین ds^2 باشد؟ مختصرتر اینکه، آیا هر خمینهٔ ریمانی دوبعدی مجرد را می‌توان موضعاً به‌صورت طولپا در $\mathbb{R}^3$ نشانید؟ می‌توان نشان داد که در $\mathbb{R}^4$ رویه‌ای با این طول قوس وجود دارد، اما حالت جالبتر $\mathbb{R}^3$ هنوز حل و فصل نشده است. از دیدگاهی، معادلهٔ دیفرانسیل جزئیی که باید حل شود اصولاً همان (۲۷) است. در اینجا انحنای گاوسی $K(x,y)$ نقش تابع $f(x,y)$ را ایفا می‌کند، بنابراین می‌دانیم که اگر $K(0,0) \neq 0$، یک نشاندهٔ موضعی وجود دارد. حالت دشوار باقی‌مانده آن است که $K(0,0) = 0$.

چنین مسائلی مسائل مبارزطلب آینده هستند.

مراجع

1. V. I. Arnol'd, *The Theory of Singularities and its Applications*, Lezioni Fermiane, Accademia Nazionale del Lincei Scuola Normale Superiore, Pisa, published by the Press of the University Cambridge, England 1991.

2. R. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, 1960, reprinted (1995) by SIAM in their series "Classics in Applied Mathematics."

3. G. W. Bluman, and S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations*, Springer-Verlag, 1989, New York. Applied Mathematical Sciences **81**.

4. H. Davenport, *The Higher Arithmetic*, Harper and Row, New York, 1952 (6th edition published by Cambridge Univ. Press, 1992).

5. M. P. do Carmo, *Differential forms and Applications*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1994.

6. I. M. Gelfand, and S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Prentice Hall, 1963 (translated from the Russian).

7. M. Giaquinta, and S. Hildebrandt, *Calculus of Variations*, Grundlehren Vols. 310-311, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

8. M. Golubitsky, and D. G. Schaeffer, *Singularities and groups in bifurcation theory*, Applied mathematical sciences; 51, 69, Springer-Verlag, 1985, New York.

9. S. Hildebrandt, and A. Tromba, *The Parsimonious Universe*, Springer-Verlag, 1996, New York (an earlier version: *Mathematics and Optimal Form* was published in the Scientific American Library, 1985).

10. J. L. Kazdan, `http://www.math.upenn.edu/~kazdan/solving.html`.

11. C-S Lin, "The local isometric embedding in $\mathbf{R}^3$ of 2-dimensional Riemannian manifolds with nonnegative curvature", *J. Diff. Geom.* **21** (1985), 213-230.

12. C-S Lin, "The local isometric embedding in $\mathbf{R}^3$ of two-dimensional Riemannian manifolds with Gaussian curvature changing sign cleanly," *Comm. Pure Appl. Math.*, **39** (1986), 867-887.

13. L. Nirenberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, New York University Lecture Notes, 1974.

14. P. J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, 2nd ed., in the series Graduate texts in mathematics, **107**, Springer-Verlag, 1993, New York.

15. J. Walker, *Algebraic Curves*, Princeton Univ. Press, 1950, reprinted by R. Dover, 1962.

16. C. R. Wilie, and L. C. Barrett, *Advanced Engineering Mathematics*, 6th ed, McGraw-Hill, New York, 1995.

******

• Jerry L. Kazdan, "Solving equations, an elegant legacy", *Amer. Math. Monthly*, (1) **105** (1998) 1-21.

* جری کزدان، دانشگاه پنسیلوانیا، آمریکا

`kazdan@math.upenn.edu`

سموئل آیلنبرگ (۱۹۱۳-۱۹۹۸)

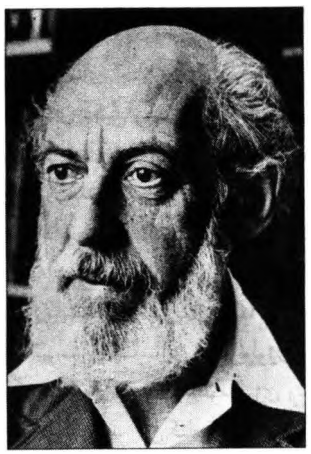
در شمارهٔ اول سال ۹ خبر درگذشت سموئل آیلنبرگ (Samuel Eilenberg) را با شرح کوتاهی دربارهٔ زندگی و کارهایش آوردیم. در اینجا دو نوشتهٔ مفصلتر در این باره به قلم دو ریاضیدان سرشناس، ساندرز مک‌لین (Saunders Mac Lane) و پیتر فراید (Peter Freyd) از نظرتان می‌گذرد. این نوشته‌ها از

Notices Amer. Math. Soc., (10) 45 (1998)

ترجمه شده است.

ساندرز مک‌لین

ترجمهٔ بیژن محبی



سموئل آیلنبرگ که آثارش در توپولوژی و قسمتهای دیگری از ریاضیات سرنوشت‌ساز بوده است، روز ۳۰ ژانویهٔ ۱۹۹۸ در نیویورک درگذشت. او از سال ۱۹۴۷ از اعضای برجستهٔ بخش ریاضی دانشگاه کلمبیا بود. کتابها، ایده‌ها، و مقالات او در عرصهٔ ریاضیات تأثیر عمده‌ای به جا گذاشته است.

آیلنبرگ در سال ۱۹۱۳ در لهستان به دنیا آمد. هنگام تحصیل در دانشگاه ورشو از شاگردان بورسوک[1] درمکتب فعال توپولوژیِ لهستان بود. رسالهٔ او دربارهٔ توپولوژی صفحه، در سال ۱۹۳۶ در *فوندامنتامتمتیکا* منتشر شد و نتایج آن هم در لهستان و هم در آمریکا بسیار مورد توجه قرارگرفت. او در سال ۱۹۳۸ در همان مجله مقالهٔ تأثیرگذار دیگری در باب عمل گروه بنیادی به روی گروههای هوموتوپی بالاتر یک فضا منتشرکرد. جبر از توپولوژی او به دور نبود.

در اوایل ۱۹۳۹ پدر سمی[2] به او گفت: «سمی، اوضاع لهستان خوب نیست. برو خارج.» او هم همین کار را کرد و در ۲۳ آوریل ۱۹۳۹ وارد نیویورک، شد و مستقیماً به دانشگاه پرینستن رفت. در آن دانشگاه آزوالد وبلن[3] و سالومون لفشتز[4] ریاضیدانان آواره را به گرمی می‌پذیرفتند و مشاغل مناسبی برای آنها در دانشگاههای آمریکا پیدا می‌کردند. دستاوردهای سمی در توپولوژی معروف بود، لذا برای او شغلی در دانشگاه میشیگان پیدا شد. در آنجا وایلدر[5] سرپرستی گروهی فعال از توپولوژیدانان را بر عهده داشت. یکی از آنها نرمن استینراد[6] بود که تازه از پرینستن دکتری گرفته بود. سمی بلافاصله جای

1. Borsuk

۲. Sammy مخفف Samuel.

3. Oswald Veblen 4. Solomon Lefschetz 5. Ray Wilder

6. Norman Steenrod

مناسب خود را در جمع یافت و تحقیقاتی با همکاری دیگران (مثلاً وایلدر، هرلد[1]، و مونتگمری[2]) به انجام رساند. مقالهٔ سال ۱۹۴۰ او در *آنالز آو متمتیکس*، مفاهیم مربوط به «مانعها[3]» را که به‌تازگی توسط هسلرویتنی[4] معرفی شده بودند، صورتبندی و تنظیم کرد. وی همچنین با لفشتز به مجادله پرداخت. پس از آنکه مبحث کتاب لفشتز را در باب هومولوژی تکین (۱۹۴۲) مبهم یافت، آن را به صورت ظریف و قاطعی در *آنالز*، در سال ۱۹۴۴، ارائه کرد.

ایدهٔ سمی این بود که هر موضوع را تا عمیقترین لایه‌اش بکاود. من این را وقتی در دانشگاه ان آربر دربارهٔ توسیع گروهها درس می‌دادم فهمیدم. من نمونه‌ای از گروه توسیعهای گروهی را برای یک گروه خارج‌قسمتی جالب توجه که با یک عدد اول p ارتباط داشت محاسبه کرده بودم. وقتی این را به سمی گفتم، بلافاصله متوجه شد که حاصل کار من جوابگوی یک سؤال استینراد در مورد دورهای منظم سلنوئید pای است (در یک چنبرهٔ توپر، چنبرهٔ توپر دیگری را p بار بپیچانید و این کار را ادامه دهید). من و سمی تمام شب بیدار ماندیم تا به دلیلِ این پیدایش غیرمترقبهٔ توسیعهای گروهی پی ببریم. اما به چیزهای بیشتری دست یافتیم: این موضوع مبتنی بود بر یک «قضیهٔ عمومی ضرایب» که کوهومولوژی با هر گروه ضرایب G را برحسب هومولوژی و یک دنبالهٔ دقیق تعیین می‌کرد که این دنبالهٔ دقیق به Ext ــ گروه توسیعهای گروهی ــ مربوط می‌شد. به این ترتیب، سمی بر لزوم شناخت این رابطهٔ غیرمترقبه میان جبر و توپولوژی پافشاری کرد. در این زمینه به مطالب دیگری هم دست یافتیم. این رابطه شامل نگاشتن توپولوژی بر جبر بود، لذا

1. O. G. Harrold 2. Deane Montgomery 3. obstructions

4. Hassler Whitney

مجبور شدیم تابعگونها، تبدیلهای طبیعی، و رسته‌ها را ابداع کنیم تا بتوانیم آن را توصیف کنیم. حاصل کار، پانزده مقالهٔ مشترک ما بود.

راهنمای عمل در همهٔ آنها این اصل بود: کندوکاو تا عمیقترین لایه برای فهم موضوع. مثلاً هورویچ[1] و هاینتس هوپف[2] پی برده بودند که گروه بنیادی یک فضا اثراتی روی گروههای هومولوژی و کوهومولوژی بالاتر دارد. سمی با در دست داشتن نظریهٔ هومولوژی تکین خودش، همان ابزار لازم را برای درک این موضوع در اختیار داشت، و با آن توانستیم کوهومولوژی گروهها را کشف کنیم. سمی متوجه شد که برد این ایده فراتر از اینهاست. لذا گرهارد هوخشیلد[3] را به مطالعهٔ کوهومولوژی جبرها برانگیخت و بعدها با هانری کارتان کتاب بسیار تأثیرگذاری را در باب جبر هومولوژیک تألیف کرد. این کتاب نظر بسیاری از جبردانها را به خود جلب کرد و برای اولین‌بار روش مهم فرانسوی دنباله‌های طیفی در کتابی منتشر شد.

سمی اصل بالا را در موارد دیگری نیز به کار برد. او رستهٔ مجموعه‌های سادکی را به عنوان یک فضای جدید با همکاری جوزیلبر[4] ابداع کرد؛ این کار را با استفاده از سادکهای تکین و عملهای وجهی و تباهیدن انجام داد. با کلوین الگات[5] دربارهٔ نظریهٔ بازگشتی که مبحثی در منطق است مطالبی به چاپ رساند. به تنهایی دو جلد کتاب دربارهٔ *اتوماتون، زبان، و ماشین* تألیف کرد، و با همکاری الدون دایر دو جلد کتاب (که هنوز منتشر نشده‌اند) در باب توپولوژی عمومی و رسته‌ای تهیه کرد.

اثر آیلنبرگ با همکاری استینراد که در سال ۱۹۵۲ با عنوان *مبانی توپولوژی جبری* منتشر شده بود تأثیر سرنوشت‌سازی در توپولوژی جبری گذاشت. در آن زمان گونه‌های زیاد و گیج‌کننده‌ای از نظریهٔ هومولوژی وجود داشت که بعضی تکین و برخی دیگر یاخته‌ای بودند. این کتاب با استفاده از رسته‌ها نشان داد که همهٔ اینها را می‌توان از لحاظ مفهومی معرف تابعگونهای هومولوژی از رستهٔ جفتهای فضاها به گروهها یا حلقه‌ها دانست که در چند اصل موضوع مناسب مانند «قطعهٔ برداری» صدق می‌کنند. این کتاب نحوهٔ تدریس توپولوژی را به‌طور چشمگیری عوض کرد و این مدیون بینش و شور و اشتیاق سمی بود.

سمی در دانشگاه کلمبیا فعالیت شدیدی در جهت گسترش بخش ریاضی داشت. شاگردان بسیاری را در دورهٔ تحصیلات تکمیلی تعلیم داد. از جملهٔ شاگردان و دانشجویان فوق دکتری او در نظریهٔ رسته‌ها، هری اپلگیت[6]، مایک بار[7]، جاناتان‌بک[8]، دیوید باکسباوم[9]، پیتر فراید، الکس هلر[10]، دنیل کان[11]، بیل لاویر[12]، فرد لینتن[13]، استیو شنوئل[14]، و مایلز تیرنی[15] بودند. او معلمی الهامبخش بود.

در اوایل ۱۹۹۶ سمی دچار سکتهٔ مغزی شد. حرف زدن برایش مشکل شد. در ماه مه ۱۹۹۷ من توانستم به عیادت او بروم؛ با نشاط بود و پیشنهادی به من داد که کاملاً مفهوم نبود. بعد از آن توانست مدتی را در آپارتمانش در ریورساید درایو بگذراند: فکر می‌کنم پیام او در آن موقع همان اصل بود: برای فهم موضوع تا عمیقترین لایه‌ها کندوکاو کن. زندگیش کاملاً معرف [عمل کردن به] این اصل بود. ایده‌های او ــ هومولوژی تکین، رسته‌ها، مجموعه‌های سادکی، نادوری بودن نوعی، مانعها، اتوماتونها، و مابقی ــ همچنان زنده خواهند ماند.

پانزده مقالهٔ تحقیقی مشترک ما در مجموعه آثار آیلنبرگ‌ـمک‌لین[1] گردآوری شده است.

ذیلاً به سهم آیلنبرگ در ایجاد جبر هومولوژیک اشاره می‌کنم. این ایدهٔ شگفت‌آور که از نظریهٔ هومولوژی برای فضاهای توپولوژیک می‌توان برای اشیاء جبری استفاده کرد، نخست با کشف گروههای کوهومولوژی یک گروه پدید آمد. هورویچ فضاهای غیرکروی را در نظر گرفته بود (هر تصویر کره در ابعاد بالاتر می‌تواند با تغییر شکل به یک نقطه تبدیل شود) و نشان داده بود که گروه بنیادی π_1 نوع هوموتوپی فضا ــ و در نتیجه گروههای هومولوژی و کوهومولوژی آن ــ را تعیین می‌کند. هوپف به دنبال آن فرمولهای صریحی برای گروههای هومولوژی (بتی) چنین فضایی پیدا کرده بود. سپس آیلنبرگ و مک‌لین نشان دادند که nامین گروه کوهومولوژی $H^n(X, A)$ چنین فضایی با ضرایب در گروه آبلی A، تابعگونی از π_1 و A ــ یعنی $H^n(\pi_1, A)$، nامین کوهومولوژی گروه π_1 با ضرایب در π_1ـمدول A، است. خصوصاً H^1 همان گروه «همریختیهای ضربدری»[2] $f : \pi_1 \to A$ با ضابطهٔ

$$f(xy) = xf(y) + f(x)$$

بود به پیمانهٔ زیرگروه همریختیهای ضربدری «اصلی» یعنی fهایی که به صورت $f(x) = xa - a$ به ازای aای در A هستند. عناصر $H^n(\pi_1, A)$، تابعهایی چون $f(x_1, \ldots, x_n)$ از n عنصر x_i بودند که در معادلهٔ مناسبی با تقریب جوابهای بدیهی صدق می‌کردند. به عبارت دیگر، کوهومولوژی π_1 به صورت کوهومولوژی مجتمع زنجیره‌ای خاصی معین شد. در زبانی که بعداً به دست کارتان و آیلنبرگ پالایش یافت، $H^n(\pi_1, -)$ عبارت بود از $(n-1)$امین تابعگون «مشتق‌شدهٔ»[3] $H^1(\pi_1, -)$. به عبارت دیگر، تابعگونهای اولی تابعگونهای بعدی را به‌وجود می‌آورند.

آیلنبرگ خیلی زود فهمید که چنین روشهای کوهومولوژیک را برای هر شیء جبری می‌توان به کارگرفت. او این مطلب را در مقالهٔ سال ۱۹۴۹ خود [۲] تشریح کرد. در ۱۹۴۸ با شواله[4] مقاله‌ای در باب نظریهٔ کوهومولوژی جبرهای لی تألیف کرد و تقریباً همزمان با آن گرهارد هوخشیلد را که در آن زمان دانشجوی او در مقطع دکتری بود تشویق کرد تا به تعریف و بررسی گروههای کوهومولوژی جبرهای شرکت‌پذیر بپردازد. در هر یک از این موارد، گروههای کوهومولوژی مورد نظر تابعگونهای مشتق‌شده از تابعگونهای Hom بودند که این تابعگونها به صورت طبیعی ظاهر می‌شدند. مسائل سنتی توپولوژی جبری نیز به وسیلهٔ فرمولهای کونت[5] مطرح می‌شدند. این فرمولها در ابتدا برای به‌دست آوردن عددهای بتی و ضرایب تاب حاصلضرب دو فضای X و Y ارائه شده بودند. این درواقع مستلزم حاصلضرب تانسوری گروههای هومولوژی بود، و در کتاب معروف آیلنبرگ‌ـاستینراد به‌صورت دنبالهٔ دقیق کوتاه زیر آمده است:

$$0 \to \sum_{m+q=n} H_m(X) \otimes H_q(Y) \to H_n(X \times Y)$$
$$\to \sum_{m+q=n-1} \mathrm{Tor}(H_m(X), H_q(Y)) \to 0$$

1. Hurewicz 2. Heinz Hopf 3. Gerhard Hochschild
4. JoeZilber 5. Calvin Elgot 6. Harry Applegate
7. Mike Barr 8. Jonathan Beck 9. David Buchsbaum
10. Alex Heller 11. Daniel Kan 12. Bill Lawvere
13. Fred Linton 14. Steve Schanuel 15. Myles Tierney

1. Eilenberg/Mac Lane, *Collected Works*, Academic Press, Inc., NewYork (1988). 2. crossed homomorphisms
3. derivedfunctor 4. Chevalley 5. Küneth

در اینجا «دقیق» بدین معناست که در هر مرحلهٔ تصویر پیکان ورودی هستهٔ پیکان خروجی است. همچنین $\mathrm{Tor}(A, B)$ تابعگونی ازگروههای آبلی می‌باشد و همین‌طور $\otimes$! درواقع معلوم می‌شود که Tor اواین تابعگون مشتق‌شدهٔ $\otimes$ است! تعاریف این اشیاء برای کارِ توپولوژیک مورد نظر کافی هستند: عناصر Tor را عناصر دارای مرتبهٔ متناهی ازگروههای A و B معین می‌کنند. من به‌وضوح آن وقتی را که سعی کردم به استاد کونت در دانشگاه ارلانگن توضیح بدهم که این زبان مجرد مسلماً فرمولهای عددی اولیهٔ کونت را تولید می‌کند به یاد دارم. همان‌طور که گفته شد، Tor اواین تابعگون مشتق‌شدهٔ $\otimes$ است؛ برای مدولها معلوم می‌شود که تابعگونهای مشتق‌شدهٔ بالا مرتبه‌تر $\mathrm{Tor}_n(A, B)$ به‌ازای هر n وجود دارند. آیلنبرگ و مک‌لین، ساختن این حاصلضربهای تابی بالاتر و توصیف آنها به واسطهٔ مولدها و روابط را بررسی کردند. این حاصلضربها نمونه‌های جدیدی از تابعگونهای مشتق‌شدهٔ بالاتر به‌دست دادند. برای گروههای آبلی A و B، $\mathrm{Tor}_n(A, B) = 0$ به‌ازای $n > 1$.

حال بازگردیم به تابعگون $\mathrm{Ext}(A, B)$، گروه توسیعهای گروهی آبلی E از B توسط A، که E در یک دنبالهٔ کوتاه دقیق ازگروههای آبلی ظاهر می‌شود:

$$0 \to B \to E \to A \to 0$$

جریان بدین قرار است که $\mathrm{Ext}(A, -)$ اواین تابعگون مشتق‌شدهٔ $\mathrm{Hom}(A, -)$ است و لذا تابعگونهای مشتق‌شدهٔ بالامرتبه‌ترِ $\mathrm{Ext}_n(A, -)$ وجود دارند. این گروهها برای گروههای آبلی بدیهی هستند، ولی در حالت کلی برای مدولها چنین نیستند. تحقیقات ریاضیدان ژاپنی یوندا[1] نشان داد که هر عنصر $\mathrm{Ext}_n(A, B)$ را به‌صورت یک دنبالهٔ دقیق طولانی می‌توان نمایش داد (با n جملهٔ میانی):

$$0 \to B \to E_1 \to E_2 \to \ldots \to E_n \to A \to 0$$

این نمونه‌های مختلفِ ساختن تابعگونهای جدید از طریق اشتقاق از تابعگونهای داده شده، تماماً در اختیار آیلنبرگ بود. او دریافت که چگونه می‌توان از آنها برای تعریف یک «بعد» هومولوژیک برای اشیاء جبری استفاده کرد، و رابطهٔ آن را با ایدهٔ سیزیجی[2] هیلبرت در مقاله‌ای در سال ۱۹۵۶ برقرار ساخت. این کار زمینه را برای کتاب تأثیرگذار کارتان و آیلنبرگ در باب جبر هومولوژیک فراهم کرد [۱]. تأکید این کتاب بر چگونگی محاسبهٔ تابعگونهای مشتق‌شده برای یک M برحسب هر «تجزیهٔ» M به‌وسیلهٔ مدولهای آزاد بود، یعنی یک دنبالهٔ دقیق طولانی

$$0 \leftarrow M \leftarrow X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \ldots$$

که در آن همهٔ X_jها آزادند. کافی است تابعگون را روی این تجزیه پس از حذف M اثر دهیم و سپس هومولوژی یا کوهومولوژیِ مجتمع به‌دست آمده را محاسبه کنیم. این فرایندْ عملاً محاسبه از «تجزیه‌های» خاصی را که برای تعریف کوهومولوژیِ یک گروه به‌کار می‌رفتند تعمیم داد. ایده‌های جبر هومولوژیک در دو کتاب پیشگام کارتان-آیلنبرگ [۱] و مک‌لین [۴] ارائه شدند. نوشتهٔ کارتان-آیلنبرگ اثر گسترده و سرنوشت‌سازی در جبر به جا گذاشت. این امر بار دیگر نبوغ آیلنبرگ را آشکار می‌کند: وقتی ایدهٔ اساساً یکسانی در جاهای مختلفی پدیدار می‌شود، باید به جستجوی جایگاه طبیعی آن پرداخت.

1. Yoneda 2. syzygy

پیتر فراید
ترجمهٔ عطاءالله تقا

سی سال پیش از این من و آرتر پوپ[1] استاد هنر باستانی ایران، همسایهٔ هم بودیم. او که در نود و چند سالگی بازنشسته شده بود، در ملکی در مرکز شهر شیراز در جنوب ایران ــ شهری که من هم مدت کوتاهی در آن زندگی کردم ــ زندگی می‌کرد و خانه‌اش آن سوی خیابان روبه‌روی محل اقامت من بود. روزی به بهانه‌ای به حضورش «شرفیاب شدم» و به وی گفتم که از دوستان سموئل آیلنبرگ هستم.

گفت «با ایشان آشنایی حضوری ندارم، البته *دورادور* می‌شناسمش. تو از کجا می‌شناسیش؟»

«ما هر دو در یک زمینهٔ ریاضیات کار می‌کنیم.»

«تو حتماً راجع به یک آیلنبرگ دیگر داری صحبت می‌کنی. منظور من آن دلال هنر هندی بود.»

«راستش ایشان همان شخص‌اند. هم ریاضیدان است و هم اهل جمع‌آوری آثار هنری هندی.»

«جوان، حالت خوب است؟! آن آیلنبرگی که من می‌گویم *کلکسیونر* هنر هندی نیست، *دلال* هنر هندی است. من خودم خوب می‌شناسمش. او وجود یکی از پادشاهان ایران باستان را از لحاظ تاریخی به اثبات رساند. یقیناً او اهل ریاضیات نیست.»

پایان شرفیابی.

اگر آرتر پوپ را عمری باقی می‌بود، حتی وی هم به واقع امر پی می‌بُرد. بعدها در دنیای هنر همه‌جا آیلنبرگ را با عنوان «پروفسور» می‌شناختند. در واقع اگر در لندن یا زوریخ یا حتی فیلادلفیا با او قدم می‌زدی و کلمهٔ «پروفسور!» را می‌شنیدی، همواره مخاطَبْ آیلنبرگ بود و همواره هم اهل هنر بودند که او را چنین خطاب می‌کردند.

اما اگر می‌شنیدی «سَمی»، معلوم بود که ریاضیدانی دارد او را صدا می‌زند.

توجیه این اسم کار مشکلی بود. از نظر کسی که اولْ بار با وی از طریق آثار ریاضی او آشنا شده بود، تصور کردنِ آیلنبرگ به عنوانِ «سمی» دشوار بود؛ و بعد از ملاقات با او برای بار نخست حتی دشوارتر: او بر بخشهای کاملی از ریاضیات سیطره داشت ــ درواقع خودش چند تا از این بخشها را پدید آورده بود. وقتی که در اتاقی بود، سنگینی وجودش بر کل اتاق احساس می‌شد، و مهم نبود که اتاق مالِ کی هست. سمی؟ اصلاً جور در نمی‌آمد.

1. Arthur Upham Pope

ولی او باید چنین اسمی می‌داشت. گفتم که مشکل می‌شد توضیح داد چرا. او روحیه‌ای تهاجمی داشت. تقریباً هر چیزی را زیر سؤال می‌بُرد. اگر کسی دربارهٔ آب و هوا چیزی می‌گفت، شروع می‌کرد به بحث و جدل: یک بار در کالیفرنیا شاهد بودم که داشت اصرار می‌ورزید که «آب و هوا» غلط است؛ «اقلیم» درست است. ولی در این میان یک چیز آشکار بود: اصلاً ایرادی نداشت که همان وقت حرفِ خود او را هم به نقد بکشی. مهاجم بود و راحت زیر بار نمی‌رفت، ولی ابداً متکبر نبود. آخر نمی‌شود که آدمی با اسمی مثل سمی متکبر باشد.

برای سمی ریاضیات و هنر دو عالَم جدا از هم بودند. ولی گویی که این هر دو در یک چیز اشتراک داشتند، همان چیزی که آرتر پوپ بر آن پای فشرده بود: سمی این وسط دلال بود.

شکی نیست که سمی سخت خوش داشت که نقش دلال را به عهده بگیرد. در ایامی که بازار ریاضیدانها رونقی داشت و شغل آسان به کف می‌آمد، سمی عاشق آن بود که دربارهٔ بازار ریاضیی که خود می‌خواست ایجاد کند حرف بزند. کالای مورد معاملهٔ آیندهٔ شخص ریاضیدان بود: «این یکی در یک سال گذشته فقط دو لم و یک گزاره ثابت کرده؛ آخرین قضیه‌اش مال دوسال پیش است؛ بهتر است او را، حتی به ضرر، بفروشیم. با آن سیگار برگ (گران قیمت) بزرگ و آن حلقهٔ طلایی بزرگ (که در واقع از صنایع دستی پربهای هند بود) می‌توانست فوراً در هیأت دلالی ظاهر شود. آدم همیشه داش می‌خواست بداند که واقعاً زندگی شغلی چند ریاضیکار جوان در دست اوست.

با این همه، دو عالَم او، ریاضیات و هنر، این نقش دلالی وی را به دوگونهٔ کاملاً متفاوت می‌فهمیدند. در ریاضیات ما می‌دانستیم که او عاشق ایفای این نقش است ولی در عین حال، فقط دارد بازی می‌کند. اصلْ ریاضیدان بودنِ او بود، خواه وی نقش دلال را بازی می‌کرد یا نه، یا این طور بگوییم، خواه با مبلغ بالا قمار می‌کرد ــ که می‌کرد ــ یا نه. مطلب در آن عالَم دیگر چندان واضح نبود.

سعی در توضیح اینکه همکاران ریاضیِ سمی چگونه به وی می‌نگریستند اغلب سعی عبثی بود. او برای ابراز این نظر که ریاضیات هم هوش می‌خواهد و هم روحیهٔ تهاجمی، اصطلاحی به کار می‌برد که نمی‌شود آن را اینجا آورد. ولی تصورش را بکنید که آدم نداند ریاضیاتِ وی ــ پس از پایانِ کار ــ چگونه کاملاً آن روحیهٔ تهاجمی را پنهان می‌کرد. تصورش را بکنید که آدم نداند که حاصل کار ریاضی وی همواره چه بسیار خوشرفتار بود. تصورش را بکنید که آدم نداند که ریاضیاتِ او، وقتی که کار را به پایان برده بود، همیشه مُقَدَّر به‌نظر می‌آمد و مانند برآمدن آفتاب در هنگامِ معیّنِ طبیعی می‌نمود.

چهل سال پیش سمی امید داشت که موضوع برنزآلات هندی را هم به مبحثی به همان اندازه خوشرفتار تبدیل کند. همان وقت هم مشهور بود که زبده‌ترین کسی است که می‌تواند در این حرفه بدل را از اصل تمیز دهد، و خودش عقیده داشت که می‌تواند این فرایند را اصل موضوعی کند. حتی یک فهرست سردستی از اصول موضوع هم داشت ــ که واقعاً فهرست قشنگی بود.

چند سال بعد در یک کافهٔ فرانسوی‌مآب در لاهویای کالیفرنیا به هم رسیدیم. مدتی می‌شد که از هم خبر نداشتیم: بحثی دربارهٔ اخلاق در ریاضیات بین ما پیش آمده بود که آن را یک طوری حل و فصل کرده بودیم؛ آن شام چیزی در مایهٔ جشن پایان مناقشه بود. من از کتابش دربارهٔ برنز آلات پرسیدم.

«اصول موضوع به درد نخور از آب در آمدند.»

«یعنی چه؟»

«یعنی من گول خوردم. یک جنس قلابی به من انداختند.»

تازه بعد از چند هفته که جنس بدل را توی اتاق خوابش گذاشته بود به قضیه شک کرده بود. ولی حداقل این لذت نصیبش شد که سر در بیاورد استادِ بدلساز که بوده و ردّش را تا اتاق کار او دنبال کرده بود، نه برای اینکه تلافی کند، بلکه برای آنکه به او تبریک بگوید.

بعد از آن سمی بنا را بر آن نهاد که این دو عالَم را از هم جدا نگه دارد. من فقط یک استثناء یادم می‌آید که او در صحبتی از مجسمه‌سازیِ گریزی به ریاضیات زد و گفت که مجسمه‌سازان زود یاد می‌گیرند که مجسمه را از درون به برون بسازند: آنچه در پایان کار در صورت ظاهر می‌گردد نتیجهٔ زحمت فراوان برای تجسم درون است. ولی دیگرانی هستند که برایشان درونْ حاصل زحمت فراوان برای درست درآوردن برون است. سپس پرسید: آیا ریاضیات من از همین قسم نیست؟

سبک، فقط بخشی از ریاضیات اوست ــ چنانکه البته خودش آگاه بود ــ ولی داستانهای عجیب و غریبی از وی بر سر زبانهاست که او در همان حال که به نظر می‌رسید مشغول سطحیترین مسائل سبکی است، مباحث کاملی را بازسازی می‌کرد.

بسیاری افراد شاهد این غلبهٔ سبک بر محتوا بوده‌اند، به‌ویژه در کار او با دانشجوها، ولی درخشانترین نمونهٔ این موضوع، بازیگر برجسته‌ای داشت.

در بهار سال ۱۹۶۲، اسپنسر[1] سخنرانیی در دانشگاه کلمبیا ایراد کرد و سمی وقت را برای به نمایش گذاردن قاعدهٔ «خلاصی از شر اندیس» مغتنم دید: اگر تعاریف را درست عرضه کنید، احتیاجی به اندیس نخواهید داشت. اسپنسر با ملایمت تمام ــ بی‌دلیل نبود که همان وقتها هم مهربانانه «عمو دان[2]» صدایش می‌زدند ــ فرامین سمی را اجرا نمود و همان‌طور که پای تخته بود ذره‌ذره مطلب را بازسازی کرد. به مدد تعریفهای جدیدی که سمی انشاء می‌کرد، اندیسها یکی‌یکی محو می‌شدند. وی واقعاً از معنای نمادها هیچ اطلاعی نداشت. او فقط با عنایت به شکل نحوی، به‌طور کامل روی صورت کار می‌کرد.

1. D. C. Spencer 2. Don

این قضیه چند دقیقه ادامه یافت تا آنکه سمی به گزاره‌ای که روی تخته بود اشاره کرد: «خُب، حالا معنی این چیست؟»

«چه عرض کنم، سمی! تو خودت داری تمام تعریفها را می‌دهی.»

آنگاه سمی تعریفهایش را اعمال کرد و اندیسها همچنان یکی‌یکی ناپدید می‌شدند تا آنکه در نهایت خودِ گزاره هم ناپدید شد: گزارهٔ کذا به شکل این حکم درآمد که فلان چیز ــ دقت کنید ــ با خودش برابر است.

«پدرِ مادرم که صاحب آبجوسازیِ شهر بود و یک فرزند دختر داشت، به مدرسهٔ مذهبی شهر رفت و سراغِ بهترین دانش‌آموز را گرفت.» این را سمی برایم تعریف می‌کرد. «بنابراین پدرِ من به جای آنکه خاخام شود، آبجوساز از آب درآمد.»

سمی به لهستانِ پیش از جنگ نظر محبت‌آمیزی داشت. احساسش آن بود که جامعهٔ ریاضیدانان لهستانی وی را خوب پرورانده‌اند و برایم از لذت بار یافتن به درگاه استفن باناخ تعریف کرد، ماجرای پذیرفته شدن به مکان مقدس یعنی کافه‌ای که باناخ در طی همایشهای سالانهٔ ریاضی لهستان، در آنجا وقتش را سپری می‌کرد. زمانی که سمی در بیست و چند سالگی به امریکا آمد خودش یک توپولوژیدان معروف بود.

وقتی نظرش را دربارهٔ لهستان پیش از جنگ پرسیدم پاسخ داد که باید «به مشتق توجه کرد»: نباید فقط بر اساس آنکه وضع چه اندازه خوب است قضاوت کرد. بلکه باید این را که وضع دارد با چه سرعتی بهتر می‌شود، ملحوظ داشت.

نظر سمی دربارهٔ لهستان پس از جنگ پیچیده‌تر بود، به‌ویژه به‌خاطر نحوهٔ برخوردِ ریاضیدانان آن دورهٔ لهستان با نظریهٔ رسته‌ها که آن را یک موضوع حاشیه‌ای می‌دانستند.

سمی در اواخر دههٔ ۱۹۵۰ فعالیتهای ریاضیش را، هم در عرصهٔ تحقیق و هم در تدریس، بر نظریهٔ رسته‌ها متمرکز ساخت. او و مک‌لین بنیانگذاران این مبحث بودند، ولی از نظر ایشان نظریهٔ رسته‌ها همواره یک مبحث کاربردی بود، نه اینکه خودش غایتی باشد. رسته‌ها را تعریف کرده بودند که تابعگونها را تعریف کنند، و آن هم برای آن بود که تبدیلات طبیعی را تعریف کنند، که سرانجام برای آن بود که قضیه‌هایی را ثابت کنند که پیش از آن نمی‌شد ثابت کرد. از این نظرگاه، نظریهٔ رسته‌ها جزو جریانات اصلی ریاضیات می‌بود.

نظرگاه دیگری وجود داشت حاکی از اینکه نظریهٔ رسته‌ها حاشیه‌ای است. بنابراین نظرگاه، رسته‌ها تعریف شده بودند تا قضیه‌هایی را که پیشتر نمی‌شد بیان کرد، بیان کنند، و اینکه رسته‌ها ابزار نیستند بلکه اشیایی طبیعی هستند که به خودی خود قابلیّت بررسی دارند. سمی بر آن عقیده بود که این نظرگاهِ مخالفْ چالش مستقیمی علیه نقش وی به عنوان دست‌اندرکار عمدهٔ نظریهٔ رسته‌هاست. وی دیده بود که بسیاری ابداعاتش جزوِ ریاضیاتِ استاندارد شده‌اند ــ هومولوژی تکین، نظریهٔ موانع[1]، جبر هومولوژیک ــ و اصلاً قصد نداشت که آیندهٔ نظریهٔ رسته‌ها را به دیگران واگذارد.

امروزه زبانِ نظریهٔ رسته‌ها در بخش معتنابهی از ریاضیات رسوخ کرده و اعتباری کسب نموده است. اما سابقاً به این نحو نبود. سالهای سال کلماتِ «رسته» و «تابعگون» را در حضور بسیاری از فرقه‌های ریاضی نمی‌شد بی عرض پوزش به زبان آورد. یکی از خاطرات دلپذیر من مربوط به اوایل دههٔ ۱۹۶۰ است که من درکنار سمی نشسته بودم و فرانْک آدامز یکی از اولین سخنرانیهایش را در باب اینکه هر تابعگون بر فضاهای برداریِ متناهی‌بُعد به یک تبدیل طبیعی روی Kـتابعگون منجر می‌شود، ایراد می‌کرد. فرانک از آن ساخت برای به‌دست آوردن آنچه اکنون عملهای آدامز نامیده می‌شوند استفاده کرد، و به مدد آنها تعداد میدانهای برداری مستقلی را که می‌توان بر روی یک کُره داشت، شمارش کرد. تازه آن وقت بود که گفتنِ «تابعگون» بدون شرمساری ممکن شد.

در آن ایام، سمی یک‌تنه عین یک بنگاه استخدامی برای نسلِ جدید ریاضیدانانی عمل می‌کرد که به رسته‌ها نه تنها به عنوان یک زبان بلکه به عنوان مبحثی که بالقوه یکی از مباحث اصلی ریاضیات است می‌نگریستند.

در طیِ سی‌وپنج سالِ بعد، او تقریباً به تمام کنفرانسهای مربوط به نظریهٔ رسته‌ها سر زد و مهمتر از آن، مهارتهای بیانی استادانه‌اش را برای انتقال ایده‌های مربوطه به دیگر ریاضیدانان به کار گرفت. تلاشهای سمی برای زبان نظریهٔ رسته‌ها به‌بار نشست، و او هیچگاه در تلاش برای پیشبرد خودِ نظریه از پای ننشست. وی اطمینان داشت که دیگاه رسته‌ای سرانجام دیدگاه استانداردِ ریاضی خواهد شد، خواه خود او دلال این معامله باشد یا نه. ناگزیریِ آن مبتنی بر مهارتهای دلالانه سمی نیست، بلکه بر قضیه‌هایی استوار خواهد بود که برهانشان به نظریهٔ رسته‌ها محتاج است. این برای سمی روشن بود، ولی می‌خواست که آن را به همه بنمایاند.

مراجع

[1] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1956.

[2] S. Eilenberg, *Topological methods in abstract algebra: Cohomology theory of groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 3-37.

[3] ———, *Homological dimension and syzygies*, Ann. Math. (2) **64** (1956), 328-336.

[4] S. Maclane, *Homology*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

---

1. obstruction theory

نشر ریاضی، سال ۱۰، شمارهٔ ۱، صص ۶۰-۶۲

گزارشی از
بحران مجله‌های پژوهشی ریاضی

سیاوش شهشهانی*

در شماره‌های پیشین نشر ریاضی گهگاه مقالاتی دربارهٔ وضعیت مجلات پژوهشی در ریاضیات و چشم‌انداز نحوهٔ نشر و توزیع مقالات پژوهشی، با توجه به رشد انفجارگونهٔ تعداد مقالات از یک سو و امکانات نویدبخش استفاده از شبکهٔ الکترونیک از سوی دیگر، آورده‌ایم (بالاخص مراجعه کنید به [۵] و [۷]). در این مقطع از زمان، رویاروی بحرانی چندجانبه در این زمینه قرار گرفته‌ایم که بعضی جوانب آن مقیاس جهانی دارند و بعضی دیگر ویژهٔ کشور ما هستند. در این نوشته مروری اجمالی بر دو جنبهٔ زیر از بحران ذکرشده خواهیم داشت:

۱. افزایش تعداد مجلات پژوهشی در ریاضیات و افزایش همزمان بهای اشتراک مجلات که کتابخانه‌های پژوهشی در سراسر جهان را با مشکل مالی رو به افزایشی مواجه ساخته است.

۲. ظهور نشر کامپیوتری، مجلات الکترونیک، و استفادهٔ گسترده از شبکهٔ اینترنت که بی‌شک در آینده مسائل دیگر را تحت‌الشعاع قرار خواهد داد ولی در حاضر دستخوش تغییر و تحوّلِ پیوسته است و تبعات آن برای نشر و توزیع آثار پژوهشی هنوز معلوم نیست.

امیدواریم در آینده در مقالهٔ دیگری به وضعیت مجلات پژوهشی علوم ریاضی در کشور بپردازیم و بحران ویژه‌ای را که کتابخانه‌های پژوهشی ایران با آن مواجه هستند شرح دهیم. به اجمال می‌توان گفت که محدودترشدن امکانات ارزی اختصاص داده شده به کتابخانه‌های کشور و فقدان یک سیاست پایدار و قابل اعتماد در مورد تأمین ارز، امکان به روز نگاه‌داشتن مجموعه‌های مجلات پژوهشی را از کتابخانه‌ها سلب کرده و بحران و اختلالی در برنامه‌ریزی کتابخانه‌ها پدید آورده است که در مقیاسی است کاملاً متفاوت با آنچه در زیر خواهید خواند.

در این نوشته مقصود ما از «کتابخانهٔ پژوهشی» کتابخانه‌ای است که مجموعهٔ کتابها و مجلات آن با توجه به نیازهای پژوهشگران، بالاخص دانشگاهیان پژوهشگر در سطح هیأت علمی و دانشجویان دوره‌های دکتری و کارشناسی ارشد سامان می‌یابد. اشارهٔ ما به مجلات پژوهشی در علوم ریاضی است هرچند که بسیاری از این ملاحظات در مورد اکثر رشته‌های دیگر نیز صادق است. آمار و ارقام ما در مورد نشر در سطح جهان عمدتاً مبتنی بر سه مقالهٔ [۱]، [۲] و [۵] در مجلهٔ نوتیسز انجمن ریاضی امریکاست.

بحران افزایش تعداد مجلات و افزایش بها

نشر پژوهشهای جدید در ریاضیات و سایر علوم غالباً در قالب مقاله انجام می‌شود و اکثر مقاله‌های قابل توجه در نشریات ادواری [=مجله‌ها] به چاپ می‌رسند. اینکه در قرن اخیر تعداد مقالات ریاضی رشد نمایی داشته است واقعیتی آشکار است. بنابر آمار اُدلیزکو در [۵] تعداد مقالات چاپ‌شدهٔ ریاضی از ۸۴۰ مقاله در سال ۱۸۷۰ به بیش از سالانه ۵۰۰۰۰ مقاله در حال حاضر افزایش یافته است. او تخمین می‌زند که در دو قرن اخیر تعداد مقالات هر ۱۰ الی ۱۵ سال دو برابر شده است. در دهه‌های اخیر مدت زمان لازم برای مضاعف شدن تعداد مقالات در مجموع رشته‌های علمی حدود ۵٫۵ سال برآورد شده است. بدین ترتیب رشد تعداد مجلات علمیِ لازم برای نشر این مقالات امری طبیعی است و حتی اگر افزایش قیمت اشتراک مطرح نمی‌بود، مشکل می‌شد تصور کرد که کتابخانه‌های پژوهشی بتوانند به تناسب، مجموعه‌های خود را گسترش دهند. چنین گسترشی هم افزایش بودجهٔ قابل‌توجه می‌طلبد و هم گسترش فضای فیزیکی برای ذخیره‌سازی مجلات. ولی واقعیت حتی از این تیره‌تر است. به‌همراه افزایش تعداد مجلات، نرخ اشتراک مجلات نیز سیر صعودی پرشیبی را طی کرده است. در دههٔ اخیر نرخ اشتراک یک مجلهٔ پژوهشی ریاضی به‌طور متوسط سالانه حدود ۱۰ درصد افزایش داشته است. در حال حاضر میانگین بهای اشتراک مجلات پژوهشی ریاضی حدود ۹۰۰ دلار امریکا در سال است. میانگین بهای مجلات در رشتهٔ فیزیک حدوداً دو برابر این رقم است و قیمت مجلات رشته‌های شیمی و اخترشناسی نیز از ریاضیات بالاتر است. ولی درواقع نرخ مجلات ریاضی و فیزیک به‌ازای هر صفحه بسیار به هم نزدیک است زیرا بسیاری مجلات ریاضی سالانه ۴ یا ۶ شماره منتشر می‌کنند در حالی‌که مجلات فیزیک عمدتاً ماهانه یا حتی دوهفته‌ای هستند. نرخ صفحه‌ای مجلات این دو رشته

در بین رشته‌های علمی از همه گرانتر است، ظاهراً به این دلیل که آگهیهای تبلیغاتی (مثلاً برای تجهیزات آزمایشگاهی) که در مجلات مهندسی، پزشکی و علوم زیستی بسیار چاپ می‌شوند در مجلات ریاضی و فیزیک (نظری) به‌ندرت دیده می‌شوند.

پدیدهٔ افزایش سریع نرخ اشتراک مجلات ریاضی با «حرفه‌ای»تر شدن نشر مجلات ریاضی همگام بوده است. تا دههٔ ۱۹۶۰ میلادی اکثر مجلات عمدهٔ ریاضی را دانشگاهها و انجمنهای علمی انتشار می‌دادند. از اواسط دههٔ ۶۰ به بعد ناشران حرفه‌ای به‌صورت فزاینده‌ای (در بسیاری موارد به توصیه و ترغیب دانشگاهیان) پا به عرصهٔ نشر مجلات ریاضی نهادند. اثرات مطلوب و نامطلوب این امتزاج را می‌توان به این صورت خلاصه کرد.

اثرات مثبت: انتشار منظمتر، توزیع بهتر، بعضاً افزایش تعداد شماره‌های یک مجله در سال، و تقلیل فاصلهٔ زمانی میان پذیرش یک مقاله و چاپ آن. در میان مجلاتی که دانشگاهها و انجمنهای علمی منتشر می‌کنند مدت انتظار دوساله برای چاپ یک اثر پس از پذیرش نهایی غیرعادی نیست، در حالی‌که ناشران حرفه‌ای این مدت را به حدود یک سال و گاهی چندماه کاهش داده‌اند. همچنین مدت زمان لازم برای داوری مقالات در مجلات ناشران تجاری معمولاً کوتاهتر است.

اثرات منفی: هزینهٔ بالاسری و سود موردنظر ناشر حرفه‌ای، قیمت مجلات را به‌شدت بالا برده است. طبق آمار فیزیکدان آمریکایی پارشال [۶] نرخ نسبی (مثلاً قیمت به‌ازای هزار حرف) در مجلات فیزیک و ریاضی چاپ شده توسط ناشران حرفه‌ای در پاره‌ای موارد تا ۴٫۵ برابر نرخ مجلات انجمنهای علمی است. به‌علاوه پارشال معیار دیگری را نیز در نظر گرفته است که نسبت تعداد ارجاعات به نرخ نسبی مجلات است و نشان داده است که این نسبت برای ناشران غیرتجاری (مؤسسات نشر دانشگاهی و انجمنهای علمی) به مراتب بالاتر از رقم متناظر برای ناشران تجاری است.

در سالهای اخیر بعضی دانشگاهیان به این باور رسیده‌اند که نشر مجلات علمی توسط ناشران تجاری در مجموع ارزش افزودهٔ منفی دارد و کوششهایی برای ترغیب پژوهشگران به احتراز از چاپ مقاله در مجلات منتشر شده توسط این ناشران و نیز امتناع از داوری مقالات ارجاع شده از سوی آنان صورت گرفته است. در این میان فعالیت تبلیغی رابیون کربی ریاضیدان برکلی قابل ذکر است. تبلیغات کربی و پارشال عکس‌العملهایی از سوی ناشران تجاری به دنبال داشته است که دست‌کم در دو مورد در کشورهای آلمان و فرانسه پای مراجع قضایی را به‌میان کشیده است. یکی از استدلالهای عمدهٔ ناشران تجاری این است که نرخ ارزانتر نشریات ناشران غیرانتفاعی، مصنوعی است و هزینه‌های پنهان و یارانهٔ مؤسسات مربوط شامل هزینه‌های حقوق و هزینهٔ بالاسری هیأتهای ویرایش و تولید مقیم در این مؤسسات، نادیده گرفته می‌شود.

حقیقت هرچه باشد، واقعیت عملی این است که میزان افزایش مستمر بودجهٔ کتابخانه‌های پژوهشی در کشورهای پیشرفته به‌مراتب پایینتر از میزان افزایش لازم برای ابتیاع نشریات مورد نیاز پژوهشگران است. در دانشگاههای امریکا درصد افزایش بودجهٔ کتابخانه‌ها پایینتر از درصد افزایش کل بودجهٔ دانشگاهها بوده است. نتیجه اینکه در اکثر دانشگاههای بزرگ امریکایی و اروپایی تعداد اشتراکهای مجلات علمی در دههٔ اخیر رو به کاهش رفته است.

در امریکا، در دورهٔ دهسالهٔ ۱۹۸۶ـ۱۹۹۵، تعداد عناوین مجلات علمی در کتابخانه‌های دانشگاهی به‌طور متوسط هفت درصد کاهش داشت در حالی‌که بودجهٔ خرید نشریات ادواری ۱۲۴ درصد افزایش یافت. تخمین زده می‌شود که برای حفظ تعداد مجلات ریاضی باید بودجهٔ نشریات ادواری ریاضی یک کتابخانه بین سال ۱۹۹۵ تا سال ۲۰۰۰ نزدیک به دو برابر شود. برنامهٔ کاهش تعداد نشریات در دانشگاههای مختلف جهان با سیاستهای گوناگون دنبال می‌شود. در بعضی مؤسسات، ملاک حذف یک نشریه، قلّت استفاده از آن است. طبق آمار دانشگاه ایالتی نیویورک در شهر آلبانی، از ۱۴۰۳ عنوان مجلهٔ علمی و ریاضی آن دانشگاه، ۲۲۹ عنوان در سال حداکثر ۵ مراجعه‌کننده یا کمتر داشتند (مجموعاً ۵۲۲ مورد) در حالی‌که هزینهٔ خرید این ۲۲۹ عنوان ۱۰۳۷۵۸ دلار بود. بدین ترتیب، هر مورد مراجعه نزدیک به ۲۰۰ دلار هزینه دربرداشت!

استفاده از شبکهٔ الکترونیک

ده سال پیش با رواج کامپیوترهای شخصی، ظهور حروفچینی و نشرکامپیوتری، و ابداع دیسکهای فشرده، فرایند انتقال نتایج پژوهشی در آستانهٔ یک انقلاب می‌نمود. اما شاید کمتر کسی انتظار انقلاب در انقلابی را داشت که شبکهٔ اینترنت و به‌خصوص استفاده از WWW به فاصلهٔ زمانی کوتاهی به ارمغان آورد. مسألهٔ تأمین فضای لازم برای ذخیره‌کردن اطلاعات ناگهان ناپدید شده است، یک کار علمی می‌تواند لحظاتی پس از آنکه مؤلف اراده کند در اختیار هزاران خواننده قرار گیرد، و در مجموع مسائل و مشکلات گذشته جای خود را به مجموعهٔ جدیدی از مجهولات پیش‌بینی نشده داده‌اند که از آن جمله‌اند:

(الف) نظام مناسب داوری، ارزیابی و رده‌بندی مقالات الکترونیک چیست؟ با موضوع تقدم در تحقیقات چگونه باید برخورد کرد؟ مدیریت مطلوب، نشر الکترونیک در سطح جهانی چیست؟

(ب) آیا مجلات الکترونیک باید رایگان باشند؟ اگر نه، چه نظام منطقیِ قیمت‌گذاری (هم برای جبران هزینه‌های آشکار و نهان، و هم به‌عنوان وسیلهٔ کنترل رشدِ مختل‌کننده) باید وضع کرد؟

(ج) آیا با ابداع نشر الکترونیک، نظام «تولید به مصرف»، ناشر تجاری را خود به خود از صحنهٔ نشر علمی حذف خواهد کرد، یا ناشران حرفه‌ای همچنان محلی از اعراب در این میان خواهند داشت؟

در پاسخ به هیچ‌یک از این پرسشها هنوز اجماع نظر پدید نیامده است. در ضمن به‌نظر می‌رسد که با توجه به رشد شاید کُندتر از انتظارِ نشریات صرفاً الکترونیک، موضوع تدریجاً به سوی تعادلی منطقی متحول گردد و بحران حادی دامنگیر نشود. در حال حاضر حدود یک چهارم نشریات علمی که در *SCI*[1] مورد استفاده قرار می‌گیرند به‌صورت الکترونیک در دسترس هستند که اکثر این نشریات، صورت معمولیِ چاپی نیز دارند. این در حالی است که هیچ‌گونه مانع فنی جدی در مقابل تبدیل کامل نشر علمی به شکل الکترونیک وجود ندارد. مانع واقعی محافظه‌کاری جامعهٔ علمی است. سنت دیرینهٔ جامعهٔ علمی، *انتشارِ* یافته‌های علمی به‌صورت مقالات چاپی است و این سنت مبنای نظام ارزیابی و ارتقاء اعضای هیأت علمی دانشگاهی است. در بالاترین سطوح جامعهٔ علمی ممکن است شناخت و ارزیابی افراد

۱. مخفف *Science Citation Index*، نشریهٔ گردآورندهٔ ارجاعات مقالات علمی.

وابسته به‌صورت ظاهر و ضابطه‌های ماشینی نباشد، ولی در سطح متوسط، غالباً ارزیابیها برمبنای کثرت مقالات چاپ‌شده، ارزیابی مجلات از نظر تعداد ارجاعات و امثال آن است. واضح است که هرگونه انحراف از این نظام جاافتاده، متضمن ریسکهایی است که صنف محقق از آن می‌گریزد.

در حال حاضر چند نوع مجلهٔ الکترونیک در ریاضیات (و سایر رشته‌ها) وجود دارد. تعداد معدودی مجلهٔ صرفاً الکترونیک وجود دارد که بعضی رایگان و برخی دیگر دارای حق اشتراک هستند. تعداد بیشتری مجله هم هستند که به هر دو صورتِ الکترونیک و چاپی منتشر می‌شوند و صورتِ الکترونیک آنها معمولاً زودتر از نسخهٔ چاپی انتشار می‌یابد. حق استفاده از صورت الکترونیک مجلات نیز اشکال گوناگون دارد. در بعضی موارد، پرداخت مبلغی اضافه بر اشتراک عادی اجازهٔ دسترسی را تأمین می‌کند، بعضی مستقل از نسخهٔ چاپی قیمت‌گذاری شده‌اند، و بالاخره بعضی ناشران در مقابل پرداخت حق اشتراکِ تعداد مشخصی از مجلات چاپی اجازهٔ دسترسی به منابع الکترونیک خود را اعطا می‌کنند. شاید پرمراجعه‌ترین منبع الکترونیک در ریاضیات MathSciNet انجمن ریاضی امریکاست که بانک اطلاعاتی عظیمی از بررسیهای مقالات وکتابهای ریاضی است. دسترسی به MathSciNet نیاز به پرداخت حق اشتراک دارد. نحوهٔ قیمت‌گذاری منابع الکترونیک مرحله‌ای آزمایشی را می‌گذراند. در مورد ناشران غیرانتفاعی، مسألهٔ صرفاً دستیابی به روشی برای محاسبهٔ هزینه‌هاست ولی مشکل ناشران تجاری پیچیده‌تر است. این گونه ناشران از یک سو خود را مواجه با برچیده‌شدن تدریجی مجلات چاپی سودآور می‌بینند و از سوی دیگر معلوم نیست بتوانند ارزش افزوده‌ای در نشریات الکترونیک خود عرضه کنند که متضمن سودآوری باشد. هم‌اکنون حداقل یک حرکت جدی برای ایجاد پایگاه رایگان مقالات ریاضی در جریان است که مجریان آن امید دارند ظرف چند سال آینده بخش قابل‌توجهی از همهٔ آثار تحقیقاتی در ریاضیات را در بربگیرد [۴]. این برنامه که

LANL Mathematics E-print Archive

نام دارد از طریق

`http://front.math.ucdavis.edu/`

یا مستقیماً از مبدأ آن:

`http://xxx.lanl.gov/`

و نیز تصاویر آن در ۱۶ کشور مختلف جهان قابل دسترسی است. ریاضیدانان دعوت شده‌اند که دست‌کم یک مقاله برای درج در آرشیو LANL ارسال کنند تا با روش کارکردن با آن آشنا شوند. دستورالعملهای لازم را می‌توان از نشانیهای زیر به دست آورد:

`http://front.math.ucdavis.edu/submissions.html`

`http://xxx.lanl.gov/help/submit/`

این درواقع دنبالهٔ ابتکاری است که چند سال قبل در فیزیک انرژی بالا توسط پال‌گینسپارگ[1] در آزمایشگاه لس‌آلاموس شروع شد. آرشیو فیزیک انرژی بالا در حال حاضر بیش از ۷۰۰۰۰ مقاله را شامل می‌شود که سالانه بیش از ۲۰۰۰۰ مقاله به آن افزوده می‌شود. آرشیو ریاضیات که یک سال از عمر آن می‌گذرد مشتمل بر ۵۰۰۰ مقاله است و ماهانه بیش از ۱۵۰ مقالهٔ جدید دریافت می‌کند.

1. Paul Ginsparg

مراجع

1. Edwin F. Beschler, "Pricing of scientific publications: a commercial sublisher's point of view", *Noicees Amer. Math. Soc.*, **45** (1998) 1333-1343.
2. Joseph J. Branin & Mary Case "Reforming scholarly publishing in the sciences: a librarian perspective" *Notices Amer. Math Soc.*, **45** (1998) 475-486.
3. Paul Ginsparg, "Winners and losers in the global village", `http://xxx.lanl.gov/blurb/pg96unesco.html`
4. Greg Kuperberg, et. al. "Mathematics Journals should be electronic and freely accessible", *Notices Amer. Math. Soc.*, **45**(1998) 845.
5. Andrew M. Odlyzko, "Tragic loss or good riddance? the impending demise of traditional scholarly journals", *Notices Amer. Math. Soc.*, **42** (1995) 49-53.

[ترجمهٔ فارسی این مقاله با عنوان «زوال قریب‌الوقوع مجلات تحقیقی چاپی: فقدان مصیبت بار یا خلاصی مسرت‌انگیز؟» در شمارهٔ ۱ از سال ۷ *نشر ریاضی* به چاپ رسیده است.]

6. Henry M. Parschall, "The cost-effectiveness of physics journals", *Physics Today* **41** (1988) 56-59.

۷. سیاوش شهشهانی، «مجله‌های ریاضی جهان وکتابخانه‌های ریاضی ایران»، *نشر ریاضی*، شمارهٔ ۳، سال ۴ (مهر ۱۳۷۱) صص ۴۵-۵۱.

******

* سیاوش شهشهانی، پژوهشگاه دانشهای بنیادی و دانشگاه صنعتی شریف

`shahshah@ipm.ac.ir`

برخی منابع مهم الکترونیک در علوم ریاضی

(1) `http://www.math.upenn.edu/MathSources.html`
منبع اطلاعاتی الکترونیک کلی در مورد ریاضیات

(2) `http://e_math.ams.org`
برای انجمن ریاضی امریکا و ژورنالهای الکترونیک آن

(3) `http://www.emis.ams.org`
برای اطلاعات مربوط به انجمن ریاضی اروپا

(4) `http://math.jussien.fr`
منبع اطلاعاتی برای فعالیتهای سال جهانی ریاضیات (۲۰۰۰)

(5) `http://front.math.ucdavis.edu`
بانک اطلاعاتی جدیدالتأسیس مقالات ریاضی [مذکور در متن مقاله]

مسأله

پنجاه و نهمین مسابقهٔ پاتنام

در شمارهٔ ۳ از سال اول *نشر ریاضی* مطالبی دربارهٔ تاریخچه و نظام مسابقهٔ ریاضی سالانهٔ پاتنام خواندید.

پنجاه و نهمین دورهٔ این مسابقه در تاریخ ۵ دسامبر ۱۹۹۸ بین تیمهای برگزیدهٔ دانشگاههای آمریکا و کانادا برگزار شد. سؤالات این مسابقه مثل همیشه از جذابیت ویژه‌ای برخوردار است که نگاهی به آنها خالی از لطف نیست. این مسأله‌ها از این رو جالب توجه هستند که با ایده‌های ساده چالشی جدی و عمیق را مطرح می‌سازند. گذشته از آن این نکته نیز جای تأمل دارد که در مسابقهٔ پاتنام علاوه بر آنکه تیم منتخب هر دانشگاه یا کالج می‌تواند شرکت کند، هر دانشجوی دورهٔ کارشناسی نیز به‌عنوان «فرد» می‌تواند داوطلب شرکت در مسابقه شود و از این رو ورود در این میدان رقابت برای همه آزاد است.

در اینجا مسائل این دوره از مسابقات پاتنام درج می‌شود.

******

A-۱ یک مخروط دوار قائم دارای شعاع ۱ و ارتفاع ۳ است. مکعبی در داخل این مخروط محاط شده است به‌طوری که یکی از وجه‌های آن برروی قاعدهٔ مخروط قرار دارد. طول ضلع این مکعب چقدر است؟

A-۲ فرض کنید که s کمانی از دایرهٔ واحد باشد که به‌طور کامل در ربع اول قرار دارد و نیز فرض کنید A مساحت ناحیه‌ای باشد که پایین s و بالای محور x واقع است و B مساحت ناحیه‌ای باشد که در سمت راست محور y و سمت چپ s قرار دارد. نشان دهید که $A+B$ تنها به طول کمان s بستگی دارد و به موقعیت s روی دایره وابسته نیست.

A-۳ فرض کنید f تابعی تعریف شده برروی محور حقیقی باشد و مقادیر f نیز اعداد حقیقی باشند چنانکه f دارای مشتق سوم پیوسته باشد. نشان دهید نقطهٔ a وجود دارد که

$$f(a)\cdot f'(a)\cdot f''(a)\cdot f'''(a)\geq 0$$

A-۴ فرض کنید $A_0=1$، $A_1=2$ و برای $n>2$، A_n ازکنار هم گذاشتن نمایش دهدهی A_{n-1} و A_{n-2} (اولی در سمت چپ و دومی در سمت راست) به‌دست آید. مثلاً $A_2=A_2A_1=10$، $A_3=A_3A_2=101$، $A_4=A_3A_2=10110$ و به همین ترتیب. همهٔ nهایی را پیدا کنید که به‌ازای آنها A_n بر ۱۱ بخشپذیر باشد.

A-۵ فرض کنید F رده‌ای متناهی از قرصهای باز در $\mathbb{R}^2$ باشد که اجتماع آنها مجموعهٔ $E\subseteq\mathbb{R}^2$ را می‌پوشاند. نشان دهید که زیررده‌ای دوبه‌دو مجزا از F مانند D_1، D_2، ...، D_n وجود دارد به‌طوری که

$$E\subseteq\cup_{j=1}^{n}3D_j$$

در اینجا، اگر D قرصی به شعاع r و مرکز P باشد، $3D$ نشان‌دهندهٔ قرصی به شعاع $3r$ و مرکز P است.

A-۶ فرض کنید A و B و C سه نقطهٔ متمایز با مختصات صحیح در $\mathbb{R}^2$ باشند. نشان دهید اگر

$$(|AB|+|BC|)^2<8\times[ABC]+1$$

آنگاه A و B و C سه رأس از یک، مربع هستند. [$|XY|$ طول پاره‌خط XY و $[ABC]$ مساحت مثلث ABC را نشان می‌دهد.]

B-۱ کمترین مقدار عبارت زیر را پیدا کنید

$$\frac{(x+1/x)^6-(x^6+1/x^6)-2}{(x+1/x)^3+(x^3+1/x^3)}$$

B-۲ نقطهٔ (a,b) با شرط $0<b<a$ داده شده است. کمترین مقدار محیط مثلثی را پیدا کنید که یک رأس آن (a,b) باشد و دو رأس دیگر آن، یکی روی محور x و دیگری روی خط $y=x$ قرار داشته باشد. می‌توانید وجود چنین مثلثی را فرض کنید.

B-۳ فرض کنید H نیمکرهٔ واحد $\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0\}$ و C نیمدایرهٔ واحد $\{(x,y,0):x^2+y^2=1\}$ و P یک پنج‌ضلعی منتظم محاط در C باشند. مساحت قسمتی از H را پیدا کنید که بالای ناحیهٔ P قرار دارد و پاسخ خود را به شکل $A\sin\alpha+B\cos\beta$ بیان کنید.

B-۴ شرطی لازم و کافی برای اعداد طبیعی m و n را پیدا کنید که

$$\sum_{i=0}^{mn-1}(-1)^{\lfloor i/m\rfloor+\lfloor i/n\rfloor}=0$$

[طبق تعریف، $\lfloor x\rfloor$ بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x است.]

B-۵ فرض کنید N عدد صحیح و مثبتی باشد که نمایش دهدهی آن از ۱۹۹۸ رقم ۱ تشکیل شده است، یعنی

$$N=1111\ldots11$$

رقم هزارم پس از ممیز را در نمایش دهدهی $\sqrt{N}$ پیدا کنید.

B-۶ نشان دهید که به‌ازای اعداد صحیح داخواه a و b و c، عدد صحیح مثبتی مانند n چنان پیدا می‌شود که $\sqrt{n^3+an^2+bn+c}$ عدد صحیح نیست.

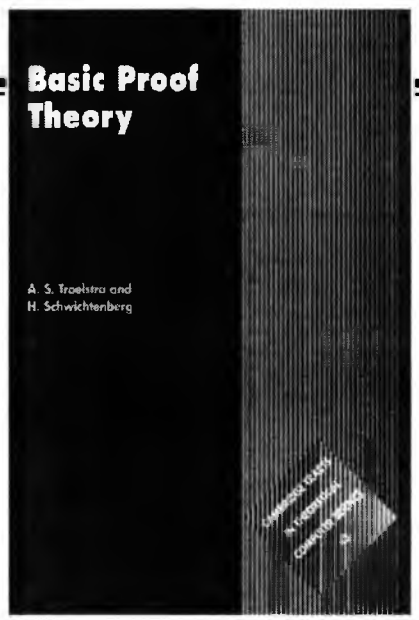
توضیح در مورد *سؤال* B-۶: سؤال B-۶ به‌طور ضمنی حاکی است که اگر $f(n)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ ۳ باشد، آنگاه $f(n)$ نمی‌تواند به‌ازای همهٔ مقادیر n مربع کامل باشد. درواقع حکم کلیتری وجود دارد که این مطلب از آن نتیجه می‌شود: اگر $f(n)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد که به‌ازای همهٔ مقادیر n، مقدار $f(n)$ مربع کامل باشد، آنگاه f مربع یک چندجمله‌ای مانند g است.

ترجمهٔ مسائل از کیوان ملاحی کارآی

نشر ریاضی، سال ۱۰، شمارهٔ ۱، صص ۶۴-۶۶

نظریهٔ مقدماتی برهان

محمد اردشیر*



***Basic Proof Theory*, A. S. Troelstra and H. Schwichtenberg, Cambridge University Press (1996).**

این ایده که برهانها اشیائی قابل بررسی در یک نظریهٔ ریاضی هستند، از آنِ هیلبرت است. انگیزه‌ها، موفقیتها و شکستهای هیلبرت در این زمینه و نظریهٔ محصّل که با عنوان «برنامهٔ هیلبرت» معروف است، مبحثی را تشکیل می‌دهد که کتاب نظریهٔ مقدماتی برهان متأسفانه به آن نپرداخته است. برنامهٔ هیلبرت از نظرگاههای ریاضی و فلسفی مورد نقد و کاوش قرار گرفته و از بین مراجع مختلف که بدین موضوع پرداخته‌اند، [۵] و [۷] را به خوانندگان علاقه‌مند توصیه می‌کنیم.

به اختصار می‌توان گفت که هیلبرت معتقد بود اشیاء و احکام ریاضی به دو دسته تقسیم می‌شوند: اشیاء واقعی و احکام واقعی، اشیاء ایده‌آل و احکام ایده‌آل. اشیاء واقعی مثل ۱، ۲، ... و احکام واقعی مثل ۳ = ۲ + ۱، که احکامی «مقدماتی» و معنادار درباره اشیاء واقعی‌اند. اشیاء ایده‌آل مانند بینهایت و احکام ایده‌آل، احکامی هستند که دربارهٔ اشیاء ایده‌آل‌اند، مثل سور عمومی $\forall x F(x)$، که در آن F محمولی با مجموعهٔ مصادیق نامتناهی است. از نظر هیلبرت، اشیاء و احکام ایده‌آل که فاقد معنا هستند برای ریاضیات «ضروری» نیستند، بلکه برای تسهیل بیان در زبان ریاضی ابداع شده‌اند. برای توضیح این مطلب، فرض کنید S بخشی از ریاضیات باشد که اشیاء آن واقعی و احکام آن نیز واقعی باشد. این بخش را قسمت متناهی ریاضیات می‌خوانند و به نظر غالب علمای منطق ریاضی همان PRA[1] (حساب بازگشتی مقدماتی) است. هر استنتاج در PRA اساساً عبارت است از روشهای متناهی ترکیبیاتی روی اشیاء متناهی. حال فرض کنید کل ریاضیات را با T نشان دهیم که شامل احکام و اشیاء ایده‌آل نیز هست.

1. Primitive Recursive Arithmetic

هیلبرت بر این باور بود (برنامهٔ هیلبرت) که اگر σ حکمی واقعی در ریاضیات باشد، یعنی $T \vdash \sigma$، آنگاه می‌توان (باید) نشان داد که $S \vdash \sigma$ و این کار در «داخل» S انجام می‌شود. به‌عبارت دقیقتر، T روی S یک توسیع محافظه‌کارانه[1] است.

برای مثال مفهوم سازگاری را در نظر بگیرید. مفهوم سازگاری را می‌توان در قالب یک حکم واقعی بیان کرد:

$$\mathrm{Con}(T) : T \nvdash (۰ = ۱)$$

بیان ریاضی حکم فوق در PRA قابل نمایش است:

$$\mathrm{Con}(T) : \neg\exists y \mathrm{prov}_T(y, \ulcorner ۰ = ۱ \urcorner)$$

که در آن prov_T محمول اثبات‌پذیری در دستگاه T است و $\mathrm{prov}_T(x, y)$ یعنی «x عدد گودل یک برهان برای حکمی با عدد گودل y است». حال اگر بتوان نشان داد که $T \vdash \mathrm{Con}(T)$، بنابر برنامهٔ هیلبرت باید بتوان نشان داد که $S \vdash \mathrm{Con}(T)$، چون $\mathrm{Con}(T)$ یک حکم واقعی است که در زبان S

1. conservative

قابل بیان است. با قضیّه ناتمامیت (دوم) گودل، برنامهٔ هیلبرت به شکست منتهی شد. گودل نشان داد که S قادر نیست حتی $\mathrm{Con}(S)$ را نشان دهد چه رسد به $\mathrm{Con}(T)$.

تحمّل این ضربه برای هیلبرت آسان نبود. از گرهارد گنتسن خواست که سازگاری ریاضیات (درواقع سازگاری PA، حساب پئانو) را به روشهای متناهی (واقعی) ثابت کند. حاصل کوشش گنتسن کشف و ابداع دستگاههایی برای بیان و اصل موضوعی‌سازی[1] منطق شد که سرآغاز رشد شاخهٔ نظریهٔ برهان گردید.

کتاب *نظریهٔ مقدماتی برهان* از نظر انتخاب مباحث در بین معدود کُتب این شاخه از منطق ریاضی، کتاب مناسبی است. این کتاب از یازده فصل تشکیل شده و تقریباً اتهات نظریهٔ برهان را، حتی تا حدودی تحقیقات اخیر در این شاخه را، دربرمی‌گیرد.

فصل اول که عنوان مقدمه دارد از نظریهٔ سادهٔ انواع[2] آغاز می‌شود. این صورتبندی از نظریهٔ برهان گرچه ریشه در تفکرات راسل دارد، با کارهای ابتدایی چرچ در تعریف‌پذیرها ادامه می‌یابد و نهایتاً به حساب λ می‌رسد که محتوای محاسباتی برهان را به شکلی عملی در دسترس برنامه‌نویسی کامپیوتری قرار می‌دهد. در فصول بعدی وقتی صحبت از صورتبندیهای دیگر منطقهای مختلف می‌شود، کم و بیش به ارتباط آنها با نظریهٔ انواع اشاره می‌شود.

فصل دوم حاوی دو صورتبندی مهم منطق و ترجمهٔ طبیعی بین آنهاست. اولین صورتبندی همان است که به‌نادرست به صورتبندی «هیلبرتی» معروف شده و دومی استنتاج طبیعی است. این صورتبندیها برای سه منطق معروف مینیمال، شهودی و کلاسیک ارائه شده و ترجمهٔ معروف منفی[3]، منسوب به گودل و (مستقلاً) گنتسن، که تعبیری از منطق کلاسیک در منطق شهودی و مینیمال دارد، معرفی گردیده است. دستگاه استنتاج طبیعی در ۱۹۳۵ به‌وسیلهٔ گنتسن به‌عنوان صورتی طبیعی از قواعد منطقی، بدان‌گونه که در ذهن می‌گذرد، ارائه شد. تحولات بعدی آن بیشتر مدیون تحقیقات پراویتس[4] است.

فصل سوم به نوعی دیگر از صورتبندیهای منطقها می‌پردازد که حساب رشته‌ها[5] نامیده می‌شود. در این کتاب از آنها به‌نام دستگاههای گنتسن نام برده شده است. این صورتبندی از منطق دارای خاصیت سره‌ای به‌نام «زیرفرمول بودن»[6] است که در روش‌شناسی برهان اهمیت اساسی دارد. برای شرح آن به یکی از قواعد اشاره می‌کنیم:

$$(R\wedge)\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

Γ مجموعه‌ای از فرمولها و A و B فرمولهایی در منطق مرتبهٔ اول‌اند. همهٔ قواعد حساب رشته‌ها دارای این خاصیت اساسی‌اند که هر فرمولی در صورت (مقدمه) زیرفرمولی از یک فرمول در مخرج (نتیجه) است. این ویژگی حساب رشته‌ها از ایدهٔ پنهان گنتسن در یافتن برهان برای یک فرمول در یک دستگاه سرچشمه می‌گیرد. برای تعیین اینکه فرمولی در دستگاهی منطقی قابل استنتاج است یا نه، کافی است به فرمولهای «ساده‌تر» مراجعه کنیم و

1. axiomatization 2. simple type theory 3. negative
4. D. Prawitz 5. sequent calculus 6. subformula property

ببینیم قابل استنتاج‌اند یا نه. این کار را تا جایی که ساده‌تر از آن مقدور نیست (فرمولهای اتمی) ادامه می‌دهیم.

در بین قواعد دستگاه حساب رشته‌ها، یک قاعده وجود دارد که از این خاصیت برخوردار نیست و آن قاعدهٔ برش[1] است:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow B}$$

توجه کنید که برای A (در مقدمات) ممکن است هیچ فرمولی در مخرج (نتیجه) نباشد که A زیرفرمول آن باشد. حضور این قاعده اساس کار گنتسن را به مخاطره می‌اندازد. امّا او موفق شد ثابت کند (قضیهٔ حذف برش) که این قاعده ضروری نیست. به‌عبارت دیگر اگر فرمولی در دستگاه حساب رشته‌ها برای منطق درجهٔ اول قابل استنتاج باشد در همین دستگاه بدون قاعدهٔ برش نیز قابل استنتاج است. این، قضیهٔ مرکزی نظریهٔ برهان است. اثبات آن تقریباً استاندارد و طولانی است.

یکی از مسائل جدید نظریهٔ برهان این است که وقتی در یک استنتاج قاعدهٔ برش را حذف کنیم چه اتّفاقی در درخت استنتاج می‌افتد؟ مثلاً طول استنتاج چه تغییری می‌کند؟ آیا می‌توان کران بالایی برای استنتاجهای جانشین (که بدون به‌کار بردن قاعدهٔ برش به‌دست آمده‌اند) یافت؟ فصل پنجم کتاب به این مباحث اختصاص دارد.

در فصل ششم به مطالعهٔ دوبارهٔ دستگاه استنتاج طبیعی پرداخته می‌شود و قضیهٔ نرمالسازی[2] ثابت می‌شود. نرمالسازی مفهومی شبیه حذف برش برای دستگاههای استنتاج طبیعی است.

یکی از مباحث کاربردی نظریهٔ برهان، روش رفع[3] است. این روش، نوعی استنتاج است که پایهٔ برنامه‌نویسی منطق و دستگاههای خودران[4] اثبات قضایاست. می‌توان استنتاج رفع را نوعی خاص از استنتاج در دستگاه حساب رشته‌ها تصور کرد که در آن به‌جای استنتاج‌پذیری، مفهوم ردپذیری یا نفی‌پذیری[5] قرار گرفته است. از نظرگاه کلاسیک، رد یا رفع $\neg A$ عبارت است از اثبات A. بنابراین یک راه برای اثبات A عبارت است از سعی در رد یا رفع $\neg A$. فصل هفتم شامل مطالعهٔ حالتهای مختلف نظریهٔ رفع از دیدگاه نظریهٔ برهان است.

فصل هشتم مقدمه‌ای بر منطق رسته‌ای [کاتگوریک] است. کاربرد نظریهٔ رسته‌ها در مطالعهٔ انواع خاصی از منطقها در دههٔ هفتاد میلادی آغاز شد. برای ارائهٔ تصویری مقدماتی امّا غیردقیق از این موضوع می‌توان گفت که اگر فرمولها را اشیاء و ادات شرطی «$\rightarrow$» را مورفیسم بین اشیاء بگیریم، وصل ($\wedge$)، فصل ($\vee$)، ... همان ضرب، پادضرب[6]، ... در نظریهٔ رسته‌ها می‌شود. تعبیر سورها کمی پیچیده‌تر و بیان آن محتاج مفاهیمی مثل الحاق[7] در نظریهٔ رسته‌هاست. بدین ترتیب نظریهٔ رسته‌ها ابزاری برای مدل‌سازی منطقهای خاصی (مثلاً، شهودی) شده که نهایتاً به نظریهٔ توپوس[8] انجامیده است.

فصل نهم، نظریهٔ برهان منطقهای موجهات[9] و خطی[10] است. منطق خطی از ابداعات ژیرار نظریه‌پرداز معروف برهان در ۱۹۸۷ می‌باشد. [۳].

1. cut rule 2. normalization
۳. این اصطلاح را آقای کاوه لاجوردی در برابر resolution پیشنهاد کردند.
4. automatic 5. refutation 6. coproduct 7. adjoint
8. topos 9. modal 10. linear

جدا از نقاط افتراق فلسفی و ریاضی منطق خطی و منطقهای استاندارد، اساسیترین وجه اختلاف در مفهوم «خطی‌بودن» این منطق نهفته است. در هر استنتاج در منطقهای استاندارد، از یک فرض (مقدمه) می‌توان بکرات استفاده کرد. اما حالتهایی وجود دارد (مثلاً فراخواندن یک فایل در اجرای برنامه‌ای کامپیوتری) که از یک فرض بیش از یک بار نمی‌توانیم استفاده کنیم. وقتی از فرضی یک بار استفاده شد، آن فرض، ناپدید می‌شود. مفهوم خطی‌بودن دقیقاً در همین جاست. معلوم شده است که منطق خطی، تاکنون، بهترین مدل برای برنامه‌نویسی منطق در علوم نظری کامپیوتر است.

فصل دهم به حساب پئانو می‌پردازد و فصل یازدهم دربارهٔ حساب مرتبهٔ دوم است. در فصل دهم اثبات گنتسن از سازگاری PA آمده است. روش اثبات گنتسن در این کتاب در دستگاه استنتاج طبیعی به‌کار رفته است. من روش دیگر گنتسن را که در دستگاه حساب رشته‌ها به‌کار رفته بیشتر می‌پسندم و در کلاس نظریهٔ برهان از آن صحبت می‌کنم. قضیهٔ گنتسن در اثبات سازگاری PA را می‌توان با فرمول زیر بیان کرد

$$\mathrm{PA} + \mathrm{Tr}(<_{\epsilon_0}) \vdash \mathrm{Con}(\mathrm{PA})$$

که در آن $\mathrm{Tr}(<_{\epsilon_0})$ اصل استقراء ترامتناهی[1] تا ϵ_0 (کوچکترین عدد ترتیبی η که $\omega^\eta = \eta$) است:

$$\mathrm{Tr}(<_{\epsilon_0}) : \forall x[\forall y < x \ \ A(y) \to A(x)] \to \forall x < \epsilon_0 . A(x)$$

از صورتبندی فوق برمی‌آید که اثبات سازگاری PA، که «مشکل» آن مفهوم بینهایت در اصل استقراء معمولی بوده، محتاج اصل استقراء ترامتناهی تا ϵ_0 است.

علی‌رغم تردیدهایی که نسبت به قدر و اعتبار معرفتی[2] اثبات گنتسن برای سازگاری PA ابراز شده، (مقدمهٔ مرجع [۲] حاوی نظرات ریاضیدانان و منطقدان معروف در این زمینه است)، کار گنتسن، چه در قضیهٔ حذف برش و چه در اثبات سازگاری PA از مهمترین برهانهای منطق ریاضی است و سرآغاز تحولی در کاربردی کردن منطق در علوم نظری کامپیوتر به‌شمار می‌رود.

ارزیابی نگارنده از کتاب *نظریهٔ مقدماتی برهان* به‌طور خلاصه چنین است:

کتاب مذکور را می‌توان کتابی بینابینی، در سطحی بالاتر از کتابهای مقدماتیتر منطق، مثل [۱] که در آن به‌طور موجز از نظریهٔ برهان صحبتی به میان می‌آید، و کتابهای پیشرفته‌تر، مثل [۴]، دانست. همان‌طور که قبلاً گفته شد، کتاب فاقد مقدمه‌ای است که زمینه و انگیزهٔ موضوع را توضیح دهد. علاوه بر این، تعداد اغلاط کتاب به حدّی است که اعتماد خوانندهٔ مبتدی را سلب می‌کند[3]. برای من تدریس این کتاب چالشی بود که ادّعاهای آن را مورد بازبینی قرار دهم. موارد دیگری از اغلاط یافتم که بعضی از آنها جدّی است. خواندن این کتاب و آماده‌کردن آن برای تدریس برایم مبارزه‌ای دلپذیر بود. اگر اهل مبارزه هستید آن را بخوانید.

1. transfinite induction 2. epistemic

۳. غلطنامه‌ای شامل ۲۸۶ مورد، اعم از اغلاط چاپی و غیرچاپی، در آدرس زیر یافت می‌شود:

http://turing.wins.uva.nl/~anne/

مراجع

1. D. van Dalen, *Logic and Structure*, 3rd edition, Springer-Verlag (1997).
2. G. Gentzen, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, edited by M. E. Szabo, North-Holland Pub. Co. (1969).
3. Y. N. Girard, "Linear logic", *Theoretical Computer Science*, **50** (1987) 1-102.
4. _____, *Proof Theory and Logical Complexity*, Biblopolis (1987).
5. G. Kreisel, "Hilbert's programme", in P. Benecerraf and H. Putnam, eds., *Philosophy of Mathematics*, 2nd edition, Prinice-Hall (1983).
6. K. Schütte, *Proof theory*, Springer-Verlag (1977).
7. C. Smorynski, *Hilbert's Programme*, Logic Group, Department of Philosophy, Utrecht University, The Netherlands (1988).

******

* محمد اردشیر، دانشگاه صنعتی شریف و پژوهشگاه دانشهای بنیادی

ardeshir@math.sharif.ac.ir

ویتگنشتاین:

آیا می‌توان گفت که کسی گزارهٔ «۱۰۰۰ = ۴۳۷ + ۵۶۳» را فهمیده است اگر نداند چگونه می‌توان آن را اثبات کرد؟ آیا می‌توان انکار کرد که این نشانه‌ای از فهمِ یک گزاره است، اگر کسی بداند چگونه می‌تواند آن را ثابت کند؟

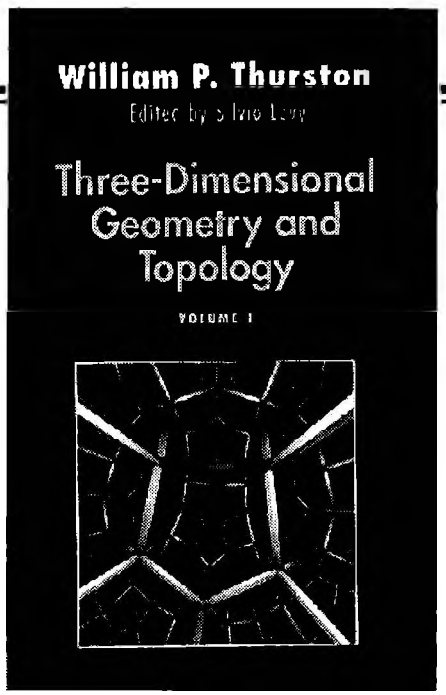
******

نقل از

Ludwig Wittgenstein, *Remarks on The Foundations of Mathematics*, translated by G. E. M. Anscombe, Basil Blackwell, Oxford (1967) IV-42.

توپولوژی و هندسهٔ سه‌بعدی*

رابرت گرین*
ترجمهٔ محمد جلوداری ممقانی



***Three-dimensional Geometry and Topology*, William Thurston, Princeton Univ. Press (1997).**

هیچ موضوع ریاضی به‌اندازهٔ هندسهٔ دو و سه‌بعدی به شهود آدمی نزدیک نیست. امروز کمتر کسی از عقیدهٔ کانت مبنی بر حتمیتِ ماقبل تجربی هندسهٔ اقلیدسی دفاع می‌کند اما اهمیت فضا در ادراک ما از جهان، همچنان یکی از حقایق مسلم روانشناسی است.

خیلی وقتها آن مباحث ریاضی که ریشه‌های قوی شهودی دارند، بسیار دشوارتر از مباحثی هستند که ساختارهای تصنعی دارند. ما آزادیم که هر فضای بینهایت بعدی نامتعارف را برای مطالعه انتخاب کنیم، ولی در مورد گروههای متناهی، اعداد طبیعی یا خمینه‌های با ابعاد پایین، آزادی انتخاب نداریم. حتی در توپولوژی، خمینه‌های تحمیلی با ابعاد پایین، در ابعاد ۳ و ۴ بسیار دشوارتر از خمینه‌های ابعاد بالاترند که تقریباً ساخته و پرداختهٔ خودمان هستند.

با این همه، جای شگفتی است که ظاهراً امیدی به شناخت خمینه‌های ۳ بعدی با روشی هندسی، به‌وسیلهٔ یک نوع شهود گسترش‌یافتهٔ هندسی، وجود دارد. کتاب مورد بررسی مقدمه‌ای است بر برنامهٔ هندسی ترستن برای شناخت خمینه‌های ۳ بعدی، برنامه‌ای که شبیه یکنواخت‌سازی خمینه‌های دوبعدی است ولی ماهیتش پیچیده‌تر و عمیقتر از آن است. این برنامه حتی در شکل کنونیش از ریاضیاتی با قدرت و اهمیت بسیار برخوردار است. اگر این برنامه کامل شود، یکی از یادگارهای جاویدان تفکر ریاضی خواهد بود.

این کتاب حاصل تجدید نظر اساسی در قسمت اول جزوهٔ درسی معروف ترستن در این مبحث (چهار فصل اول تا فصل مربوط به اوربیفولد[1]ها) است که مدتها به‌صورتهای گوناگون و در مقیاس وسیعی پخش می‌شده است. ولی کتاب کاملاً متفاوت با صورتهای مختلف آن جزوه است. ترستن با کمک سیلویو لوی در متن تجدید نظر کرده، آن را بسط داده، و بازنویسی کرده است به‌نحوی که حاصل کار تفاوت اساسی با متن اولیه دارد. نباید تصور کرد که آن جزوهٔ درسی، هرچند جذاب بوده و هست، جانشینی برای کتاب حاضر و جلدهای بعدی آن است. ولی از طرف دیگر حداقل جلد حاضر بسیار مقدماتیتر از قسمتهای پیشرفتهٔ آن جزوه درسی است (مثلاً حالت کلی جراحی هدلولوی دن[1] در کتاب نیامده است).

1. orbifold

برای اینکه چشم‌اندازی از برنامهٔ کلی ترستن و کتاب حاضر به‌دست دهیم لازم است بررسیهای مربوط به رویه‌ها، مثلاً خمینه‌های دوبعدی، را به‌یاد آوریم. البته رویه‌ها در حالتهای کمابیش خاصی در طی هزاران سال موضوع مطالعهٔ هندسی بوده‌اند، ولی کلید فهم همه‌جانبهٔ نظریهٔ هندسی رویه‌ها، خیلی دیرتر و در آنالیز مختلط پیدا شد: نتیجهٔ نهایی به قضیهٔ یکنواخت‌سازی کوبه[2] بستگی دارد، که در سال ۱۹۰۷ ثابت شد. با بازنگری در گذشته، این جریان را می‌توان به‌صورت زیر، به کوتاهترین و کاراترین نحو، شرح داد:

فرض کنید M یک خمینهٔ دوبعدی جهت‌پذیر (C^1 پیرافشرده[3]) باشد. در این صورت M یک متریک ریمانی تحلیلی می‌پذیرد، تحلیلی بدین معنی که این متریک نسبت به یک ساختار تحلیلی حقیقیِ سازگارْ تحلیلی است: این مطلب با انتخاب یک تقریب تحلیلی حقیقی از تصویر یک نشانندهٔ C^1 ثابت می‌شود، موضوعی که امکان آن را ویتنی برای خمینه‌ها در حالت کلی خاطرنشان کرده است[4] [Wh]. سپس با استفاده از نظریهٔ معادلات

1. Dehn 2. Koebe 3. paracompact

۴. به‌نظر می‌رسد که در این مورد یک سوءتفاهم مهم در صفحهٔ ۱۱۳ کتاب، جایی که ادعا شده است ویتنی [Wh] یکتایی و نیز وجود یک ساختار تحلیلی حقیقی سازگار را ثابت کرده است، رخ داده باشد. مقالهٔ ویتنی وجود را ثابت می‌کند، ولی اثبات یکتایی نیازمند نتایج بسیار عمیقتر گراور [Gra] و موری [Mor] دربارهٔ وجود نشانده‌هایی در یک فضای←

دیفرانسیل جزئی می‌توان دید که رویهٔ «پارامترهای تکه‌ای موضعی» می‌پذیرد، یعنی، مختصات موضعی (x_1, x_2) چنانکه متریک مورد بحث به‌صورت $(\lambda^2(x_1, x_2))(dx_1^2 + dx_2^2)$ است که در آن $\lambda(x_1, x_2)$ تابعی (تحلیلی حقیقی) است. درواقع، درجهٔ همواری مورد نیاز بسیار کمتر از حد تحلیلیِ حقیقی بودن است. ولی حالت تحلیلی حقیقی بسیار آسانتر است و بسیار زودتر حل و فصل شده است.

انتخاب پوششی از قطعه‌های، مختصات موضعیِ «تکه‌ها» که به‌طور سازگار جهتدار شده است، برروی M یک ساختار رویهٔ ریمانی ایجاد می‌کند. یعنی گذار از یک چنین دستگاه مختصات (x_1, x_2) به‌دستگاه مختصات دیگر (x'_1, x'_2)، وقتی به‌عنوان نگاشتی مختلط در نظر گرفته شود که $x_1 + ix_2$ را به‌نقطهٔ متناظرش $x'_1 + ix'_2$ می‌نگارد، تحلیلی است.

اکنون می‌توان ساختار رویهٔ ریمانی بر M را به پوشش عام[1] ساده‌ـهمبند $\hat{M}$ از M «ترفیع[2]» داد. از لحاظ تاریخی مدت زیادی طول کشید تا تمام اندیشه‌هایی که این جمله بیان فشردهٔ آنهاست پایهٔ مستحکمی پیدا کنند و نظریهٔ دقیق فضاهای پوششی یکی از دستاوردهای بزرگ ریاضیات در حدود یک قرن قبل محسوب می‌شود، هرچند امروزه بسیاری از ما آن را بدیهی می‌شماریم.

به‌این ترتیب، می‌توان M را فضای خارج قسمتی $\hat{M}$ نسبت به گروه تبدیلات پوششی Γ دانست. از قبل می‌دانیم که گروه Γ به‌صورت تحلیلی، یعنی همدیس، عمل می‌کند نه بیشتر. اما در این مرحله، حقایق ریاضیات ماموس با وارد کردن هندسهٔ متریک اصیل و نه فقط تبدیلهای همدیس، تصویر کلی را کامل می‌کنند.

بنابر قضیهٔ یکنواخت‌سازی معروف کوبه که قبلاً از آن نام بردیم، رویهٔ ریمانی ساده‌ـهمبند $\hat{M}$ باکرهٔ ریمانی $\mathbb{C}P^1$، صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ یا قرص واحد D در صفحهٔ مختلط، یکریخت تحلیلی است. اکنون Γ از طریق نگاشتهای تحلیلی یکریخت بدون نقطهٔ ثابت بر $\hat{M}$ عمل می‌کند و جای بسی خوشوقتی است که نگاشتهای تحلیلی یکریخت بدون نقطهٔ ثابت، ایزومتریها [طولپاییها]ی متریکی در هر سه مورد هستند.

در مورد $\mathbb{C}P^1$ وضعیت بسیار ساده است: هیچ نگاشت تحلیلی یکریخت غیرهمانی بدون نقطهٔ ثابت وجود ندارد، از این‌رو Γ باید فقط شامل عضو همانی باشد. دلیل: نگاشتهای یکریخت تحلیلی تبدیلهای کسری خطی‌اند، و با محاسبه دیده می‌شود که این نگاشتها همگی نقطهٔ ثابت دارند؛ همچنین می‌توان به این مطلب در توپولوژی استناد کرد که هر همسانریختی جهت‌نگهدار S^2 که از درجهٔ ۱ باشد، نقطهٔ ثابت دارد، ولی این کار به شکستن گردو با پتک می‌ماند.

در مورد $\mathbb{C}$، نگاشتهای یکریخت تحلیلی باید خطی : $z \longrightarrow az + b$ باشند و از این رو برای اینکه نقطهٔ ثابت نداشته باشند باید به‌صورت انتقالهای $z \longrightarrow z + b$ باشند، که متریک استاندهٔ $\mathbb{R}^2$ را حفظ می‌کنند.

— اقلیدسی است که به‌ازای یک ساختار حقیقی تحلیلی داده شده و ثابت، تحلیلی حقیقی‌اند. این کاملاً متفاوت و بسیار مشکلتر از نتیجه‌گیری ویتنی است مبنی بر اینکه یک زیرخمینهٔ C^1 از R^n را می‌توان با یک زیرخمینهٔ تحلیلی حقیقی تقریب زد. این تمایز هیچ نقشی در سایر جاهای کتاب ایفا نمی‌کند، ولی روی هم‌رفته آنقدر بد فهمیده شده است که ارزش یادآوری را داشت. برای نگاهی دیگر به تاریخچهٔ موضوع به [Gr W] مراجعه کنید.

1. universal cover 2. lift

در مورد D، وضعیت قدری پیچیده‌تر است: در اینجا نگاشتهای یکریخت تحلیلی تبدیلهای موبیوس $z \longrightarrow w\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$، $|w| = 1$، $a \in D$ هستند. و می‌دانیم که تمام این تبدیلها (با نقطهٔ ثابت یا بودن نقطهٔ ثابت) به‌عنوان ایزومتریهای متریک $\frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$ با مختصات اقلیدسی (x, y) روی D، موسوم به «متریک پوانکاره»، عمل می‌کنند. با اطلاعاتی که امروز داریم، کمابیش روشن است که چنین متریک ناوردایی وجود دارد، صرفاً به این دلیل که گروه پایداری مبدأ و لذا هر نقطه دیگر (D به‌طور یکریخت تحلیلی همگن است) فشرده است. در حقیقت، متریک ناوردا را صرفاً با توجه به این مطالب پیدا می‌کنند که این متریک باید در مبدأ به‌صورت دورانی ناوردا باشد، زیرا دورانها به‌صورت یکریخت تحلیلی عمل می‌کنند، و لذا این متریک مضربی از متریک اقلیدسی است، و در نقاط دیگرْ این متریک با توجه به این واقعیت که D تحت تبدیلات موبیوس همگن است، تعیین می‌شود. همچنین این همگنیِ متریکِ حاصل ایجاب می‌کند که متریک ناوردا دارای خمیدگی گاوسی ثابت منفی باشد، همان‌گونه که باید باشد. (اگر این خمیدگی ۰ باشد، آنگاه D با متریک ناوردای همدیسی با $\mathbb{C}$ ایزومتریک و لذا با $\mathbb{C}$ یکریخت تحلیلی است، و این قضیهٔ لیوویل را نقض می‌کند؛ اگر این خمیدگی مثبت باشد، آنگاه D، که همگن و بنابراین کامل است، باید فشرده باشد.)

اکنون به خود خمینهٔ M می‌پردازیم؛ در این مورد یک حکم خوشحال‌کننده وجود دارد: M یک متریک کامل با خمیدگی گاوسی ثابت می‌پذیرد. این مطلب نتیجه‌ای از این واقعیت است که Γ روی $\hat{M}$ به‌عنوان ایزومتری عمل می‌کند به‌طوری که متریک خمیدگی ثابت $\hat{M}$، به سمت M «پیش رانده» می‌شود. خمیدگی این «پیش‌رانی[1]» ثابت است، زیرا با $\hat{M}$ به‌طور موضعی ایزومتریک است، و کامل است زیرا خارج قسمت فضای پوششی از یک متریک کامل همواره کامل است.

اگر M فشرده باشد، علامتی که خمیدگی یک متریک با خمیدگی ثابت روی M می‌تواند داشته باشد توسط توپولوژی M به‌صورت یکتا تعیین می‌شود. برای مثال، فرمول گاوس‌ـبونه[2] $\int KdA = 2\pi\chi(M)$ نشان می‌دهد که علامت خمیدگی (یا صفر شدن آن) با علامت مشخصهٔ اویلر M یکسان است.

وقتی M فشرده نیست، ممکن است ابهام پیش آید. به صفحهٔ سوراخ‌شدهٔ $\mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$ می‌توان متریک کاملی با خمیدگی صفر نسبت داد و نیز متریک کاملی با خمیدگی ثابت منفی. اینها به‌ترتیب متناظرند با $\mathbb{C}$ که $\mathbb{C} - \{0\}$ را توسط $z \longrightarrow e^z$ می‌پوشاند و با D که مثلاً $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ را می‌پوشاند. از لحاظ هندسی، روی $\mathbb{R} \times S^1$ می‌توان متریکهایی به‌صورت $dr^2 + d\theta^2$ برای خمیدگی صفر و $dr^2 + (\cosh^2 r)(d\theta)^2$ برای خمیدگی ثابت -1 قرار داد.

با این حال، صفحهٔ سوراخ‌شده یا معادلش $S^1 \times \mathbb{R}$ تنها مورد مبهم است. به آسانی می‌توان دید که $\mathbb{C}$ فقط $S^1 \times S^1$ و $S^1 \times \mathbb{R}$ را می‌پوشاند در صورتی که تبدیلهای پوششی الزاماً انتقال باشند. بنابراین $S^1 \times \mathbb{R}$ تنها خمینهٔ نافشردهٔ ناشی از یک خارج‌قسمت تحلیلی $\mathbb{C}$ است. سایر خمینه‌های نافشردهٔ توپولوژیک تنها از خارج‌قسمتهای D ناشی می‌شوند. البته این دیدگاه نتیجهٔ فشردهٔ زیر را نیز ایجاب می‌کند: خمینهٔ S^2 از $\mathbb{C}P^1$ (خمیدگی مثبت)، $S^1 \times S^1$ از $\mathbb{C}$ (خمیدگی صفر) و سایر خمینه‌ها از D ناشی

1. push-down 2. Gauss-Bonnet

می‌شوند ــ بجز اینکه لازم است ثابت شود که $S^1 \times S^1$ را نمی‌توان از یک خارج‌قسمت تحلیلی D به‌دست آورد، مثلاً، به‌صورت حالت خاصی از قضیهٔ پریزمن[1] در مورد زیرگروههای آبلی گروه بنیادی خمینه‌ای با خمیدگی منفی ثابت (این قضیه با دستاوردهای بعدی که رشد گروه بنیادی را به رشد حجم پوشش عام مربوط می‌کند، ارتباط یافته است).

تصویر کلی، زیبایی تامی دارد که برازندهٔ هندسهٔ کلاسیک یونانی است: هر رویه، هرقدر هم پیچیده باشد، هندسه‌ای می‌پذیرد که دارای وسیعترین تقارن موضعی ممکن است و به‌استثنای استوانه، که همزمان دو هندسه دارد، هندسهٔ موضعی حاصل توسط نوع توپولوژیک رویه به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

با این حال، توجه به این نکته مهم است که به‌طور کلی متریک با خمیدگی ثابت، خودش به‌صورت یکتا تعیین نمی‌شود ــ فقط علامت خمیدگی توسط توپولوژی معین می‌شود. البته، یک تغییر بدیهی امکان‌پذیر است، زیرا مضرب ثابت مثبت λg از متریک g با خمیدگی ثابت K باز هم دارای خمیدگی ثابت $\lambda^{-1}K$ است. ولی در حالت کلی تغییرات نابدیهی امکان‌پذیرند. در مورد S^2 و خمیدگی ۰ بر $S^1 \times \mathbb{R}$، متریکهای با خمیدگی ثابت با تقریب مضربهای ثابت و ایزومتری، یکتا هستند. ولی در سایر موارد، تغییرات نابدیهی در خانواده‌های با بعد مثبت وجود دارد. این تغییرات ساختار مختلط، مثلاً، روی یک رویهٔ ریمانی فشرده از گونهٔ ناکمتر از ۲ به خانواده‌ای از متریکهای غیرایزومتریک با خمیدگی ثابت ۱ − منجر می‌شوند. مدتها پیش ریمان کشف کرده است که بُعد این خانواده در اینجا $6g - 6$ (بعد حقیقی) است. به‌ازای $g = 1$ (چنبره)، این بعد حقیقی ۲ است. البته این موضوع در سیر رشد تاریخیش به مبحثی که به خودی خود بسیار مهم است تبدیل شد.

در مورد رویه‌های فشرده، می‌توان آنالیز مختلط را دور زد و متریکهای با خمیدگی ثابت را به‌طور مستقیمتر ساخت. ابتدا قضیهٔ رده‌بندی توپولوژیک را مبنی بر اینکه هر رویه را می‌توان با یکی گرفتن اضلاع یک چندضلعی مناسب به‌دست آورد، ثابت می‌کنند. سپس نشان می‌دهند که این فرایند یکی گرفتن را می‌توان به اصطلاح به‌طور متریک انجام داد یعنی در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$، صفحهٔ هذلولوی یا کرهٔ S^2، به‌قسمی که متریکی با خمیدگی ثابت هموار روی رویه به‌دست آورد. در حقیقت این روشی است که در کتاب حاضر، که کاری به یکنواخت‌سازی به مفهوم متغیرهای مختلط ندارد، به‌کار گرفته شده است.

با توجه به موفقیت چشمگیر برنامهٔ شناخت خمینه‌های ۲ بعدی با استفاده از «یکنواخت‌سازی» به‌وسیلهٔ خمیدگی ثابت، تا حدی تعجب‌آور است که مدت زیادی طول کشید تا پیشرفت قابل ملاحظه‌ای در تعمیم این برنامه به ابعاد بالاتر به‌دست آید. این بدان معنا نیست که در این مدت توپولوژی خمینه‌ها با هندسهٔ ریمانی در حال رخوت و سکون بوده‌اند. البته مطالعهٔ خمینه‌های با ابعاد پنج و بالاتر با روشهای توپولوژی دیفرانسیل یکی از موفقیتهای بزرگ ریاضیات در دهه‌های پنجاه و شصت بوده است. و، هندسهٔ ریمانی با انرژی مجددی که از اندیشه‌های هوپف در مورد خمیدگی و توپولوژی در دههٔ بیست به بعد کسب کرد، وارد دوره‌ای از رونق و شکوفایی شد که هنوز ادامه دارد. ولی شگفتا که هندسه و توپولوژی مدتها راههای جداگانه‌ای پیمودند.

برای پی‌بردن به منطق این جدایی، ضروری است نگاهی به آنچه در هندسهٔ ریمانی رخ می‌داد بیندازیم. مسلماً حالت ۲بعدی اصول راهنما

1. Preissman

را پیش روی هندسهٔ ریمانی قرار داد. مثلاً، یکتایی کرهٔ ۲ بعدی در میان خمینه‌های (جهت‌پذیر) ۲ بعدی با خمیدگی مثبت، به این نظر کلی منجر شد که در ابعاد بالاتر، خمینه‌های با خمیدگی مثبت به‌معنایی کم‌اند. این مطلب در قضیهٔ وینشتین [We] رسماً صورتبندی شد. این قضیه حاکی است که در میان خمینه‌های با بعد زوج ثابت که خمیدگی مقطعیشان متعلق به بازهٔ $[\delta, 1]$، $\delta > 0$ باشد، فقط تعداد متناهی نوع هوموتوپی وجود دارد. این قضیه به پیدایش «حرفهٔ» اثبات «قضیه‌های متناهی بودن» منجر شد که با حرفهٔ اجتناب‌ناپذیر پیدا کردن شرایطی که تحت آنها خمینه‌ای تبدیل به کره شود، همراه بود. (معروفترین این قضیه‌های کره، قضیهٔ «$\frac{1}{4}$» برژه‌کلینگنبرگ[1] بود مبنی بر اینکه فشردگی، تعلق داشتن خمیدگی مقطعی به $(\frac{1}{4}, 1)$ و همبندی ساده، همسانریختی با کره را ایجاب می‌کنند.) در حالت مختلط، یکتایی‌ای درست مانند وضعیت یکتایی $\mathbb{C}P^1$ برقرار می‌شود: یک خمینهٔ کیلر[2]ی فشرده با خمیدگی مقطعی مثبت با $\mathbb{C}P^n$ یکریخت تحلیلی است. این حکم، که مدتها قبل حدس زده شده و نتایج جزئی بسیاری دربارهٔ آن به‌دست آمده بود، بالاخره توسط موری [Moi] با روشهای هندسهٔ جبری و توسط سیو-یائو [SY] با روشهای هندسهٔ مختلط ثابت شد.

در مورد خمیدگی منفی نیز پیشرفتْ سریع بود. ولی جنبه‌های غیرمنتظرهٔ جدیدی پدیدار شدند. نخست، قضیهٔ صُلبیّت[3] موستو[4] بود حاکی از اینکه یک خمینهٔ فشرده با بعد ناکمتر از ۳ حداکثر می‌تواند یک ساختار متری با خمیدگی مقطعیِ متحد با ۱ − داشته باشد. سپس، به‌دنبال کارِ پیشگامانهٔ پریزمن و بیشاپ-اونیل[5] اطلاعات بسیاری دربارهٔ گروههای بنیادی ممکن خمینه‌های با خمیدگی مقطعی منفی حاصل شد. (از مدتها قبل معلوم بود که این چنین خمینه‌ای خارج‌قسمت توپولوژیک یک فضای اقلیدسی نسبت به یک گروه تبدیل پوششی است به‌طوری که گروه بنیادی و عملِ آن روی پوشش عام تمام توپولوژی خمینه را در بردارد. در حالتِ خمیدگی مقطعی صفرِ موضعاً تعیین‌شده، باز هم پوشش عام $\mathbb{R}^n$ است، ولی اکنون به‌لحاظ متری نیز $\mathbb{R}^n$ با متریک استانده است، و گروههای بنیادی ممکن خیلی محدودند. اینها را بیبرباخ طبقه‌بندی کرده است.

صرفِ موفقیت این دستاوردها ایدهٔ یکنواخت‌سازی را تضعیف کرد. به‌نظر می‌رسید تعداد کمی از خمینه‌های با بعد بالاتر از دو، متریکی می‌پذیرند که خمیدگی مقطعی با یک علامت دارد، و خمینه‌های بسیارکمتری هم متریکی می‌پذیرند که خمیدگی مقطعی ثابت دارد. برای مثال، کافی است خمینه‌هایی nبعدی با پوشش عام متفاوت از $\mathbb{R}^n$ پیدا کنیم که نخستین عدد بتی آنها بزرگتر از n است، چون خمیدگی نامثبت، پوشش عام $\mathbb{R}^n$ را ایجاب می‌کند در حالی که بوکنر[6] نشان داده است که خمیدگی نامنفی ایجاب می‌کند که نخستین عدد بتی از n بزرگتر نباشد. مثلاً، کافی است نگاهی به مجموع همبند عوامل زیر بیندازیم: (۱) حاصلضرب S^2 و $(n-2)$ نسخهٔ S^1 و (۲) حاصلضرب یک رویهٔ ریمانی از گونهٔ بالا در $(n-2)$ نسخهٔ S^1. (وجود S^2 که از نظر هوموتوپیک، نابدیهی است موجب حذف $\mathbb{R}^n$ به‌عنوان یک پوشش عام می‌شود، در حالی که مولدهای ۱ـهومولوژی از رویهٔ ریمانی

1. Berger-Klingenberg 2. Kähler 3. rigidity 4. Mostow
5. Bishop-O' Neill 6. S. Bochner

باقی هستند و نخستین عدد بتی را بزرگتر از ۸ می‌نمایند.)

یکی دیگر از عوامل دلسردکننده، ماهیت عملی داشت: ساختن خارج‌قسمتهای (فشردهٔ) قرص پوانکاره با پیچیدگی توپولوژیک زیاد، با استفاده از هندسهٔ هذلولوی تاحدی آسان است: برای این‌کار فقط با طولها، زاویه‌ها و قرینه‌یابیها نسبت به ژئودزیکها سروکار داریم. ولی در ابعاد ۳ و بالاتر، این شیوه‌های ساخت مستقیم بسیار دشوارتر می‌شوند. در حقیقت، حتی امروزه بجز ساختمانهایی که با استفاده از گروههای حسابی به‌دست آمده‌اند، فقط معدودی ساختمان در بعد ناکمتر از ۴ شناخته شده‌اند.

البته، آدمِ نسبتاً زیرک یا خوشبین ممکن بود دستکم به این واقعیت دلخوش کند که همهٔ خمینه‌های «بد» پاراگرافهای قبل، بجز یکی از آنها، مجموعهای همبند خمینه‌های نسبتاً «خوب» هستند، یعنی حاصلضربهای سادهٔ اشیاء متعلق به هندسه‌های استانده. ولی درواقع، کل مطلب تا زمانی که ترستن کشف کرد بسیاری از خمینه‌های سه‌بعدیْ ساختار هذلولوی، یعنی متریک کامل با خمیدگی ثابت منفی می‌پذیرند، مسکوت ماند. پس از این کشف و پیشرفتهای وابسته به آن، ترستن جانشینی برای یکنواخت‌سازی به‌مفهوم دقیق کلمه، پیشنهاد نمود؛ وی حدس زد که هر خمینهٔ سه‌بعدی فشرده را می‌توان به‌معنایی به‌صورت اجتماع متناهی از قطعاتی نوشت که «ساختارهای هندسی» می‌پذیرند. ساختارهای هندسی، به‌معنایی که به‌زودی گفته خواهد شد همان چیزهایی هستند که در بعد سه متناظرند با خمیدگی ثابت در بعد دو. هرچند به‌سادگی می‌توان تشریح کرد که یک خمینهٔ فشرده به چه‌معنایی یکی از این ساختارهای هندسی را می‌پذیرد، معنی دقیق اینکه یک خمینهٔ سه‌بعدی را می‌توان (حدساً) به قطعات ساختار یافتهٔ هندسی تجزیه نمود تا حدی دشوار است و حالت کلی آن خارج از محدودهٔ این بررسیِ مختصر است. در این مورد، مقالهٔ پیتر اسکات [Sc] برای خواننده‌ای که خواهان اطلاع از جزئیات است شرح روشن و مفصلی ارائه می‌دهد. (صورت خاصی که به‌آسانی بیان می‌شود از این قرار است: اگر M یک خمینهٔ سه‌بعدی، جهتپذیر، بسته و اول باشد، آنگاه مجموعه‌ای متناهی از چنبره‌های دوبعدی $\{T_j\}$ که به‌طور مجزا در M نشانده شده‌اند، وجود دارد به‌طوری که هر مؤلفه (باز) مکمل $\cup T_j$ در M ساختاری هندسی می‌پذیرد به این معنی که یک متریک کامل می‌پذیرد که پوشش متریک، عام (لزوماً کامل) آن یکی از هشت «هندسهٔ الگو» است که در بررسی حاضر تعریف خواهد شد.)

«ساختارهای هندسی» درواقع فضاهای ریمانی ساده‌ـهمبند همگن با این ویژگی اضافی هستند که خارج‌قسمتهای فشرده می‌پذیرند. تاریخچهٔ رده‌بندی فضاهای همگن ریمانی سه‌بعدی (حداقل) از کتاب الی کارتان [Car]، منتشر شده در سال ۱۹۲۸، آغاز می‌شود که در آن، این کار به‌عنوان کاربردی از نظریهٔ کلی کنجهای متحرک و فرمهای دیفرانسیل کارتان انجام گرفته است. (در این کتاب این رده‌بندی به اصطلاح به‌طور موردی انجام شده و هیچ استناد تاریخی صورت نگرفته است.) هشت تا از این ساختارهای هندسی (در فضای سه‌بعدی) وجود دارد. نخست، سه «فرم فضایی» ساده‌ـهمبند وجود دارد، یعنی، خمینه‌های ریمانی کامل و ساده‌ـهمبند با خمیدگیهای ثابت ۱، ۰ و ۱−، که عبارت‌اند از S^3، $\mathbb{R}^3$ (در این کتاب E^3 نامیده شده است) و H^3 (فضای هذلولوی ۳ بعدی). (در اینجا متریکهایی که در یک مضرب ثابت اختلاف دارند اساساً معادل تلقی شده‌اند، و لذا خمیدگیهای ثابت ۱+، ۰ و ۱− تنها خمیدگیهای مقطعی ممکن هستند). سپس حاصلضربهای متریک $\mathbb{R}$ با فرمهای فضایی ساده‌ـهمبند ۲ بعدی است، یعنی، $S^2 \times \mathbb{R}$ و $H^2 \times \mathbb{R}$. (البته، $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ همان $\mathbb{R}^3$ است که قبلاً ذکر شد.)

سه‌هندسهٔ باقیمانده، به‌تعبیری، ارتباط مستقیم کمتری با هندسه دارند و بیشتر به نظریهٔ لی مربوط‌اند، و عبارت‌اند از پوشش عام کلاف مماس یکهٔ H^2 که با $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ نشان داده می‌شود، همراه با دو ساختار اضافی که به هندسهٔ پوچتوان و هندسهٔ حل‌پذیر موسوم‌اند: این هندسه‌ها به‌ترتیب هندسهٔ گروه هایزنبرگ (گروه ماتریسهای بالا مثلثی با عناصر قطری واحد) و گروه حل‌پذیر لی سه‌بعدی هستند که گروه اخیر شامل تبدیلهای

$$(x, y, t) \longrightarrow (e^t x + x_0,\ e^{-t} y + y_0,\ t + t_0)$$

است که با $(x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{R}^3$ پارامتری می‌شود.

هر خمینه فشردهٔ سه‌بعدی را می‌توان حداکثر با یکی از این هشت هندسه یکنواخت کرد. یعنی، به‌ازای یک خمینهٔ فشردهٔ سه‌بعدی M حداکثر یکی از این هشت خمینهٔ الگو وجود دارد به‌طوری که خمینهٔ M فضای خارج‌قسمتی این الگو نسبت یک، زیرگروه گسسته (و همفشرده) از گروه ایزومتریهای الگوست؛ به‌علاوه، این الگو را می‌توان به صراحت با استفاده از گروه بنیادی $\pi_1(M)$ به‌عنوان یک گروه معین کرد. مثلاً، اگر $\pi_1(M)$ متناهی باشد، S^3 با الگوی خمیدگی ثابت مثبت تنها انتخاب ممکن است. اگر $\pi_1(M)$ تقریباً آبلی باشد (دارای یک زیرگروه آبلی شاخص متناهی باشد)، آنگاه الگوهای ممکن $S^2 \times \mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^3$ هستند برحسب اینکه $\pi_1(M)$ تقریباً دوری باشد یا نه. اگر $\pi_1(M)$ تقریباً آبلی نباشد ولی تقریباً پوچتوان باشد، آنگاه الگوی ممکن هندسهٔ پوچتوان است، و اگر تقریباً پوچتوان نباشد ولی تقریباً حل‌پذیر باشد، الگوْ هندسهٔ حل‌پذیر است. اگر تقریباً حل‌پذیر نباشد و زیرگروه دوری نامتناهی نرمال نداشته باشد آنگاه فضای هذلولوی است. اگر تقریباً حل‌پذیر نباشد ولی یک زیرگروه دوری نامتناهی نرمال داشته باشد، آنگاه گروه خارج‌قسمتی آن نسبت به زیرگروه دوری نامتناهی نرمال، یک گروه همفشردهٔ گسسته از ایزومتریهای هذلولوی است. اگر گروه اخیر زیرگروهی با شاخص متناهی داشته باشد که تجزیه شود، الگوْ $H^2 \times \mathbb{R}$ است وگرنه عبارت است از $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.

این رده‌بندی اصلاً روشن نیست. درواقع در این رده‌بندی، برای نمونه، حالت سه‌بعدی قضیهٔ معروف پریزمن مبنی بر اینکه گروه بنیادی یک خمینهٔ فشرده با خمیدگی مقطعی منفی شامل هیچ زیرگروه آبلی، غیردوری نیست، به‌کار می‌رود.

این رده‌بندی آخرین نتیجهٔ کتاب است و همراه با رده‌بندی هشت هندسهٔ مذکور، هدف اصلی کتاب است. تا حدی عجیب است که این کتاب که تقریباً از مقدمات هندسه و حتی نظریهٔ خمینه‌ها آغاز کرده، به‌چنین نتایجی دوردست در نظریهٔ فضاهای همگن ریمانی رسیده است. دو فصل اول کتاب به رویه‌ها و یکنواخت‌سازی آنها و هندسهٔ هذلولوی، به‌ویژه در حالت ۲ و ۳ بعدی، اختصاص دارد. در فصل سوم، ساختارهای هندسی بر خمینه‌ها در حالت کلی بررسی می‌شود و رده‌بندی هشت هندسهٔ سه‌بعدی مطرح می‌گردد. به موازات این کار بحث مفصلی در مورد توپولوژی خمینه‌ها با استفاده از ایده‌های مثلث‌بندی، ساختن با روش چسباندن، و غیره، به‌عمل

می‌آید. (بسیاری از احکامی که اشاره کردیم اثبات نشده و به‌صورت غیررسمی به‌عنوان زمینه‌ای برای شرح و بسط موضوع اصلی مطرح شده‌اند.) فصل چهارم گروههای گسسته را مورد بحث قرار می‌دهد به رده‌بندی ختم می‌شود که گروه بنیادی را به هندسهٔ الگوی پیشگفته مربوط می‌سازد. محتویات کتاب تقریباً مشابه محتویات مقالهٔ توصیفی اسکات [Sc] دربارهٔ برنامهٔ ترستن است. ولی بحث آن از مطالب بسیار مقدماتیتری شروع می‌شود. به‌تعبیری، این کتاب نوعی نامتعارف از کتاب درسی، با پیشنیازهای (رسمی) نسبتاً مقدماتی با توجه به هدفهای آن است. از طرف دیگر در مورد خوانندگان داشتن هیچ معلومات قبلی در هیچ زمینه‌ای فرض نشده است، اگرچه مسلماً داشتن اراده‌ای قوی و/یا مهارت کافی، ضروری است.

درواقع کتاب به‌سبکی غیرمعمول نگارش یافته است. جملهٔ اول پیشگفتار این است: «سبک تشریح مطالب در این کتاب، تاحدی تجربی است.» و پس از خواندن کتاب آدم احساس می‌کند این جمله نارساست. فکر می‌کنم تقریباً همه به این باور رسیده باشند که استفاده از روش تعریف-قضیه-برهان که آثار بورباکی مظهر کامل آن است بهترین راه عرضهٔ ریاضیات نیست و ارائهٔ انگیزه‌ها و مثالهای تفصیلی بیشتر در نهایت درک بهتری به خواننده می‌دهد. اما این کتاب یک نمونهٔ واقعاً افراطی از این باور رو به رشد را نشان می‌دهد. مثلاً برای بسیاری از مفاهیم کاملاً بنیادی، کمتر تعریف رسمی داده شده یا اصلاً داده نشده است. درواقع، این کتابی‌است در مورد (بخشی از) هندسهٔ ریمانی که مفهوم متریک ریمانی را خیلی به‌اختصار در یک پیوست تعریف می‌کند و مفهوم خمیدگی مقطعی را با چند مثال!

این سؤال طبیعی پیش می‌آید که آیا این روش کارآمد است؟ کتاب برای کسی که مقدمات توپولوژی خمینه و هندسهٔ ریمانی را از قبل می‌داند، بی‌شک آموزنده و الهام‌بخش است. و مسلماً این حقیقت را به خواننده می‌فهماند که مطالبِ قابل دانستن دربارهٔ این موضوعها بسیار بیشتر از آن است که با روش «گشت در بزرگراه» که بسیاری از کتابهای درسی در پیش می‌نهند، قابل حصول باشد. اصلاً چند نفر از کسانی که درس هندسهٔ معمولی را گذرانده‌اند نحوهٔ ساختن یک خمینهٔ ۳ بعدی هذلولوی فشرده را می‌دانند؟ هر چند که مثال زایفرت-وبر که در این کتاب آمده در دههٔ سی کشف شده است. ولی معمولاً این نوع مثالهای ملموس و مشخص مورد توجه قرار نمی‌گیرند. فقدان درک عینی و کامل که ناشی از این بی‌توجهی است ممکن است پرهزینه باشد و پیامدهای عجیبی داشته باشد، مانند کشف دوبارهٔ احکام هندسهٔ ریمانی با روشهای سطح بالای معادلات دیفرانسیل، بدون اینکه کاشفین جدید متوجه باشند که این احکام قبلاً ثابت شده‌اند.

از طرف دیگر، مطالعهٔ این کتاب، مثلاً، به‌عنوان کتاب درسی توپولوژی دورهٔ کارشناسی (که کتاب علی‌الاصول برای این منظور کفایت می‌کند) تلاش بسیار زیاد می‌طلبد. همچنین، کتاب به‌خصوص چشم‌انداز نسبتاً محدودی از هندسهٔ ریمانی به‌دست می‌دهد. از توپولوژی خمینهٔ عمومی منظره‌ای وسیعتر عرضه می‌شود و بسیاری از احکام اصلی آن دست‌کم به‌طور جنبی بیان می‌شوند. مسلماً کتاب بسیار قابل فهمتر از جزوه‌های درسی ترستن است که درک برخی از آنها حتی برای کسانی که زمینهٔ قوی دارند، نیازمند تلاش طاقت فرساست. ولی کتاب حاضر هم، به‌نحو دیگری، برای خوانندگان مبتدی دشوار به‌نظر می‌رسد.

به‌عنوان نمونه‌ای تصادفی، در معرفی فضای دوازده وجهی هذلولوی زایفرت-وبر که قبلاً ذکری از آن رفت و فضای کروی (پوانکارهٔ) دوازده وجهی وابسته، بدون هیچ توضیحی، بدیهی فرض شده است که اگر زاویه‌های دووجهی طوری باشند که متریکهای روی نواحی داخلی سه‌بعدی در امتداد یالها با هم برابر باشند، آنگاه متریک ناتکینی در رأسها نیز به‌دست می‌آید. درست است که در حقیقت برای خمیدگی ثابت در فضاهای با ابعاد ۳ یا بیشتر، تکینه‌های منفرد متریک از نوعی که می‌خواهیم از آنها اجتناب کنیم، وجود ندارند، ولی اثبات این مطلب تبحری زیادتر از آنچه مبتدی احتمالاً تا صفحهٔ ۳۷ به‌دست آورده است، می‌طلبد. (بحث مبسوط در این‌باره، مثلاً در [Ra]، بسیار پیچیده است، ولی، مثلاً می‌توان مطلب را بسیار آسانتر با استفاده از ادامهٔ ایزومتریهای موضعی و اینکه $\mathbb{R}^3 - \{$ یک نقطه $\}$ ساده‌همبند است، بیان کرد.)

ویژگی دوم آن است که، اگرچه کتاب به تعبیری سیر پیشرفت تاریخی و لذا روانشناختی موضوع را مرور می‌کند، ارجاعات تاریخی آن نسبتاً کم است. البته این موضوع زیاد مهم نیست: کتاب درسی ضرورتاً کتاب تاریخ نیست. ولی ارجاعات تاریخی در این کتاب نوسان شدیدی دارد. از یک طرف خواننده را در مورد منشأ تاریخی مطلبی مهم و اساسی چون رده‌بندی هشت هندسه در تردید نگه می‌دارد (بحث در [Sc] نیز عاری از ارجاعات، مثلاً ارجاع به کارتان، است)، از طرف دیگر ارجاعات مفصلی برای برخی مطالب فرعی داده شده است. از قلم افتادگیهای عجیبی وجود دارد: «تعلیق دوگانه[1]» بدون ارجاع به ادواردز[2] در فهرست راهنما یا کتابشناسی، ذکر شده است، هرچند در متن به او ارجاع داده شده است. (یک تذکر شخصی: قضیهٔ موزر[3] در مورد عمل وابرریختیها [دیفئومورفیسمها] بر فرمهای حجم در خمینه‌های فشرده بدون ارجاع به قضیهٔ متناظر در مقالهٔ [GrS] اثر شیوهاما[4] و این نویسنده در مورد خمینه‌های نافشرده، مورد بحث واقع شده است.)و، به‌طوری که در پانوشت صفحهٔ اول خاطرنشان کردیم دست‌کم یک شرح تاریخی دارای اشکال اساسی از لحاظ ریاضی است. ولی ناراحت‌کننده‌تر از همهٔ اینها اشاره نکردن به قضیه‌های مهم هندسی در مقایسه با نکته‌های کوچک توپولوژیک است که به تفصیل مورد بحث قرار گرفته‌اند: الی کارتان و پریزمن از قلم افتاده‌اند، در حالی که به بسیاری کارهای کوچک توپولوژیدانان ارجاع داده شده است. مسلماً مؤلف مجاز است بر چیزهای مهم تأکید نماید، ولی قسمت بزرگی از کتاب دربارهٔ هندسه است.

اگر دوباره به ریاضیات برگردیم، شایان ذکر است که برهان واقعی حدس هندسی‌سازی ترستن ممکن است از مسیری کاملاً متفاوت با مسیر هندسی یا توپولوژی محض به‌دست آید. روشهایی مبتنی بر معادلات دیفرانسیل جزئی (توسط همیلتن [Ha2] با استفاده از جریان ریچی، و اندرسن [An] با حل مسأله یامابه) مطرح شده‌اند که در جایی که از روشهای عینی‌تر هندسی کاری برنمی‌آید، می‌توانند ثمربخش باشند.

این امر از لحاظی تعجب‌آور نیست. یکنواخت‌سازی رویه‌های ریمانی فشرده (از گونهٔ حداقل ۲) را می‌توان حالت خاصی از حدس کالابی[5] (در حالت علامت منفی) دانست، و از این رو می‌توان آن را با روشهای معادلات دیفرانسیل جزئی بررسی و اثبات کرد. (درواقع، حالت رویهٔ ریمانی از این لحاظ بسیار آسانتر از روشهای اوبن[6] و یاو[7] است که در ابعاد بالاتر به‌کار

1. double suspension 2. R. Edwards 3. J.Moser
4. K. Shiohama 5. Calabai 6. T. Aubin 7. S. T. Yau

رفته‌اند.) به‌علاوه، به‌نظر می‌رسد که الهام‌بخش اندیشه‌های اولیه و برهان پیشنهادی یامابه برای حدس وی در مورد خمیدگی اسکالر ثابت، حدس پوانکاره باشد. قضیه‌های معروف همیلتن [Ha] در مورد خمینه‌های ۳ بعدی با خمیدگی ریچی مثبت، حتی به‌طور مستقیمتری به هندسی‌سازی ارتباط دارد. (همیلتن ثابت کرد که روی چنین خمینه‌ای، متریکی با خمیدگی مقطعی ثابت مثبت وجود دارد به‌طوری که خمینه عبارت است از خارج قسمت S^3 نسبت به یک عمل گ.....ة خطیِ متناهی. این برهان دو موضوع را ثابت می‌کند: حدس پوانکاره در مورد پوشش عام، و هم‌ارزی عملهای گروههایِ متناهی بدون نقطهٔ ثابت با عملهای گروههای خطی در این حالت خاص. برعکس، اگر درستی حدسهای توپولوژیک معلوم بود، بدون استفاده از روش جریان ریچی قضیهٔ همیلتن را می‌شد ثابت کرد.)

به‌هرحال، آنچه باقی می‌ماند این است که ببینیم که آیا می‌توان روشهای معادلات دیفرانسیل جزئی را در این موقعیت برای به‌دست آوردن نتایج توپولوژیک محض به‌کار برد یا نه. مسلماً در اینجا هر نتیجهٔ توپولوژیک، مهمی که با این روشها به‌دست آید، تأییدی بر سودمندی روشهایی از آنالیز هندسی خواهد بود که در نظریهٔ خمینه‌های مختلط کارآمدی فوق‌العادهٔ خود را به‌ثبوت رسانده‌اند ولی در نظریهٔ کلی خمینه‌ها چندان کارآمد نیستند.

صرف‌نظر از بعضی مطالب جزئی که ممکن است هرکسی در مورد آنها ملاحظاتی داشته باشد، این کتاب روی‌هم‌رفته بسیار ارزشمند، و شاید هم بی‌نظیر است. مشکل بتوان کتابی در ریاضیات معاصر یافت که به خواننده‌اش چنین بینش گسترده‌ای از نحوهٔ تفکر واقعی مؤلف دربارهٔ موضوع بدهد. هر ریاضیدانی دنیایی خصوصی دارد که اثباتها و قضیه‌هایی که به عموم عرضه می‌کند، فقط نمایش رسمی و صوری آن هستند. (یک‌بار اینشتین نوشت که چگونه کشفیاتش به‌صورت تصاویری عجیب، و بی‌معنی برای دیگران، به‌ذهنش می‌رسیدند که باید قبل از انتشار عمومی به‌زبان معمولی فیزیک، و ریاضی ترجمه می‌شدند.) با مطالعهٔ این کتاب، این احساس به آدم دست می‌دهد که مجاز است به دنیای تفکرات واقعی مؤلف، که بصیرت بی‌همتایی در خمینه‌های سه‌بعدی دارد، نگاهی بیندازد. بسیاری از کتابها خواننده را به تالار درس مؤلف می‌برند، اما این کتاب خواننده را به‌خانهٔ مؤلف می‌برد. تاکنون، در این جلد اول، فقط مطالب نسبتاً مقدماتی بررسی شده‌اند که بسیاری از آنها قبلاً در نوشتگانِ توصیفی آمده و کاملاً در دسترس بوده‌اند، اگرچه در آن نوشته‌ها، برخلاف این کتاب، چنان عرضه نشده‌اند که خواننده حس کند در جریان ابداع مفاهیم به‌نحوی حضور دارد. با این همه، حاصل کار اثری است مسحورکننده که نه تنها ریاضیاتی جذاب عرضه می‌کند بلکه نمونه‌ای است از کاربرد ایده‌های جدید در نحوهٔ ریاضی‌نویسی. اگر مجلدات بعدی هم بتوانند همین میزان بصیرت و شهود را در مورد مطالب مشکلتر و ناشناخته‌تر (شاید هم به‌کلی ناشناخته) که بعداً می‌آید به خواننده منتقل کنند، نتیجهٔ کار یک اثر کلاسیک واقعی در ریاضیات خواهد بود.

مراجع

[An] M. Anderson, *Scalar curvature and geometrization conjectures for 3-manifolds*, In *Comparison Geometry* (K. Grove, P. Petersen, eds.), Math. Sci. Res. Ins. Publ. **30**, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1997. CMP 97:13

[Car] E. Cartan, *Lecons sur la geometrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, 1928. (1st edition).

[Gra] H. Grauert, *On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds*, Ann. of Math. **(2) 68** (1958) 460-472. MR **20**:5299

[GrS] R. E. Greene and K. Shiohama, *Diffeomorphisms and volume-preserving embeddings of noncompact manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **255** (1979) 403-414. MR **80k**:58031

[GrW] R. E. Greene and H. Wu, *Whitney's embedding theorem for solutions of elliptic equations and geometric consequences*, Amer. Math. Soc. Proc. Sym. in Pure Math. **27** (1975) 287-296 MR **53**:11678

[Ha] R. Hamilton, *Three manifolds with positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom. **17** (1982) 255-306. MR **84a**:53050

[Ha 2] R. Hamilton, *The formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in Diff. Geom. vol. 1, Intern. Press, 1995. MR **97e**:53075

[Moi] S. Mori, *Projective manifolds with ample tangent bundles*, Ann. of Math. **110** (1979) 593-606. MR **81j**:14010

[Mor] C. B. Morrey, *The analytic embedding of abstract real-analytic manifolds*, Ann. of Math. (2) **68** (1958) 159-201. MR **20**:5504

[Ra] J. G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifols*, Springer-Verlag, New York, 1994. MR **95j**:57011

[Sc] P. Scott, *The geometries of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983) 401-487. MR **84m**:57009

[Sw] A. Schwarz (Svarc), *A volume invariant of coverings*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **105** (1955) 32-34. MR **17**:781d

[SY] Y. T. Siu and S. T. Yau, *Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature*, Inv. Math. **59** (1980) 189-204. MR **81h**:58029

[We] A. Weinstein, *On the homotopy type of positively pinched manifolds*, Arch. Math. (Basel) **18** (1967) 523-524. MR **36**:3376

[Wh] H. Whitney, *Differentiable manifolds*, Annals of Math. (2) **37** (1936) 809-824.

[WS] C. Weber and H. Seifert, *Die beiden Dodekaederraum*, Math. Zeit. **37**(1933) 237-253.

* * * * * *

• Robert E. Greene, *Bull. Amer. Math. Soc.* (*N.S.*), (2) **35** (1998) 179-188.

* رابرت گرین، دانشگاه کالیفرنیا در لس‌آنجلس، آمریکا

greene@math.ucla.edu

NASHR-E RIYĀZI

Volume 10, Number 1, April 1999

Nashr-e Riyāzi **is a Persian-language, expository mathematics journal published biannually (in April and October) by Iran University Press.**

Annual subscription rates (including airmail postage) are: Middle East £ 19, Europe & Asia £ 21, North America & Far East £ 26.

For more information write to Iran University Press, 85 Park Avenue, Tehrān 15134, Iran, or contact ⟨nashriaz@vax.ipm.ac.ir⟩.

CONTENTS

* An asterisk indicates that the article was originally published elsewhere; complete address of the original article appears at the end of the article.

ISSN: 1015-2857

در شماره‌های آینده می‌خوانید

ریاضیات تپه‌های شنی — فریدون رضاخانلو

صد سال نمایش گروههای متناهی (بخش II) — ت. ی. لم

مصاحبه با پیر کارتیه در بارهٔ بورباکی

ریاضیات بدون مبانی — هیلری پاتنم