هنرهای تجسمی

سال ۹، شمارهٔ ۲

شمارهٔ پیاپی: ۱۸

بسم‌الله الرحمن الرحیم

نشر ریاضی

مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

شمارهٔ ۸۵ خیابان پارک خیابان دکتر بهشتی، تهران ۱۵۱۳۴

بهای این شماره ۴۰۰۰ ریال؛ حق اشتراک سالانه برای داخل کشور ۸۰۰۰ ریال.
(برای دانشجویان با ۳۰٪ تخفیف)

وجه اشتراک به حساب شمارهٔ ۹۰۰۰۹ بانک ملی شعبهٔ خیابان پارک تهران به نام مرکز نشر دانشگاهی واریز شود.

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر شش ماه یک بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجّه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی پژوهان فارسی زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چهارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبک مقاله‌های چاپ‌شده در ***نشر ریاضی*** باشد. به همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حک و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ شدهٔ در ***نشر ریاضی*** باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۹، شمارهٔ ۲

تاریخ انتشار: شهریور ۱۳۷۷

شمارهٔ پیاپی: ۱۸

nashriaz@rose.ipm.ac.ir

صاحب امتیاز: مرکز نشر دانشگاهی

مدیر مسؤول: سیاوش شهشهانی

فهرست

روی جلد

طرحی از موریتس کورنیلس اشر (۱۸۹۸-۱۹۷۲)

تقسیم منظم صفحه VI، ۱۹۵۷

به مناسبت صدمین سالگرد تولد اشر

گزارش

المپیاد ۳۹

(۲۰ تا ۳۰ تیر ۱۳۷۷ـ تایپه، تایوان)

به تایپه که رسیدیم هوای داغ به استقبالمان آمده بود و مهربانی برگزارکنندگان که در برخورد با ما در همان لحظات اول مجذوب سرزندگی بچه‌های تیم شدند. محل استقرار و برگزاری المپیاد، «دانشسرایعالی ملی تایوان» در مرکز شهر تایپه بود که همهٔ امکانات را برای برگزاری مطلوب المپیاد در آنجا فراهم کرده بودند و هر چند که داغی هوا حتی عبور مرور در هوای آزاد را دشوار می‌کرد ولی مجهزبودن همهٔ خوابگاهها و سایر ساختمانها به تهویهٔ مطبوع، نگرانی بروز مشکلی در برگزاری المپیاد را منتفی می‌کرد. زمینهای ورزش و سایت کامپیوتر برای گذران اوقات فراغت در اختیار شرکت‌کنندگان مسابقه بود هر چند که در یکی دو روز اول، آزمونهای آزمایشی نیز بین بچه‌های خودمان برگزار می‌کردیم تا اثر روانیِ فاصلهٔ هفت، هشت هزار کیلومتری و دگرگونیهای آب و هوا و شب و روز زایل گردد و اعتماد به نفس خود را بازیابند.

مراسم افتتاحیه با اجرای موسیقی به عنوان زبان مشترک همه، شروع شد و ارکستر دانشگاه قطعاتی از نام‌آوران موسیقی کلاسیک و موسیقی سنتی چین اجرا کرد. وقتی ارکستر دانشجویی اجرای برنامه را شروع کرد حس کردم که چقدر داغ بر دل دارم و بی‌اختیار بغض گلویم را گرفت: یاد علی حیدری که در گروه موسیقی دانشگاه شریف سه‌تار می‌زد، یاد رضا صادقی که برای المپیاد به هنگ‌کنگ رفته بود، و یاد مجتبی، سایه‌بان، آرمان، وکابلی که همیشه با من است.

روز اول مسابقه، چهارشنبه ۲۴ تیر بود؛ عصر روز قبل از آن، بچه‌ها مدتی فوتبال بازی کردند و صبح مسابقه با روحیهٔ خوب به جلسهٔ امتحان رفتند و با استراحت و بازی در عصر روز چهارشنبه، جلسهٔ دوم مسابقه را نیز در روز پنجشنبه ۲۵ تیر به خوبی گذراندند و پس از جلسهٔ روز دوم بود که ارزیابی اولیهٔ ما حکایت از عملکرد درخشان بچه‌ها می‌کرد، هر چند که باید منتظر تصحیح اوراق می‌ماندیم.

در هر جلسهٔ مسابقه طبق معمول ۳ مسأله داده شده بود که اعضای تیمها ۴/۵ ساعت برای حل آنها وقت داشتند. برای انتخاب مسائل، یک فهرست اولیه شامل ۲۸ مسألهٔ جالب از بین مسائل پیشنهادیِ کشورهای مختلف توسط کمیتهٔ علمی برگزیده شده بود. ما هم برای دومین سال متوالی سه مسأله فرستاده بودیم که یکی از آنها که طراح اصلی آن ایمان افتخاری بود در این فهرست آمده بود. نگاهی به صورت این مسأله خالی از لطف نیست.

'98 TAIWAN(R O C)
39th International
Mathematical
Olympiad

یک بازی روی یک صفحهٔ $m \times n$ خانه‌ای انجام می‌شود. $m \times n$ تا مهره داریم که یک رویِ هر یک، از مهره‌ها سیاه و روی دیگر آن سفید است. در حالت اولیه همهٔ مهره‌ها را روی صفحه چیده‌ایم به طوری که در هر خانه یک مهره قرار دارد و روی سفید همه بالاست بجز یکی از خانه‌های گوشه‌ای که مهرهٔ آن خانه رویِ سیاهش بالاست. در هر حرکت می‌توانیم یک مهرهٔ سیاه را از صفحه خارج کنیم و کلیهٔ مهره‌های خانه‌های مجاورش را که یک ضلع مشترک با خانهٔ مهرهٔ موردنظر دارند پشت ورو کنیم تا رنگ آنها عوض شود. همهٔ زوجهای (m, n) از اعداد صحیح و مثبت را که به‌ازای آنها همهٔ مهره‌ها را بتوانیم از صفحه خارج کنیم، تعیین کنید.

این مسأله به عنوان یکی از ۶ مسأله المپیاد برگزیده شده بود ولی شب آخر به علت آنکه حالت خاص آن، (۸×۸)، دریکی از مسابقات داخلی لنینگراد مطرح شده بود حذف گردید. به هر تقدیر، مسایل مسابقه به قرار زیر بودند.

روز اول

مسألهٔ ۱. در چهارضلعی محدب $ABCD$ قطرهای AC و BD بر هم عمودند و اضلاع مقابل AB و DC موازی نیستند. فرض کنیم نقطهٔ P محل تلاقی عمودمنصف‌های AB و DC درون چهارضلعی $ABCD$ باشد. ثابت کنید چهارضلعی $ABCD$ محاطی است اگر و فقط اگر مثلثهای ABP و CDP مساحتهای مساوی داشته باشند.

مسألهٔ ۲. در یک مسابقه، a شرکت‌کننده و b داور وجود دارد که $b \geq ۳$ عددی فرد است. هر داور به هر شرکت‌کننده یا نمرهٔ «قبول» و یا نمرهٔ «رد» می‌دهد. فرض کنیم k عددی باشد که هر دو داور حداکثر به k شرکت‌کننده نمره‌های یکسان بدهند. ثابت کنید

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-۱}{۲b}$$

مسألهٔ ۳. به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n فرض کنیم $d(n)$ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n (شامل ۱ و خود n) باشد.

همهٔ اعداد صحیح مثبت k را پیدا کنید به‌طوری که به‌ازای یک n داشته باشیم

$$\frac{d(n^۲)}{d(n)} = k$$

روز دوم

مسألهٔ ۴. همهٔ زوجهای مرتب (a,b) از اعداد صحیح و مثبت را پیدا کنید که a^2b+a+b بر ab^2+b+7 قابل قسمت باشد.

مسألهٔ ۵. فرض کنیم I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشد. همچنین فرض کنیم دایرهٔ محاطی مثلث ABC بر اضلاع BC، CA و AB به ترتیب در نقاط K، L و M مماس باشد. خطی که از B به موازات MK رسم می‌شود خطوط LM و LK را به ترتیب در R و S قطع می‌کند. ثابت کنید زاویهٔ $R\hat{I}S$ حاده است.

مسألهٔ ۶. همه توابعی مانند f از N، مجموعهٔ اعداد صحیح و مثبت، به خودش را در نظر می‌گیریم به طوری که به‌ازای هر t و s در N داشته باشیم:

$$f(t^2f(s)) = s(f(t))^2$$

کمترین مقدار ممکن برای $f(1998)$ را پیدا کنید.

طبق معمول برای پاسخ دادن به سؤالاتِ هر روز، ۴/۵ ساعت وقت تعیین شده بود و همهٔ سؤالها از ارزش یکسانی که به طور سنتی ۷ نمره است، برخوردار بودند.

معمولاً در المپیادها یکی دو تا مسألهٔ هندسه داده می‌شود و مسائل ۱ و ۵ امسال، از این نوع بودند. ولی مسائل هندسهٔ امسال مسائل خوبی نبودند زیرا به جای آنکه از پیچیدگیهای ترکیبی برخوردار باشند با راههای محاسباتی بسیار ساده نیز قابل حل بودند. دانش‌آموزان ما اصولاً در هندسه تبحر زیادی دارند و هر چه مسائل هندسه دشوارتر باشد به نفع آنهاست. اعضای تیم ما از مسألهٔ ۱ همگی نمرهٔ کامل گرفتند و شش راه‌حل کاملاً مختلف برای آن ارائه کردند. در مورد مسألهٔ ۵، یکی دو تا از بچه‌ها با راه‌حلهای ساده به سراغ آن رفته بودند و به سادگی موفق به حل کامل مسأله شده بودند ولی بقیه راه‌حلهای پیچیده‌ای را انتخاب کرده بودند (استفاده از انعکاس و قطب و قطبی و تبدیل مسأله به دوگان آن یا بررسی وضعیت مرکز ارتفاعی) و این باعث شد که در این مسأله ۴ نمره از دست بدهیم.

مسألهٔ ۴ نیز یک مسألهٔ بسیار سادهٔ نظریهٔ اعداد بود که هر چند بچه‌ها در ده دقیقه آن را حل کرده بودند ولی در نظر نگرفتن یک حالت خاص بدیهی توسط دو نفر از آنها موجب از دست دادن ۶ نمره شد.

مسائل سرنوشت‌ساز، مسائل ۲، ۳، و ۶ بودند که همهٔ آنها بسیار پیچیده‌اند. برای مسألهٔ ۲ نیز اعضای تیم ما ۶ راه‌حل به ظاهر مختلف ارائه دادند و همگی نمرهٔ کامل گرفتند. مسألهٔ ۳ مسألهٔ جالب توجهی است که فقط امید امینی راه‌حل بسیار زیبایی برای آن ارائه کرد و نمرهٔ کامل گرفت، و کسری علیشاهی هم هر چند راه‌حل آن را دریافته بود ولی به خاطر اشتباهات محاسباتی نتوانست نمرهٔ کامل بگیرد. بقیهٔ اعضای تیم با بررسیهای اولیه جواب را دریافته بودند ولی در اثبات پیچیدهٔ استقرایی آن جلو نرفته بودند و نمرات اندکی گرفتند. مسألهٔ ۶ از مسائل بسیار دشوار در همهٔ المپیادها است که به راستی قوهٔ تفکر و خلاقیت ریاضی را محک می‌زند. بچه‌ها در این مسأله شگفتی آفریدند و با ارائهٔ ۵ راه‌حل کامل به مینیمم $f(1998)$ که عدد ۱۲۰ است دست یافتند و اثباتهای زیبایی ارائه کردند که ۵ نمرهٔ کامل را در این مسأله نصیب آنها ساخت.

نمرات اعضای تیم ایران را در جدول زیر می‌بینیم.

مسأله / کد دانش‌آموز	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
IRI1	۷	۷	۱	۴	۷	۷	۳۳
IRI2	۷	۷	۷	۷	۷	۷	۴۲
IRI3	۷	۷	۲	۷	۶	۰	۲۹
IRI4	۷	۷	۲	۷	۷	۷	۳۷
IRI5	۷	۷	۲	۴	۷	۷	۳۴
IRI6	۷	۷	۴	۷	۴	۷	۳۶

کار تصحیح اوراق در روزهای ۲۶ و ۲۷ تیر از صبح زود تا دیرهنگام شب ادامه داشت و سرپرستان هر تیم با گروههای تصحیح‌کنندهٔ مسائل به بررسی اوراق دانش‌آموزان می‌پرداختند تا بر سر نمرهٔ موردنظر بر اساس دستورالعمل بارم‌بندی هر مسأله توافق کنند. کار تصحیح و ارزیابی اوراق اعضای تیم ما، با توجه به شسته رفته بودن ورقه‌های آنها، به سهولت و با رضایت انجام شد. دقت نظر و سختگیری تصحیح‌کنندگان در همهٔ موارد مشهود بود.

پس از آنکه کار تصحیح اوراق پایان گرفت و جدول نمرات تیمها کامل شد دیدیم که در میان ۷۶ کشور شرکت‌کننده، با ۲۱۱ امتیاز در صدر جدول ایستاده‌ایم. بعد از ما بلغارستان در مکان دوم و آمریکا و مجارستان مشترکاً در مقام سوم قرار داشتند و اختلاف آنها با ما قابل‌توجه بود. خبر را که برای بچه‌ها بردیم همدیگر را در آغوش گرفتند و به هم تبریک گفتند، بدون تردید موفقیت بسیار درخشانی به دست آورده بودند.

در توزیع مدالها، ۵ مدال طلا و یک مدال نقره نصیب ما شد. دیگر تیم کاملاً صاحب نامی شده بودیم و بچه‌های ما علاوه بر سرزندگی و روحیهٔ قوی، قدرت ریاضی خود را ظاهر ساخته بودند: **امیر آجراو** (IRI1) دانش‌آموز سال سوم دبیرستان رشد منطقهٔ ۱۶ است که با ۳۳ امتیاز طلا گرفت. امیر از امیدهای خوب آیندهٔ ماست. **امید امینی** (IRI2) دانش‌آموز سال چهارم دبیرستان شهید بهشتی شهر ری است. امید تنها کسی بود که در میان ۴۱۹ دانش‌آموز شرکت‌کننده در این المپیاد نمرهٔ کامل گرفت ولی مهمتر از آن، تفکر ریاضی طبیعی و راحت و خلاق اوست که همه چیز می‌توان از آن انتظار داشت. در مراسم اختتامیه، اولین مدال طلا را معاون رئیس‌جمهور تایوان به گردن امید آویخت که سرفرازی او موجب افتخار ما بود. **فرهاد فراهانی** (IRI3) با ۲۹ امتیاز نقره گرفت. وی دانش‌آموز سال چهارم دبیرستان علامهٔ حلی تهران است. فرهاد با استعداد بسیار خوبی که دارد قطعاً یک مردِ دانشیِ موفق خواهد بود. **سهند حاجی علی‌احمد** (IRI4) که دانش‌آموز سال چهارم علامهٔ حلی تهران است، دومین نمره را در تیم داشت و با ۳۷ نمره مدال طلا گرفت. سهند ذهن بسیار مستعدی دارد که بحمداله بر عوارض سانحه‌ای که برایش پیش آمده بود فائق آمده و به نتیجهٔ بسیار خوبی دست پیدا کرد. **علیرضا کشاورز حداد** (IRI5) هم از دبیرستان رشد منطقهٔ ۱۶ است، سال چهارم. علیرضا با ۳۴ امتیاز طلا گرفت و کوششهای ارزشمند سالیان خود را به بار نشاند. **کسری علیشاهی** (IRI6) دانش‌آموز سال چهارم دبیرستان شهید اژه‌ای اصفهان است که با ۳۶ امتیاز مدال طلا را برگردن آویخت. کسری در

این چند ساله که از نزدیک عملکرد او را دیده‌ایم نشان داده است که «استیل» خودش را در ریاضیات دارد و درکار حرفه‌ای امید زیادی به او می‌توان داشت.

******

«نشان» ویژهٔ المپیاد پیام دیگری هم دارد؛ علامت ین ⟸ نماد عشق و دوستی است که کنفسیوس مبلغ آن بود. او می‌گفت «در بین چهار دریا، همهٔ مردمان برادرند».

ی. ت.
تیر ۱۳۷۷

آندره ویل (۱۹۰۶ـ۱۹۹۸)

آندره ویل [وِی] از ریاضیدانان بزرگ این قرن در پانزدهم مرداد امسال در پرینستن (آمریکا) درگذشت. او که از سال ۱۹۵۸ عضو دائمی مؤسسهٔ مطالعهٔ پیشرفته در پرینستن و در سالهای اخیر بازنشسته بود قبلاً در دانشگاه شیکاگو و درکشورهای برزیل، هندوستان، و فرانسه تدریس کرده بود. ویل از جملهٔ ریاضیدانان جوان فرانسوی بود که در دههٔ ۱۹۳۰ گروه بورباکی را پایه گذاشتند و به روایتی نیروی محرک این گروه بود. در این زمینه، ترجمهٔ بخشی از زندگینامهٔ خودنوشت او قبلاً در *نشر ریاضی* چاپ شده است (ر.ک. فقرهٔ ۱۵۰ در فهرست جامع).

ویل از تأثیرگذارترین ریاضیدانان قرن بیستم به شمار می‌رود. کتاب *مبانی هندسهٔ جبری* او سر آغاز هندسهٔ جبری نوین است. دستاوردهای او در نظریهٔ اعداد (از جمله صورتهای مختلف حدسیاتی که به "فرض ریمان" در میدانهای عددی معروف شده‌اند) مبدأ بسیاری از تحقیقات معاصر در نظریهٔ اعداد است. همکاری او و چرن در پدید آوردن نظریهٔ رده‌های مشخصه و تعمیم قضیهٔ گاوس-بونه تأثیر عمیقی بر هندسهٔ دیفرانسیل داشته است، و بالاخره، نظریهٔ او در باب انتگرال درگروههای توپولوژیک از دستاوردهای مهم آغازینِ آنالیز همساز محسوب می‌شود.

آندره ویل علاوه بر فعالیتهای ریاضی، زبانشناسی خبره بود که به زبانهای کلاسیک اروپایی و سانسکریت تسلط داشت و با زبان فارسی نیز آشنا بود.

همچنین در دو دههٔ اخیر، تحقیقاتی ماندنی در زمینهٔ تاریخ ریاضیات انجام داده است. وی از یک خانوادهٔ فرهنگی و فرهیختهٔ فرانسوی است؛ سیمون وِی عارف و فیلسوف فرانسوی خواهر او بوده است.

فیلدز، نوانلینا، و لوح نقره‌ای

کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان (که هر چهار سال یکبار تشکیل می‌شود) مرداد ماه امسال در شهر برلین برگزار شد. در این کنگره، نشان فیلدز به ریاضیدانان نامبرده در زیر اعطا شد:

- ریچارد بورچردز (Richard E. Borcherds) از دانشگاه کیمبریج به خاطر پژوهشهایش در صورتهای خودریخت و نظریهٔ گروهها؛
- ویلیام گاورز (William T. Gowers) از دانشگاه کیمبریج به خاطر تحقیقاتش در آنالیز تابعی و ترکیبیات؛
- ماکسیم کانتسویچ (Maxim Kontsevich) از مؤسسهٔ مطالعات عالی علمی (IHES) و دانشگاه راتگرز به خاطر کارهایش در هندسهٔ جبری، توپولوژی جبری، و فیزیک ریاضی؛
- کرتیس مک مالن (Curtis T. McMullen) از دانشگاه هاروارد، به خاطر پژوهشهایش در دینامیک تحلیلی و هندسهٔ خمینه‌های ۳بعدی.

جایزهٔ نوانلینا نیز به پیتر شور (Peter Shor) از آزمایشگاههای AT&T، به خاطر تحقیقاتش در تحلیل الگوریتها و محاسبهٔ کوانتومی، تعلق گرفت.

علاوه بر اینها، «لوح نقره‌ای اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان» به اندرو وایلز (Andrew J. Wiles) از دانشگاه پرینستن و مؤسسهٔ مطالعهٔ پیشرفته به خاطر اثبات قضیهٔ آخر فرما اعطا شد.

تصحیح و پوزش

مترجم مقالهٔ «ریاضیات و اینترنت» (سال ۸، شمارهٔ ۲ (مهر ۱۳۷۶)، صص. ۵۲ـ۴۹) آقای میلاد نیکویی بوده‌اند که نامِ خانوادگی ایشان اشتباه چاپ شده بود. از این بابت پوزش می‌طلبیم.

فراخوان

جایزهٔ آرمان بهرامیان

برای بزرگداشت خاطرهٔ عزیز از دست رفته آرمان بهرامیان، مرکز نشر دانشگاهی و دانشگاه صنعتی شریف مشترکاً به بهترین اثرِ توصیفی ریاضی در میان آثار اولیهٔ مؤلفان و مترجمان جوان، جایزه‌ای به نام **جایزهٔ آرمان بهرامیان** اهدا می‌کنند.

از عموم علاقه‌مندان که آثاری در سالهای ۱۳۷۵ و ۱۳۷۶ منتشر کرده‌اند درخواست می‌شود یک نسخه از اثر خود را حداکثر تا آخر آذرماه ۱۳۷۷ همراه با نشانی و مشخصات خود به نشانی زیر بفرستند. ضمناً اشخاص دیگر نیز می‌توانند افراد شایستهٔ موردنظر خود را معرفی کنند.

نشر ریاضی (جایزهٔ آرمان بهرامیان)
مرکز نشر دانشگاهی
تهران-خیابان خالد اسلامبولی-شمارهٔ ۸۵

ما و رفتگانِ آخرِ زمستان

در بیست و ششم اسفند ۱۳۷۶ تصادف اتوبوس دانشگاه صنعتی شریف، حاملِ دانشجویانی که از نخستین سمینار دانشجویی (در اهواز) باز می‌گشتند، منجر به جان باختن هفت دانشجوی ریاضیات شد. این جوانان هوشمند عبارت بودند از مرتضی رضایی‌کلج دانشجوی دانشگاه تهران، و دانشجویان دانشگاه صنعتی شریف: آرمان بهرامیان، علی حیدری، علیرضا سایبان، رضا صادقی، فرید کابلی‌کفشگیری، مجتبی لطفعلی‌زاده‌مهرآبادی.

آنچه در زیر می‌آید تقریباً متن صحبتهای یکی از اعضای هیأت ویراستاران (ک. ل.) در مراسمی است که به یاد از دست رفتگان این سانحه در شانزدهم فروردین امسال در دانشگاه صنعتی شریف برگذار شد.

******

اجازه دهید بخشی از یک متن بسیار قدیمی را برایتان بخوانم: رسالهٔ *فایدون* اثر افلاطون، که تقریباً دو هزار و چهارصد سال پیش نوشته شده. این رساله شرح آخرین ساعات زندگی سقراط است: چیزی به اجرای حکم اعدام او نمانده، و شاگردان نزدیکش گردش را گرفته‌اند. سقراط آنها را به توجه به روحشان سفارش می‌کند.

> کریتون گفت "مطمئناً سخت خواهیم کوشید که چنان کنیم که می‌گویی. اما چگونه به خاکت سپاریم؟"
>
> سقراط گفت "هر طور که خواستید، اگر توانستید بر من دست یابید و از چنگتان نگریختم." و به‌ملایمت خندید و به ما نگاه کرده گفت "دوستانِ من، نمی‌توانم کریتون را متقاعد کنم که من همین سقراط هستم که هم‌اکنون سخن می‌گوید و هر یک از سخنانش را در جای خود می‌چیند؛ او می‌پندارد من آن نعشی هستم که اندکی بعد خواهدش دید، و می‌پرسد چگونه به خاک سپارَدم؟" *

برای ما، که در اینجا اکثریت داریم، داغ از کف دادن دوستانمان بسیار متفاوت است با غم مسؤولان ترویج علم در کشور. این مسؤولانْ نگران *ریاضیاتِ کشورند* و سوای اندوه متعارف حاصل از کشته شدن چند جوان، در غم جامعهٔ علمی کشورند که، مثلاً، آقایی به نام لطفعلی‌زادهٔ‌مهرآبادی را از دست داد که چند ماه دیگر دکترا می‌گرفت و هیأت عملی ریاضی دانشگاهی را تقویت می‌کرد؛ در غم مرگ نابهنگام دانشجوی مستعدی به نام بهرامیان‌اند که به آینده‌اش امید زیادی بود. اما ما سوگوار *انسانِ وارسته‌ای* هستیم که مجتبی بود؛ داغدار وجودِ *نازنینی* هستیم که آرمان بود — و همین یکی هم بود در عرصهٔ وجود. مطمئناً هوش و استعداد و دانشِ اینها در دلبستگی ما نقش مهمی داشته (و شاید با دیدگاهی کاملاً تعیّنی، امکان نمی‌داشته است که، مثلاً، علی حیدری همهٔ خصوصیات دیگرش را داشته باشد ولی مسألهٔ اردوش را حل نکرده باشد)، اما ما، در این لحظه، در سوگ *دوستانِ عزیزمان* هستیم و نه در غمِ "نخبگان ریاضی کشور"، و این فرق ماست با کسانی که با دوستانمان دوست نبوده‌اند.

متأسفانه من همهٔ این شش نفر را نمی‌شناختم، اما دوست جوانی داشتم — بسیار جوانتر از خودم — که یکی از این شش نفر بود. و من شک ندارم که در همهٔ عمرم، تاکنون، دنباله‌ای این‌قدر طولانی از روزهای متوالی نبوده است که در هر روزش به زاری گریسته باشم، و از این نظر که یادِ کسی در هر لحظهٔ این روزها ذهن مرا پر کرده بوده است این روزها را فقط می‌توانم با اولین روزهای عاشق شدن مقایسه کنم.

حالا من اینها را نمی‌گویم که اشک شما را درآورم — کاری که نه مشکل است و نه اصلاً نیازی به آن هست. می‌خواهم بدانید که من هم داغ‌دیده‌ام و اگر لحن کلامم شکلِ "توصیه"ای می‌گیرد، این از سرِ بی‌دردی نیست. می‌خواهم بگویم که وقتی چنین دوستانی را از دست می‌دهیم — مخصوصاً اگر در لحظات آخر در کنارشان بوده باشیم — حالمان معلوم است که چگونه است: این خلأ وحشتناک آدم را به جان می‌آوَرَد. می‌خواهیم به زمین و زمان فحش دهیم؛ می‌خواهیم روی سخت زمین را با ناخن بخراشیم؛ می‌خواهیم به آسمان سنگ بزنیم؛ می‌خواهیم نظام دنیا را عوض کنیم — اما مگر می‌توانیم؟ "هموار کرد خواهی گیتی را؟/گیتی است؛ کِی پذیرد هموار؟" * زورمان که نمی‌رسد . . . . و اینجاست که چنگ زدن به تئوری‌ای که سقراط پنج قرن پیش از مسیح به آن معتقد بود آرامش‌بخش است: جاودانگیِ روح. بیایید خودمان را با اندیشهٔ اینکه دوستانمان در آرامش‌اند تسکین دهیم. بیایید افلاطونی‌تر بیندیشیم و ایمان بیاوریم که عزیزانِ ما اکنون به حقایق — ریاضی و غیرریاضی — آگاهی بی‌واسطه دارند. مطمئن باشیم که راضی نخواهند بود که ما با تداوم بر سوگواری — با تداوم بر به‌نحوی بحرانی سوگوار بودن — از زندگی عادی، از دوست داشتن، از درس خواندن فاصلهٔ زیادی بگیریم. احمقانه است به . . . توصیه کنم مجتبی را فراموش کند، اما شاید عاقلانه باشد که از او بخواهم *از دست رفتنِ* مجتبی را از یاد ببرد و شیرینی لحظاتِ *با او* بودن را به یاد بسپارد. بیایید به جای اسف خوردن در مرگ دوستانمان، شاد باشیم که زمانِ زندگیِ ما و آنها اشتراکی داشته است. سپاسگزار موقعیتی باشیم که با آنها بودن در اختیارمان گذاشت تا روحمان و فکرمان را پرورش دهیم و شخصیتمان را پخته‌تر کنیم. "بعضی شِکوه می‌کنند که چرا گلها خار دارند؛ اما باید شاد باشیم که خارها گل دارند." بیایید به زندگی عادی برگردیم: زندگی کنیم، دوست بداریم، و قدر زنده بودنمان را بدانیم. امیدوارم خداوند صبری به ما عنایت کند دست‌کم به بزرگیِ مصیبتی که به ما رسیده است. و "ما از خداییم و به سوی او باز می‌گردیم." **

---

* *Phaedo*, 115c

* از رودکی است: از شعری با مطلع "ای آن که غمگنی و سزاواری".

** بخشی از آیهٔ ۱۵۶ سورهٔ بقره.

نشر ریاضی، سال ۹، شمارهٔ ۲، صص ۶-۱۲

مبانی ریاضیِ
هندسهٔ ناجابجایی

ویدا میلانی*

مقدمه

اگر از دیدگاه کلاسیک به هندسه و توپولوژی نگاه کنیم با مجموعه‌ای از نقاط همراه با یک ساختار ویژه روی آن سروکار خواهیم داشت؛ یا بهتر بگوییم، یک فضای ریاضی خواهیم داشت. می‌توانیم خمها و رویه‌ها را به‌عنوان زیرمجموعه‌هایی از این فضا بررسی کنیم. اگر به جای بررسی مستقیم این مجموعهٔ نقاط، به مجموعهٔ کمیتهای قابل اندازه‌گیری که روی آن تعریف می‌شوند (به اصطلاح، کمیتهای مشاهده‌پذیر[1]) نظر بیفکنیم راه دیگری برای مطالعه در اختیار ما قرار می‌گیرد که یکی از موضوعهای اصلی بحث این مقاله خواهد بود. مفاهیم خمینه و متریک ریمانی نقش اساسی در فرمولبندی هندسه دارند. مفهوم فضای هندسی آنقدر انعطاف‌پذیر است که می‌تواند نه تنها هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی بلکه ابررویه‌ها در نسبیت عام را دربرگیرد. حساب دیفرانسیل و انتگرال به ما امکان می‌دهد که نظریهٔ کلی خمینه‌های ریمانی را توسعه دهیم و این کار هنگامی ضرورت می‌یابد که با فضاهایی برخورد کنیم که دیگر خمینهٔ ریمانی نباشند. مثالهایی از این فضاها در بخش ۴ این مقاله می‌آید. این فضاها که به طور طبیعی در ریاضیات ظاهر می‌شوند ما را به استفاده از ایده‌های هندسی و تعمیم این ایده‌ها برمی‌انگیزند. به هر چنین فضایی یک جبر شرکتپذیر وابسته می‌شود که معمولاً جبر توابع روی این فضا (کمیتهای مشاهده‌پذیر) است. در برخی موارد ساختار توپولوژیک فضا طوری است که مطالعهٔ مستقیم آن هیچ اطلاعی به ما نمی‌دهد. این مطلب در مثالهای بخش ۳ به وضوح دیده می‌شود. در این‌گونه موارد اگر از دیدگاه جبری به مسأله نگاه کنیم یک جبر عملگریِ بسیار خوب در دسترس داریم که کلیهٔ اطلاعات لازم را به ما می‌دهد. جبرهای وابسته به فضاها لزوماً جابجایی نیستند و به طوری که خواهیم دید، همین امر نشان می‌دهد که «نقطه» در این‌گونه فضاها مفهوم معمولی را ندارد و همان‌طور که گفتیم «نقاط فضا» در واقع همان کمیتهای مشاهده‌پذیر هستند. در مورد خمینه، این جبرْ جبر توابع هموار روی خمینه است و جابجایی است اما در بسیاری از مثالها همچون خارج‌قسمت خمینه تحت شبه‌گروه تبدیلات، دیگر با جبر ناجابجایی سروکار داریم [۱].

1. observables

۱. C^*-جبرها، قضایای ساختاری و ساختارهای توپولوژیک ناجابجایی

در این بخش ملاحظه می‌کنیم که چگونه جبر شرکتپذیر وابسته به یک فضای توپولوژیک می‌تواند ساختار مجموعهٔ نقاط فضا را مشخص کند. اساس کار، قضیهٔ گلفاند-نایمارک[1] است. در این قضیه به‌وسیلهٔ دو تابعگون رستهٔ فضاهای موضعاً فشرده و هاوسدورف و رستهٔ C^*-جبرهای شرکتپذیر جابجایی در تناظر دوسویی قرار می‌گیرند. یکی از این تابعگونها، تابعگون C، فضای هاوسدورف و فشردهٔ X را با C^*-جبر توابع پیوسته روی آن یعنی $C(X)$ نظیر می‌کند. همچنین این تابعگون هر نگاشت پیوستهٔ $f : X \to Y$ بین دو فضای هاوسدورف فشرده را به نگاشت $C(f)$ بین جبرهای توابع با ضابطهٔ زیر نظیر می‌کند

$$C(f) : C(Y) \to C(X)$$
$$g \mapsto g \circ f$$

اگر X موضعاً فشرده باشد، C^*-جبر متناظر با آن $C_\circ(X)$، یعنی جبر توابع پیوسته روی X که در بینهایت صفرند، خواهد بود. $C_\circ(X)$ یک جبر یکدار نیست. در این حالت توابع پیوسته و سرهٔ $f : X \to Y$ (یعنی توابعی که تصویر وارون مجموعه‌های فشرده تحت آنها فشرده است) بین دو فضای موضعاً فشرده و هاوسدورف با نگاشت $C_\circ(f) : C_\circ(Y) \to C_\circ(X)$ بین جبرهای توابع پیوسته‌ای که در بینهایت صفرند نظیر می‌شود.

تابعگون دوم یعنی تابعگون M برعکس عمل می‌کند. این تابعگون به هر C^*-جبر جابجایی و شرکتپذیر A، فضای سرشتها[2]ی آن (یعنی همریختیهای غیرصفر $\mu : A \to \mathbb{C}$) با توپولوژی ضعیف[3] را نظیر می‌کند ([۱ و ۲]). اگر

1. Gelfand-Naimark 2. characters 3. weak topology

$\mathcal{A}$ یکدار هم باشد، $M(\mathcal{A})$ بسته و فشرده است. همچنین این تابعگون هر $*$ـهمریختی یکانی $\varphi : A \to B$ بین دو C^*ـجبر جابجایی شرکتپذیر یکدار را با نگاشت $M\varphi : M(B) \to M(A)$ بین فضای سرشتهایشان نظیر می‌کند.

اگر قرار دهیم $X^+ = X \cup \{\infty\}$ و $\mathcal{A}^+ = \mathbb{C} \times \mathcal{A}$ (یعنی $\mathcal{A}^+$ یکدار شدهٔ جبر $\mathcal{A}$ است) آنگاه $C(X^+) = C_\bullet(X)^+$ و اگر $\mu : \mathcal{A}^+ \to \mathbb{C}$ یک سرشت با ضابطهٔ زیر باشد

$$\mu(\lambda, a) = \lambda \quad \forall a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}$$

آنگاه $M(\mathcal{A}) = M(\mathcal{A}^+) - \{\mu\}$.

هم‌ارزی بین این دو رسته که در بالا به آن اشاره شد نتایج زیر را دربردارد:

الف) دو C^*ـجبر جابجایی یکریخت‌اند $\Longleftrightarrow$ فضاهای سرشتهایشان همسانریخت‌اند.

ب) گروه خودریختیهای هر C^*ـجبر جابجایی با گروه همریختیهای فضای سرشتهایش یکریخت است.

ج) توپولوژی X را می‌توان برحسب خواص جبری $C_\bullet(X)$ بیان کرد. مثلاً هر ایده‌ال در $C_\bullet(X)$ به صورت $C_\bullet(U)$ است که در آن $U \subseteq X$ باز است.

این خواص را می‌توان در جدول زیر خلاصه کرد:

جبر	توپولوژی
C^*ـجبر	فضای موضعاً فشرده
C^*ـجبر یکدار	فضای فشرده
یکدار کردن	فشرده‌سازی
$*$ـهمریختیها	نگاشتهای پیوسته و سره
خودریختیها	همسانریختیها
ایده‌آلها	زیرمجموعه‌های باز

در این تناظر باگذر از فضاها به C^*ـجبرها هیچ اطلاعی از دست نمی‌رود زیرا اگر $x \in X$، نگاشت $f \mapsto f(x)$ یک سرشت $\epsilon_x \in M(C(X))$ معرفی می‌کند و نگاشت

$$\epsilon : X \to M(C(X))$$
$$x \mapsto \epsilon_x$$

یک همسانریختی است. اگر $a \in \mathcal{A}$، تبدیل

$$\hat{a} : M(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$$
$$\mu \mapsto \mu(a)$$

که تبدیل گلفاند نام دارد یک تابع پیوسته روی $M(\mathcal{A})$ است و نگاشت

$$G_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to C(M(\mathcal{A}))$$
$$a \mapsto \hat{a}$$

یک $*$ـیکریختی بین C^*ـجبرهاست. اگر $\mathcal{A}$ یکدار هم باشد این $*$ـیکریختی یکانی نیز هست. این نگاشتها طبیعی‌اند به این معنا که این نمودارها جابجایی‌اند:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\epsilon_X"'] & Y \arrow[d, "\epsilon_Y"] \\ M(C(X)) \arrow[r, "MCf"'] & M(C(Y)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "G_{\mathcal{A}}"'] & B \arrow[d, "G_B"] \\ C(M(\mathcal{A})) \arrow[r, "CM\varphi"'] & C(M(B)) \end{tikzcd}$$

هر C^*ـجبر جابجایی تعداد زیادی سرشت دارد. به عبارت دیگر به هر نقطه از فضا یک سرشت جبر وابسته می‌شود. در مورد جبرهای ناجابجایی می‌توان پیش‌بینی کرد که تعداد سرشتها کمتر باشند. تکرار می‌کنیم که در مورد جبرهای ناجابجایی دیگر به دنبال نقاط نیستیم و به جای سرشتها تنها نیاز به تابعک[1]هایی داریم که رد[2] روی جبر هستند اما لزوماً ضربی نیستند. برای C^*ـجبر دلخواه $\mathcal{A}$ مجموعهٔ همه ردهای هم‌ارزی نمایشهای تحویل‌ناپذیر $\mathcal{A}$ را در یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با $\mathrm{Spec}\mathcal{A}$ نشان می‌دهیم و آن را طیف[3] $\mathcal{A}$ می‌نامیم. اگر $\mathcal{A}$ جابجایی باشد دیده می‌شود که طیف $\mathcal{A}$ همان فضای سرشتهای $\mathcal{A}$ است و لذا عناصر $\mathrm{Spec}\mathcal{A}$ همگی یک‌بعدی‌اند. بنابراین همان‌طور که در بالا گفتیم در مورد C^*ـجبرهای جابجایی (جبر توابع روی فضا) به هر نقطه از فضا یک عنصر طیف یعنی یک سرشت جبر وابسته می‌شود و لذا تعداد بسیار زیادی سرشت موجود است. در C^*ـجبرهای ناجابجایی فضای $\mathrm{Spec}\mathcal{A}$ لزوماً هاوسدورف نیست. این مطلب در مثالهای بخش ۳ دیده می‌شود.

۲. ساختار هندسی و متریک ناجابجایی

در بخش قبل دیدیم که توابع پیوسته ساختار توپولوژیک فضا را مشخص می‌کنند. برای ایجاد ساختار هندسی روی فضا، به جای فضای توپولوژیک X با خمینهٔ مشتقپذیر M سروکار خواهیم داشت. M را یک خمینهٔ فشرده می‌گیریم. در این حالت زوج $(C(M), C^\infty(M))$ را که در آن $C^\infty(M)$ یک $*$ـجبر چگال در $C(X)$ است مورد بررسی قرار می‌دهیم. $C^\infty(M)$ یک C^*ـجبر نیست ولی M را به طور یکتا مشخص می‌کند (قضیهٔ گلفاند-نایمارک).

۱.۲ تابعگون Γ

رستهٔ کلافهای برداری روی خمینهٔ فشرده M همراه با نگاشتهای بین کلافها را در نظر می‌گیریم. برای هر کلاف برداری E، مقطعهای هموار روی E را با $C^\infty(M; E) = \Gamma(E)$ نشان می‌دهیم. $\Gamma(E)$ یک مدول پروژکتیو با مولد متناهی روی جبر $C^\infty(M)$ است. قضیهٔ سر-سوان[4] می‌گوید که این تناظر دوطرفه است یعنی به هر مدول پروژکتیو با مولد متناهی روی یک C^*ـجبر یکدار جابجایی یک کلاف برداری با تارهای با بعد متناهی نظیر می‌شود که مقطعهای این کلاف همان مدول مذکور است. بنابراین می‌توان یک کلاف برداری روی C^*ـجبر ناجابجایی را به عنوان یک مدول پروژکتیو با مولد متناهی روی آن جبر معرفی کرد. اگر $\tau : E \to E'$ یک نگاشت بین کلافهای برداری E و E' باشد تابعگون Γ نگاشت زیر بین مقطعهای این کلافها را تعریف می‌کند

$$\Gamma(\tau) : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$$
$$s \mapsto \tau \circ s$$

همچنین $\Gamma(\tau)$ یک مورفیسم بین مدولهای روی جبر مذکور است.

1. functional 2. trace 3. spectrum 4. Serre-Swan

۲.۲ متریکهای هرمیتی و ساختارهای اسپین c[1]

۱.۲.۲ به هر کلاف برداری مختلط می‌توان یک متریک هرمیتی به صورتهای مختلف وابسته کرد. یک راه ساده این است که روی هر تار E_x یک فرم یک و نیم خطی[2] معین مثبت $\langle\cdot|\cdot\rangle_x$ تعریف کنیم با این شرط که نسبت به x هموار باشد. دیدگاه ناجابجایی حذف نقطهٔ x است. با حذف x آنچه باقی می‌ماند عبارت است از یک نگاشت

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{A}$$

که در آن $\mathcal{A}$ یک زیرجبر چگال از یک جبر C^* و $\mathcal{E}$ یک $\mathcal{A}$ـمدول (راست) پروژکتیو با مولد متناهی است. نگاشت فوق روی مؤلفهٔ دوم $\mathcal{A}$ـخطی، معین مثبت، و متقارن است. به عبارت دیگر به ازای هر $r, s, t, \in \mathcal{E}$ و به ازای هر $a \in \mathcal{A}$

$$(r|s+t) = (r|s) + (r|t)$$

$$(r|as) = (r|s)a$$

$$(r|s) = (s|r)^*$$

$$(s|s) > 0 \qquad s \neq 0$$

با این ساختار هرمیتی روی $\mathcal{E}$، $\mathcal{E}$ یک مدول پیش‌ـهیلبرت[3] نامیده می‌شود. اگر قرار دهیم

$$|||s||| = \sqrt{||(s|s)||}$$

که در آن $||\cdot||$ همان C^*ـنرم مربوط به جبر C^* است، فضای کامل شده نسبت به این نرم را مدول هیلبرت می‌نامیم. در حالت خاصی که $\mathcal{E} = C^\infty(M;E)$، مدول هیلبرت، عبارت است از مقطعهای پیوستهٔ $C(M,E)$.

۲.۲.۲ هم‌ارزی موریتا $\mathcal{A}$ـمدولهای تصویریِ متناهیاً تولید شده همراه با ضرب اسکالر تعریف شده در (۱.۲.۲) به عنوان ساختارهای منظم‌کننده، نقشی بسیار اساسی در هندسهٔ ناجابجایی دارند که این نقش در هندسهٔ جابجایی دیده نمی‌شود، به این معنی که وجود $\mathcal{A}$ـمدولهای تصویری متناهیاً تولید شده سبب پدید آمدن جبرهایی می‌شوند که با $\mathcal{A}$ مرتبط هستند اما این ارتباط به صورت یکریختی نیست. این همان هم‌ارزی موریتا[4] است که در زیر در بارهٔ آن توضیح می‌دهیم.

عملگرهای کِت‌ـبرا[5] روی $\mathcal{A}$ـمدول راست تصویریِ متناهی‌ـمولدِ $\mathcal{E}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$|r\rangle\langle s| : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$$

$$t \mapsto r(s|t)$$

که در آن $r, s \in \mathcal{E}$. چون به ازای هر $a \in A$، $r(s|ta) = r(s|t)a$، این عملگرها از سمت چپ روی $\mathcal{E}$ عمل می‌کنند و با عمل راست $\mathcal{A}$ نیز جابجا می‌شوند. همچنین ترکیب هر دو چنین عملگری باز از همین نوع است یعنی

1. spin^c structures 2. sesquilinear 3. pre-Hilbert module
4. Morita 5. ket-bra

$$|r\rangle\langle s| \cdot |t\rangle\langle u| = |r(s|t)\rangle\langle u|$$
$$= |r\rangle\langle u(t|s)|$$

و لذا تمام جمعهای متناهی از کت‌ـبراها تشکیل یک جبر $\mathcal{B} = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ می‌دهند. به این ترتیب $\mathcal{E}$ یک $\mathcal{B}$ـمدول چپ خواهد شد و می‌گوییم $\mathcal{E}$ یک $\mathcal{A}$ـ$\mathcal{B}$ـمدول مضاعف است. از طرف دیگر می‌دانیم که $\mathcal{B} = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ با $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \overline{\mathcal{E}}$ تحت نگاشت زیر یکریخت است

$$\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) \Longleftrightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \overline{\mathcal{E}}$$

$$|r\rangle\langle s| \Longleftrightarrow r \otimes \overline{s}$$

همچنین می‌توانیم $\overline{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{E}$ را تشکیل دهیم که به عنوان یک $\mathcal{A}$ـمدول مضاعف تحت نگاشت زیر با $\mathcal{A}$ یکریخت است

$$\overline{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{E} \Longleftrightarrow \mathcal{A}$$

$$\overline{r} \otimes s \Longleftrightarrow (r|s)$$

این مثالی از هم‌ارزی موریتاست. در حالت کلی می‌گوییم جبرهای $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ موریتاـهم‌ارزند هرگاه یک $\mathcal{A}$ـ$\mathcal{B}$ـمدول مضاعف $\mathcal{E}$ و یک $\mathcal{A}$ـ$\mathcal{B}$ـمدول مضاعف $\mathcal{F}$ باشند که

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F} \simeq \mathcal{B} \quad \text{و} \quad \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{E} \simeq \mathcal{A}$$

۳.۲.۲ ساختارهای اسپین c. اگر M یک خمینهٔ معمولی nبعدی ریمانی و جهت‌پذیر باشد و اگر g متریک روی کلاف مماس TM باشد، کلاف جبر کلیفرد $\mathrm{cl}(M) \to M$ را که تارهایش جبرهای ماتریسی روی $\mathbb{C}$ هستند به صورت زیر می‌سازیم: اگر $n = 2m$ زوج باشد،

$$\mathrm{cl}_x(M) := \mathrm{cl}(T_xM, g_x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq M$$

که عبارت است از جبر کلیفرد مختلط شده روی فضای مماس T_xM. و اگر $n = 2m+1$ فرد باشد تنها قسمت زوج جبر کلیفرد را در نظر می‌گیریم یعنی در این حالت [۴]:

$$\mathrm{cl}_x(M) := \mathrm{cl}^{\mathrm{even}}(T_xM) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

کلاف $\mathrm{cl}(M) \to M$ میدانی موضعاً بدیهی از C^*ـجبرهای مقدماتی است. ضمناً می‌توان نشان داد که یک چنین میدانی (با تقریب هم‌ارزی موریتا) توسط $\delta(\mathrm{cl}(M)) \in H^3(M, \mathbb{Z})$ در کوهومولوژی چک[1] مشخص می‌شود [۴] که آن را ردهٔ دیکس‌میه‌ـدوادی[2] می‌نامند.

می‌گوییم M دارای ساختارهای اسپین c است اگر و تنها اگر $\delta(\mathrm{cl}(M)) = 0$ و در این حالت یک ساختار اسپین c روی TM عبارت است از زوج (ϵ, S) که در آن ϵ جهت روی TM است و S یک مدول مضاعف AـBـهم‌ارز است ($A = C_0(M)$ و $B = C_0(M, \mathrm{cl}(M))$). قضیهٔ سرـسوان مدول مضاعف هم‌ارز S را کاملاً مشخص می‌کند. در

1. Čech 2. Dixmier-Douady

واقع این مدول مضاعف به شکل $\Gamma(S)$ برای یک کلاف برداری مختلط $S \to M$ است که کلاف جبر کلیفرد $\mathrm{cl}(M)$ به طور تحویل‌ناپذیر روی آن عمل می‌کند. $\Gamma(S)$ را معمولاً مدول اسپینوری[1] می‌نامیم.

به طور خلاصه: با استفاده از مدولهای مضاعف و هم‌ارزی موریتا راه مستقیمی به سوی کلافهای برداری ناجابجایی باز می‌شود.

۳.۲ عملگر دیراک و فرمول فاصله

با در دست داشتن مدول اسپینوری می‌توان راجع به عملگر دیراک صحبت کرد. این عملگر عبارت است از یک عملگر دیفرانسیل مرتبهٔ اول خودالحاق $\not{D}$ که روی فضای هیلبرت $L^2(M,S)$ یعنی فضای اسپینورهای مربع‌انتگرال‌پذیر عمل می‌کند.

متریک ریمانی $g=(g_{ij})$ روی خمینهٔ M یک یکریختی $T_xM \simeq T_x^*M$ را تعریف می‌کند و لذا متریک $g^{-1}=(g^{ij})$ را روی کلاف کتانژانت T^*M القاء می‌کند. به‌وسیلهٔ این یکریختی می‌توان جبر کلیفرد را به عنوان کلافی تعبیر کرد که تار در هر نقطه‌اش عبارت است از

$$\mathrm{cl}_x(M) := \mathrm{cl}(T_x^*M, g_x^{-1}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

اگر قرار دهیم $\mathcal{A}^1(M)=\Gamma(T^*M)$ که همان $\mathcal{A}$ـمدول یک فرمی‌های روی M است، آنگاه مدول اسپینوری S عبارت است از $\mathcal{A}$ـ$\mathcal{B}$ـمدول مضاعفی که در آن $\mathcal{B}=\Gamma(\mathrm{cl}(M))$ به طور تحویل‌ناپذیر عمل می‌کند و اگر عمل را با γ نشان دهیم:

$$\gamma : \Gamma(\mathrm{cl}(M)) \times L^2(M,S) \to L^2(M,S)$$

و داریم

$$\{\gamma(\alpha,.),\gamma(\beta,.)\} = -2\sum_{i,j} g^{ij}\alpha_i\beta_j$$

که در آن $\alpha,\beta \in \mathcal{A}^1(M)$. متریک g^{-1} روی T^*M یک هموستار اوی‌ـچیویتا[2] به صورت زیر القاء می‌کند

$$\nabla^g : \mathcal{A}^1(M) \to \mathcal{A}^1(M) \otimes \mathcal{A}^1(M)$$
$$\nabla^g(wa) = \nabla^g(w)a + w \otimes da$$

که این هموستار حافظ متریک و بی‌تاب[3] است.

اکنون می‌توان هموستار اسپینی را به صورت عملگر خطی زیر تعریف کرد

$$\nabla^s : \Gamma(s) \to \Gamma(s) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^1(M)$$
$$\nabla^s(\psi)a = \nabla^s(\psi)a + \psi \otimes da$$
$$\nabla^s(\gamma(w,.)\psi) = \gamma(\nabla^g w)\psi + \gamma(w)\nabla^s\psi$$

به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ و $w \in \mathcal{A}^1(M)$ و $\psi \in S$.

با استفاده از هموستار اسپینی، عملگر دیراک[4] را به صورت ترکیب $\gamma \circ \nabla^s$ تعریف می‌کنیم، و یا به طور موضعی به صورت

$$\not{D} := \gamma(dx^j,.)\nabla^s_{\partial/\partial x^j}$$

می‌توان دید که این عملگر متقارن است و به یک عملگر بیکران روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یعنی $L^2(M,S)$ توسعه می‌یابد. اگر M فشرده باشد $\not{D}$ یک عملگر فرد هولم[1] است. چون $\ker \not{D}$ بعد متناهی دارد می‌توان $\not{D}^{-1}$ را که یک عملگر فشرده است تعریف کرد [۱ و ۶].

۱.۳.۲ فرمول فاصله عملگر دیراک به‌وسیلهٔ قانون لایب‌نیتس کاملاً مشخص می‌شود. در واقع به ازای $a \in \mathcal{A}$ و $\psi \in \mathcal{H}$:

$$\not{D}(a\psi) = \gamma(da)\psi + a\not{D}\psi$$

و یا معادلش

$$[\not{D}, a] = \gamma(da,.)$$

چون a هموار و M فشرده است عملگر $\|[\not{D},a]\|$ کراندار است [۱ و ۶] و لذا می‌توان فرمول فاصله را به زبان عملگر $\not{D}$ به صورت زیر ترجمه کرد.

در یک خمینهٔ ریمانی M فاصلهٔ بین دو نقطهٔ p و $q \in M$ از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود

$$d(p,q) = \inf \{\text{طول خمهایی که } p \text{ را به } q \text{ وصل می‌کنند}\}$$

و عنصر طول عبارت است از $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}dx^idx^j$. اگر π نمایشِ جبر $\mathcal{A}$ در فضای هیلبرت $L^2(M,S)=\mathcal{H}$ باشد و به علاوه اگر F یک عملگر خودالحاق روی $\mathcal{H}$ باشد که $F^2=1$ و به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ عملگر $[F,\pi(a)]$ فشرده باشد (به اصطلاح F یک مدول فرد هولم باشد)، عملگر G را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$G = \sum_{i,j}(dx^i)^* g_{ij} dx^j$$

که در آن به ازای $x \in \mathcal{A}$، $dx=[F,x]$. می‌خواهیم $ds = G^{\frac{1}{2}}$. G یک عملگر فشردهٔ مثبت است و لذا $G^{\frac{1}{2}}$ معنا دارد. اگر سرشتهای متناظر با $p,q \in M$ را به ترتیب با ψ و φ نشان دهیم یعنی اگر به ازای هر $a \in \mathcal{A}$، $\psi(a)=q$ و $\varphi(a)=p$، فرمول فاصله را به زبان سرشتها به صورت زیر می‌توان ترجمه کرد

$$d(p,q) = \sup\{|(\varphi-\psi)(a)| : a \in \mathcal{A}, \|\frac{da}{ds}\| \le 1\}$$

در مورد خمینه‌های ناجابجایی باید به $\frac{da}{ds}$ معنا بدهیم. ملاحظه می‌کنیم که در فرمول اخیر p و q به طور غیرمستقیم از طریق سرشتهای وابسته به آنها وارد شده‌اند و به عنوان نقاط فضا نقشی ندارند.

عملگرهای F و G که در بالا معرفی شدند، در واقع عبارت‌اند از

$$F = \not{D}\ \text{علامت} \quad , \quad G = \not{D}^{-2}$$

و $\not{D} = FG^{\frac{-1}{2}} = Fds^{-1}$. اکنون $[\not{D},a]=\gamma(da)$ جانشین $\frac{da}{ds}$ در فرمول فاصله می‌شود و داریم

1. spinor module 2. Levi-Civita connection 3. torsion-free 4. Dirac

1. Fredholm

$$d(p,q) = \sup\{|(\psi-\varphi)(a)| : a \in \mathcal{A},\ ||[\not{D}, a]|| \le 1\}$$

می‌توان دید که متریک روی فضای سرشتها یعنی $M(\mathcal{A})$ کاملاً به‌وسیلهٔ عملگر دیراک $\not{D}$ مشخص می‌شود [۱].

مثال. اگر $M = \{a, b\}$ فضای دونقطه‌ای باشد، جبر $\mathcal{A}$ عبارت است از $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$. هر عنصر $f \in \mathcal{A}$ به‌وسیلهٔ دو عدد مختلط $f(a)$ و $f(b)$ مشخص می‌شود. فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ دارای بعد متناهی خواهد بود و به جمع مستقیم دو فضای هیلبرت به صورت $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b$ تجزیه می‌شود. عنصر f دارای نمایشی به صورت $\begin{bmatrix} f(a) & \cdot \\ \cdot & f(b) \end{bmatrix}$ در این فضای هیلبرت خواهد بود. عملگر دیراک نیز به صورت $\begin{bmatrix} \cdot & D_{ab} \\ D_{ba} & \cdot \end{bmatrix}$ است که در آن $D_{ba} = D_{ab}^*$ نگاشتی خطی از $\mathcal{H}_a$ به $\mathcal{H}_b$ است. به ازای هر $f \in \mathcal{A}$ می‌توان چنین نوشت

$$[D, f] = (f(b) - f(a)) \begin{bmatrix} \circ & D_{ab} \\ -D_{ba} & \circ \end{bmatrix}$$

و لذا $||[D, f]|| = |f(b) - f(a)|\lambda$ که در آن λ بزرگترین ویژه‌مقدار عملگر $|D_{ab}|$ است. با این محاسبات، فاصلهٔ بین دو نقطه a و b در این فضا به صورت زیر خواهد بود

$$d(a,b) = \sup\{|f(a) - f(b)| : ||[D, f]|| \le 1\} = \frac{1}{\lambda}$$

۳. مثالهایی از فضاهای ناجابجایی

۱.۳ فضای برگهای یک برگ‌بندی

به عنوان مثالی از این فضا چنبرهٔ دوبعدی $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ را با برگ‌بندی $dy = \theta dx$ که در آن θ یک عدد اصم است در نظر می‌گیریم. برگها با $\mathbb{R}$ وابرریخت (دیفئومرف) هستند و توپولوژی خارج‌قسمت روی برگها عبارت است از توپولوژی خارج‌قسمتی $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ تقسیم بر گروه حاصل از مدارهای دوران $(\alpha \in S^1)\alpha \mapsto \alpha + \theta$ به اندازهٔ زاویهٔ θ. بنابراین توپولوژی خارج‌قسمت روی فضای X برگهای این برگ‌بندیْ بدیهی است و فضای برگها بجز خود فضا و مجموعهٔ تهی هیچ زیرمجموعهٔ باز (بسته)ای ندارد. این بدان معنی است که بین خود فضای X و یک نقطهٔ آن از نظر توپولوژی و نظریهٔ اندازه نمی‌توان تفاوتی قائل شد. حتی می‌توان دید که فضاهای $L^p(X)$ همگی یک‌بعدی‌اند و در نتیجه کمکی به تشخیص فضاها نمی‌کنند.

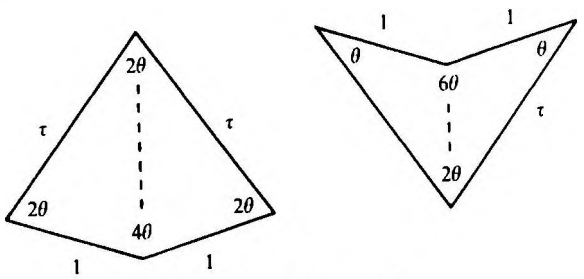
۲.۳ فضای آجرفرش پنرُز[1]

در سالهای ۱۹۷۳ و ۱۹۷۴ راجر پنرُز[2] سه مجموعه از آجرها را برای آجرفرش صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ معرفی کرد. ما در اینجا به شرح کامل یک نوع از این آجرفرش‌ها می‌پردازیم. خواهیم دید که فضای آجرفرش‌ها یک فضای ناجابجایی است.

این آجرها که معمولاً بادبادک[3] و پیکان[4] نامیده می‌شوند در شکل (۱) نشان داده شده‌اند.

هر یک از چهارضلعیها دو ضلع به طول واحد و دو ضلع به طول τ دارند. τ ریشهٔ معادلهٔ $\tau^2 - \tau + 1 = 0$ یعنی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است و عدد طلایی نام دارد. زاویه‌ها با مضارب θ مشخص شده‌اند. اگر هر بادبادک و هر پیکان را در راستای محور تقارنش ببریم از هر کدام دو مثلث حاصل می‌شود که در

1. Penrose tiling 2. Roger Penrose 3. kite 4. dart



شکل ۱ بادبادکها و پیکانهای پنرُز

شکل ۲ نشان داده شده است. این آجرهای مثلثی شکل را Aـآجر می‌نامیم. مثلثهای بزرگتر را با L_A و مثلثهای کوچکتر را با S_A نشان می‌دهیم.

رأسها با رنگهای سیاه و سفید رنگ‌آمیزی می‌شوند. همچنین به هر یال که دو رأس هم‌رنگ را به هم وصل می‌کند جهت دلخواهی داده می‌شود. برای آجرفرش کردن صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ با آجرهای نوع A باید مثلثهای L_A و S_A را طوری به هم بچسبانیم که رئوس هم‌رنگ روی هم قرار گیرند و یالهای هم‌جهت نیز بر هم منطبق شوند (این انطباق ممکن است پس از انجام دادن دوران اتفاق بیفتد). به شکل ۳ نگاه کنید.

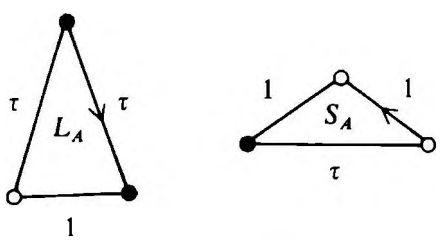
از به هم چسباندن آجرهای نوع A باز آجرهایی به شکل مثلث از نوع B همان‌طور که در شکل ۴ نشان داده شده است به دست می‌آید. همانند قبل مثلثهای کوچک نوع B را با S_B و مثلثهای بزرگتر را با L_B نشان می‌دهیم. ملاحظه می‌کنیم که $L_A = S_B$.

آجرفرش کردن صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ با آجرهای نوع B از همان قانون آجرفرش نوع A پیروی می‌کند. از به‌هم چسباندن آجرهای نوع B آجرهای نوع $\tau A'$ حاصل خواهد شد. همان‌طور که در شکل (۵) ملاحظه می‌کنیم آجرهای نوع $\tau A'$ از لحاظ شکل مشابه آجرهای نوع A هستند. در این نمادگذاری τ به این معناست که اندازهٔ این آجرها به نسبت $1 : \tau$ از آجرهای نوع A بزرگتر است و علامت A' به این معناست که جای رنگها نسبت به Aـآجرها عوض شده‌اند. ملاحظه می‌کنیم که $S_{\tau A'} = L_B$.

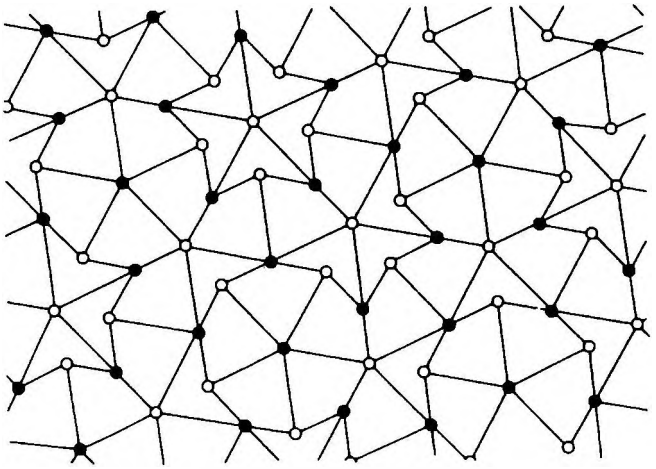
با ادامهٔ این روند دنباله‌ای از آجرها به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\ldots \to \tau^2 A - \text{آجرها} \to \tau B' - \text{آجرها} \to \tau A' - \text{آجرها} \to B - \text{آجرها} \to A - \text{آجرها}$$

همچنین می‌توان از آجرفرش کردن صفحه با آجرهای نوع A شروع کرد و با روش فوق به آجرفرش صفحه به‌وسیلهٔ آجرهای نوع B، نوع $\tau A'$ و ... رسید. کافی است در هر مرحله یالهایی را که دو رأس غیرهم‌رنگ را به هم وصل می‌کنند حذف کنیم (شکل ۶).



شکل ۲ Aـآجرهای L_A و S_A



شکل ۳ آجرفرش کردن صفحه با آجرهای نوع A

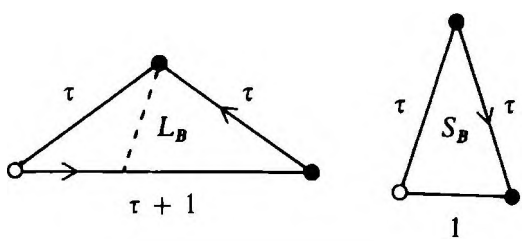
حال یک دنبالهٔ $\{a_n\}$ راکه $a_n \in \{0,1\}$ و $a_n = 1 \Rightarrow a_{n+1} = 0$ به این دنبالهٔ آجرفرشها به صورت زیر وابسته می‌کنیم:

اگر T آجرفرشی از نوع A باشد، از مثلث‌بندی T تمام یالهایی را که دو رأس غیرهم‌رنگ را به هم وصل می‌کنند حذف می‌کنیم. در این مرحله، مثلث‌بندی T_1 را خواهیم داشت که مثلثهایش، همنهشت با یکی از مثلثهای L_B یا S_B هستند. باز اگر در T_1 تمام یالهایی را که رئوس هم‌رنگ را به هم وصل می‌کنند حذف کنیم به مثلث‌بندی T_2 می‌رسیم که مثلثهایش همنهشت با یکی از مثلثهای $L_{\tau A'}$ یا $S_{\tau A'}$ هستند. به این ترتیب دنباله‌ای از مثلث‌بندی‌های T_n برای $\mathbb{R}^n$ به‌دست می‌آوریم که هر یک، نظیر L_n یا S_n است. اگر در آجرفرش نوع Aی T، مثلث α را در نظر بگیریم، دنبالهٔ $\{a_n\}$ از صفرها و یک‌ها را به این‌صورت می‌سازیم که اگر در مثلث‌بندی T_n، α مشمول در مثلث بزرگتر باشد $a_n = 0$ و اگر α مشمول در مثلث کوچکتر باشد $a_n = 1$. با توجه به اینکه در هر مرحله $L_{n-1} = S_n$، خواهیم داشت $a_n = 1 \Rightarrow a_{n+1} = 0$. دنبالهٔ حاصل را با $i(T,\alpha)$ نشان می‌دهیم.

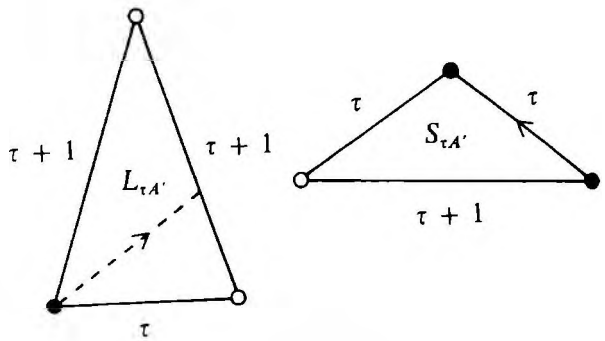
فرض کنیم K عبارت باشد از مجموعهٔ تمام دنباله‌های $\{a_n\}$ که $a_n \in \{0,1\}$ و

$$a_n = 1 \Rightarrow a_{n+1} = 0$$

واضح است که هر دنبالهٔ $i(T,\alpha)$ متعلق به K است و برعکس می‌توان دید که هر دنباله در K به صورت یک $i(T,\alpha)$ برای یک مثلث‌بندی مناسب T و یک مثلث مناسب α است [۵].



شکل ۴ Bـآجرهای L_B و S_B



شکل ۵ $\tau A'$ـآجرها

ملاحظه می‌کنیم که اگر α و β دو مثلث خاص در مثلث‌بندی T از نوع A باشند آنگاه برای n به قدر کافی بزرگ، α و β مشمول در یک مثلث از T_n خواهند بود و در نتیجه دنباله‌های $i(T,\alpha) = a$ و $i(T,\beta) = b$ در شرط زیر صدق می‌کنند.

$$a_m = b_m \qquad \forall m \geq n \qquad (*)$$

برعکس می‌توان دید که اگر $a = i(T,\alpha)$ و $b \in K$ در شرط فوق صدق کنند آنگاه یک مثلث β در T هست که $b = i(T,\beta)$ [۵]. به این ترتیب یک تناظر دوسویی بین مجموعهٔ X از آجرفرشهای پنروز و مجموعهٔ خارج‌قسمت K/R که R رابطهٔ هم‌ارزی تعریف شده به‌وسیلهٔ شرط $(*)$ است، برقرار می‌شود.

فضای فشردهٔ K همسانریخت با مجموعهٔ کانتور است و لذا فضای X عبارت است از فضای خارج‌قسمت K/R. اگر از دیدگاه معمولی به فضای X نگاه کنیم ملاحظه می‌کنیم که زیرمجموعه‌های بستهٔ X عبارت‌اند از زیرمجموعه‌های بستهٔ K تقسیم بر رابطهٔ هم‌ارزی R. اما هر ردهٔ هم‌ارزی در K چگال است و لذا تنها زیرمجموعه‌های بستهٔ X، خود X و مجموعه تهی‌اند. لذا توپولوژی X بدیهی است و X را با یک نقطه یکی می‌کند. اما به عنوان یک فضای ناجابجایی X فضایی بسیار جالب است. از جمله یکی از ناورداهای توپولوژیک این فضا همان عدد طلایی $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است. در واقع گروه بعد[1]، زیرگروه $\mathbb{R}$ تولید شده توسط $\mathbb{Z}$ و عدد τ در گروه $\mathbb{R}$ است [برای مطالعهٔ بیشتر در مورد گروه بعد به مرجع [۶] مراجعه شود].

در پایان بحث، C^*ـجبر A وابسته به فضای $X = K/R$ را می‌سازیم.

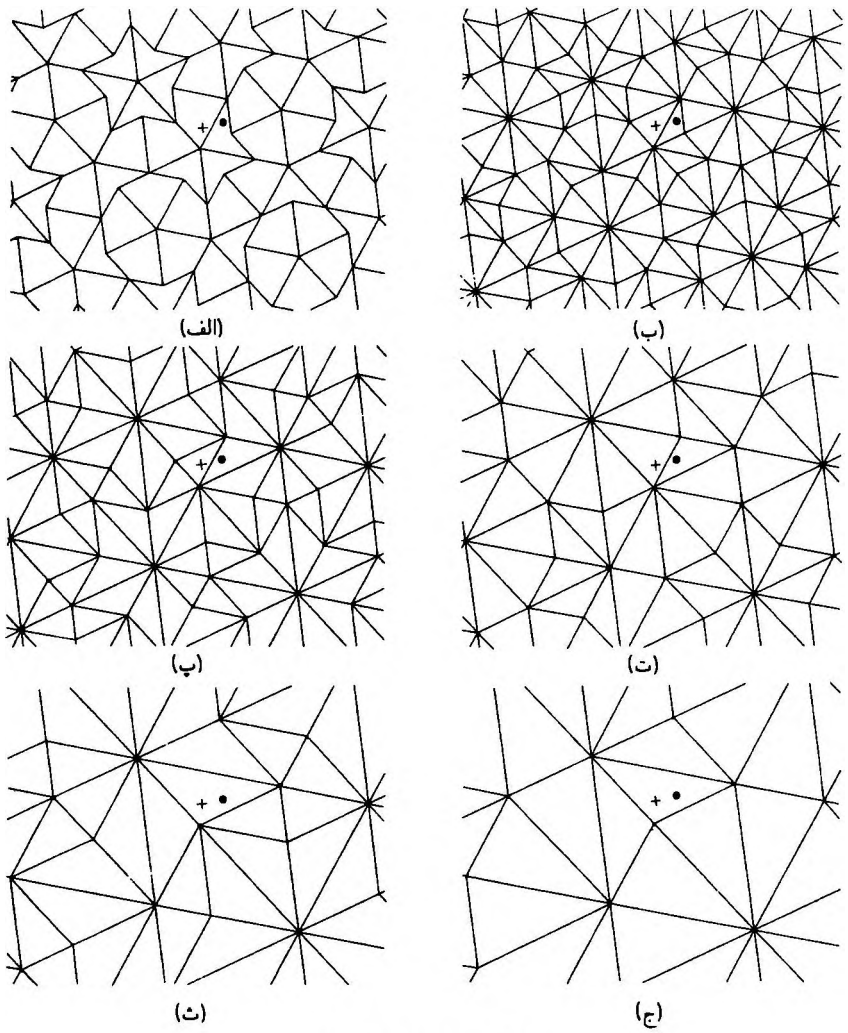
عنصر $a \in A$ با ماتریس $(a_{z,z'})$ از اعداد مختلط که به‌وسیلهٔ مزدوج $(z,z') \in R$ اندیسگذاری شده است مشخص می‌شود. ضرب دو عنصر از A به صورت ضرب ماتریسی زیر خواهد بود

$$(ab)_{z,z''} = \sum_{z'} a_{z,z'} b_{z',z''}$$

به هر عنصر $x \in X$ یک ردهٔ هم‌ارزی یعنی زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیری از K نظیر می‌شود. لذا به هر $x \in X$ فضای هیلبرت l^2_x را که پایه‌اش این مجموعهٔ شمارش‌پذیر است نظیر می‌کنیم. هر عنصر $a \in A$ به‌وسیلهٔ رابطهٔ زیر به‌عنوان یک عملگر روی l^2_x عمل می‌کند

$$(a(x)\xi)_z = \sum_{z'} a_{z,z'} \xi_{z'} \quad \forall \xi \in l^2_x$$

1. dimension group



شکل ۶ مراحل حذف یالها

ملاحظه می‌کنیم که با مطالعهٔ توابع روی فضای X با مقدار مختلط، اطلاع عمیقی در مورد X به دست نمی‌آید ولی خانواده‌ای از توابع روی X با مقدار عملگری وجود دارد که با مطالعهٔ آن، دریافت اطلاعات عمیق در بارهٔ X ممکن می‌شود [۱]:

$$a(x) \in L(l^2_x)\ ,\ \forall x \in X$$

سپاسگزاری

به این وسیله از راهنماییهای استاد ارجمند آقای احمد شفیعی‌ده‌آباد در تهیهٔ این مقاله کمال تشکر و امتنان را دارم.

مراجع

1. Alain Connes; *Noncommutative Geometry*, Academic Press (1994).
2. R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, Vol I, II, Academic Press (1983).
3. Alain Connes, "Geometry from spectral point of view", *Letters in Math. Phys.*, **34** (1995) 203-238.
4. H. B Lawson, M. L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton Univ. Press (1989).
5. B. Grünbaum, G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman & Company (1987).
6. B. Blackadar, *K-Theory for Operator Algebras*, Springer-Verlag (1986).

******

* ویدا میلانی، دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی و پژوهشگاه دانشهای بنیادی

milani@theory.ipm.ac.ir

نشر ریاضی، سال ۹، شمارهٔ ۲، صص ۱۳ـ۲۳

هندسهٔ ناجابجایی و فیزیک

کامران کاویانی*

۱. مقدمه

یکی از مهمترین موفقیتهای فیزیک در قرن بیستم وحدت‌بخشیدن به نیروهای الکترومغناطیسی، ضعیف و قویِ هسته‌ای در یک قالب ریاضی واحد تحت عنوان مدل متعارف ذرات بنیادی است. این مدل که صرفاً به شیوهٔ پدیده شناختی به‌دست آمده است دارای ۱۹ پارامتر آزاد است که باید از آزمایش استخراج شوند. جرم لپتونها، کوارکها و بوزنهای پیمانه‌ای و همچنین ضرایب جفت‌شدگی و زوایای ترکیب حالات کوارکی از این دسته‌اند. این مدل موفقترین مدل برای توصیف همهٔ اندرکنشهای بین ذرات بنیادی است. البته این نخستین باری نیست که اتحاد نیروها در فیزیک اتفاق می‌افتد، یعنی صورتبندی ریاضی واحدی ارائه می‌شود که می‌تواند همزمان چند نیرو را با هم توصیف کند. شاید بتوان گفت که برای اولین بار ماکسول توانست با استفاده از معادلات $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ و $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ که در آن j^μ، ۴ـبردار جریان و $F^{\mu\nu}$ و $\tilde{F}^{\mu\nu}$ به ترتیب شدت میدان الکترومغناطیسی و دوگان آن است، نشان دهد که چگونه می‌توان نیروهای الکتریکی و مغناطیسی را در یک چارچوب متحد کرد. پس از ماکسول، مینکوفسکی علت اتحاد نیروهای الکتریکی و مغناطیسی را در این دانست که ماکسول نادانسته در معادلات خود زمان را همچون سه بُعد مکانی، بُعد محسوب کرده بود و در نتیجه با افزایش ابعاد از سه به چهار، وحدت الکتریسیته و مغناطیس امکان‌پذیر شد. از طرفی کار اینشتین در نسبیت عام و توصیف گرانش با مدلهای هندسی در ایجاد این فکر در بین بسیاری از فیزیکدانان که طبیعت دارای یک، توصیف دقیق هندسی است بسیار مؤثر بود. با استفاده از استنباطهای فوق در اوایل قرن بیستم کالوتزا و کلاین با فرض یک بعد مکانی دیگر برای فضا و به عبارتی فرض یک فضای ۱ + ۴ بعدی سعی کردند مدل هندسیی ارائه دهند تا دو نیروی شناخته شده تا آن زمان، یعنی الکترومغناطیس و گرانش، را متحد سازند و در این راه تا حد زیادی نیز موفق شدند. آنها به‌دلایل تجربی بعد پنجم را فشرده در نظر گرفتند و کنش هیلبرت‌ـاینشتین را در این فضای پنج بعدی بررسی کردند و ملاحظه نمودند با کوچکتر کردن شعاع فشرده‌سازیِ بعد اضافی، به کنش اینشتین‌ـماکسول خواهند رسید. بنابراین اتحاد نیروها می‌تواند ریشه در ساختار فضاـزمان داشته باشد. اینک سؤال این است: حال که ما سه نیرو از چهار نیروی طبیعت را در مدل متعارف ذرات متحد کرده‌ایم، ساختار فضاـزمان برای چنین اتحادی چگونه است؟ این سؤالی بود که در اوایل دههٔ هشتاد قرن بیستم فکر فیزیکدانانِ بسیاری معطوف به آن شد. آنها با استفاده از ایده‌های کالوتزا و کلاین سعی در طراحی فضاـزمانی با ابعاد اضافی داشتند که با فشرده‌سازی این ابعاد اضافی نهایتاً به لاگرانژیِ مدل متعارف برسند. ولی در اواخر همین دهه اغلب امیدها به یأس مبدل شد. مهمترین مشکل نیز تکدستی[1] ذرات بود. در تمام این روشها از خمینه‌های ریمانی به عنوان مدل فضاـزمان استفاده می‌شد، و فنون مرسوم در هندسهٔ دیفرانسیل کلاسیک به کار گرفته می‌شد. در سال ۱۹۸۹ آلن کُن[2] با استفاده از ابزارهای هندسهٔ دیفرانسیل ناجابجایی که خود مبتکر آن بود، برای فضاـزمان مینکوفسکی همانند کالوتزاـکلاین یک بعد اضافی در نظر گرفت، با این تفاوت که این بعد اضافی دیگر پیوسته نبود و صرفاً از دو نقطهٔ جدا از هم ساخته شده بود. در این حالت فضاـزمان به صورت دو خمینهٔ مینکوفسکی جدا از هم در می‌آمد. فرض فیزیکی آن بود که ذرات چپ‌دست در یک لایه و ذرات راست‌دست در لایهٔ دیگر قرار دارند. برای این منظور روی یک لایه، کلاف اصلی $SU(2)$، و روی دیگری، یک کلاف $U(1)$ فرض کرد؛ سپس با استفاده از تعمیم قضیهٔ سوان[3] مطالب فوق را به زبان جبری بیان نمود و با در نظرگرفتن یک ساختار دیفرانسیل مناسب روی جبر نشان داد که کنش یانگ‌ـمیلز (که متناسب با توان دوم تانسور انحنای فضاست) منجر به کنش مدل متعارف می‌شود و در این راه نتایج جالبی نیز به‌دست آورد. با این رهیافت، اَبَر بار[4] صحیح برای ذرات چپ‌دست و

1. chirality 2. Alain Connes 3. Swan 4. hyper charge

راست‌دست پیدا شد، و مسألهٔ تکدستی ناپدید گردید. پتانسیل هیگز[1] به‌طور صحیح و طبیعی به‌دست آمد و میدان هیگز به صورت مؤلفهٔ میدان پیمانه‌ای در راستای بعد گسسته درآمد. همچنین بین برخی پارامترهای آزاد مدل رابطه برقرار شد.

ما در بخش بعد یک مدل پیمانه‌ای ساده را به تفصیل بررسی خواهیم کرد. به هر حال امروز یکی از مهمترین اهداف، استفاده از ابزار هندسهٔ ناجابجایی در ساختن مدلهایی برای ساختار فضا-زمان است. این امر به‌خصوص در انرژیهای بالا اهمیت فراوانی دارد، زیرا به‌نظر می‌رسد که در انرژیهای بالا ساختاری که برای فضا-زمان باید در نظر گرفت بسیار پیچیده‌تر از یک خمینه است. دستیابی به نظریه‌هایی که رفتار پدیده‌های فیزیکی را در انرژیهای بالا توصیف کنند یکی از حوزه‌های پرهیجان فیزیک نظریِ امروز بشمار می‌رود. برخی از فیزیکدانان معتقدند که نظریهٔ ریسمان که در آن ذرات بنیادی (یعنی بنیادیترین آجرهای ساختمان جهان) به صورت موجودات یک‌بعدی در نظر گرفته می‌شوند و برهم‌کنشهای بین آنها به‌صورت اتصال و پاره‌شدن این ریسمانها توصیف می‌گردد، نظریهٔ اصلی برای فیزیک انرژیهای بالاست. اگر چنین باشد، این سؤال پیش می‌آید که چگونه در فضایی که بنیادیترین جزء آن نقطهٔ هندسی است (یک موجود صفربعدی) بنیادیترین موجودات فیزیکی، موجوداتی یک‌بعدی‌اند. شاید این امرْ انعکاس این مطلب باشد که در انرژیهای بالا، فضا دیگر ساختاری نقطه‌ای آن‌طور که در هندسهٔ معمولی وجود دارد نداشته باشد. در مطالعهٔ نظریهٔ ریسمان در سالهای اخیر به‌نظر می‌رسد که این ریسمانها حالتهای مؤثری از یک نظریهٔ تعمیم‌یافته به‌نام نظریهٔ M[2] هستند که در انرژیهای بالاتر (بیش از انرژی پلانک) وجود دارد. ما هنوز نظریهٔ M را به‌درستی نمی‌شناسیم و تنها برخی از خواص آن را می‌دانیم ولی شواهدی دیده شده است که به نظر می‌رسد در نظریهٔ M باید مختصات فضا را ناجابجایی در نظر گرفت. مثالهای دیگری از کاربردهای هندسهٔ ناجابجایی در فیزیک را می‌توان در جبرهای موضعی در نظریهٔ میدان کوانتمی در فضای مینکوفسکی دید. نظریهٔ میدانهای همدیس نیز مورد دیگری برای این کاربرد است. ما در ادامه به معرفی چند مدل ساخته شده در چارچوب هندسهٔ ناجابجایی می‌پردازیم. ابتدا یک نظریهٔ میدان پیمانه‌ای ساده را در یک فضای دو لایه مطالعه می‌کنیم، سپس به کنش هیلبرت-اینشتین در یک فضای دو لایه می‌پردازیم و در پایان نیز برخی معایب این مدلها را به اجمال بازگو می‌کنیم. سعی شده است این مقاله تا حد زیادی خودکفا باشد، لذا در متن آن مراجع چندانی مشاهده نمی‌شود ولی لازم به توضیح است که مرجع اصلی برای بخش ۲ (نظریهٔ میدان پیمانه‌ای) مقالات [۱] هستند و برای بخش ۳ (کاربرد هندسهٔ ناجابجایی در کنشهای مؤثر) مراجع [۲ و ۳] مورد استفاده قرار گرفته‌اند. همچنین مراجع بخش ۴ (گرانش در چارچوب هندسهٔ ناجابجایی) [۵، ۶، ۷، و ۸] هستند. در ضمن مرجع [۸] کتاب معروف آلن‌کُن در هندسهٔ ناجابجایی است که کسانی که مایل‌اند جنبه‌های ریاضی مطلب را با تفصیل بیشتری مطالعه کنند می‌توانند از آن استفاده برند.

در سراسر این مقاله از قرارداد جمع اینشتین یعنی به کار بردن $a^i b_i$ به جای $\sum_i a^i b_i$، و موارد مشابه، استفاده شده است.

1. Higgs 2. M theory

۲. نظریهٔ میدان پیمانه‌ای $SU(2) \times U(1)$ در چارچوب هندسهٔ ناجابجایی

در این مرحله می‌خواهیم یک مدل پیمانه‌ای با گروه تقارن پیمانهٔ $SU(2)\times U(1)$ را که مدلی برای توصیف برهم‌کنشهای الکتروضعیف است در چارچوب هندسهٔ ناجابجایی بررسی کنیم. در این حالت فضا را متشکل از حاصلضرب یک خمینهٔ اسپینی[1] ریمانی چهاربعدی X در یک مجموعهٔ گسستهٔ دونقطه‌ای در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر فضا را اصطلاحاً پنج‌بعدی، که بعد پنجم آن گسسته است، فرض می‌کنیم. چون می‌خواهیم تقارن $SU(2) \times U(1)$ را مطالعه کنیم فرض می‌کنیم که روی یک لایه یک کلاف بدیهی $U(1)$ و روی لایهٔ دیگر کلاف بدیهی $SU(2)$ را داریم. می‌توان دید که اگر جبری را که فضای پایهٔ X را توصیف می‌کند $\mathcal{A}_1$ بنامیم، $\mathcal{A}_1$ جبر توابع روی X است. طبق قضیهٔ سوان، هر کلاف برداری E با مدول مقطعها[2]ی آن $\mathcal{E}$ مشخص می‌گردد. در این حالت برای سادگی سعی می‌کنیم قضیه را ساده کنیم یعنی E را با یک جبر نشان دهیم. به عبارت بهتر فرض کنیم که جبری مانند $\mathcal{A}$ وجود دارد که فضای هندسی مذکور را کلاً توصیف می‌کند یعنی $\mathcal{E} = \mathcal{A}$. در این صورت

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \qquad (1)$$

که $\mathcal{A}_2 = M_1(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C})$، و منظور از $M_n(\mathbb{C})$ جبر ماتریسهای $n \times n$ با درایهٔ مختلط است. چون $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر[3] است پس دارای نمایشی در یک فضای هیلبرت مانند $\mathcal{H}$ است. و با توجه به ساختار جبر $\mathcal{A}$ بدیهی است که می‌توان $\mathcal{H}$ را جمع مستقیم دو فضای هیلبرت $\mathcal{H}_0$ و $\mathcal{H}_1$ گرفت و نمایش زیر را برای عناصر جبر $\mathcal{A}$ انتخاب کرد

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} ; a \in \mathcal{A} \qquad (2)$$

که a_1 و a_2 به ترتیب ماتریسهای 1×1 و 2×2 با درایه‌هایی در $\mathcal{A}_1$ هستند. برای ایجاد ساختار دیفرانسیلی روی $\mathcal{A}$، در $\mathcal{H}$ عملگر خودالحاق و بیکرانی به‌نام عملگر دیراک D انتخاب می‌کنیم. اینکه D را چه باید انتخاب کرد تنها به نظریه‌ای بستگی دارد که دنبال آن هستیم و اصلاً انتخاب مشخصی برای آن وجود ندارد ولی باید علاوه بر خودالحاقی بودن در شرایط زیر صدق کند:

۱. برای هر عنصر جبر مانند a، عملگر $[D, a]$ بیکران باشد.

۲. عملگر $(1 + D^2)^{-1}$ یک عملگر فشرده در $\mathcal{H}$ باشد.

ما در اینجا D را به صورت

$$D = \begin{pmatrix} \partial\!\!\!/ \otimes 1_{1\times 1} & \gamma_5 \otimes M_{12} \\ \gamma_5 \times M_{21} & \partial\!\!\!/ \otimes 1_{2\times 2} \end{pmatrix} ; M_{12}^* = M_{21} \qquad (3)$$

در نظر می‌گیریم که در آن $\partial\!\!\!/ = i\gamma^\mu \partial_\mu$ و γ^μها ماتریسهای دیراک هستند و داریم

$$\gamma_\mu^* = -\gamma_\mu, \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}, \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \qquad (4)$$

1. spin manifold 2. sections 3. C*-algebra

و متریک فضا نیز $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ است. از آنجا که هدف ما ساختن یک نظریهٔ یانگ-میلز است، باید از روی ۱-فرم هموستار (به زبان جبر) ۲-فرم انحنا را به‌دست آورد و سپس آن را به توان دو رساند. پس، فرض کنید که ρ یک عنصر دلخواه در فضای ۱-فرمهای $\Omega^1(\mathcal{A})$ باشد. به عبارت دیگر کلیترین شکل یک ۱-فرم به‌صورت زیر است

$$\rho = \sum_i a^i db^i; a^i, b^i \in \mathcal{A} \qquad (۵)$$

که در اینجا جبر دیفرانسیل جامع[1] به صورت $\Omega^*(\mathcal{A}) = \oplus_{n=0}^{\infty} \Omega^n(\mathcal{A})$ تعریف می‌شود که $\Omega^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ و اصولاً $\Omega^n(\mathcal{A})$ نقش n-فرمهای دیفرانسیلی را در هندسهٔ ناجابجایی ایفا می‌کنند. نمایش $\Omega^*(\mathcal{A})$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ نگاشت $\pi : \Omega^*(\mathcal{A}) \to B(\mathcal{H})$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\pi(a_0 da_1 \dots da_n) = a_0[D, a_1] \dots [D, a_n]; a_i \in \mathcal{A} \quad (۶)$$

منظور از $B(\mathcal{H})$ جبر عملگرهای کراندار در $\mathcal{H}$ است. بدین ترتیب نمایش ρ به عنوان یک ۱-فرم در $\mathcal{H}$ به صورت زیر خواهد بود

$$\pi(\rho) = \sum_i a^i[d, b^i] =$$
$$\sum_i \begin{pmatrix} a_1^i \not{\partial} b_1^i & \gamma_5 \otimes a_1^i(M_{12}b_2^i - b_1^i M_{12}) \\ \gamma_5 \otimes a_2^i(M_{21}b_1^i - b_2^i M_{21}) & a_2^i \not{\partial} b_2^i \end{pmatrix} \qquad (۷)$$

اینک $\pi(\rho)$ را به صورت $\pi(\rho) = \begin{pmatrix} A_1 & \gamma_5\otimes\varphi_{12} \\ \gamma_5\otimes\varphi_{21} & A_2 \end{pmatrix}$ می‌نویسیم که در آن

$$A_n = \sum_i a_n^i \not{\partial} b_n^i; \; n = 1, 2$$
$$\varphi_{mn} = \sum_i a_m^i(M_{mn}b_n^i - b_m^i M_{mn}); \; m \neq n \qquad (۸)$$

حال می‌خواهیم ρ یک ۱-فرم هموستار مناسب برای میدان پیمانه‌ای باشد. معنای آن در اینجا این است که $\rho = \rho^*$ و $\mathrm{Tr}(\gamma_5\rho) = 0$. پس به‌سادگی از روابط بالا دیده می‌شود که

$$A_n^* = A_n, \; \varphi_{mn}^* = \varphi_{nm} \qquad (۹)$$

اینک ۲-فرم انحنای θ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\theta = \rho^2 + d\rho \qquad (۱۰)$$

که در آن

$$d\rho = \sum_i [D, a^i][D, b^i] \qquad (۱۱)$$

1. universal differential algebra

قبل از ادامهٔ بحث، ناوردایی پیمانه‌ای را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. قسمت فرمیونی لاگرانژیِ نظریه به صورت

$$\langle \Psi, (D + \pi(\rho))\psi \rangle \qquad (۱۲)$$

است که $D + \pi(\rho)$ نقش مشتق هموردا را دارد و می‌خواهیم عبارت فوق تحت تبدیل $\psi \to \psi' = g\psi$ ناوردا بماند که در آن g متعلق به گروه تقارن پیمانه است. چون $\mathcal{A}$ را چنان تعریف کردیم که اطلاعات کلافها را نیز در بر می‌گیرد پس $g \in \mathcal{U}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. به $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ گروه یکانی[1] جبر می‌گوییم و داریم

$$\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \{g \in \mathcal{A} | g^* g = 1\} \qquad (۱۳)$$

ناوردایی قسمت فرمیونی تحت تبدیل فوق ایجاب می‌کند که

$$\rho \to \rho' = g\rho g^* + g d g^* \qquad (۱۴)$$

که اگر آن را برحسب عناصر جبر بنویسیم داریم

$$\rho' = \sum_i (g a^i) d(b^i g^*) - g[(\sum_i a^i b^i) - 1] d g^* \quad (۱۵)$$

که با تعریف ۱-فرم انطباق دارد. جملهٔ دوم عبارت بالا دقیقاً شکل جملهٔ اول را دارد که در آن

$$\sum_i a^i b^i - 1 \in A$$

بنابراین می‌توان کل عبارت فوق را به صورت

$$\rho' = \sum_i (g a^i) d(b^i g^*) \qquad (۱۶)$$

نوشت. در این صورت می‌گوییم اثر تبدیلات پیمانه‌ای روی عناصر a^i و b^i به صورت زیر تعریف می‌شود

$$a^i \to a'^i = g a^i \quad , \quad b^i \to b'^i = b^i g^* \qquad (۱۷)$$

چنین نگرشی باعث می‌گردد که بتوان شرط $\sum_i a^i b^i = 1$ را بدون کاستن از کلیت قضیه، اعمال کرد. ما از این به بعد در ۱-فرم‌های هموستاری که می‌سازیم شرط فوق را در نظر خواهیم گرفت و این باعث سادگی محاسبات خواهد شد. به سادگی دیده می‌شود که

$$d\rho \to d\rho' = dg\rho g^* + dg dg^* + g d\rho g^* - g\rho dg^* \quad (۱۸)$$

اینک اگر به سراغ ۲-فرم انحنا برویم ملاحظه می‌شود که تحت تبدیلات فوق داریم

$$\theta \to \theta' = g\theta g^* \qquad (۱۹)$$

1. unitary

توجه داریم که نمایش g در $\mathcal{H}$ به صورت زیر است

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}, g_1 \in \mathrm{U}(1),\ g_2 \in \mathrm{SU}(2) \qquad (۲۰)$$

حال با توجه به تبدیل ρ تحت g، به تبدیل درایه‌های ρ تحت درایه‌های g می‌پردازیم. ملاحظه می‌شود که تبدیل ψ به $\psi' = g\psi$ منجر به تبدیلهای زیر می‌شود

$$A_n \to A'_n = g_n A_n g_n^* + g_n\ \partial g_n^*,\ n = 1, 2$$
$$(\varphi_{mn} + M_{mn}) \to (\varphi_{mn} + M_{mn})' = g_m(\varphi_{mn} + M_{mn})g^*,\ m \neq n. \qquad (۲۱)$$

روابط فوق از این لحاظ جالب‌اند که دقیقاً یادآور تبدیلات پیمانه‌ای روی میدانهای A_1 و A_2 به عنوان میدانهای $\mathrm{U}(1)$ و $\mathrm{SU}(2)$ هستند. میدان $\varphi_{mn} + M_{mn}$ نیز به صورت مخلوطی از $\mathrm{U}(1)$ و $\mathrm{SU}(2)$ تبدیل پیمانه پیدا می‌کند. A_1 و A_2 نقش میدانهای پیمانه‌ای نظریه و φ_{mn} نقش میدان هیگز و M_{mn} نقش مقادیر امید خلاء میدان هیگز را دارند. اینک به محاسبهٔ نمایش θ در $\mathcal{H}$ می‌پردازیم. مشکلی که در سر راه این محاسبه وجود دارد در جملهٔ $d\rho$ نهفته است. از محاسبهٔ مستقیم مشاهده می‌شود

$$d\rho = \begin{pmatrix} d\rho_{11} & d\rho_{12} \\ d\rho_{21} & d\rho_{22} \end{pmatrix} \qquad (۲۲)$$

که در آن

$$d\rho_{11} = \sum_i \partial a_1^i\ \partial b_1^i + \sum_i (M_{12}a_2^i - a_1^i M_{12})(M_{21}b_1^i - b_2^i M_{21})$$
$$= \partial A_1 + M_{12}\varphi_{21} + \varphi_{12}M_{21} - X_{11} \qquad (۲۳)$$

که در آن X_{11} چنین است

$$X_{11} = \sum_i a_1^i(\partial^2 b_1^i + [M_{12}M_{21}, b_1^i]) \qquad (۲۴)$$

اینک فرض کنید a^i و b^iها را چنان انتخاب کنیم که $\rho = 0$. معنای آن این است که $\varphi_{mn} = A_n = 0$. پس انتظار داریم $d\rho$ هم صفر شود. در محاسبهٔ بالا ملاحظه می‌شود که در اولین درایهٔ $d\rho$، جمله‌ای مانند $\sum_i a_1^i\ \partial^2 b_1^i$ وجود دارد که الزاماً صفر نیست؛ پس این جمله که به میدان کمکی[1] معروف است مانع از صفر شدن $d\rho$ می‌شود. پیدایش چنین اشکالی به نگاشتی که عناصر جبر را در فضای هیلبرت به صورت نمایش ماتریسی درمی‌آورد یعنی به $\pi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ برمی‌گردد. به سادگی می‌توان نشان داد چنین نگاشتی برای عناصر $\Omega^1(\mathcal{A})$ نیز کارساز است ولی در مورد $\Omega^{n>1}(\mathcal{A})$ باید نگاشت تغییر کند و ما در اینجا این کار را نکرده‌ایم. در این حالت π نمی‌تواند نمایش خوبی برای $\Omega^*(\mathcal{A})$ باشد. برای رفع چنین مشکلی، اگر اصرار در به کار بردن نمایش π داریم، به جای $\Omega^*(\mathcal{A})$ باید $\Omega^*_D(\mathcal{A})$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود به کار بریم. می‌توان نشان داد که $\Omega^*_D(\mathcal{A})$ تحت عملگر دیفرانسیل d بسته است و بنابراین دارای نمایش درستی در $\mathcal{H}$ است.

$$\Omega^*_D(\mathcal{A}) = \Omega^*(\mathcal{A})/(\ker\pi + d\ker\pi) \qquad (۲۵)$$

منظور از $\ker\pi$، هستهٔ نمایش π است. اینک چون $d\rho$ یک ۲ـفرم است پس معنای مطالب فوق این است که X_{11} را با دست حذف کنیم. در نتیجه

$$d\rho_{11} = \partial A_1 + M_{12}\varphi_{21} + \varphi_{12}M_{21} \qquad (۲۶)$$

به سادگی ملاحظه می‌شود که اگر $d\rho_{22}$ را نیز محاسبه کرده میدان کمکی مربوطه را حذف کنیم خواهیم داشت

$$d\rho_{22} = \partial A_2 + M_{21}\varphi_{12} + \varphi_{21}M_{12} \qquad (۲۷)$$

در مورد $d\rho_{12}$ و $d\rho_{21}$ مشکلی به‌وجود نمی‌آید و میدان کمکی ظاهر نمی‌شود

$$d\rho_{12} = -\gamma_5(\partial\varphi_{12} + A_1M_{12} - M_{12}A_2) \qquad (۲۸)$$

اما هنوز مشکل ما حل نشده است. اگر به عبارت $d\rho_{11}$ برگردیم می‌بینیم که نحوهٔ انتخاب میدان کمکی کاملاً دلخواه است، مثلاً می‌توانیم $M_{12}\varphi_{21} + \varphi_{12}M_{21} - X_{11}$ را میدان کمکی فرض کنیم و آن را حذف کنیم. در این صورت باز شرط $\rho = 0 \Rightarrow d\rho = 0$ برقرار می‌شود. اما اگر این کار را بکنیم در نظریه چیزی به نام پتانسیل هیگز باقی نمی‌ماند. یک راه‌حل این مسأله بازگشت به عملگر دیراک D و تغییر آن به صورت زیر و انجام دوبارهٔ تمام محاسبات فوق است

$$D = \begin{pmatrix} \partial\otimes 1_{1\times1}\otimes 1_{n\times n} & \gamma_5\otimes M_{12}\otimes K_{12} \\ \gamma_5\otimes M_{21}\otimes K_{21} & \partial\otimes 1_{2\times2}\otimes 1_{n\times n} \end{pmatrix};\ K_{12} = K_{21}^* = K \qquad (۲۹)$$

که در آن K ماتریسی است $n \times n$ که با عناصر جبر جابجا می‌شود، و مقصود از $1_{n\times n}$ ماتریس همانی $n \times n$ است. در واقع Kها به زوایای اختلاط کوارکی نسلهای مختلف ارتباط دارند. در این حالت داریم

$$\pi(\rho) = \begin{pmatrix} A_1 & \gamma_5 HK \\ \gamma_5 H^*K^* & A_2 \end{pmatrix} \qquad (۳۰)$$

که در آن $A_n = \sum_i a_n^i\ \partial b_n^i$ و نیز

$$H = \sum_i a_1^i(M_{12}b_2^i - b_1^i M_{12}) \qquad (۳۱)$$

اینک فرض می‌کنیم $M_{12} = \mu\binom{0}{1}$ و تعریف می‌کنیم:

$$I_{\mathrm{Y.M}} = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}_w(\theta^2|D|^{-4}) = \frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}(\mathrm{tr}(\pi^2(\theta))) \qquad (۳۲)$$

1. auxiliary field

که منظور از Tr_w، رَد دیکس‌میه[1] است [۸]. همچنین منظور از Tr، تعیین‌رد روی ساختار ماتریسی جبر و منظور از tr، تعیین‌رد روی ساختار کلیفرد است. در نتیجه برای مدل فوق به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{Y.M}} = \tfrac{1}{2}\big(&(F^1_{\mu\nu})^I_J(F^1_{\mu\nu})^J_I + (F^2_{\mu\nu})^I_J(F^2_{\mu\nu})^J_I\big) + 2\mathrm{Tr}(KK^*)|\partial_\mu(K^I - H^I_0) \\ &+ (A_{\mu 1})^I_J(H^J - H^J_0) - (H^I - H^I_0)A_{\mu 2}|^2 \\ &- (\mathrm{Tr}(KK^*)^2(\mathrm{Tr}(KK^*)))^2((H^I - H^I_0)(H_I - H_{0I}) - \mu))^2 \end{aligned} \tag{۳۳}$$

که منظور از $F^m_{\mu\nu}$ این است

$$F^m_{\mu\nu} = \partial_\mu A^m_\nu - \partial_\nu A^m_\mu + [A^m_\nu, A^m_\mu] \tag{۳۴}$$

و منظور از $(F^m_{\mu\nu})^I_J$ عنصر IJام از ساختار ماتریسی است. H_0 نیز مقدار امید در حالت خلاء میدان هیگز H است. در روابط بالا بهنجارش را چنان انتخاب کرده‌ایم که در آن $\mathrm{Tr}\,1 = 1$ فرض شده است. برای رسیدن به مدل متعارف ذرات بنیادی با تقارن $\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{U}(1)$ کافی است فرضهای زیر را در نظر بگیریم

$$A_1 = -\frac{1}{2}ig_2A^\alpha\sigma_\alpha + ig_1B \tag{۳۵}$$

و

$$A_2 = 2ig_1B \tag{۳۶}$$

که در آن σ_α ماتریسهای پائولی و A^α میدان پیمانه‌ای $\mathrm{SU}(2)$ و B میدان پیمانه‌ای $\mathrm{U}(1)$ است. برای کنش فرمیونی نیز باید به عبارت $I_{\mathrm{Y.M}}$، جملهٔ $\langle\psi,(D+\pi(\rho))\psi\rangle$ را اضافه کنیم.

اجازه بدهید که بیش از این جلو نرفته و بحث میدانهای پیمانه‌ای را با بیان نتایجی که تاکنون به دست آورده‌ایم به پایان ببریم.

اولین نتیجهٔ مهم آن است که در نوشتن کنش یانگ‌ـمیلز، میدان هیگز H با پتانسیل صحیح به‌دست می‌آید و در طول محاسبهٔ میدان هیگز مانند میدان پیمانه‌ای ظاهر می‌شود. ثانیاً وجود ماتریس K که در کنش مانند ماتریس اختلاط کوبایاشی‌ـماساکاوا[2]ست نشان می‌دهد که باید بیش از یک نسل از ذرات را داشته باشیم و نهایتاً بین ضرایب جفت‌شدگی در کنش ارتباط برقرار شده است.

۳. کاربرد هندسهٔ ناجابجایی در کنشهای مؤثر

در بخش قبل میدان پیمانه‌ای $\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{U}(1)$ را به عنوان مثالی از یک نظریهٔ پیمانه‌ای بررسی کردیم ولی این مثال تنها قسمتی از نظریهٔ متعارف ذرات است که تقارن اولیهٔ آن $\mathrm{SU}(3)\otimes\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{U}(1)$ است. در مثال فوق شاهد ظاهر شدن میدان هیگز بودیم که باعث شکست تقارن $\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{U}(1)$ به $\mathrm{U}(1)_{em}$ می‌شود[3]. ولی بخش $\mathrm{SU}(3)$ را که منشأ برهمکنشهای قوی، است حذف کردیم. این بخش در واقع مبین نظریهٔ QCD[4] است که در انرژیهای پایین شدیداً رفتار غیرخطی از خود نشان می‌دهد و نمی‌توان با استفاده از روش متداول اختلال به بررسی آن پرداخت. ما در این قسمت به مطالعهٔ QCD در انرژیهای پایین و در چارچوب هندسهٔ ناجابجایی می‌پردازیم. چیزی که به دست خواهیم آورد کنش مؤثری برای QCD خواهد بود که به نظریهٔ اختلال تکدست معروف است. از این حقیقت پدیده شناختی به نام PCAC[1] شروع می‌کنیم که هادرونها (یا ذراتی که در برهمکنشهای قوی شرکت می‌کنند) در انرژیهای پایین برهمکنشهای ضعیفی با هم دارند. در نتیجه می‌توان کنش مؤثر را برحسب تکانه‌های میدان بسط اختلالی[2] داد. بنابراین لاگرانژیِ مورد نظر خود را به صورت

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)} + \dots \tag{۳۷}$$

می‌نویسیم که $\mathcal{L}^{(n)}$ معرف جملاتی از لاگرانژی است که نسبت به تکانه یا به عبارت بهتر نسبت به مشتقات میدان از مرتبهٔ n هستند. برای شروع، جبر مورد نیاز را به صورت

$$\mathcal{A} = (\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})\otimes M_N(\mathbb{C})) \oplus M_N(\mathbb{C}) \tag{۳۸}$$

در نظر می‌گیریم. جبر فوق بیانگر فضایی است متشکل از یک خمینهٔ پنج‌بعدی $\mathbb{R}^4\times S^1$ که در آن S^1 دایره‌ای است با شعاع کوچک و روی آن یک کلاف $\mathrm{U}(N)$ قرار دارد و در خارج از آن نقطه‌ای است که روی آن یک فضای برداری $\mathrm{U}(N)$ نیز واقع شده است. عملگر دیراک را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$D = \begin{pmatrix} \partial\!\!\!/\otimes 1_{N\times N} & \gamma_5\otimes M \\ \gamma_5\otimes M^* & 0 \end{pmatrix} \tag{۳۹}$$

به طوری که $MM^* = M^*M = 1_{N\times N}$. اینک بحث را به $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ یعنی گروه یکانی جبر $\mathcal{A}$ محدود می‌کنیم. در این صورت اگر L یک ۱ـفرم به صورت زیر باشد

$$L = gdg^*, \qquad \forall g\in\mathcal{U}(\mathcal{A}) \tag{۴۰}$$

می‌توان dg^* را تعمیم ناجابجاییِ مشتقِ میدانِ g^* در نظر گرفت. در این صورت کلیترین شکل $\mathcal{L}^{(n)}$ها را برای nهای مختلف می‌نویسیم. با توجه به اینکه $\mathcal{L}^{(n)}$ها اسکالرند داریم

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathrm{Tr}(K^{(1)}_1 L), \tag{۴۱}$$

$$\mathcal{L}^{(2)} = \mathrm{Tr}(K^{(2)}_1 L^2) + [\mathrm{Tr}(K^{(2)}_2 L)]^2, \tag{۴۲}$$

$$\mathcal{L}^{(3)} = \mathrm{Tr}(K^{(3)}_1 L^3) + \mathrm{Tr}(K^{(3)}_2 L)\mathrm{Tr}(L^2) + [\mathrm{Tr}(K^{(3)}_3 L)]^3, \tag{۴۳}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(4)} = {} & \mathrm{Tr}(K^{(4)}_1 L^4) + [\mathrm{Tr}(K^{(4)}_2 L^2)]^2 + \mathrm{Tr}(K^{(4)}_3 L)\mathrm{Tr}(L^3) \\ & + \mathrm{Tr}(K^{(4)}_4 L^2)[\mathrm{Tr}(L)]^2 + [\mathrm{Tr}(K^{(4)}_5 L)]^4 + [\mathrm{Tr}(K^{(4)}_6 L)]^2\mathrm{Tr}(L^2) \end{aligned} \tag{۴۴}$$

که در آن $K^{(i)}_j$ها ماتریسهای قطری هستند که عناصر آنها یعنی $(k^{(i)}_j, k'^{(i)}_j)$ معرف ثابتهای جفت‌شدگی روی دو لایهٔ فضا هستند (خمینه و نقطهٔ خارج آن).

1. Dixmier trace 2. Kobayashi-Masakawa Mixing

۳. منظور از em الکترومغناطیس است.

4. Quantum Choromo Dynamics

1. Partial Current Axial Current 2. perturbation expansion

اینک با فرض نمایش g به صورت $g = \begin{pmatrix} U(x) & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix}$ و $\chi = MU'M^*$ خواهیم داشت $\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(3)} = 0$، که این در واقع معرف ناوردایی لاگرانژی تحت تبدیلات لورنتس است که به‌طور طبیعی بدست می‌آید، و پس از ساده‌کردن $\mathcal{L}$ داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = {} & [-4k_1^{(2)} - 8m^2(3k_1^{(2)} + k_1'^{(2)}) - 192m^2 k_2^{(2)}(k_2^{(2)} + k_2'^{(2)})]\mathrm{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) \\
& + [-4(k_1^{(2)} + k_1'^{(2)}) - 16m^2(k_1^{(2)} + k_1'^{(2)}) - 192m^2(k_2^{(2)} + k_2'^{(2)})^2] \\
& \quad \mathrm{Tr}(\chi U^\dagger + U\chi^\dagger) \\
& + (-2k_1^{(2)} + 16(k_2^{(2)})^2)[\mathrm{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger)]^2 - 4k_1^{(2)}\mathrm{Tr}(\partial^\mu U \partial^\nu U^\dagger) \\
& \quad \mathrm{Tr}(\partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger) \\
& + 16k_1^{(2)}\mathrm{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial^\nu U^\dagger) + 32k_2^{(2)}(k_2^{(2)} + k_2'^{(2)}) \\
& \quad \mathrm{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger)\mathrm{Tr}(\chi U^\dagger + U\chi^\dagger) \\
& + 4(3k_1^{(2)} + k_1'^{(2)})\mathrm{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger(\chi U^\dagger + U\chi^\dagger)) \\
& \quad + 16(k_2^{(2)} + k_2'^{(2)})^2[\mathrm{Tr}(\chi U^\dagger + U\chi^\dagger)]^2 \\
& + 4(k_1^{(2)} + k_1'^{(2)})\mathrm{Tr}(\chi U^\dagger \chi U^\dagger + \chi^\dagger U \chi^\dagger U) \\
& \quad + 8(k_1^{(2)} + k_1'^{(2)})\mathrm{Tr}(\chi\chi^\dagger)
\end{aligned} \tag{۴۵}$$

خاطرنشان می‌کنیم که در محاسبات بالا $N = 3$ فرض شده است که منشأ آن تقارن $\mathrm{SU}(3)$، طعم[1]، است. لاگرانژیِ فوق چیزی جز لاگرانژیِ نظریهٔ مؤثر اختلال تکدست نیست و می‌توان آن را با لاگرانژیِ اصلی نظریه که در آن ضرایب جفت‌شدگی L_i نامیده شده است [۴] مقایسه کرد. از این مقایسه به‌سادگی معلوم می‌شود که در اینجا بین این ثابتهای جفت‌شدگی ارتباطهایی برقرار شده است. در زیر روابط بین این ثابتهای جفت‌شدگی ملاحظه می‌شود

$$\begin{aligned}
L_2 &= \frac{1}{2}(L_8 - L_5) \\
L_3 &= -4L_2 \\
L_4 &= L_6 \\
L_6 &= 4L_1 - 2L_2 \\
L_7 &= 0
\end{aligned} \tag{۴۶}$$

این روابط که با استفاده از روابط صوری هندسهٔ ناجابجایی به‌دست می‌آیند با نتایج آزمایشگاهی تطابق قابل ملاحظه‌ای دارند. اگر $\mathcal{L}^{(5)}$ را نیز محاسبه کنیم خواهیم دید که

$$\mathcal{L}^{(5)} = k^{(5)} \in^{ijklm} \mathrm{Tr}(U\partial_j U^\dagger \partial_j U \partial_k U^\dagger \partial_l U \partial_m U^\dagger); \quad i,j,k,l,m = 0,1,2,3,5 \tag{۴۷}$$

این جمله که به جملهٔ WZWN (Wess-Zumino-Witten-Novikov) در فیزیک شهرت دارد باعث حذف بینهایتهایی می‌شود که در محاسبهٔ کمیات فیزیکی به وسیلهٔ بقیهٔ جملات تولید می‌شوند («حذف نابهنجاری»). ما این لاگرانژی را تا مرتبهٔ ۵ به‌دست آوردیم. جملات مرتبهٔ بالاتر از راههای پدیده شناختی نیز محاسبه نشده‌اند تا مورد مقایسه قرار گیرند.

1. flavour

۴. گرانش در چارچوب هندسهٔ ناجابجایی

علت اصلی مطالعهٔ مدلهای گوناگون فیزیک در چارچوب هندسهٔ ناجابجایی در واقع این است که اطلاعات ما در مورد ساختارهای فضا در همسایگیهای بسیار کوچک نقاط چندان زیاد نیست. ابزار هندسهٔ ناجابجایی این امکان را به ما می‌دهد که مدلهای معمولی فیزیک، را که در فضای جابجایی معمولی بررسی شده‌اند به فضاهای ناجابجایی تعمیم دهیم و اثر تغییر ساختار فضا را بر این مدلها بررسی کنیم. مدل گرانش یکی از این مدلهاست. ما در اینجا سعی می‌کنیم که کنش هیلبرت-اینشتین را در یک فضای ساده که تنها کمی تعمیم‌یافته‌تر از فضا-زمان جابجایی معمولی است مطالعه کنیم. بنابراین توجه داریم که این تنها مدل برای بررسی گرانش در چارچوب، هندسهٔ ناجابجایی نیست. فضای مورد مطالعهٔ ما در واقع یک فضای پنج‌بعدی است که عبارت است از یک فضای ریمانی چهاربعدی که در یک فضای دونقطه‌ای ضرب شده است (مانند آن چیزی که در بخشهای قبل هم دیدیم). مزیت این بخش در این است که برخی مطالب با تفصیل بیشتری مورد بحث قرار می‌گیرند.

ابزار لازم: فرض کنید که X، فضای مورد بحث، عبارت از دو نسخه از یک خمینهٔ اسپینی چهاربعدی Y باشد یعنی

$$X = Y \times \mathbb{Z}_2 \tag{۴۸}$$

در این صورت یک کلاف بدیهی $\mathbb{Z}_2$ به صورت $p : X \to Y$ داریم. $\mathcal{A}$، جبری که یک چنین فضایی را توصیف می‌کند، به صورت

$$\mathcal{A} = C^\infty_{\mathbb{R}}(Y) \oplus C^\infty_{\mathbb{R}}(Y) \tag{۴۹}$$

می‌باشد که در آن منظور از $C^\infty_{\mathbb{R}}(Y)$ جبر توابع حقیقیِ بینهایت بار مشتق‌پذیر روی Y است. البته راحت‌تر خواهد بود که جبر $\mathcal{A}$ را به صورت زیرجبر ماتریسهای قطری 2×2 در جبر $M_2(\mathbb{C}) \otimes C^\infty(\mathrm{cliff}(T^*Y))$ در نظر بگیریم. به عبارت ساده‌تر اگر $a \in \mathcal{A}$، آنگاه

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} 1_{4\times 4} \otimes f(x) & 0 \\ 0 & 1_{4\times 4} \otimes g(x) \end{pmatrix} \tag{۵۰}$$

که منظور از x نقطهٔ مورد نظر در فضای فوق است و $f, g \in C^\infty_{\mathbb{R}}(Y)$. در این حالت γ_5، عملگر تکدستی روی جبر کلیفرد است و عملگر درجه‌بندی $\mathbb{Z}_2$ را به صورت

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_5 & 0 \\ 0 & \gamma_5 \end{pmatrix} \tag{۵۱}$$

در نظر می‌گیریم. این عملگر درجه‌بندی روی فضای

$$C^\infty(s_x) = C^\infty(s) \oplus C^\infty(s)$$

عمل می‌کند که s، کلاف اسپینوری روی Y است. برای مثال عملگر دیراک را به صورت

$$D=\begin{pmatrix}\gamma^\mu\otimes\partial_\mu & 1_{4\times4}\otimes\psi+\gamma_5\otimes\varphi\\ 1_{4\times4}\otimes\psi+\gamma_5\otimes\varphi & \gamma^\mu\otimes\partial_\mu\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\gamma^a\epsilon_a^\mu\partial_\mu & \psi+\gamma_5\varphi\\ \psi+\gamma_5\varphi & \gamma^a\epsilon_a^\mu\partial_\mu\end{pmatrix} \qquad (۵۲)$$

در نظر می‌گیریم. در جملات غیرقطری، برخلاف بخشهای قبل علاوه بر جمله‌ای بر حسب γ_5، جمله‌ای متناسب با $1_{4\times4}$ نیز داریم و از این نظر این عملگر دیراک تعمیم‌یافته‌تر از عملگرهای دیراک قبلی است. باید دقت کرد که ϵ_a^μها، فیربایینها[1] و γ^a ماتریسهای دیراک در مختصات تتراد[2] هستند. در ضمن به‌علت سادگی و روشن بودن مطالب از نوشتن علامت $\otimes$ در محاسبات خودداری کرده‌ایم. حال قبل از آنکه خود را درگیر محاسباتی چون محاسبهٔ هموستار، تاب و انحنا کنیم به محاسبات ساده‌تر ۱ـفرمها و ۲ـفرمها می‌پردازیم.

اگر $\alpha\in\Omega^1(\mathcal{A})$، به‌سادگی دیده می‌شود که

$$a=\sum_i a_i[D,b_i],\ \forall a_i,b_i\in\mathcal{A}$$
$$\Rightarrow \pi(\alpha)=\begin{pmatrix}\sum_i\gamma^a\epsilon_a^\mu a_{i1}\partial_\mu b_{i1} & \sum_i(\psi+\gamma_5\varphi)a_{i1}(b_{i2}-b_{i1})\\ \sum_i-(\psi+\gamma_5\varphi)a_{i2}(b_{i2}-b_{i1}) & \sum_i\gamma^a\epsilon_a^\mu a_{i1}\partial_\mu b_{i2}\end{pmatrix} \qquad (۵۳)$$

اینک اگر تعریف کنیم

$$\alpha_5:=\sum_i a_{i1}(b_{i2}-b_{i1}) \qquad \alpha_{1\mu}:=\sum_i a_{i1}\partial_\mu b_{i1}$$
$$\tilde\alpha_5:=\sum_i a_{i2}(b_{i2}-b_{i1}) \qquad \alpha_{2\mu}:=\sum_i a_{i2}\partial_\mu b_{i2}$$
$$\overline{\gamma}:=(\psi+\gamma_5\varphi)$$

و در نظر داشته باشیم که $\gamma^\mu=\gamma^a\epsilon_a^\mu$، خواهیم داشت:

$$\alpha=\begin{pmatrix}\gamma^\mu\alpha_{1\mu} & \overline{\gamma}\alpha_5\\ -\overline{\gamma}\tilde\alpha_5 & \gamma^\mu\alpha_{2\mu}\end{pmatrix}\in\Omega^1(\mathcal{A}) \qquad (۵۴)$$

رابطهٔ فوق شکلِ کلیترین ۱ـفرم را در مثال اخیر نشان می‌دهد. توجه داریم که $\alpha_{i\mu}$، α_5 و $\tilde\alpha_5$ از عناصر جبر $\mathcal{A}$ و در واقع توابع معمولی هستند. بنابراین رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که پایه‌های ۱ـفرم یعنی معادلهای $dx^\mu(\mu=0,1,2,3,4)$ و dx^5 چه می‌تواند باشد. (ما این را در زیربخش ۷.۴ خواهیم دید) اینک به محاسبهٔ ۲ـفرمها پرداخته، کلیترین شکل آنها را به‌دست می‌آوریم

$$d\alpha=d\sum_i a_i db_i=\sum_i[D,a_i][D,b_i]=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix} \qquad (۵۵)$$

که با کمی محاسبه می‌توان دید:

$$A_{11}=\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\alpha_{1\nu}+(g^{55}+2\gamma_5\psi\varphi)(\alpha_5-\tilde\alpha_5)$$
$$-\gamma^\mu\gamma^\nu\sum_i a_{i1}\partial\mu\partial_\nu b_{i1}$$
$$A_{12}=\gamma^\mu\gamma_5\varphi(\partial_\mu\alpha_5+\alpha_{1\mu}-\alpha_{2\mu})+\gamma^\mu\psi(\partial_\mu\alpha_5+\alpha_{1\mu}+\alpha^{2\mu})$$
$$-2\gamma^\mu\psi\sum_i a_{i1}\partial_\mu b_{i2}$$
$$A_{21}=\gamma^\mu\gamma_5\varphi(\partial_\mu\tilde\alpha_5+\alpha_{1\mu}-\alpha_{2\mu})-\gamma^\mu\psi(\partial_\mu\tilde\alpha_5-\alpha_{1\mu}-\alpha^{2\mu})$$
$$-2\gamma^\mu\psi\sum_i a_{i2}\partial_\mu b_{i1}$$
$$A_{22}=\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\alpha_{2\nu}+(g^{55}+2\gamma_5\psi\varphi)(\alpha_5-\tilde\alpha_5)$$
$$-\gamma^\mu\gamma^\nu\sum_i a_{i2}\partial_\mu\partial_\nu b_{i2} \qquad (۵۶)$$

در محاسبهٔ بالا منظور از g^{55} چنین است: $g^{55}=\psi^2+\varphi^2$.

در جملات فوق به‌راحتی می‌توان میدانهای کمکی را تشخیص داد. پس از حذف این میدانها، کلیترین شکل ۲ـفرمها به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$d\alpha=\begin{pmatrix}\gamma^{\mu\nu}\partial_\mu\alpha_{1\nu}+2\varphi\psi\gamma_5(\alpha_5-\tilde\alpha_5) & \varphi\gamma^\mu\gamma_5(\partial_\mu\alpha_5+\alpha_{1\mu}-\alpha_{2\mu})\\ -\varphi\gamma^\mu\gamma_5(\partial_\mu\tilde\alpha_5+\alpha_{1\mu}-\alpha_{2\mu}) & \gamma^{\mu\nu}\partial_\mu\alpha_{2\nu}+2\varphi\psi\gamma_5(\alpha_5-\tilde\alpha_5)\end{pmatrix} \qquad (۵۷)$$

که در آن $\gamma^{\mu\nu}=[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$. از شکل $d\alpha$ ملاحظه می‌شود که پایه‌های ۲ـفرم از $\gamma^{\mu\nu}$ (به جای $dx^\mu\wedge dx^\nu$) ساخته شده است.

۱.۴ کلاف برداری روی جبر $\mathcal{A}$، متریک، هموستار، انحنا

در این مرحله چون می‌خواهیم گرانش را در یک فضای تعمیم‌یافته بررسی کنیم باید هندسهٔ ریمانی را نیز برای چنین فضایی تعمیم دهیم. لذا مفاهیمی مانند متریک، هموستار و ... را باید به سطح جبر تعمیم داد.

۱.۱.۴ کلاف برداری روی جبر $\mathcal{A}$.

بنابر قضیهٔ سوان، یک کلاف برداری بدیهی روی خمینه‌ای که $\mathcal{A}$ آن را توصیف می‌کند، چنان است که مقطعهای آن کلاف برداری یک مدول آزادِ متناهی‌مولد[1] روی $\mathcal{A}$ می‌باشد. ما در بخشهای بعد این کلاف برداری را با $\mathcal{E}$ نشان خواهیم داد.

۲.۱.۴ هموستار روی $\mathcal{E}$.

یک هموستار[2] روی $\mathcal{E}$ عبارت از نگاشت خطی

$$\nabla:\mathcal{E}\to\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{A}}\Omega^1(\mathcal{A}) \qquad (۵۸)$$

1. vierbeins

۲. منظور از مختصات تتراد دستگاه مختصات متعامدی است که می‌توان به‌طور موضعی روی خمینهٔ (۴بعدی) بنا کرد. در این صورت فیربایینها عناصر ماتریس تبدیل دستگاه مختصات طبیعی و مختصات تتراد هستند. برای اطلاعات بیشتر می‌توان به کتاب M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Adam Hilger, Bristol, (1990) 244. مراجعه کرد.

1. finitely-generated free module 2. connection

است که دارای خاصیت زیر باشد

$$\forall \xi \in \mathcal{E}; a \in \mathcal{A}: \ \nabla(a\xi) = da \otimes \xi + a\nabla\xi \qquad (۵۹)$$

۳.۱.۴ متریک هرمیتی روی $\mathcal{E}$. متریک هرمیتی و یا ساختار هرمیتی روی $\mathcal{E}$ عبارت است از نگاشتی به صورت

$$\langle .,. \rangle : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{A} \qquad (۶۰)$$

به طوری که

$$\forall a_1, a_2 \in \mathcal{A}, \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{E} : \langle a_1\xi_1, a_2\xi_2 \rangle = a_1\langle \xi_1, \xi_2 \rangle a_2^* \qquad (۶۱)$$

و

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle^* = \langle \xi_2, \xi_1 \rangle \qquad (۶۲)$$

و نیز $\langle \xi, \xi \rangle$ یک عنصر مثبت $\mathcal{A}$ باشد یعنی بتوان $\langle \xi, \xi \rangle$ را به صورت حاصلضرب aa^* (که $a, a^* \in \mathcal{A}$) نوشت و همچنین داشته باشیم

$$\langle \xi, \xi \rangle = 0 \Leftrightarrow \xi = 0 \qquad (۶۳)$$

مثال: $\{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ پایه‌ای برای $\mathcal{E}$ باشد می‌توان $\langle s_i, s_j \rangle = \delta_{ij}$ را به عنوان متریک هرمیتی روی $\mathcal{E}$ به‌کارگرفت (باید توجه داشت که $\delta_{ij} \in \mathcal{A}$).

۴.۱.۴ هموستار هرمیتی روی $\mathcal{E}$. این هموستار، که آن را با ∇ نشان می‌دهیم، در شرط زیر صدق می‌کند

$$d < \xi, \eta > = < \nabla\xi, \eta > - < \xi, \nabla\eta >; \forall \eta, \xi \in \mathcal{E} \qquad (۶۴)$$

۵.۱.۴ تعمیم هموستار از فضای $\mathcal{E}$ به فضای $\Omega_D(\mathcal{E})$. هموستار را روی $\mathcal{E}$ تعریف کردیم و دیدیم که نتیجهٔ اثر عملگر ∇ روی یک بردار $s \in \mathcal{E}$ موجودی در فضای $\Omega_D^1(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{E}$ است (منظور از $\Omega_D^n(\mathcal{A})$، فضای nـفرمهای دیفرانسیلی روی جبر $\mathcal{A}$، پس از حذف میدانهای کمکی است). واضح است که چون $\mathcal{E}$ یک مدول آزاد است پس دارای پایه است و چون متناهی‌ـمولد است پس تعداد پایه‌های آن متناهی است. اینک فرض کنید که مجموعهٔ $\{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ مجموعهٔ بردارهای پایهٔ $\mathcal{E}$ باشد، در این صورت علی‌القاعده $\nabla(s_i)$ باید به صورت ترکیبی خطی از $\theta^j \otimes s_k$ها باشد که θ^jها پایه‌های ۱ـفرم در $\Omega_D^1(\mathcal{A})$اند. پس

$$\nabla(s_i) = \gamma_{ji}^k \theta^j \otimes s_k = (\gamma_{ji}^k \theta^j) \otimes s_k \qquad (۶۵)$$

که به γ_{ji}^kها ضرایب هموستار می‌گوییم. با در دست بودن γ_{ji}^kها، ∇ مشخص می‌شود. به هر حال چون $\gamma_{ji}^k \theta^j \in \Omega_D^1(\mathcal{A})$، این عناصر را به صورت زیر نامگذاری می‌کنیم

$$\gamma_{ji}^k \theta^j = \rho_i^k \in \Omega_D^1(\mathcal{A}) \qquad (۶۶)$$

و به ρ_i^k، ۱ـفرم هموستار می‌گوییم. پس

$$\nabla(s_i) = \rho_i^j \otimes s_j \qquad (۶۷)$$

اینک می‌توان اثر ∇ را که روی عناصر $\mathcal{E}$ تعریف شده است تعمیم داد و اثر آن را روی عنصری مانند $\rho_i^j \otimes s_j$ که در $\Omega_D^1(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{E}$ است تعریف کرد و اصولاً اثر ∇ را روی هر عنصر به صورت $\Omega_D(\mathcal{E}) = \Omega_D(\mathcal{A}) \times \mathcal{E}$ تعریف نمود. اینک، تعریف می‌کنیم که اگر $\alpha \in \Omega_D(\mathcal{A})$ و $s \in \mathcal{E}$، آنگاه

$$\nabla(\alpha s) = (d\alpha) \otimes s + (-)^{\deg\alpha} \alpha \nabla(s) \qquad (۶۸)$$

که واضح است $\alpha s \in \Omega_D(\mathcal{E})$ و منظور از $\deg\alpha$ درجهٔ فرم α است.

۶.۱.۴ انحنا. با توجه به مطالب قسمت قبل می‌توان اثر ∇^2 را روی یک بردار مانند $\xi = a^i s_i \in \mathcal{E}$ محاسبه کرد که در آن $\{s_i\}$ پایهٔ $\mathcal{E}$ است و $a^i \in \mathcal{A}$.

بدین‌ترتیب:

$$-\nabla^2(a^i s_i) = a^i(d\rho_i^j + \rho_i^k \rho_k^j) \otimes s_j \qquad (۶۹)$$

اما $d\rho_i^j + \rho_i^k \rho_k^j$ همان ۲ـفرم انحناست که در بخش میدانهای پیمانه‌ای تعریف کردیم. پس

$$-\nabla^2(s_i) = (d\rho_i^j + \rho_i^k \rho_k^j) \otimes s_j \qquad (۷۰)$$

عملگر $-\nabla^2$ را با R نشان داده به آن عملگر انحنا می‌گوییم.

$$R(s_i) = R_i^j \otimes s_j \qquad (۷۱)$$

ما در بحث میدانهای پیمانه‌ای ضرایب R_i^j را با θ نشان دادیم و در واقع، $\theta_i^j = d\rho_i^j + \rho_i^k \rho_k^j$ و $R(s_i) = \theta_i^j \otimes s_j$.

۲.۴ تبدیلات پایه روی $\mathcal{E}$ و اثر آن روی هموستار

فرض کنید که پایهٔ $\{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ در $\mathcal{E}$ را به صورت زیر به پایهٔ $\{\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \ldots \tilde{s}_N\}$ تبدیل کنیم

$$\tilde{s}_i = M_i^j s_j \qquad (۷۲)$$

که $M_i^j \in \mathcal{A}$. در این صورت بنابر تعریف داریم

$$\nabla(\tilde{s}_i) = \tilde{\rho}_i^j \otimes \tilde{s}_j \qquad (۷۳)$$

با توجه به پایه‌های s_i نیز رابطهٔ فوق چنین است

$$\nabla(s_i) = \rho_i^j \otimes s_j \qquad (۷۴)$$

بنابراین به سادگی دیده می‌شود که

$$\tilde{\rho}_i^j = M_i^k \rho_k^l (M^{-1})_l^j + dM_i^k (M^{-1})_k^j \qquad (۷۵)$$

و این همان رابطهٔ تبدیلات پیمانه‌ای است:

$$\tilde{\rho} = M\rho M^{-1} + dMM^{-1} \qquad (۷۶)$$

و به همین ترتیب در مورد انحنا می‌توان دید که

$$\tilde{\theta} = M\theta M^{-1} \qquad (۷۷)$$

۳.۴ خصوصیات هموستار هرمیتی

اگر ∇ یک هموستار هرمیتی باشد با توجه به (۷۴) می‌بینیم که

$$\rho^i_j = \rho^{*j}_i \qquad (۷۸)$$

و این در واقع همان شرطی بود که برای میدان پیمانه‌ای در بحث میدانهای پیمانه‌ای به‌کار بردیم.

۴.۴ تعمیم هموستار هرمیتی روی $\Omega_D(\mathcal{E})$

با توجه به تعریف ∇ در قسمتهای قبل، ∇ را یک هموستار هرمیتی روی $\Omega_D(\mathcal{E})$ می‌نامیم اگر

$$d\langle\varphi,\psi\rangle = \langle\nabla\varphi,\psi\rangle - (-)^{\deg\varphi\deg\psi}\langle\varphi,\nabla\psi\rangle\ \forall\varphi,\psi\in\Omega_D(\mathcal{E}) \qquad (۷۹)$$

۵.۴ گرانش و تعمیم هندسهٔ ریمانی به هندسهٔ ناجابجایی

تا اینجا تقریباً با تمام ابزارهای لازم برای بررسی گرانش در فضایی که با جبر داده شدهٔ $\mathcal{A}$ مشخص می‌گردد، آشنا شده‌ایم. تاب را نیز به زودی مطالعه می‌کنیم. اما مسیر اصلی در این بررسی آن است که بدانیم چه چیزی را باید به عنوان کلاف برداری $\mathcal{E}$ روی جبر $\mathcal{A}$ انتخاب کرد. پاسخ، $\Omega^1_D(\mathcal{A})$ است. توجه داریم که $\Omega^1_D(\mathcal{A})$ یک $\mathcal{A}$ـمدول پروژکتیو چپ و متناهی‌ـمولد است. برای بررسی گرانش، $\Omega^1_D(\mathcal{A})$ را به عنوان کلاف برداری انتخاب می‌کنیم. بنابراین تمام محاسبات خود را بر روی کلاف کُتانژانت انجام می‌دهیم.

۶.۴ تاب

دیدیم که اثر $-\nabla^2$ روی $\mathcal{E}$ همان اثر انحنا روی $\mathcal{E}$ است و دیدیم که ۲ـفرم انحنا به صورت زیر است

$$\theta^j_i = d\rho^j_i + \rho^k_i\rho^j_k \qquad (۸۰)$$

این در واقع یکی از معادلات ساختاری کارتان است. در هندسهٔ دیفرانسیل معمولی ما ضرایب تاب[1] را به صورت $T^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk}$، که Γ^i_{kl}ها ضرایب هموستارند، تعریف می‌کنیم. از روی T^i_{kl}ها می‌توان ۲ـفرم تاب را تعریف کرد که در واقع نگاشتی به صورت $\Omega^1 \to \Omega^1\wedge\Omega^1$ است و چنین تعریف می‌شود

$$T(\theta^i) = \frac{1}{2}T^i_{kl}\theta^k\wedge\theta^l \qquad (۸۱)$$

اینک اگر $\rho^i_j = \gamma^i_{kj}\theta^k$ را در نظر بگیریم، آنگاه ۲ـفرم تاب وابسته به هموستار فوق در معادلهٔ ساختاری دوم کارتان یعنی:

$$T(\theta^i) = d\theta^i + \rho^i_l\wedge\theta^l \qquad (۸۲)$$

صدق می‌کند. به عبارت دیگر

$$\frac{1}{2}T^i_{kl}\theta^k\wedge\theta^l = d\theta^i + \rho^i_l\theta^l \qquad (۸۳)$$

1. torsion

معادلات فوق اساس تعریف ما برای تاب در هندسهٔ ناجابجایی است. در واقع ما می‌خواهیم روی کلاف برداری $\mathcal{E}$ که هموستار ∇ را تعریف کرده‌ایم، فرمول تاب وابسته به آن را بنویسیم. در مثال مورد بحث ما، $\mathcal{E} = \Omega^1(\mathcal{A})$؛ پس θ^iها که ۱ـفرم هستند در معادلهٔ ساختاری کارتان، در واقع عناصری در $\mathcal{E}$ می‌باشند. پس می‌گوییم برای مثالِ هندسهٔ ناجابجایی ما تاب T چنان است که

$$T(s_i) = ds_i + \rho^l_i s_l \qquad (۸۴)$$

که s_lها پایه‌های $\mathcal{E}$اند.

۷.۴ محاسبهٔ تاب، انحنا و ... برای جبر $\mathcal{A}$ و عملگر دیراک Dی داده شده

در بخشهای قبل دیدیم که کلیترین شکل ۱ـفرم α به صورت زیر است (با توجه به جبر $\mathcal{A}$ و عملگر Dی داده شده):

$$\alpha = \begin{pmatrix}\gamma^\mu\alpha_{1\mu} & \tilde\gamma\alpha_5\\ -\bar\gamma\tilde\alpha_5 & \gamma^\mu_a\alpha_{2\mu}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma^a\epsilon^\mu_a\alpha_{1\mu} & \tilde\gamma\alpha_5\\ -\bar\gamma\tilde\alpha_5 & \gamma^a\mathcal{E}^\mu_a\alpha_{2\mu}\end{pmatrix} \qquad (۸۵)$$

اما می‌توان شکل فوق را برحسب پایه‌های مدول ۱ـفرم‌ها نوشت:

$$\alpha = \alpha_\mu e^\mu + \alpha_5 e^5 \qquad (۸۶)$$

که

$$\alpha_5 = \begin{pmatrix}\alpha_5 & 0\\ 0 & \tilde\alpha_5\end{pmatrix}\in\mathcal{A}, \alpha_\mu = \begin{pmatrix}\alpha_{1\mu} & 0\\ 0 & \alpha_{2\mu}\end{pmatrix}\in\mathcal{A}$$

$$e^\mu = \begin{pmatrix}\gamma^\mu & 0\\ 0 & \gamma^\mu\end{pmatrix}, e^5 = \begin{pmatrix}0 & \bar\gamma\\ -\bar\gamma & 0\end{pmatrix} \qquad (۸۷)$$

اینک برای پایهٔ تتراد می‌توان صورت زیر را در نظر گرفت

$$E^a = \begin{pmatrix}\gamma^a & 0\\ 0 & \gamma^a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^a_\mu\gamma^\mu & 0\\ 0 & e^a_\mu\gamma^\mu\end{pmatrix}, E^5 = \begin{pmatrix}0 & k\bar\gamma\\ -k\bar\gamma & 0\end{pmatrix} \qquad (۸۸)$$

که e^a_μها معکوس ϵ^μ_a هستند و k در E^5 ضریبی مانند e^a_μ در مورد E^a است.

اینک ضرب داخلی $\langle\cdot,\cdot\rangle$ یا متریک G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\langle\alpha,\beta\rangle = G(\alpha,\beta) = \mathrm{tr}(\pi(\alpha^*)\pi(\beta))1_{\mathcal{A}}; \forall\alpha,\beta\in\Omega^1_D(\mathcal{A}) \qquad (۸۹)$$

به‌سادگی دیده می‌شود

$$\langle E^a,E^b\rangle = \eta^{ab}1, \langle E^a,E^5\rangle = 0$$
$$\langle E^5,E^5\rangle = kk^*\bar\gamma^2 \qquad (۹۰)$$

که اگر بخواهیم $\langle E^5,E^5\rangle = 1$، آنگاه

$$kk^* = (\bar\gamma)^{-2} \qquad (۹۱)$$

۸.۴ محاسبهٔ انحنا و تاب

چون $\rho^{ki} \in \Omega^1(\mathcal{A})$ است پس در حالت کلی داریم

$$\rho^{AB} = \begin{pmatrix} \gamma^\mu \rho_{1\mu}^{AB} & \overline{\gamma}\rho_5^{AB} \\ -\overline{\gamma}\tilde{\rho}_5^{AB} & \gamma^\mu \rho_{2\mu}^{AB} \end{pmatrix} \qquad (۹۲)$$

از طرف دیگر چون می‌خواهیم هموستار هرمیتی باشد پس

$$\rho^{AB} = (\rho^{BA})^* \qquad (۹۳)$$

یا به عبارت دیگر

$$\rho_{1\mu}^{AB} = -\rho_{1\mu}^{BA}, \rho_5^{AB} = -\tilde{\rho}_5^{BA}, \rho_{2\mu}^{AB} = -\rho_{2\mu}^{BA} \qquad (۹۴)$$

اینک با توجه به اینکه شکل کایترین ۲ـفرم را به‌دست آورده‌ایم می‌توان R^{AB} را محاسبه کرد.

$$R^{AB} = \begin{pmatrix} \gamma^{\mu\nu} R_{1\mu\nu}^{AB} + 2\varphi\psi\gamma_5 P_1^{AB} & \varphi\gamma^\mu\gamma_5 Q_\mu^{AB} \\ -\varphi\gamma^\mu\gamma_5 \tilde{Q}_\mu^{AB} & \gamma^{\mu\nu} R_{2\mu\nu}^{AB} + 2\varphi\psi\gamma_5 P_2^{AB} \end{pmatrix}$$

(۹۵)

که در آن

$$\begin{aligned} R_{i\mu\nu}^{AB} &= \partial_\mu \rho_{i\nu}^{AB} - \partial_\nu \rho_{i\mu}^{AB} + \rho_{i\mu}^{AC} p_{i\nu}^{CB} \\ &\quad - \rho_{i\nu}^{AC} \rho_{i\nu}^{AC} \rho_{i\nu}^{AC} \rho_{i\mu}^{CB}; i = 1, 2 \\ Q_\mu^{AB} &= \partial_\mu \rho_5^{AB} + \rho_{1\mu}^{AB} - \rho_{2\mu}^{AB} + \rho_{i\mu}^{AC} \rho_5^{CB} - \rho_{2\mu}^{CB} \rho_5^{AC} \\ P_1^{AB} &= \rho_5^{AB} + \rho_5^{BA} + \rho_5^{AC} \rho_5^{BC} \\ P_1^{AB} &= \rho_5^{AB} + \rho_5^{BA} + \rho_5^{CA} \rho_5^{CB} \end{aligned} \qquad (۹۵)$$

اینک به محاسبهٔ ۲ـفرم تاب می‌پردازیم. از روی رابطه‌ای که برای تاب تعریف کردیم داریم

$$T(E^A) = dE^A + \rho^{AB} \otimes s_B = dE^A + \rho^{AB} \otimes E^B \qquad (۹۶)$$

که E^Aها همان پایه‌های تتراد هستند که در قبل معرفی کردیم. با توجه به عملگر دیراک D به سادگی دیده می‌شود که

$$\begin{aligned} T(E^\alpha) &= dE^\alpha + \rho^{\alpha\beta} E^\beta + \rho^{\alpha 5} E^5; \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^{\mu\nu}(\partial_\mu e_\nu^\alpha + \rho_{1\mu}^{\alpha\beta} e_\nu^\beta) - \tilde{\gamma}^2 k \rho_5^{\alpha 5} & \gamma^\mu(\psi - \gamma_5\varphi)(\rho_5^{\alpha\beta} e_\mu^\beta + k p_{1\mu}^{\alpha 5}) \\ -\gamma^\mu(\psi - \gamma_5\varphi)(\tilde{\rho}_5^{\alpha\beta} e_\mu^\beta + k \rho_{1\mu}^{\alpha 5}) & \gamma^{\mu\nu}(\partial_\mu e_\nu^\alpha + \rho_{2\mu}^{\alpha\beta} e_\nu^\beta) - \tilde{\gamma}^2 k \tilde{\gamma}_5^{\alpha 5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(۹۸)

و

$$T(E^5) =$$

$$\begin{pmatrix} \gamma^{\mu\nu} \rho_{1\mu}^{5\alpha} e_\nu^\alpha - (\psi + \gamma_5\varphi)^2 k \rho_5^{55} & \begin{bmatrix} \gamma^\mu[\psi(\partial_\mu k + k\rho_{1\mu}^{55} + \rho_5^{5\alpha} e_\mu^\alpha) \\ +\gamma_5\varphi(\partial_\mu k + k\rho_{1\mu}^{55} - \rho_5^{5\alpha} e_\mu^\alpha)] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\gamma^\mu[\psi(\partial_\mu k + k\rho_{2\mu}^{55} + \tilde{\rho}_5^{5\alpha} e_\mu^\alpha) \\ +\gamma_5\varphi(\partial_\mu k + k\rho_{2\mu}^{55} - \tilde{\rho}_5^{5\alpha} e_\mu^\alpha)] \end{bmatrix} & \gamma^{\mu\nu} \rho_{2\mu}^{5\alpha} e_\nu^\alpha - (\psi + \gamma_5\varphi)^2 k \rho_5^{55} \end{pmatrix}$$

(۹۹)

۹.۴ کنش هیلبرت‌ـاینشتین

اینک کنش هیلبرت‌ـاینشتین را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$I_{\mathrm{H.E}} = (R_C^B E^C, E_B) \qquad (۱۰۰)$$

که منظور از $(.,.)$ عبارت زیر است

$$(\alpha, \beta) = \int \alpha.\beta^* = \mathrm{Tr}_w(\pi(\alpha\beta^*)|D|^{-d}) \qquad (۱۰۱)$$

پس $I_{\mathrm{H.E}}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{H.E}} &= \int_Y \mathrm{Tr}((E_A)^* R_B^A E^B) \\ &= \int_Y [\epsilon_a^\mu \epsilon_b^\nu (R_{1\mu\nu}^{ab} + R_{2\mu\nu}^{ab}) + k\varphi^2 \epsilon_a^\mu (Q_\mu^{a5} \\ &\quad + \tilde{Q}_\mu^{a5} - Q_\mu^{5a} - \tilde{Q}_\mu^{5a}) - 4\varphi^2\psi^2 k^2 (P_1^{55} + P_2^{55})] \sqrt{g} d^4 y \end{aligned} \qquad (۱۰۲)$$

حال اگر در عملگر دیراک، ψ را صفر فرض کنیم، این عملگر بسیار شبیه عملگر دیراک در بحث میدانهای پیمانه‌ای می‌شود. در این حالت شرط بدون تاب بودن را نیز اضافه می‌کنیم. این شرط بلافاصله حکم می‌کند که دو لایهٔ فضا از هر نظر مانند هم شوند و بدین ترتیب کنش به شکل زیر تقلیل پیدا می‌کند

$$I_{\mathrm{H.E}} = 2 \int_Y [R - 2\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma] \sqrt{g} d^4 y \qquad (۱۰۳)$$

در اینجا σ میدان جدیدی است که از روی k ساخته شده و ارتباط آن با k چنین است

$$k = e^\sigma \qquad (۱۰۴)$$

و این همان کنش هیلبرت‌ـاینشتین به اضافهٔ میدانِ معروف به دیلتون[1] است که در مطالعات کیهان‌شناسی مطرح می‌شود.

۵. ایرادهای مدلهایی که در چارچوب هندسهٔ ناجابجایی ارائه می‌شوند

لااقل سه ایراد را می‌توان به خصوص در مورد مدلهای پیمانه‌ایی که در چارچوب هندسهٔ ناجابجایی ارائه می‌شوند ذکر کرد.

۱. ناسازگاری با جریان بازبهنجارش. این به علت پیداشدن ارتباط بین برخی از پارامترهای مدل است [۹].

۲. عدم تطابق فضای هیلبرت فرمیونها با آنچه که در مدل متعارف ذرات بنیادی داریم [۱۰].

۳. با اینکه جبری که برای توصیف فضاـزمان و نیز هندسهٔ میدانهای پیمانه‌ای به‌کار می‌بریم همهٔ اطلاعات راجع به هموستار روی فضاـزمان و نیز روی کلافهای برداری را داراست، ولی نمی‌توان کنش هیلبرت‌ـاینشتین و یانگـمیلز را از یک اصل و یا صورتبندی واحد بدست آورد.

در مورد ایراد اول گفته می‌شود که جبری که برای مدلهای پیمانه‌ای به‌کار می‌بریم هنوز توصیف‌کننده یک فضای جابجایی (نقطه‌دار) است و این

1. Dilaton

امر منجر به یک کنش کلاسیک (و نه کوانتمی) می‌گردد و بنابراین نمی‌توان افت و خیزهای کوانتمی را در آن منظور کرد. در مورد ایراد دوم هنوز راه‌حل هندسی درستی ارائه نشده است. ولی در مورد مشکل سوم اخیراً آلن‌کُن و یکی از همکارانش راه‌حلی ارائه کرده‌اند که طبق آن، با بررسی ویژه‌مقدارهای عملگر دیراک می‌توان کنش هیلبرت‌اینشتین را به همراه قسمت یانگ‌میلز به‌دست آورد [۱۱ و ۱۲].

سپاسگزاری

نگارنده بر خود لازم می‌داند از دکتر فرهاد اردلان که اولین مشوق و راهنمای او در زمینهٔ هندسهٔ ناجابجایی بوده‌اند و همچنین از دکتر احمد شفیعی‌ده‌آباد به‌خاطر کمکهای فکریشان تشکر کند.

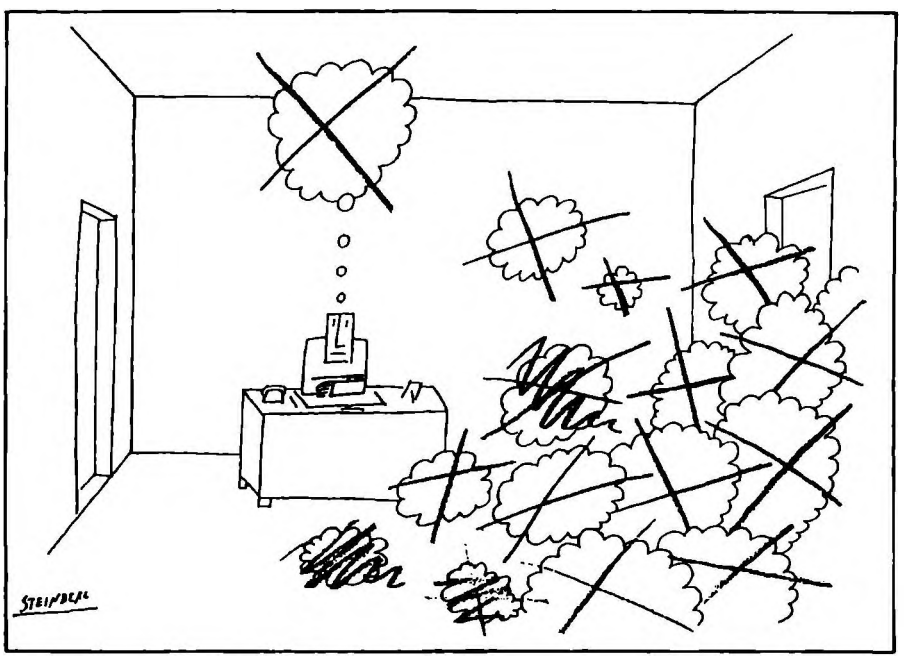
مراجع

1. A. H. Chamseddine, G. Felder and J. Fröhlich, "Grand unification in noncommutative geometry", *Nucl. Phys.* **B395** (1993) 672, *Phys. Lett.* **B296** (1993) 109.
2. F. Ardalan and K. Kaviani, "Chiral perturbation theory in the framework of noncommutative geometry", *Int. J. Mod. Phys.* (8) **A11** (1996) 1502.
3. M. Alishahiha, F. Fatholahi and K. Kaviani, "Noncommutative geometry and chiral perturbation lagrangian", *Phys. Lett.* **B382** (1996) 369.
4. J. Gasser and H. Leutwyler, "Chiral perturbation theory: expansions in the mass of the strange quark", *Nucl. Phys.* **B250** (1985) 465.
5. A. Connes and J. Lott, "Particle models and noncommutative geometry", *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **B18** (1989) 29.
6. A. H. Chamseddine, G. Felder and J. Fröhlich, "Gravity in noncommutative geometry", *Comm. Math. Phys.* **155** (1993) 109.
7. A. H. Chamseddine, J. Fröhlich and O. Grandjean, "The gravitational sector in Connes-Lott formulation of the standard model", *J. Math. Phys.* (11) **36** (1995) 6255.
8. A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press (1994).
9. E. Alvarez, J. M. Gracia-Bondia and C. P. Martin, "Parameter restrictions in noncommutative geometry model do not survive standard quantum corrections", *Phys. Lett.* **B306** (1993) 55.
10. F. Lizzi, G. Mangano, G. Miele, G. Sparano, "Fermion Hilbert space and fermion doubling in the noncommutative geometry approach to gauge theories", *Phys. Rev.* (10) **D55** (1997) 6357.
11. A. H. Chamseddine and A. Connes, "Universal formula for noncommutative geometry actions: unification of gravity and the standard model", *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 4868.
12. A. H. Chamseddine and A. Connes, "The spectral action principle", *hep-th*/9606001.

* * * * * *

* کامران کاویانی، پژوهشگاه دانشهای بنیادی و گروه فیزیک، دانشگاه الزهرا

kaviani@theory.ipm.ac.ir



طرحی از استاین‌برگ، که متجاوز از ربع قرن پیش در مجلهٔ نیویورکر به چاپ رسیده است.

قضیهٔ فوبینی نقش بر آب می‌شود (!):
مثال پارادوکس‌گونهٔ کاتوک در نظریهٔ اندازه•

جان میلنر*
ترجمهٔ روح‌الله جهانی‌پور

آناتولی کاتوک[1] ثابت کرده است (این اثبات هنوز منتشر نشده است) که

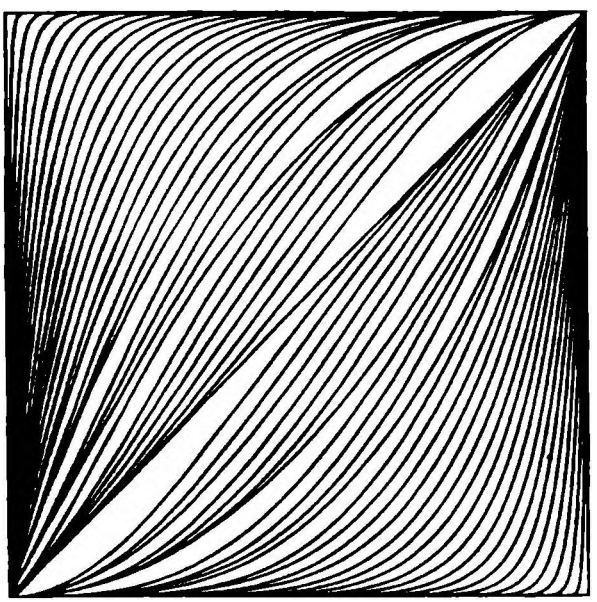
> *مجموعهٔ اندازه‌پذیر E با مساحت واحد در مربع یکّه $[0,1]\times[0,1]$ همراه با خانواده‌ای از خمهای تحلیلی حقیقیِ هموارِ مجزا از هم Γ_β که این مربع را پُر می‌کنند، وجود دارند به‌طوری که هر خم Γ_β، مجموعهٔ E را در حداکثر یک نقطه قطع می‌کند.*

به عبارت دیگر، با انتخاب حداکثر یک نقطه از هر Γ_β می‌توانیم مجموعه‌ای با اندازهٔ لبگ دوبعدی کامل بسازیم. روش ساختْ کاملاً صریح و طبیعی است. (خمهای مورد نظر به‌طور پیوسته به پارامتر $\beta\in[0,1]$ وابسته‌اند و یک برگبندی[2] توپولوژیک برای مربع یکّه تشکیل می‌دهند.) اما به این نکته نیز توجه داشته باشید که در هیچ مثالی از این دست، Γ_β نمی‌تواند به‌طور هموار به پارامتر β بستگی داشته باشد. اگر این خانواده به‌طور هموار پارامتری شده باشد، به‌راحتی می‌توان از قضیهٔ فوبینی نتیجه گرفت که E باید تقریباً هر Γ_β را در مجموعه‌ای با اندازهٔ لبگ یک‌بعدی کامل قطع کند.

شکل ۱ نمونه‌ای از چنین خانواده‌ای از خمها را نشان می‌دهد که بر مبنای روشی مشابه روش کاتوک، امّا نه یکسان با آن، ساخته شده است*. برای اینکه ساختن این خانواده از خمها را آغاز کنیم به *قانون قوی بورل در مورد اعداد بزرگ* نیاز داریم. فرض کنید سکهٔ ناهمگنی را که با احتمال $p(0)=p$ «صفر» [شیر] می‌آید و با احتمال $p(1)=1-p$، «یک» [خط] می‌آید، پرتاب کرده‌ایم. در این صورت برای دنباله‌ای از n پرتاب مستقل از هم سکه دنباله‌ای از n رقم دودویی به‌دست می‌آوریم، که احتمال دنبالهٔ مفروض $(b_1,b_2,\dots,b_n)$ بنا بر قاعدهٔ ضرب برابر است با

$$p(b_1,\dots,b_n)=p(b_1)\cdots p(b_n) \qquad (1)$$

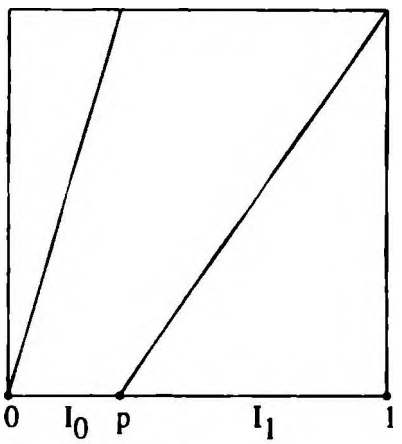
یاکوب برنولی ۳۰۰ سال پیش نشان داد که فراوانی «یک‌ها» یعنی نسبت



شکل۱

1. Anatole Katok 2. foliation

* مثال کاتوک بر اساس خانواده‌ای از حاصلضربهای بلاشکهٔ درجهٔ دو است که دایرهٔ یکه را به خودش می‌نگارد. از پیو (C. Pugh) به خاطر اینکه این موضوع را برای من توضیح داد سپاسگزارم. صورت دیگری از این ساختمان را هم یورک (J. Yorke) ارائه کرده که بر اساس نگاشتهای خیمه‌ای روی بازه است که آن هم هنوز منتشر نشده است.



شکل۲

$(b_1+\cdots+b_n)/n$، برای nهای بزرگ با احتمال زیاد نزدیک به $p(1)$ است. امیل‌بورل این نتیجه را به این صورت دقیقتر کرد: اگر دنباله‌ای نامتناهی از پرتابهای سکه را در نظر بگیریم، فرمول (۱) به یک اندازهٔ احتمال روی فضای $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ مرکب از همهٔ دنباله‌های نامتناهی $(b_1,b_2,\ldots)$ از صفرها و یک‌ها منجر می‌شود که *اندازهٔ حاصلضربی برنولی از نوع* $(p(0),p(1))$ نام دارد. بورل نشان داد که فراوانی حدی

$$\lim_{n\to\infty}(b_1+\cdots+b_n)/n$$

وجود دارد و با احتمال ۱، دقیقاً برابر است با $p(1)$. به عبارت دیگر این حد، برای دنباله‌هایی عضو $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ و خارج از زیرمجموعه‌ای از آن با اندازهٔ صفر نسبت به اندازهٔ حاصلضربی برنولی، برابر است با $p(1)$.

این نتیجه را می‌توانیم (به جای استفاده از پرتاب سکه) به صورت زیر فقط به کمک متغیرهای حقیقی بیان کنیم. فرض کنید x روی دایرهٔ $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ و پارامتر p روی بازهٔ یکهٔ باز $(0,1)$ تغییر کند. به‌ازای هر p نگاشت قطعه‌قطعه خطیِ f_p از درجهٔ دو را از دایرهٔ $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ به خودش با فرمول

$$f_p(x)=\begin{cases} x/p & x\in I_0(p)=[0,p)\subset\mathbb{R}/\mathbb{Z}\\ (x-p)/(1-p) & x\in I_1(p)=[p,1)\subset\mathbb{R}/\mathbb{Z}\end{cases}\qquad(۲)$$

تعریف می‌کنیم. نمودار این نگاشت در شکل ۲ رسم شده است. (به عبارت دیگر می‌توانیم به f_p به چشم نگاشتی ناپیوسته از بازهٔ یکهٔ $[0,1]$ به خودش نگاه کنیم. در هر صورت استدلال یکی است.)

به‌راحتی می‌توان دید که هر f_p *حافظ اندازه* است. در واقع، برای هر بازهٔ $J\subset[0,1]$ به طول $\ell(J)$، پیش‌تصویر $f_p^{-1}(J)$ تشکیل شده است از بازه‌ای در $I_0(p)$ به طول $p(0)\ell(J)$ و بازه‌ای در $I_1(p)$ به طول $p(1)\ell(J)$ که در نتیجه طول کل آنها برابر است با $\ell(f_p^{-1}(J))=\ell(J)$. [در اینجا هم باز فرض کرده‌ایم $p(0)=p$ و $p(1)=1-p$.] به‌ازای هر pی ثابت می‌توانیم کُدی برای هر نقطهٔ $x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ با استفاده از یک دنبالهٔ نامتناهی $(b_1,b_2,\ldots)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ از ارقام دودویی به ترتیب زیر انتخاب کنیم. فرض می‌کنیم

$$x=x_1\mapsto x_2\mapsto x_3\mapsto\cdots\qquad(۳)$$

مدار x تحت f_p باشد و برحسب اینکه x_n به بازهٔ $I_0(p)$ یا $I_1(p)$ به پیمانهٔ $\mathbb{Z}$ تعلق داشته باشد، b_n را صفر یا یک قرار می‌دهیم. $(b_1,b_2,\ldots)$ را *دنبالهٔ نمادی* وابسته به x و f_p می‌خوانیم.

(تذکر: تقریباً هر دنبالهٔ نمادی در $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ را می‌توان به این طریق به‌دست آورد، اما دنباله‌هایی که به تعدادی نامتناهی از یک‌ها ختم می‌شوند، به دست نمی‌آیند. به یادداشت انتهای مقاله مراجعه کنید.)

با این کدگذاری، f_p با نگاشت تغییرِ جای

$$(b_1,b_2,b_3,\ldots)\mapsto(b_2,b_3,\ldots)$$

متناظر می‌شود. بررسی این مطلب که اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ دقیقاً با اندازهٔ حاصلضربی برنولی از نوع $(p(0),p(1))$ روی $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ متناظر است، کار چندان مشکلی نیست؛ یعنی طول بازهٔ مرکب از همهٔ آن xهایی که دنبالهٔ نمادی وابسته به آنها با دنبالهٔ متناهی خاصی از ارقام دودویی چون $(b_1,\ldots,b_n)$ آغاز می‌شود، برابر است با $p(b_1)\cdots p(b_n)$.

اکنون می‌توان قانون قوی اعداد بزرگ را به این صورت بیان کرد: پارامتر ثابت p را انتخاب کنید و نگاشت f_p را در نظر بگیرید. *برای تقریباً هر (به مفهوم اندازهٔ لبگ) نقطهٔ* $x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$، *فراوانی یک‌ها در دنبالهٔ نمادی وابسته به آن* $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$، *تعریف می‌شود و برابر است با* $p(1)=1-p$.

فرض کنید $E\subset(0,1)\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ مجموعهٔ همهٔ آن جفتهای (p,x) باشد که فراوانی یک‌ها برای دنبالهٔ نمادی x تحت f_p، تعریف شده و برابر با $1-p$ باشد. بررسی اینکه E یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است، کار چندان مشکلی نیست. به‌ازای هر pی ثابت فرض می‌کنیم C_p نشان‌دهندهٔ دایرهٔ $\{p\}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}\subset(0,1)\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ باشد. چون اندازهٔ لبگ یک‌بعدیِ اشتراک E با هر C_p برابر است با $\ell_1(E\cap C_p)=1$، از قضیهٔ فوبینی نتیجه می‌شود که اندازهٔ لبگ دوبعدی E برابر است با

$$\ell_2(E)=\int_0^1\ell_1(E\cap C_p)dp=1$$

حال خانوادهٔ خمهای هموار Γ_β را به این ترتیب تعریف می‌کنیم: فرض کنید β عددی در بازهٔ $[0,1)$ باشد. بسط عدد β در پایهٔ ۲ را تشکیل می‌دهیم

$$\beta=0{,}b_1b_2b_3\cdots{}_{(\text{پایهٔ ۲})}=\sum b_n/2^n$$

فرض کنید Γ_β مجموعهٔ همهٔ آن جفتهای (p,x) در $(0,1)\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ است که دنبالهٔ نمادی x تحت نگاشت f_p مساوی با $(b_1,b_2,b_3,\ldots)$ است. روشن است که Γ_βها مجموعه‌های مجزایی هستند که اجتماعشان برابر است با $(0,1)\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. برای اینکه ثابت کنیم هر Γ_β یک خم تحلیلی حقیقیِ

هموار است به ترتیب زیر عمل می‌کنیم: به‌راحتی از (۲) نتیجه می‌شود که برای هر مدار (۳) داریم

$$x_n = b_n p(\circ) + x_{n+1} p(b_n)$$

اکنون یک استقراء سرراست نشان می‌دهد که $x = x_1$ برابر است با مقدار سری

$$\begin{aligned} x &= x(p,\beta) \\ &= p(\circ)(b_1 + p(b_1)(b_2 + p(b_2)(b_3 + \cdots)\cdots)\cdots) \\ &= p(\circ)(b_1 + b_2 p(b_1) + b_3 p(b_1)p(b_2) \\ &\quad + b_4 p(b_1)p(b_2)p(b_3) + \cdots) \end{aligned} \tag{۴}$$

قرار می‌دهیم

$$p(1) = 1 - p = \frac{1-t}{2} \quad \text{و} \quad p(\circ) = p = \frac{1+t}{2}$$

اگر $t \le c < 1$، آنگاه قدرمطلق جملهٔ nام در سری (۴) حداکثر $[(1+c)/2]^n$ است. از این رو این سری به‌طور یکنواخت همگراست. در واقع حتی اگر مقدارهای مختلط t با ضابطهٔ $|t| \le c < 1$ را هم مجاز بدانیم، باز این مطلب درست است. بنابراین از قضیهٔ همگرایی یکنواخت وایرشتراس نتیجه می‌شود که به‌ازای هر βی ثابت، سری (۴)، x را به صورت تابعی تحلیلی از t در بازهٔ $t < 1$، یا به صورت تابعی تحلیلی از p در بازهٔ $\circ < p < 1$ تعریف می‌کند. روشن است که Γ_β دقیقاً نمودار این تابع تحلیلی حقیقی $p \mapsto x(p,\beta)$ است.

و بالاخره چون هر دنبالهٔ نمادی داده شده حداکثر می‌تواند یک فراوانی حدی، یعنی

$$\lim(b_1 + \cdots + b_n)/n = 1 - p$$

داشته باشد، نتیجه می‌شود که هر Γ_β، مجموعهٔ اندازه‌پذیر E را در حداکثر یک نقطه یعنی $(p, x(p,\beta))$ قطع می‌کند.

یادداشت

تابع $\beta \mapsto x(p,\beta)$ اکیداً یکنواست و بازهٔ $[\circ, 1)$ را به روی خودش می‌نگارد. بنابراین یک همسانریختی است. در واقع به‌راحتی ثابت می‌شود که تناظر $(p,\beta) \mapsto (p, x(p,\beta))$ فضای حاصلضربی $(\circ, 1) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ را به‌طور همسانریخت به روی خودش می‌نگارد.

استدلال دیگری هم برای این مطلب وجود دارد. روشن است که عبارت (۴) به‌طور پیوسته به دو متغیر $p \in (\circ, 1)$ و $(b_1, b_2, \ldots) \in \{\circ, 1\}^{\mathbb{N}}$ بستگی دارد که البته برای فضای دنباله‌ها توپولوژی حاصلضربی دکارتی را اختیار کرده‌ایم. تناظر

$$(b_1, b_2, \ldots) \mapsto \sum b_n/2^n \in [\circ, 1]$$

از دنباله‌های نمادی به متغیرهای حقیقی، یک‌به‌یک نیست چون هر عدد گویای دودویی $m/2^n$ دو بسط متفاوت در پایهٔ دو دارد، که یکی به تعدادی نامتناهی صفر ختم می‌شود و دیگری به تعدادی نامتناهی یک. با این حال، با محاسبهٔ سرراستی نشان داده می‌شود که این دو بسط به مقدار یکسانی برای $x(p,\beta)$ منجر می‌شوند و به‌راحتی نتیجه می‌شود که تناظر $(p,\beta) \mapsto x(p,\beta)$ در واقع پیوسته است.

این ساختارها را از دیدگاه دینامیکی هم می‌توان تعبیر کرد. اثبات اینکه هر $f_p : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ به‌طور یکتا با نگاشتِ دو برابرکنندهٔ زاویه، $f_{1/2}(x) \equiv 2x (\mathrm{mod}\mathbb{Z})$، مزدوج توپولوژیک است، کار چندان سختی نیست؛ یعنی همسانریختی یکتای $h_p : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ وجود دارد که $f_{1/2}$ را با f_p مزدوج می‌سازد به‌طوری که

$$f_p = h_p \circ f_{1/2} \circ h_p^{-1}$$

در واقع این همسانریختیِ مزدوج‌ساز از فرمول $h_p(\beta) = x(p,\beta)$ به‌دست می‌آید و بر حسب هر دو متغیر پیوسته است. توجه کنید که اگر $\beta \in [\circ, 1)$ بسط $\beta = \sum b_n/2^n$ را در پایهٔ دو داشته باشد، دنبالهٔ نمادی β تحت $f_{1/2}$ برابر است با $(b_1, b_2, \ldots)$ و دنبالهٔ نمادی $h_p(\beta)$ تحت f_p همان دنبالهٔ $(b_1, b_2, \ldots)$ است. جزئیات این استدلال را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

مراجع

1. Billingsley, P., *Probability and Measure*, NewYork: John Wiley & Sons (1979) [مرجع برای قضیهٔ فوبینی و قانون اعداد بزرگ].
2. Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, NewYork: John Wiley & Sons (1950, 1957) [مرجع برای قانون اعداد بزرگ].
3. Rudin, W., *Real and Complex Analysis* , NewYork: McGraw-Hill (1974) [مرجع برای قضیهٔ فوبینی و قضیهٔ وایرشتراس].

******

- John Milnor, "Fubini foiled: Katok's paradoxical example in measure theory", *The Mathematical Intelligencer*, (2) **19** (1997) 30-32.

* جان میلنر، دانشگاه ایالتی نیویورک در استونی بروک، آمریکا

درآمدی بر آنتروپی و قانون دوم ترمودینامیک•

الیوت لیب* و یاکوب اونگواسون**

ترجمهٔ هادی جرئتی

این نوشته برای خوانندگانی است که به آنها هم، همانند ما، گفته‌اند قانون دوم ترمودینامیک یکی از دستاوردهای بزرگ قرن نوزدهم است ــ زیرا قانونی است منطقی، کامل و نقض‌ناشدنی ــ ولی از «شیوه‌های استخراج» اصل آنتروپی آن‌گونه که در کتابهای درسی و نوشته‌های مردم‌پسند رایج است، راضی نبوده‌اند.

نگاهی کوتاه به کتابها خواننده را آگاه می‌سازد که این قانون «بیانهای مختلفی دارد». (که البته کمی عجیب است و به این می‌ماند که بگویند ده فرمان موسی بیانهای مختلفی دارند)، ولی البته همهٔ آنها به وجود یک تابع آنتروپی منجر می‌شوند که فلسفهٔ وجودیش این است که به ما بگوید کدام فرایندها انجام شدنی و کدامها انجام ناشدنی هستند. ما با کمی تسامح (یا با یک صورتبندی نو) به وجود آنتروپی، قانون دوم ترمودینامیک می‌گوییم. این بیان دست‌کم نامبهم است. آنتروپی که از آن صحبت می‌کنیم همان است که به وسیلهٔ ترمودینامیک تعریف می‌شود (و نه یک کمیت تحلیلی که معمولاً شامل عباراتی چون $p\ln p$– است و در نظریهٔ اطلاع‌رسانی، نظریهٔ احتمال و در مدلهای مکانیک آماری ظاهر می‌شود).

سه قانون ترمودینامیک وجود دارند (به اضافهٔ یکی دیگر از نرنست[1] که بیشتر در فیزیک دماهای پایین به کار برده می‌شود و برخلاف دیگر قانونهای ترمودینامیک تغییرناپذیر نیست). این قانونها به صورت خلاصه چنین‌اند:

قانون صفرم، که ترایایی تعادل گرمایی را بیان می‌کند و معمولاً گفته می‌شود که وجود یک تابع دما برای پارامتری کردن حالتهای تعادل از آن نتیجه می‌شود. ما این قانون را از این پس به کار خواهیم برد ولی آن را چنان صورتبندی می‌کنیم که هیچ حرفی از دما زده نشود. در حقیقت مفهوم دما در این نوشته تا تقریباً پایان نوشته ظاهر نمی‌شود.

قانون اول، یعنی بقای انرژی، مفهومی از مکانیک است و ارتباط میان مکانیک (و چیزهایی مانند وزنه‌های افتان) و ترمودینامیک را بیان می‌کند. بعداً هنگامی که سیستمهای ساده را معرفی می‌کنیم، باز در این باره بحث خواهیم کرد؛ کاربرد بسیار مهم این قانون آن است که امکان می‌دهد انرژی را به عنوان یکی از پارامترهای توصیف‌کنندهٔ سیستم به کار بریم.

1. Nernst

قانون دوم. سه صورت رایج این قانون چنین‌اند:

> *کلاوسیوس*: هیچ فرایندی که تنها نتیجهٔ آن انتقال گرما از یک جسم به جسمی گرمتر باشد، امکان‌پذیر نیست.
>
> *کلوین (و پلانک)*: هیچ فرایندی که تنها نتیجهٔ آن این باشد که جسمی خنک شود و کار انجام گیرد، امکان‌پذیر نیست.
>
> *کاراتئودوری*: در هر همسایگی هر حالت، حالتهایی وجود دارند که نمی‌توان از حالت اولیه با یک فرایند بی‌دررو به آنها رسید.

هر سه صورت باید به اصل آنتروپی (که در پایین تعریف می‌شود) منجر شوند. گامهای مربوط را می‌توان در بسیاری از کتابها یافت و دیگر در اینجا به آنها نخواهیم پرداخت. گرچه اجازه دهید اشاره‌ای گذرا بکنم که در دو بیان نخست، مفهومهایی چون گرم، سرد، گرما، و سرما به کار می‌روند که مفاهیمی شهودی هستند و برای آنکه این بیانها بامعنی باشند باید این مفاهیم دقیق شوند. مثلاً کسی «گرما» را ندیده است. در آخرین بیان (که در آن از اصطلاح «فرایند بی‌دررو» استفاده شده که در پایین تعریف خواهد شد) گونه‌ای پارامتری سازیِ حالتهای گوناگون با نقاط $\mathbb{R}^n$ از پیش فرض شده است و راه معمولیِ به دست آوردن آنتروپی از آن هم مبتنی بر نوعی مشتق‌پذیری است؛ چنین فرضهایی، تا آنجا که به فهمیدن معنای آنتروپی مربوط می‌شود، حاشیه‌ای هستند.

ممکن است کسی بپرسد چرا یک ریاضیدان باید به این موضوع ــ که از لحاظ تاریخی به تلاشهایی برای فهمیدن و بهتر کردن کارایی ماشینهای بخار مربوط بوده است ــ علاقه‌مند باشد؟ پاسخ، آن‌گونه که ما درمی‌یابیم، این است که این قانون در حقیقت یک قضیهٔ جالب ریاضی است در بارهٔ یک ترتیب روی یک مجموعه که البته دارای پیامدهای ژرف فیزیکی است. اصول موضوعی که این ترتیب را می‌سازند، از دیدگاه ریاضی، تا حدی عجیب‌اند و ممکن است نتوان با تفکر تجریدی عادی به آن رسید. این اصول، خاص

ولی مهم هستند و با توجه به فرضهایی در بارهٔ جهان به دست آمده‌اند و به همین دلیل هم این قدر مورد توجه و جالب هستند. شاید خوانندهٔ باهوش بتواند کاربردی از همین ساختار منطقی را در رشته‌ای دیگر از علم بیابد.

موضوع اصلی در تحلیل ما نوعی ویژه از ترتیب است که با $\prec$ (بخوانید «مقدم است بر») نشان داده می‌شود و طبق اصول موضوع الف ۱ و الف ۲ که در زیر می‌آیند ترایا و بازتابی است. ولی از $X \prec Y$ و $Y \prec X$ نتیجه نمی‌شود $X = Y$. پس این رابطه یک پیش‌ترتیب[1] است. پرسش مهم این است که آیا می‌توان به $\prec$ یک تابع عادی حقیقی که با S نمایش داده می‌شود نسبت داد به گونه‌ای که وقتی X و Y با $\prec$ به هم مربوط باشند آنگاه $S(X) \leq S(Y)$ اگر و تنها اگر $X \prec Y$؟ تابع S باید همچنین جمعی و گسترشی باشد به معنایی که در پایین خواهد آمد.

در اینجا طرح پرسشی مشابه پرسش بالا سودمند است: چه هنگام می‌توان به میدان برداری $\vec{V}(x)$ روی $\mathbb{R}^3$ یک تابع عادی $f(x)$ نسبت داد که گرادیان آن $\vec{V}$ باشد؟ پاسخ همان‌طور که می‌دانید این است که شرط لازم و کافی برای این امر آن است که $\mathrm{curl}\vec{V} = 0$. اگر $\vec{V}$ این خاصیت را داشته باشد یک موضوع، روشن و مهم می‌شود: برای آنکه بتوانید انتگرال $\vec{V}$ را روی هر خمی به‌دست آورید تنها لازم است انتگرال آن را روی بعضی از خمها حساب کنید. پس این نسبت‌دادن، توانایی پیشگویی زیادی در بارهٔ طبیعت اندازه‌گیری‌های آینده از V به ما خواهد داد. به همین ترتیب آگاهی از تابع S قدرت پیشگویی زیادی در اختیار شیمی‌دانها، مهندسان و دیگرانی می‌گذارد که با مسائل جهان فیزیکی سروکار دارند.

دلمشغولی ما از این پس این خواهد بود که از چند اصل موضوع طبیعی در بارهٔ رابطهٔ $\prec$ به وجود و خواصی برای S برسیم. ما نتایج را بدون اثبات بیان می‌کنیم و خواننده می‌تواند برای ملاحظهٔ تفصیل موضوع و همچنین بحثی در بارهٔ کارهای مربوط که پیشتر در زمینهٔ مبانی ترمودینامیک انجام گرفته‌اند به [۷] مراجعه کند. منابع زیادی در این زمینه وجود دارند و نمی‌توان حتی شرح خلاصه‌ای از آنها را در اینجا آورد. تنها اشاره می‌کنیم که از میان آثار پیشین، نزدیکترین اثر به کار ما، منابع [۲] و [۶]اند ([۴]، [۵] و [۹] را هم ببینید) این رهیافتهای دیگر هم بر پایهٔ بررسی رابطهٔ $\prec$ قرار دارند. ولی با کار ما اشتراک چندانی ندارند. در حقیقت، بخش عمده‌ای از کار ما به دست آوردن یک خاصیت ویژه است («فرض مقایسه» در زیر) که در رهیافتهای دیگر آن را به عنوان اصل موضوع می‌پذیرند. دستاوردی قابل ملاحظه و تقریباً فراموش شده از جایاز [۶]، پی بردن به قدرت کامل این خاصیت است.

بگذارید داستان را با معرفی چند مفهوم پایه‌ای آغاز کنیم.

۱. سیستم *ترمودینامیک*: از نظر فیزیکی متشکل از مقادیری مشخص از چند نوع ماده است، مثلاً یک گرم هیدروژن در یک ظرف با پیستون، یا یک گرم هیدروژن و یک گرم اکسیژن در دو ظرف مجزا یا یک گرم هیدروژن و دو گرم هیدروژن در دو ظرف مجزا. سیستم می‌تواند در حالتهای مختلفی که از نظر فیزیکی حالتهای تعادل هستند قرار داشته باشد. فضای حالتهای سیستم را معمولاً با حرفی چون Γ نمایش می‌دهند و حالتهای درون Γ را با X و Y و Z و ... .

1. preorder

اگر جنبه‌های فیزیکی را کنار بگذاریم، هر فضای حالت از دید ریاضی تنها یک مجموعهٔ عادی است که کار را با آن آغاز می‌کنیم. بعداً به نشاندن فضاهای حالت در زیرمجموعه‌ای محدب از چیزی مثل $\mathbb{R}^{n+1}$ توجه خواهیم کرد یعنی پای مختصات را به میان می‌کشیم. اگرچه همان‌گونه که پیشتر گفتیم با وجود اصل کاراتئودوری، اصل آنتروپی مستقل از مختصات است.

۲. ترکیب و *مقیاس‌بندی حالتها*: ضرب دکارتی $\Gamma_1 \times \Gamma_2$، متناظر با دو یا چند سیستم است که روی میز آزمایشگاه کنار هم قرار گرفته‌اند. از دید ریاضی، این تنها یک سیستم دیگر است (که یک سیستم مرکب خوانده می‌شود) و با $\Gamma_2 \times \Gamma_1$ یکی است. نقاط $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ مانند همیشه با جفتهای (X, Y) نمایش داده می‌شوند. زیرسیستم‌های یک سیستم مرکب، از نظر فیزیکی، خود سیستمهای مستقلی هستند ولی می‌توانند برای مدتی برهم‌کنش داشته باشند و بنابراین حالت همدیگر را تغییر دهند. مفهوم مقیاس‌بندی مفهومی زیربنایی است. درست همین مفهوم است که ترمودینامیک ما را برای اشیای میکروسکوپی مانند اتمها یا اشیای آسمانی مانند ستارگان نامناسب می‌سازد. برای هر فضای حالت Γ و عدد $\lambda > 0$ فضای حالت دیگری وجود دارد که آن را با $\Gamma^{(\lambda)}$ و نقاط آن را با λX نمایش می‌دهیم. این فضا را یک *نسخهٔ مقیاس‌دار* Γ می‌نامیم. البته فرض می‌کنیم $\Gamma^{(1)} = \Gamma$ و $1X = X$. همچنین این شرط را می‌گذاریم که $\Gamma^{(\lambda\mu)} = (\Gamma^{(\lambda)})^{(\mu)}$ و $\mu(\lambda X) = (\mu\lambda)X$. تعبیر فیزیکی $\Gamma^{(\lambda)}$ در صورتی که مثلاً Γ فضای حالت یک گرم هیدروژن باشد، همان فضای حالت λ گرم هیدروژن است. و حالت λX حالت λ گرم هیدروژن است با همان خواص «نافزونور[1]» X مانند فشار. در حالی که خواص «فزونور[2]» نظیر انرژی، حجم و ... (طبق تعریف) با یک ضریب λ مقیاس‌بندی می‌شوند.

به ازای هر Γ داده شده می‌توان ضرب دکارتیِ فضاهای حالت از نوع $\Gamma^{(\lambda_1)} \times \cdots \times \Gamma^{(\lambda_N)}$ را ساخت. چنین چیزهایی *نسخه‌های چندمقیاسی* Γ خوانده خواهند شد.

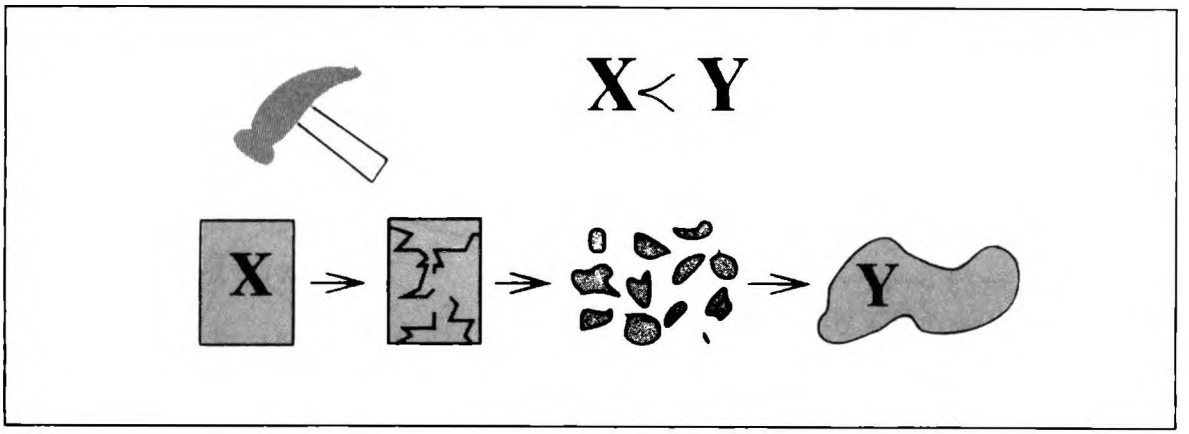
$\Gamma^{(\lambda)}$ را باید در اینجا تنها یک نماد شمرد. ولی بعدها با نشاندن Γ در $\mathbb{R}^{n+1}$، این نماد نشان‌دهندهٔ $\lambda\Gamma = \{\lambda X : X \in \Gamma\}$ به همان مفهوم رایج خواهد بود.

۳. دسترسی *بی‌دررو*. اکنون به ترتیب می‌پردازیم. گوییم $X \prec Y$ (که X و Y ممکن است در فضاهای حالتِ *متفاوت* باشند) اگر یک *فرایند بی‌دررو* موجود باشد که X را به Y تبدیل کند.

این به چه معناست؟ از نظر ریاضی تنها فهرست چند جفت $X \prec Y$ به ما داده شده است. چیز بیشتری نمی‌توان گفت، جز اینکه بعدها فرض خواهیم کرد که این فهرست خواصی چند دارد که منجر به قضایایی جالب در بارهٔ فهرست، و این قضایا منجر به وجود یک *تابع آنتروپی* S که فهرست را مشخص می‌کند، خواهند شد.

تعبیر فیزیکی، مقوله‌ای کاملاً متفاوت است. در کتابهای درسی، یک فرایند هنگامی بی‌دررو خوانده می‌شود که در شرایط «انزوای گرمایی» انجام شود، و این بدان معنی است که «هیچ گرمایی با محیط مبادله نشود» چنین بیانهایی را ما به اندازهٔ کافی فراگیر یا دقیق نمی‌دانیم و برداشت خودمان را

1. intensive 2. extensive



شکل۱ یک فرایند بی‌دروِ تُند که حالتهای تعادل X و Y را به هم مربوط می‌سازد.

(که سازگار با قانون دوم به بیان پلانک است [۸]) ترجیح می‌دهیم. این برداشت (همان‌طور که پلانک کشف کرد) این برتری را دارد که بین کار و گرما تفاوتی قایل نمی‌شود ــ و حتی از تعریف گرما می‌پرهیزد. ولی تأکید می‌کنیم که لازم نیست قضایا سازگار با تعریف فیزیکی ما از فرایند بی‌دررو باشند. تعریفهای دیگری هم ممکن‌اند.

حالت Y از حالت X به‌طور بی‌دررو دسترس‌پذیر است، $X \prec Y$، اگر بتوان حالت را از طریق برهم‌کنش با یک وسیله که خود از سیستمی کمکی و یک وزنه تشکیل شده است، از X به Y تغییر داد چنانکه سیستم کمکی در پایان فرایند به حالت آغازین خود برگردد در حالی که وزنه ممکن است سقوط یا صعود کرده باشد.

نقش «وزنه» در این تعریف تنها این است که یک چشمه (یا چاه) سادهٔ انرژی مکانیکی را مشخص کند. توجه کنید که فرایند بی‌دررو از نظر فیزیکی لازم نیست به آرامی انجام شود یا «استاتیک» باشد یا هیچ فرض دیگری از این دست. می‌تواند به دلخواه تُند باشد (شکل ۱ را ببینید).

ممکن است یک مثال در اینجا راهگشا باشد. یک پوند هیدروژن را در یک ظرف با یک پیستون قرار دهید. حالتها را می‌توان با دو عدد توصیف کرد: انرژی و حجم، که دومی با مکان پیستون تعیین می‌شود. با آغاز کردن از حالت X می‌توانیم دستمان را از روی پیستون برداریم و اجازه دهیم حجم ناگهان افزایش یابد. بعد از اینکه همه چیز آرام شد. حالت تعادل جدید را Y می‌نامیم؛ در این صورت $X \prec Y$. پرسش: آیا $Y \prec X$ هم درست است؟ پاسخ: خیر. برای رفتن از Y به X مجبور به استفاده از یک عامل کمکی و یک وزنه هستیم به طوری که در پایان کار، آن عامل به حالت آغازین خود برگردد و این کار امکان‌پذیر نیست. البته می‌توانیم با استفاده از یک وزنه گاز را تا حجم اولیه‌اش متراکم کنیم ولی در آن صورت انرژی بیشتر از مقدار آغازین خواهد بود.

از سوی دیگر می‌توانیم اجازه دهیم که حجم بسیار بسیار آرام افزایش یابد به این صورت که پیستون، وزنه‌ای را که وزنش را به‌دقت می‌توان تغییر داد بالا ببرد. هیچ وسیلهٔ دیگری به کار نخواهد رفت. در این صورت می‌توانیم فرایند را (با دقتی به اندازهٔ دلخواه) معکوس کنیم به این طریق که مقداری ناچیز سربار به وزنه اضافه می‌کنیم که به آرامی پیستون را عقب خواهد راند. بنابراین دست‌کم علی‌الاصول می‌توانیم داشته باشیم $X \prec Y$ و $Y \prec X$ و چنین فرایندی را یک *فرایند بی‌دررو برگشت‌پذیر* می‌خوانیم.

اگر $X \prec Y$ ولی $Y \not\prec X$ می‌نویسیم $X \prec\prec Y$. در این صورت می‌گوییم از X با یک *فرایند بی‌دررو برگشت‌ناپذیر* می‌توان به Y رسید. اگر $X \prec Y$ و $Y \prec X$ (یعنی X و Y با یک فرایند بی‌دررو برگشت‌پذیر به هم مربوط باشند) می‌گوییم X و Y به *صورت بی‌دررو هم‌ارزند* و می‌نویسیم: $X \overset{A}{\sim} Y$. رده‌های هم‌ارزی $\overset{A}{\sim}$ را *رده‌های هم‌ارزی بی‌درو* می‌نامیم.

۴. *مقایسه‌پذیری*: اگر دو حالت X و Y در دو فضای حالت (یکسان یا متفاوت) داده شده باشند، گوییم آنها مقایسه‌پذیرند اگر $X \prec Y$ یا $Y \prec X$ (یا هر دو). خواهیم دید که این مفهوم، مفهومی زیربنایی است. دو حالت همواره مقایسه‌پذیر نیستند. یک شرط لازم برای این امر آن است که هر دو مقدار یکسانی از مواد شیمیایی یکسان داشته باشند. مثال: از آنجا که آب همان H_2O است و وزن اتمی هیدروژن و اکسیژن به ترتیب ۱ و ۱۶ است، حالت مخلوط ۲ گرم هیدروژن و ۱۶ گرم اکسیژن با حالت ۱۸ گرم آب مقایسه‌پذیر است (ولی نه با ۱۱ گرم آب یا ۱۸ گرم اکسیژن).

در حقیقت طبقه‌بندی حالتها به فضاهای حالت گوناگون عمدتاً برای سهولت فهم مطلب انجام می‌شود. قانون دوم تنها با حالتها سروکار دارد و تنها چیزی که در بارهٔ هر جفت از حالتها باید بدانیم این است که مقایسه‌پذیر هستند یا خیر. با مفروض بودن رابطهٔ $\prec$ برای تمام حالتهای ممکنِ تمام سیستمهای ممکن، می‌توانیم بپرسیم آیا می‌توان یک تابع آنتروپی به این رابطه نسبت داد یا نه.

اصل آنتروپی: *تابعی حقیقی-مقدار روی تمام حالتهای تمام سیستمها (از جمله سیستمهای مرکب) وجود دارد که آن را آنتروپی می‌گوییم و با S نمایش می‌دهیم و این تابع*

الف) یکنواست: *اگر X و Y حالتهای مقایسه‌پذیر باشند آنگاه*

$$X \prec Y \text{ اگر و تنها اگر } S(X) \leq S(Y) \qquad (۱)$$

ب) جمعی و گسترشی است: *اگر X و Y حالتهای دو سیستم (متفاوت یا یکسان) باشند و (X,Y) حالت نظیر سیستم مرکب باشد، آنگاه آنتروپی*

برای این حالتها جمعی است یعنی

$$S(X,Y) = S(X) + S(Y) \qquad (۲)$$

همچنین S گسترشی است یعنی به ازای هر $\lambda > 0$ و هر حالت X و نسخهٔ مقیاس‌دار آن $\lambda X \in \Gamma^{(\lambda)}$ (که در بالا در ۲ تعریف شده است) داریم

$$S(\lambda X) = \lambda S(X) \qquad (۳)$$

یک فرموابندی که از نظر منطقی با (الف) معادل است اما در آن واژهٔ «مقایسه‌پذیر» به کار نمی‌رود چنین است:

$$X \prec\prec Y \Rightarrow S(X) < S(Y) \text{ و } X \overset{A}{\sim} Y \Rightarrow S(X) = S(Y) \qquad (۴)$$

مخصوصاً سطر آخر قابل توجه است. این سطر می‌گوید که در یک فرایند بی‌دررو برگشت‌ناپذیر، آنتروپی باید افزایش یابد.

جمع‌پذیری آنتروپی در سیستمهای مرکب معمولاً بدیهی فرض می‌شود؛ ولی یکی از نتایج شگفت‌انگیز ترمودینامیک است. اولاً محتوای این جمع‌پذیری (۲) بسیار بیشتر از آن است که از ظاهر سادهٔ آن برمی‌آید. چهار حالت را در نظر بگیرید: X، X'، Y، Y'، و فرض کنید $X \prec Y$ و $X' \prec Y'$. در این صورت یکی از اصل موضوعهای ما، الف ۳، این خواهد بود که $(X,X') \prec (Y,Y')$، و (۲) چیزی تازه یا هیجان‌انگیز در برنخواهد داشت. از سوی دیگر سیستم مرکب هم می‌تواند فرموابندی بی‌دررو داشته باشد که در آن $(X,Y) \prec (Y,Y')$ ولی $X \not\prec Y$، در این صورت (۲) اطلاعات زیادی به ما می‌دهد. در حقیقت بنا بر یکنوایی، حالتهای زیادی از این‌گونه وجود خواهند داشت. زیرا نابرابری $S(X) + S(X') \leq S(Y) + S(Y')$ مسلماً نتیجه نمی‌دهد که $S(X) \leq S(Y)$. این واقعیت که نابرابری $S(X) + S(X') \leq S(Y) + S(Y')$، مستقل از اطلاعات تفصیلی دربارهٔ نحوهٔ برهم‌کنش دو سیستم، به ما می‌گوید که دقیقاً کدام فرایندهای بی‌دررو در سیستم مرکب (در میان حالتهای مقایسه‌پذیر) امکان‌پذیرند، شگفت‌آور است و در قلب *ترمودینامیک* جای دارد. دلیل دیگری برای شگفت‌انگیز بودن (۲) این است: بنابر (۱) به تنهایی، محدود به هر سیستمی، می‌توان به جای تابع S مثلاً $29S$ را قرار داد و همچنان کارهای گذشته انجام خواهد شد. یعنی در (۱) صدق خواهد کرد. در حالی که (۲) می‌گوید که می‌توان آنتروپی همهٔ سیستمها را چنان مقیاس‌بندی کرد (یعنی تمام مضارب از پیش تعیین نشده را همزمان تعیین کرد) که آنتروپی $S_{1,2}$ برای سیستم مرکب $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ چنین باشد: $S_{1,2}(X,Y) = S_1(X) + S_2(Y)$ حتی اگر سیستمهای ۱ و ۲ کاملاً بی‌ربط و مجزا باشند!

اکنون آماده‌ایم چند پرسش اساسی را مطرح کنیم.

پ ۱: چه خواصی از رابطهٔ $\prec$ وجود و یکتایی (اساسی) S را تضمین می‌کنند؟

پ ۲: آیا این خواص را می‌توان از فرضهای سادهٔ فیزیکی استنتاج کرد؟

پ ۳: چه خواصی از تحدب و همواری برای S از این فرضها نتیجه می‌شوند؟

پ ۴: آیا می‌توان دما (و بنابراین، ترتیبی برای حالتها بر حسب «گرمی» و «سردی») را بر اساس S تعریف کرد؟ خواص آن چه خواهند بود؟

پاسخ پرسش ۱ را می‌توان در قالب ۶ اصل موضوع داد که معقول، ساده، «بدیهی»، و بی‌نقص هستند. یک فرض اضافی اساسی دیگر هم مورد نیاز است. ولی ما آن را به جای اصل موضوع، فرض خواهیم نامید زیرا بعداً نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان آن را از چند اصل موضوع دیگر به دست آورد، و از آنجا به پاسخ پرسش ۲ دست یافت.

الف ۱. بازتابی بودن. $X \overset{A}{\sim} X$.

الف ۲. ترایایی. اگر $X \prec Y$ و $Y \prec Z$ آنگاه $X \prec Z$.

الف ۳. سازگاری. اگر $X \prec X'$ و $Y \prec Y'$ آنگاه

$$(X,Y) \prec (X',Y')$$

الف ۴. ناوردایی تحت تغییر مقیاس. اگر $\lambda > 0$ و $X \prec Y$ آنگاه $\lambda X \prec \lambda Y$.

الف ۵. شکستن و بازپیوستن. برای هر $0 < \lambda < 1$ داریم $X \overset{A}{\sim} ((1-\lambda)X, \lambda X)$. توجه کنید که فضاهای حالت در دو طرف یکسان نیستند. اگر $X \in \Gamma$، آنگاه فضاهای حالت طرف راست، $\Gamma^{(1-\lambda)} \times \Gamma^{(\lambda)}$ است.

الف ۶. پایداری. اگر برای یک Z_0 و Z_1 و دنباله‌ای از ϵها که به صفر می‌گرایند داشته باشیم $(X, \epsilon Z_0) \prec (Y, \epsilon Z_1)$ آنگاه $X \prec Y$. این اصل، جانشینی برای پیوستگی است که نمی‌توانیم آن را فرض کنیم چون هنوز توپولوژیی نداریم. این اصل می‌گوید «ذره‌ای غبار نمی‌تواند اثری بر یک فرایند بی‌دررو داشته باشد.»

یک لم مهم این است که از (الف ۱)ـ(الف ۶) *قانون حذف* نتیجه می‌شود که این قانون در بسیاری از اثباتها به کار می‌رود. این قانون می‌گوید که برای هر سه حالت X, Y, Z داریم

$$(X,Z) \prec (Y,Z) \Rightarrow X \prec Y \qquad (۵)$$

مفهوم بعدی نقشی کلیدی در بحث ما دارد.

ف. م. تعریف: می‌گوییم *فرض مقایسه* (ف. م.) برای فضای حالت Γ برقرار است، اگر هر دو جفت حالت در Γ مقایسه‌پذیر باشند.

توجه کنید که الف ۳، الف ۴، و الف ۵ مقایسه‌پذیری را از یک حالت Γ به بعضی حالتهای دیگر گسترش می‌دهند، مثلاً اگر $X \prec Y$ و $X \prec Z$ آنگاه برای هر $0 \leq \lambda \leq 1$ داریم $X \prec ((1-\lambda))Y, \lambda Z)$. از سوی دیگر، تنها از مقایسه‌پذیری روی Γ نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر $X \prec Y$ ولی $X, Z \prec X$ با $((1-\lambda)Y, \lambda Z)$ مقایسه‌پذیر است. در این حالت به ف. م. روی فضای حاصلضرب $\Gamma^{(1-\lambda)} \times \Gamma^{(\lambda)}$ نیاز داریم که از برقراری ف. م. روی Γ نتیجه نمی‌شود.

اهمیت الف ۱ـالف ۶ و ف. م. با قضیهٔ زیر مشخص خواهد شد.

قضیهٔ ۱ (هم‌ارزی اصول موضوع الف ۱ـالف ۶ و آنتروپی با فرض ف. م.) *دو حکم زیر برای یک حالت Γ هم‌ارزند.*

i) رابطهٔ $\prec$ بین حالتها در نسخه‌های چندمقیاسی (احتمالاً متفاوت) از Γ یعنی $\Gamma^{(\lambda_1)} \times \cdots \times \Gamma^{(\lambda_N)}$ به وسیلهٔ یک تابع آنتروپی S روی Γ مشخص می‌شود به این مفهوم که

$$(\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \ldots) \prec (\lambda'_1 X'_1, \lambda'_2 X'_2, \ldots) \qquad (۶)$$

هم‌ارز است با شرط

$$\sum_i \lambda_i S(X_i) \leq \sum_j \lambda'_j S(X'_j) \qquad (۷)$$

هرگاه

$$\sum_i \lambda_i = \sum_j \lambda'_j \qquad (۸)$$

ii) *رابطهٔ $\prec$ در شرطهای (الف ۱) ـ (الف ۶) صدق می‌کند. و ف. م. برای هر نسخهٔ چند مقیاسی از Γ برقرار است.*

این تابع آنتروپی روی Γ در حد یک هم‌ارزی آفین یکتاست یعنی $S(X) \to aS(X) + B$ که $a > 0$.

اینکه $(ii) \Rightarrow (i)$، واضح است. اثبات $(i) \Rightarrow (ii)$ با ساختنِ صریح تابع آنتروپی روی Γ انجام می‌گیرد که یادآور تعریف قدیمی لاپلاس و لاووازیه از گرماست برحسب مقدار یخی که یک جسم می‌تواند ذوب کند.

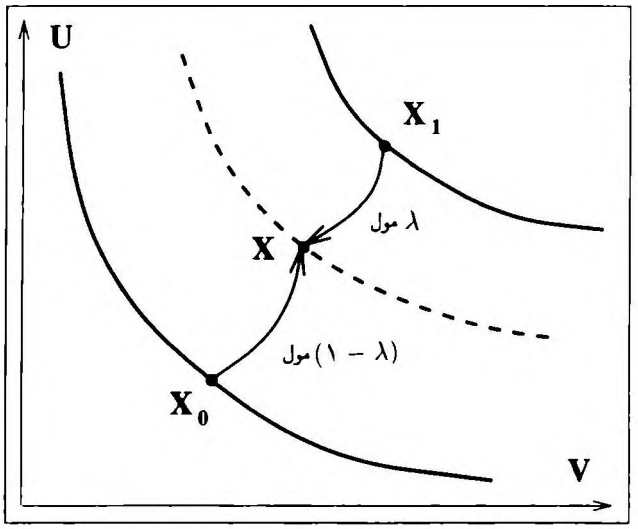
ساختنِ مقدماتی S (شکل ۲): دو نقطهٔ مرجع X_0 و X_1 را در Γ برگزینید که $X_0 \prec\prec X_1$. (اگر چنین نقاطی موجود نباشند، S تابع ثابت است). حال به ازای $X \in \Gamma$ تعریف می‌کنیم

$$S(X) := \sup\{\lambda : ((1-\lambda)X_0, \lambda X_1) \prec X\} \qquad (۹)$$

یادآوری. در (۹) نیز همانند اصل موضوع الف ۵ دو فضای حالت آمده‌اند. طبق اصل موضوع الف ۵، $X \overset{A}{\sim} ((1-\lambda)X, \lambda X)$ و بنابراین، طبق ف. م. در فضای $\Gamma^{(1-\lambda)} \times \Gamma^{(\lambda)}$، X با $((1-\lambda)X_0, \lambda X_1)$ مقایسه‌پذیر است. در (۹) با این قرارداد که $(X, -Y) \prec Z$ به معنی $X \prec (Y, Z)$ و $(X, 0Y) = X$ است، جایز می‌دانیم که $\lambda \leq 0$ و $\lambda \geq 1$. برای (۹) تنها نیاز داریم که بدانیم ف. م. برای حاصلضربهای دو مقیاسی از Γ با خودش برقرار است. در آن صورت ف. م. خود به خود برای همهٔ حاصلضربها درست خواهد بود. در (۹) نقاط مرجع X_0 و X_1 ثابت هستند و سوپرمم روی λ گرفته می‌شود. ممکن است بپرسید اگر دو نقطهٔ X_0 و X_1 را تغییر دهیم، S چگونه تغییر خواهد کرد. پاسخ این است که تغییر، آفین است، یعنی $S(X) \to aS(X) + B$ که $a > 0$.

قضیهٔ ۱ به حاصلضرب نسخه‌های چند مقیاسی از سیستمهای مختلف یعنی به سیستمهای مرکب کلی تعمیم می‌یابد. این تعمیم نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ زیر است که با به کاربردن قضیهٔ ۱ در بارهٔ حاصلضرب سیستم مورد بررسی با یک سیستم مرجع استاندارد به دست می‌آید.

قضیهٔ ۲ (مقیاسهای سازگار آنتروپی). *فرض کنید ف. م. برای تمام سیستمهای مرکب برقرار است. برای هر سیستم Γ، S_Γ را یک تابع آنتروپی*



شکل۲ آنتروپی X به وسیلهٔ بزرگترین مقدار X_1 که به‌طور بی‌درو قابل تبدیل به X است، به کمک X_0، تعیین می‌شود.

مشخص روی Γ به مفهوم قضیهٔ ۱ می‌گیریم. در این صورت ثابتهای a_Γ و $B(\Gamma)$ وجود دارند به‌طوری که تابع S که روی تمام سیستمها برای $X \in \Gamma$ به شکل

$$S(X) = a_\Gamma S_\Gamma(X) + B(\Gamma) \qquad (۱۰)$$

تعریف می‌شود، در شرایط جمع‌پذیری (۲) و گسترش‌پذیری (۳) و یکنوایی (۱) صدق می‌کند. به این مفهوم که هرگاه X و Y در یک فضای حالت باشند، آنگاه

$$S(X) \leq S(Y) \text{ اگر و تنها اگر } X \prec Y \qquad (۱۱)$$

قضیهٔ ۲ همان چیزی است که به آن نیاز داریم، البته جز در مورد مسألهٔ مخلوط شدن و واکنش شیمیایی که در پایان به آنها خواهیم پرداخت و می‌توان در مطالعهٔ اولیه آنها را کنار گذاشت. به بیان دیگر، تا هنگامی که فرایندهای بی‌دروی را که در آنها سیستمها به هم تبدیل می‌شوند (مثلاً سیستمی مرکب از یک ظرف هیدروژن و یک ظرف اکسیژن که به ظرفی حاوی آب تبدیل می‌شوند) به حساب نمی‌آوریم، اصل آنتروپی برقرار است. اگر چنین باشد، خواننده حق دارد بپرسد که دیگر چه کاری مانده است تا انجام شود. پاسخ دو جنبه دارد. اول آنکه در قضیهٔ ۲ لازم است ف. م. برای همهٔ سیستمها برقرار باشد و ما میل نداریم این را به عنوان اصل موضوع بپذیریم. دوم اینکه مفاهیم مهم ترمودینامیک مانند «تعادل گرمایی» (که نهایتاً به تعریف دقیقی از دما منجر خواهد شد) تاکنون رخ ننموده‌اند. خواهیم دید که این دو مطلب (یعنی تعادل گرمایی و ف. م.) به هم بی‌ربط نیستند.

در بارهٔ ف. م. اشاره می‌کنیم که نویسندگان دیگر ــ [۲] و [۴] و [۶] و [۹] ــ *برقراری آن را برای همه سیستمها می‌پذیرند*، به این طریق که، به عنوان اصل موضوع، قبول می‌کنند حالتهای مقایسه‌پذیر در یک ردهٔ هم‌ارزی قرار می‌گیرند (یعنی آنکه از شرایط $X \prec Z$ و $Y \prec Z$ همواره نتیجه

می‌شود X و Y مقایسه‌پذیر هستند، و همین‌طور از شرایط $Z \prec X$ و $Z \prec Y$). در این صورت، با مشخص کردن یک فضای حالت با یک ردهٔ هم‌ارزی، فرض مقایسه در این رهیافتهای دیگر بنا به فرض برقرار است. ولی ما ترجیح می‌دهیم ف. م. را از چیزی که به نظرمان بنیادیتر است به دست آوریم. در اینجا دو جزء مورد نیازند: بررسی چند سیستم خاص ولی دم‌دست که آنها را «سیستمهای ساده» می‌نامیم، و چند فرض در بارهٔ تماس گرمایی («قانون صفرم») که مانند نوعی چسب عمل خواهند کرد که بخشهای گوناگون یک سیستم مرکب را در هماهنگی با هم نگه می‌دارند. سیستمهای ساده سنگ بنای ترمودینامیک هستند؛ تمام سیستمهایی که بررسی می‌کنیم، ترکیبهایی از آنها هستند.

سیستمهای ساده

سیستم ساده سیستمی است که فضای حالتش را بتوان با یک زیرمجموعهٔ باز و محدب از $\mathbb{R}^{n+1}$ مشخص کرد که دارای یک مؤلفهٔ خاص U موسوم به *انرژی* و مختصات اضافی $V \in \mathbb{R}^n$ به نام مؤلفه‌های کار است. مؤلفهٔ انرژی، وسیلهٔ ارتباط ترمودینامیک با مکانیک است که مفهوم انرژی در آنجا مطرح و به‌دقت تعریف می‌شود. این حقیقت که مقدار انرژی در یک حالت، مستقل از این است که سیستم چگونه به آن حالت رسیده است، مضمون قانون اول ترمودینامیک است. یک مؤلفهٔ نوعی کار (که بیشتر اوقات تنها مؤلفه هم هست) حجم یک سیال یا گاز است (که با یک پیستون کنترل می‌شود)؛ مثالهای دیگر عبارت‌اند از مختصات تغییر شکل یک جسم جامد یا مغناطیده شدن یک جسم پارامغناطیس.

هدف ما این است که با اضافه کردن چند اصل موضوع دیگر نشان دهیم که ف. م. برای سیستمهای ساده و حاصلضربهای مقیاس‌دار آنها برقرار است. در این فرایند، ساختار مورد بحث را گسترش می‌دهیم تا مفاهیم شهودی ترمودینامیک را دربر بگیرد. یکی از این مفاهیم، تعادل گرمایی است.

نخست، اصل موضوعی در بارهٔ تحدب:

الف ۷. ترکیب محدب. اگر X و Y حالتهای یک سیستم ساده باشند و $t \in [0,1]$ آنگاه

$$(tX,(1-t)Y) \prec tX+(1-t)Y$$

که در اینجا جمع محدب عادی نقاط $\mathbb{R}^{n+1}$ موردنظر است. یک نتیجهٔ سرراست این اصل موضوع (و الف ۵) این است که **قطاعهای پیشرو**[1] وابسته به حالتهای X در یک سیستم سادهٔ Γ (شکل ۳):

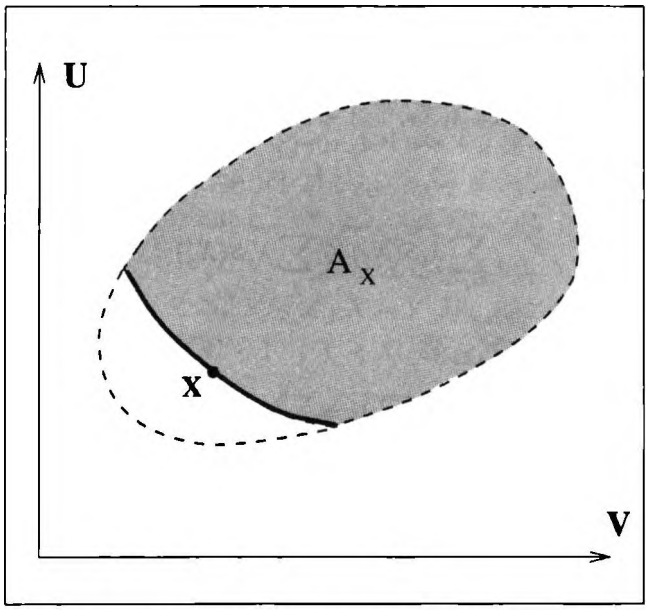
$$A_X := \{Y \in \Gamma : X \prec Y\} \qquad (۱۲)$$

مجموعه‌هایی محدب‌اند.

یک نتیجهٔ دیگر ارتباطی است میان وجود یک فرایند برگشت‌ناپذیر و اصل کاراتئودوری [۱ و ۳] که در بالا به آن اشاره شد.

لم ۱. *فرض کنید (الف ۱) ـ (الف ۷) برای $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ برقرارند و ادعاهای زیر را در نظر بگیرید*

1. forward sectors



شکل۳ مؤلفه‌های U و Vی یک سیستم ساده. بنا به اصل موضوع الف ۷، فضای حالت (که محدود به خط‌چین است) و قطاع پیشرو A_X (هاشور خورده) وابسته به یک حالت X، محدب‌اند. مرز A_X (خط پر) یک ردهٔ هم‌ارزیِ بی‌دررو است.

الف) وجود یک فرایند برگشت‌ناپذیر: برای هر $X \in \Gamma$، یک $Y \in \Gamma$ وجود دارد که $X \prec\prec Y$.

ب) اصل کاراتئودوری: در هر همسایگی هر نقطهٔ $X \in \Gamma$ یک $Z \in \Gamma$ وجود دارد که $X \not\prec Z$.

در این صورت، همیشه (الف) $\Leftarrow$ (ب). اگر قطاعهای پیشرو در Γ نقطه درونی داشته باشند آنگاه (ب) $\Leftarrow$ (الف).

به سه اصل موضوع دیگر برای سیستمهای ساده نیازمندیم که ما را به گشت‌وگذاری تحلیلی می‌کشانند. اولینِ اینها (الف) را در بالا برقرار می‌کند.

الف ۸. برگشت‌ناپذیری. برای هر $X \in \Gamma$ نقطه‌ای چون $Y \in \Gamma$ وجود دارد که $X \prec\prec Y$. (این اصل موضوع از اصل الف ۱۴ که در پایین ذکر خواهد شد، نتیجه می‌شود ولی آن را در اینجا جداگانه بیان می‌کنیم زیرا می‌توان نتایج مهمی را فقط از همین حکم استخراج کرد.)

الف ۹. صفحه‌های مماس لیپ‌شیتس. برای هر $X \in \Gamma$، *قطاع پیشرو* $A_X = \{Y \in \Gamma : X \prec Y\}$ یک صفحهٔ اتکای یکتا در X دارد. (یعنی A_X یک *صفحهٔ مماس* در X دارد) صفحهٔ مماس را یک تابع موضعاً لیپ‌شیتس-پیوسته از X، به مفهومی که در زیر توضیح داده می‌شود، فرض می‌کنیم.

الف ۱۰. همبندی مرز. ∂A_X، مرز هر قطاع پیشرو $A_X \subset \Gamma$ (نسبت به مجموعهٔ باز Γ) همبند است. (این اصل تا حدی تکنیکی است و می‌توان چیز دیگری به جای آن در نظر گرفت.)

اصل موضوع الف ۸ به همراه لم ۱ تضمین می‌کند که هر X روی ∂A_X، مرز قطاع پیشرو خودش، قرار دارد. اگرچه اصل موضوع الف ۹ تنها وجود یک

مماس واقعی در X را برای مجموعهٔ محدب A_X تضمین می‌کند، نتیجه‌ای ساده از اصل الف ۲ این است که A_X در هر نقطه از مرزش مماسی واقعی دارد. اینکه بگوییم این صفحهٔ مماس موضعاً لیپ‌شیتس-پیوسته است به این معناست که اگر $X = (U^*, V^*)$ آنگاه این صفحه چنین است:

$$U - U^* + \sum_{1}^{n} P_i(X)(V_i - V_i^*) = 0 \qquad (۱۳)$$

که P_iها توابع موضعاً لیپ‌شیتس-پیوسته هستند. تابع P_i *فشار* تعمیم‌یافتهٔ مزدوج یا مؤلفهٔ کار V_i نامیده می‌شود. (اگر V_i حجم باشد، P_i همان فشار عادی است.)

می‌دانیم که لیپ‌شیتس-پیوستگی و همبندی تضمین می‌کنند که معادلات دیفرانسیل جفت‌شدهٔ

$$\frac{\partial U}{\partial V_j}(V) = -P_j(U(V), V) \qquad j = 1, \ldots, n \qquad (۱۴)$$

نه تنها جواب دارند (چون می‌دانیم رویهٔ ∂A_X موجود است) بلکه این جواب یکتا هم هست. بنابراین اگر $Y \in \partial A_X$، آنگاه $X \in \partial A_Y$. کوتاه سخن اینکه رویه‌های ∂A_X فضای حالت Γ را برگ‌بندی می‌کنند. مطلبی که کمتر واضح است ولی چون بلافاصله فرض مقایسه روی Γ را به ما می‌دهد بسیار مهم است، این است:

قضیهٔ ۳ (قطاعهای پیشرو تودرتو هستند). *اگر A_X و A_Y دو قطاع پیشرو در Γ، فضای حالت یک سیستم ساده، باشند آنگاه درست یکی از احکام زیر درست است.*

الف) $A_X = A_Y$ یعنی $X \overset{A}{\sim} Y$.

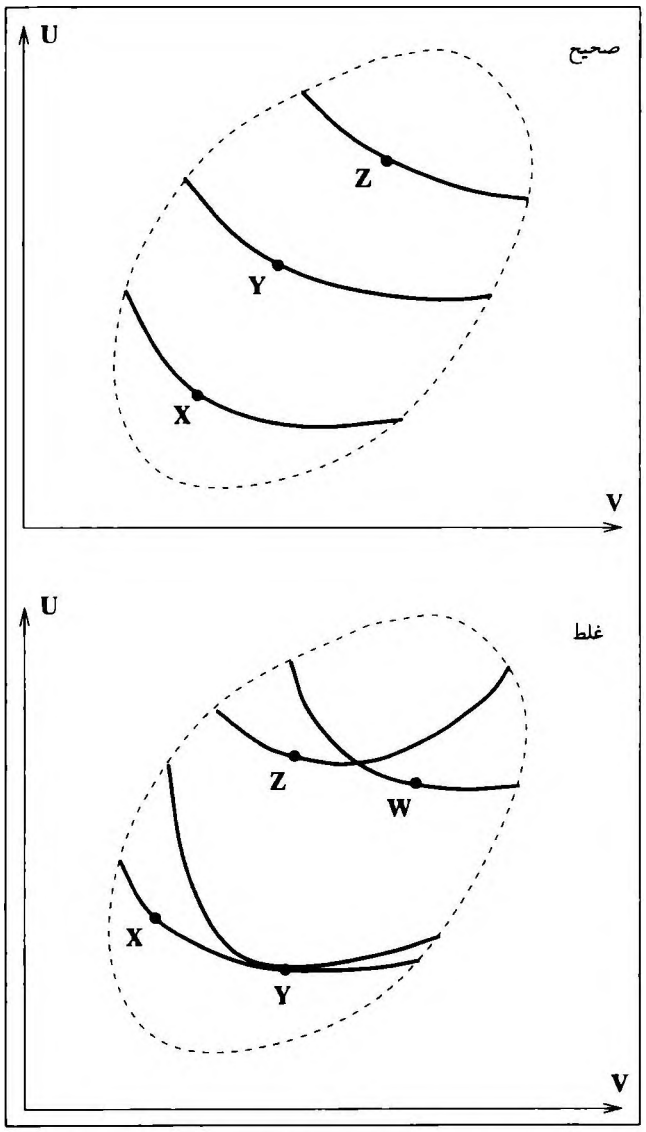
ب) $A_X \subset \mathrm{Int}(A_Y)$ یعنی $X \prec\prec Y$.

پ) $A_Y \subset \mathrm{Int}(A_X)$ یعنی $Y \prec\prec X$.

با استفاده از اصل موضوعهای ما همچنین می‌توان نشان داد که جهت قطاعهای پیشرو نسبت به محور انرژی برای همهٔ سیستمهای ساده یکی است. بنا به قرارداد، آن جهتی را برای محور انرژی برمی‌گزینیم که در فرایندهای بی‌دررو با مؤلفه‌های ثابت کار، انرژی همواره *افزایش یابد*. بعداً هنگامی که دما تعریف می‌شود، این فرض ما این نتیجه را خواهد داشت که دما همواره مثبت است.

از قضیهٔ ۳ نتیجه می‌شود که Y روی مرز A_X است اگر و تنها اگر X در مرز A_Y باشد. بنابراین رده‌های هم‌ارزی رابطهٔ $\overset{A}{\sim}$ از این مرزها تشکیل شده‌اند.

پیش از آنکه موضوع سیستمهای ساده را رها کنیم، رابطهٔ آن را با رهیافت کاراتئودوری شرح می‌دهیم. نقطهٔ ارتباط، این حقیقت است که $X \in \partial A_X$. فرض می‌کنیم A_X محدب است و از ترایایی و لیپ‌شیتس-پیوستگی استفاده می‌کنیم تا نهایتاً به قضیهٔ ۳ برسیم. کاراتئودوری از قضیهٔ فروبنیوس و همچنین فرضهایی در بارهٔ دیفرانسیل پذیری استفاده می‌کند تا وجود موضعی رویه‌ای شامل X را نتیجه بگیرد. اطلاعات مهم *سراسری* مانند قضیهٔ ۳ را در این صورت نمی‌توان به‌سادگی بدون فرضهای دیگر، آنگونه که مثلاً در [۱] بحث شده است، به دست آورد (شکل ۴).



شکل۴ قطاعهای پیشرو یک سیستم ساده، تودرتو هستند. شکل پایینی، اشکالی را که علی‌الاصول ممکن است پیش بیاید ولی عملاً نمی‌آید، نشان می‌دهد.

تماس گرمایی

تماس گرمایی و قانون صفرم مستلزم فرضهایی بسیار خاص در بارهٔ $\prec$ هستند که پیشتر به آنها اشاره کردیم. این امر به ما امکان می‌دهد که برقراری ف. م. را برای حاصلضرب چند سیستم نشان دهیم و بنابراین از طریق قضیهٔ ۲ نشان دهیم که آنتروپی وجود دارد و جمعی است. اگرچه برقراری ف. م. را تاکنون برای یک سیستم ساده مانند Γ، نشان داده‌ایم، ولی تا به حال آن را حتی برای حاصلضرب دو نسخه از Γ هم ثابت نکرده‌ایم. این موضوع در تعریف S که در (۹) داده شده است مورد نیاز است. S در (۹) در حد یک انتقال آفین معین می‌شود و ما می‌خواهیم آنتروپی‌ها را برای همهٔ سیستمها چنان مقیاس‌بندی کنیم (یعنی ضرایب جمعی و ضربی را تنظیم کنیم) که همراه با هم منجر به یک S سرتاسری شوند که در اصل آنتروپی صدق کند. ما به پنج اصل موضوع دیگر نیاز داریم. ممکن است این اصول کمی مجرد

به نظر برسند، پس چند کلمه، از باب معرفی، احتمالاً مفید خواهد بود.

برای مربوط کردن سیستمها به یکدیگر به امید برقراری ف. م. برای سیستمهای مرکب و بنابراین برای ساختن یک تابع آنتروپی جمعی، باید راهی یافت که آنها را به همدیگر ربط دهد. به‌طور شهودی دو سیستم ساده (یکسان یا متفاوت) را در نظر می‌گیریم که کنار هم قرار دارند و مؤلفه‌های کار (یعنی حجم) هر یک را تثبیت می‌کنیم. آنها را با یک «سیم مسی» به هم متصل می‌کنیم و صبر می‌کنیم تا تعادل برقرار شود. انرژی کل، U، تغییر نخواهد کرد ولی هر یک از انرژیهای U_1 و U_2 با مقدارهایی که به U و به مؤلفه‌های کار بستگی دارند، تطبیق می‌یابند. این سیستم تازه (با اتصال دائمی سیم) از این پس مانند یک سیستم ساده رفتار می‌کند (با یک مؤلفه انرژی) ولی با چند مؤلفه کار (اجتماع دو مؤلفه کار). پس اگر در ابتدا با $X_1 = (U_1, V_1)$ برای سیستم ۱ و $X_2 = (U_2, V_2)$ برای سیستم ۲ آغاز کنیم و کار خود را با $X = (U, V_1, V_2)$ برای سیستم تازه به پایان ببریم، می‌توانیم بگوییم که رابطهٔ $(X_1, X_2) \prec X$ برای هر انتخاب U_1, U_2 که جمعشان U باشد برقرار است. علاوه بر آن، پس از اینکه تعادل گرمایی برقرار شد، می‌توانیم اگر بخواهیم، دو سیستم را از هم جدا کنیم تا یک بار دیگر سیستمی مرکب بسازیم؛ در این حالت می‌گوییم بخشها و مؤلفه‌های سیستم در تعادل گرمایی‌اند. اینکه این رابطه تراباست، قانون صفرم ترمودینامیک است.

بنابراین نه تنها می‌توان سیستمهای مرکبی ساخت که از زیرسیستمهای مستقل تشکیل شده باشند (که با هم برهم‌کنش دارند ولی باز جدا می‌شوند) بلکه همچنین می‌توان از دو سیستم، یک سیستم سادهٔ تازه ساخت. برای چنین کاری باید یک مؤلفه انرژی ناپدید شود و تماس گرمایی این کار را برای ما انجام می‌دهد. تمام این مطالب در ۳ اصل موضوع زیر بیان شده است.

الف ۱۱. تماس گرمایی. برای هر دو سیستم ساده با فضاهای حالت Γ_1 و Γ_2، سیستم سادهٔ دیگری وجود دارد که آن را *پیوند گرمایی* Γ_1 و Γ_2 می‌خوانیم و دارای فضای حالت

$$\Delta_{12} = \{(U, V_1, V_2) : U = U_1 + U_2 \quad (U_1, V_1) \in \Gamma_1, (U_2, V_2) \in \Gamma_2\} \tag{۱۵}$$

است. علاوه بر آن

$$\Gamma_1 \times \Gamma_2 \ni ((U_1, V_1), (U_2, V_2)) \prec (U_1 + U_2, V_1, V_2) \in \Delta_{12} \tag{۱۶}$$

الف ۱۲. جداسازی گرمایی. برای هر نقطهٔ $(U, V_1, V_2) \in \Delta_{12}$ دستکم یک جفت حالت وجود دارد، $(U_1, V_1) \in \Gamma_1$، $(U_2, V_2) \in \Gamma_2$ که $U = U_1 + U_2$ چنانکه

$$(U_1, V_1, V_2) \overset{A}{\sim} ((U_1, V_1), (U_2, V_2)) \tag{۱۷}$$

اگر $(U, V_1, V_2) \overset{A}{\sim} ((U_1, V_1), (U_2, V_2))$، گوییم که حالتهای $X = (U_1, V_1)$ و $Y = (U_2, V_2)$ در *تعادل گرمایی‌اند* و می‌نویسیم $X \overset{T}{\sim} Y$.

الف ۱۳. قانون صفرم ترمودینامیک. اگر $X \overset{T}{\sim} Y$ و $Y \overset{T}{\sim} Z$ آنگاه $X \overset{T}{\sim} Z$.

الف ۱۱ و الف ۱۲ به همراه هم بیان می‌کنند که مؤلفه‌های کار را هر طور که انتخاب کنیم، راهی برای تقسیم انرژی U بین دو سیستم به صورت پایدار وجود دارد. الف ۱۲ بیان پایداری است زیرا می‌گوید که متصل کردن، برگشت‌پذیر است. یعنی وقتی حالت تعادل برقرار شد، می‌توان سیم مسی را برید و سیستمها را به حالت اول بازگرداند ولی با یک تقسیم خاص از انرژیها.

این برگشت‌پذیری به ما امکان می‌دهد که به پیوند گرمایی که خود یک سیستم ساده است مانند یک زیرمجموعهٔ ویژه از $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ بنگریم که آن را *قطر گرمایی* خواهیم نامید. به خصوص الف ۱۲ به ما امکان می‌دهد که به‌راحتی ثابت کنیم به ازای هر X و هر $\lambda > 0$، $X \overset{T}{\sim} \lambda X$.

الف ۱۳ همان قانون صفرم مشهور است که می‌گوید: تعادل گرمایی تراباست و بنابراین رابطه‌ای هم‌ارزی است. بسیاری از اوقات این اصل به این معنی گرفته می‌شود که می‌توان رده‌های هم‌ارزی را با یک دما «تجربی» برچسب‌گذاری کرد. ولی در اینجا به هیچ وجه نمی‌خواهیم به دما اشاره بکنیم. دما بعدها مطرح خواهد شد.

به دو اصل موضوع دیگر هم نیاز داریم.

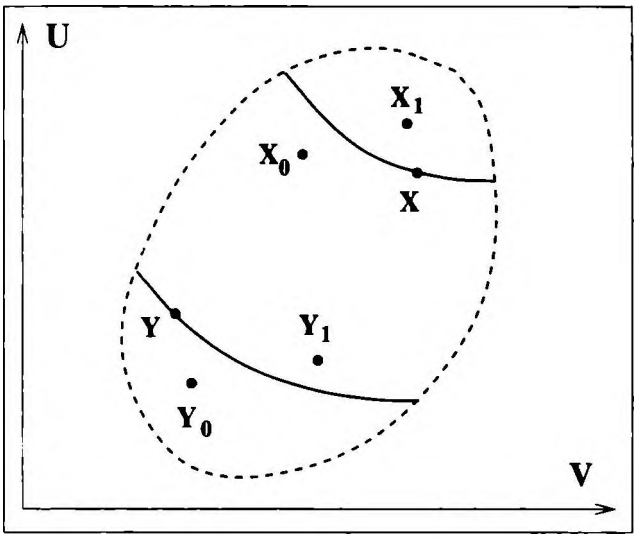
الف ۱۴ مستلزم این است که برای هر ردهٔ هم‌ارزی $\overset{A}{\sim}$ دستکم یک تکدما یعنی ردهٔ هم‌ارزی $\overset{T}{\sim}$ موجود باشد که نقاطی از هر دو سوی ردهٔ هم‌ارزی $\overset{A}{\sim}$ را دربرداشته باشد. توجه کنید که برای هر X داده شده، تنها دو نقطه در تمام فضای حالت Γ لازم است که این خاصیت را داشته باشند. این فرض اساساً از اینکه یک فضای حالت به دو جزء شکسته شود که با هم ارتباطی ندارند، جلوگیری می‌کند. بدون آن، می‌توان مثالهای ناقضی برای ف. م. در مورد سیستمهای مرکب آورد. الف ۱۴، اصل الف ۸ را نتیجه می‌دهد ولی الف ۸ را جداگانه بیان کردیم که بحث سیستمهای ساده را با بحث تعادل گرمایی خلط نکنیم.

الف ۱۵ مطلبی فنی است و شاید بتوان آن را حذف کرد. خاستگاه فیزیکیش این واقعیت است که یک نسخهٔ به اندازهٔ کافی بزرگ از یک سیستم می‌تواند مانند یک حمام گرما برای سیستمهای دیگر عمل کند. بعدها وقتی دما را معرفی می‌کنیم، الف ۱۵ این معنا را خواهد داشت که تمام سیستمها مقیاس دمایی یکسانی دارند. اگر بخواهیم که بین هر سیستمی با هر سیستم دیگر تعادل گرمایی ایجاد کنیم، به این اصل نیاز داریم.

الف ۱۴. تقاطع. اگر Γ فضای حالت یک سیستم ساده باشد و $X \in \Gamma$، آنگاه حالتهای $X_0 \overset{T}{\sim} X_1$ وجود دارند که $X_0 \prec\prec X \prec\prec X_1$.

الف ۱۵. مقیاس جهانی دما. اگر Γ_1 و Γ_2 فضاهای حالت سیستمهای ساده باشند، آنگاه برای هر $X \in \Gamma_1$ و هر V متعلق به تصویر Γ_2 روی فضای مؤلفه‌های کار خودش، یک $Y \in \Gamma_2$ با مؤلفه‌های کار V وجود دارد چنانکه $X \overset{T}{\sim} Y$.

خواننده حتماً متوجه شده است که مفهوم «تماس گرمایی» مطرح شده ولی نه دما نه سرد وگرم و نه هیچ چیزکه به بیانهای کلاوسیوس یا کلوین-پلانک از قانون دوم شبیه باشد نیامده است. با وجود این به دستاورد اساسی این رهیافت می‌رسیم: *با این اصول موضوع می‌توانیم برقراری ف. م.* را برای حاصلضربهای سیستمهای ساده (که همان‌طور که می‌دانیم هر یک از آنها در ف. م. صدق می‌کند) *نشان دهیم*. اول، پیوند گرمایی ف. م. را برای



شکل۵ تقاطع، الف ۱۴، مستلزم آن است که هر X نقاطی در هر سوی ردهٔ هم‌ارزی بی‌درو آن داشته باشد که در تعادل گرمایی باشند.

حاصلضرب (مقیاس‌دار) یک سیستم ساده در خودش برقرار می‌سازد. ایدهٔ اساسی در اینجا این است که نقاطی در حاصلضرب که روی قطر گرمایی قرار می‌گیرند، مقایسه‌پذیرند، زیرا نقاط یک سیستم ساده مقایسه‌پذیرند. به ویژه اگر X، X_0، X_1 همانها باشند که در الف ۱۴ ظاهر شده‌اند، حالتهای $((1-\lambda)X_0, \lambda X_1)$ و $((1-\lambda)X, \lambda X)$ را می‌توان حالتهای یک سیستم ساده به حساب آورد؛ پس مقایسه‌پذیرند. *این نکته‌ای اساسی است، که برای ساختن S بنابر(۹) به آن نیاز داریم.* به این ترتیب اهمیت تقاطع روشن می‌شود.

با کمی کار بیشتر می‌توانیم برقراری ف. م. را برای نسخه‌های چندمقیاسی از یک سیستم ساده نشان دهیم. ما S را در چارچوب یک سیستم و نسخه‌های آن یعنی شرط (ii) قضیهٔ ۱ ساخته‌ایم. تا هنگامی که با چنین دسته‌ای از سیستمها سروکار داریم، نمی‌توانیم ثابتهای مجهول جمعی و ضربی آنتروپی را تعیین کنیم. کار بعدی این است که نشان دهیم می‌توان ثابتهای ضربی را چنان تنظیم کرد که یک آنتروپی جهانی ارائه داد که برای نسخه‌های سیستمهای متفاوت معتبر باشد. یعنی فرضهای قضیهٔ ۲ را برقرار کرد. این کار را چنین انجام می‌دهیم.

ام ۲ (وجود تنظیم‌کننده‌ها[1]). *اگر Γ_1 و Γ_2 سیستمهای ساده‌ای باشند، آنگاه حالتهای $X_0, X_1 \in \Gamma_1$ و $Y_0, Y_1 \in \Gamma_2$ وجود دارند چنانکه*

$$Y_0 \prec\prec Y_1 \quad \text{و} \quad X_0 \prec\prec X_1$$

و

$$(X_0, Y_1) \overset{A}{\sim} (X_1, Y_0)$$

اهمیت ام ۲ در آنجاست که به امکان می‌دهد ثابتهای ضربی را به وسیلهٔ شرط

$$S_1(X_0) + S_2(Y_1) = S_1(X_1) + S_2(Y_0) \qquad (۱۸)$$

تعیین و تثبیت کنیم.

1. calibrators

اثبات ام ۲ پیچیده است و در واقع تمام اصول موضوع الف ۱ تا الف ۱۴ در آن به کار می‌رود. با کمک آن به هدف اصلیمان یعنی ف. م. برای سیستمهای مرکب می‌رسیم.

قضیهٔ ۴ (اصل آنتروپی برای حاصلضربهای سیستمهای ساده). *فرض مقایسه، در حاصلضربهای مقیاس‌دار دلخواه از سیستمهای ساده برقرار است. بنابراین طبق قضیهٔ ۲، رابطهٔ $\prec$ در میان حالتهای چنین فضاهای حالتی، با یک تابع آنتروپی S مشخص می‌شود. تابع آنتروپی در حد یک ثابت ضربی (جهانی) و یک ثابت جمعی برای هر سیستم مورد مطالعه، یکتاست.*

در پایان آماده‌ایم که *دما* را تعریف کنیم. مقعر بودن S (که از الف ۷ نتیجه می‌شود)، لیپ‌شیتس-پیوستگی فشار و شرط تقاطع، به همراه کمی آنالیز حقیقی، در مطالبی که در زیر می‌آیند نقش اساسی دارند. طی این مطالب به پرسشهای پ ۳ و پ ۴ که در آغاز مطرح شدند، پاسخ می‌دهیم.

قضیهٔ ۵ (آنتروپی، دما تعریف می‌کند). *آنتروپی، S، تابعی مقعر و پیوسته-مشتق‌پذیر روی فضای حالت یک سیستم ساده است. اگر تابع T را چنین تعریف کنیم*

$$\frac{1}{T} := \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V \qquad (۱۹)$$

آنگاه $T > 0$، و T رابطهٔ $\overset{T}{\sim}$ را مشخص می‌کند به این مفهوم که $X \overset{T}{\sim} Y$ اگر و تنها اگر $T(X) = T(Y)$. همچنین اگر دو سیستم با مؤلفه‌های کار ثابت در تماس گرمایی قرار گیرند آنگاه چون آنتروپی کل کاهش نمی‌یابد، انرژی از سیستمِ با Tی بالاتر به سیستمِ با Tی پایینتر جریان می‌یابد.

نیازی نیست که دما تابعی اکیداً یکنوا از U باشد. در حقیقت در یک «ناحیهٔ چندحالتی» چنین نیست. از این برمی‌آید که T همواره توانایی مشخص کردن یک حالت را ندارد. این حقیقت اگر در بحثهای معمول دربارهٔ قانون دوم مورد توجه قرار گیرد، ممکن است احساس ناخوشایندی پدید آورد ولی معمولاً چنین اتفاقی نمی‌افتد.

مخلوط‌کردن و واکنشهای شیمیایی

اکنون نتایج اصلی تحلیل ما عرضه شده است و خوانندگانی که با اصل آنتروپی در قالب قضیهٔ ۴ راضی می‌شوند، ممکن است بخواهند همین جا بحث را متوقف کنیم. ولی شک آزاردهنده‌ای رخ می‌نماید زیرا فرایندهای بی‌دررو مهمی وجود دارند که در خلال آنها سیستمها تغییر می‌کنند و ما در این نظریه تاکنون به چنین سیستمهایی نپرداخته‌ایم. نگاهی منتقدانه به شیوهٔ بحث کتابهای درسی رایج در این باره، خواننده را متقاعد خواهد کرد که این، موضوعی ساده نیست اما با توجه به کاربردهای گسترده و چندجانبهٔ ترمودینامیک در شیمی و زیست‌شناسی باید تمامی داستان گفته شود و چنین فرایندهایی نادیده گرفته نشوند.

می‌توان این مسأله را در قالب تعیین ثابتهای جمعی $B(\Gamma)$ در قضیهٔ ۲ مطرح کرد. تا زمانی که تنها فرایندهای بی‌دررو را بررسی می‌کنیم که محتویات

سیستمهای ساده را حفظ می‌کنند (یعنی چنان‌اند که برابریهای (۶) و (۸) برقرار می‌مانند)، این ثابتها نامعلوم‌اند. ولی اگر فرایندهای مخلوط‌کننده و واکنشهای شیمیایی را (که البته تا آنجا که به ترمودینامیک مربوط می‌شود، تفاوت چندانی با هم ندارند) به حساب آوریم، دیگر چنین نخواهد بود. در این صورت این سؤال که آیا می‌توان ثابتهای جمعی را چنان برگزید که اصل آنتروپی برقرار باشد، سؤالی پیش‌پا افتاده و بدیهی نخواهد بود. عجیب است که تعیین این ثابتها، چه از نظر فیزیکی و چه از نظر ریاضی، بسیار پیچیده‌تر از تعیین ثابتهای ضربی (قضیهٔ ۲) است. در رهیافتهای رایج، معمولاً از آزمایشهای ذهنی[1] بهره می‌جویند که در آنها اشیایی عجیب و ناموجود موسوم به «پوسته‌های نیم‌تراوا» و جعبه‌های ون‌هوف[2] به کار می‌روند. ما در اینجا رهیافتی کلی و دقیق ارائه می‌دهیم که به هیچ‌یک از اینها کاری ندارد.

آنچه تاکنون می‌دانیم این است که هر سیستم یک تابع خوش‌تعریف آنتروپی دارد ـ یعنی برای هر Γ، یک S_Γ وجود دارد ـــ و از قضیهٔ ۲ می‌دانیم که می‌توان ثابتهای ضربی a_Γ را چنان تعیین کرد که مجموع آنتروپی‌ها در هر فرایند بی‌دررو در هر سیستم مرکب $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots$ افزایش یابد. بنابراین اگر $X_i, Y_i \in \Gamma_i$ آنگاه

$$(X_1, X_2, \ldots) \prec (Y_1, Y_2, \ldots) \Longleftrightarrow \sum_i S_i(X_i) \leq \sum_j S_j(Y_j) \qquad (۲۰)$$

که S_{Γ_i} را برای اختصار به S_i نشان داده‌ایم. ثابتهای جمعی آنتروپی در اینجا مهم نیستند زیرا هر تابع S_i در هر دو سوی نابرابری آمده است. باید توجه کرد که این موضوع حتی در مورد فرایندهایی که در مراحل میانی سیستمی را به سیستمی دیگر تبدیل می‌کنند، برقرار است، به شرط آنکه سیستم مرکب در آغاز و پایان فرایند یکسان باشد.

باید برای هر فضای حالت Γ یک ثابت $B(\Gamma)$ چنان بیابیم که آنتروپی که با

$$S(X) := S_\Gamma(X) + B(\Gamma) \quad \text{برای} \quad X \in \Gamma \qquad (۲۱)$$

تعریف می‌شود، در

$$S(X) \leq S(Y) \qquad (۲۲)$$

هر گاه

$$X \prec Y \quad \text{که} \quad X \in \Gamma,\ Y \in \Gamma'$$

صدق کند. علاوه بر این، این شرط را می‌گذاریم که آنتروپی تازه تعریف شده در شرطهای مقیاس‌بندی و جمع‌پذیری تحت ترکیب صدق کند. از آنجا که آنتروپی‌های اولیهٔ $S_\Gamma(X)$ در این شرطها صدق می‌کنند این شرطها به صورت محدودیتهایی بر ثابتهای جمعی $B(\Gamma)$:

$$B(\Gamma_1^{\lambda_1} \times \Gamma_2^{\lambda_2}) = \lambda_1 B(\Gamma_1) + \lambda_2 B(\Gamma_2) \qquad (۲۳)$$

برای همهٔ فضاهای حالت Γ_1، Γ_2ی موردنظر و $\lambda_1, \lambda_2 > 0$، درمی‌آیند. کمی تأمل به ما نشان می‌دهد که سازگاری در تعریف ثابتهای آنتروپی $B(\Gamma)$ مستلزم آن است که تمام زنجیرهای ممکن از فرایندهای بی‌دررود را که از طریق مراحل میانی از یک فضا به فضای دیگر منجر می‌شوند، به حساب آوریم. علاوه بر آن، شرط جمع‌پذیری به ما امکان می‌دهد. در فرایندها از کنش‌یار[1] استفاده کنیم، یعنی از سیستمهای کمکی که در پایان به حالت آغازین خود برمی‌گردند هر چند تغییر حالتی در درون این سیستم ممکن است صورت گیرد. با توجه به این، کمیتهای $F(\Gamma, \Gamma')$ را تعریف می‌کنیم که تفاوتهای آنتروپی را در چنین زنجیرهایی که از Γ به Γ' می‌روند، به هم می‌افزایند. اینها را با استفاده از کمیتهای ساده‌تر $D(\Gamma, \Gamma')$ که تفاوت آنتروپی در فرایندهای تک مرحله‌ای در غیاب کنش‌یار را اندازه می‌گیرد، و $E(\Gamma, \Gamma')$، می‌سازیم. تعریفهای دقیق چنین‌اند: نخست

$$D(\Gamma, \Gamma') := \inf\{S_{\Gamma'}(Y) - S_\Gamma(X) : X \in \Gamma,\ \ Y \in T', X \prec Y\} \qquad (۲۴)$$

اگر هیچ فرایند بی‌دررو‌ی موجود نباشد که از Γ به Γ' برود، قرار می‌دهیم: $D(\Gamma, \Gamma') = \infty$. حال برای هر Γ و Γ' داده شده، تمام زنجیرهای متناهی از فضاهای حالت $\Gamma = \Gamma_1, \ldots, \Gamma_N = \Gamma'$ را در نظر می‌گیریم که $D(\Gamma_i, \Gamma_{i+1}) < \infty$ برای هر i. تعریف می‌کنیم

$$E(\Gamma, \Gamma') := \inf\{D(\Gamma_1, \Gamma_2) + \cdots + D(\Gamma_{N-1}, \Gamma_N)\} \qquad (۲۵)$$

که inf روی همهٔ زنجیرهایی که Γ را به Γ' می‌پیوندند گرفته شده است. و سرانجام تعریف می‌کنیم

$$F(\Gamma, \Gamma') := \inf\{E(\Gamma \times \Gamma_0, \Gamma' \times \Gamma_0)\} \qquad (۲۶)$$

که inf روی تمام فضاهای حالت Γ_0 (کنش‌یارها) گرفته شده است. اهمیت F برای تعیین ثابتهای جمعی با قضیهٔ زیر روشن خواهد شد.

قضیهٔ ۶ (تفاوتهای ثابت آنتروپی). *اگر Γ و Γ' دو فضای حالت باشند، برای هر دو حالت $X \in \Gamma$ و $Y \in \Gamma'$ داریم*

$$X \prec Y \Longleftrightarrow S_\Gamma(X) + F(\Gamma, \Gamma') \leq S_{\Gamma'}(Y) \qquad (۲۷)$$

جزء اصلی اثبات این قضیه، برابری (۲۰) است.

بنابر قضیهٔ (۶)، تعیین ثابتهای آنتروپی به این نیاز دارد که نابرابریهای

$$-F(\Gamma', \Gamma) \leq B(\Gamma) - B(\Gamma') \leq F(\Gamma, \Gamma') \qquad (۲۸)$$

به همراه شرط خطی بودن (۲۳) برقرار باشند. روشن است که (۲۸) تنها هنگامی با ثابتهای متناهی $B(\Gamma)$ و $B(\Gamma')$ برقرار می‌شود که $F(\Gamma, \Gamma') > -\infty$. برای کنار گذاشتن حالت نامعقول $F(\Gamma', \Gamma) = -\infty$، اصل موضوع پایانی الف ۱۶ را معرفی می‌کنیم که بیان آن به تعریف زیر نیاز دارد.

تعریف. فضای حالت Γ متصل به فضای حالت دیگر Γ' خوانده می‌شود اگر حالتهای $X \in \Gamma$ و $Y \in \Gamma'$ و فضاهای حالت $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ با

1. gedanken experiments 2. van t'Hoff

1. catalyst

حالتهای $X_i, Y_i \in \Gamma_i$، $i = 1, \ldots, N$، و فضای حالت Γ_0 با حالتهای $X_0, Y_0 \in \Gamma_0$ وجود داشته باشند چنانکه

$$(X, X_0) \prec \Gamma_1 \qquad X_i \prec Y_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, N-1$$
$$X_N \prec (Y, Y_0)$$

الف ۱۶. نبود چاه. اگر Γ به Γ' متصل باشد، Γ' هم به Γ متصل است.

این اصل موضوع، حالت $F(\Gamma, \Gamma') = -\infty$ را طرد می‌کند. زیرا بنا به دلایلی کلی، همواره داریم

$$-F(\Gamma', \Gamma) \leq F(\Gamma, \Gamma') \qquad (۲۹)$$

پس، از $F(\Gamma, \Gamma') = -\infty$ (که به خصوص این معنا را می‌رساند که Γ به Γ' متصل است) نتیجه خواهد شد $F(\Gamma', \Gamma) = \infty$ یعنی هیچ راه برگشت از Γ' به Γ وجود ندارد و این بنابر اصل موضوع ۱۶ ناممکن است.

کمیتهای $F(\Gamma, \Gamma')$ ویژگیهای زیرجمعی ساده‌ای دارند که به ما امکان می‌دهند قضیهٔ هان-باناخ را به کار ببریم تا نابرابری (۲۸) با ثابتهای $B(\Gamma)$ که، به مفهوم برابری (۲۳)، به طور خطی به Γ وابسته‌اند، برقرار شود. پس می‌رسیم به

قضیهٔ ۷ (آنتروپی جهانی) *ثابتهای جمعی آنتروپی تمام سیستمها را می‌توان چنان مقیاس‌بندی کرد که آنتروپی، جمعی و گسترشی باشد و از $X \prec Y$ نتیجه شود $S(X) \leq S(Y)$ حتی وقتی که X و Y در یک فضای حالت نباشند.*

در پایان یادآوری می‌کنیم که ثابتهای $B(\Gamma)$ یکتا نیستند. این تعیین‌ناپذیری ریشه در یکتا نبودن تابعکی خطی دارد که باید بین $F(\Gamma, \Gamma')$ و $-F(\Gamma', \Gamma)$ قرار بگیرد و دو سرچشمهٔ احتمالی دارد: یکی آن است که بعضی جفتهای فضاهای حالت Γ' و Γ ممکن است متصل نباشند. یعنی ممکن است $F(\Gamma, \Gamma')$ نامتناهی باشد. (که در این صورت طبق اصل موضوع الف ۱۶، $F(\Gamma', \Gamma)$ هم نامتناهی است). دیگر آنکه ممکن است شکافی واقعی وجود داشته باشد یعنی ممکن است رابطهٔ

$$-F(\Gamma', \Gamma) < F(\Gamma, \Gamma') \qquad (۳۰)$$

حتی اگر هر دو طرفش متناهی باشند، برای بعضی فضاهای حالت برقرار باشد.

در طبیعت فقط حالتهایی که میزان یکسانی عناصر شیمیایی همانند داشته باشند ممکن است به یکدیگر تبدیل شوند. پس برای جفتهای بسیاری از فضاهای حالت، به خصوص آنها که مقادیر متفاوتی از یک عنصر شیمیایی دارند، $F(\Gamma, \Gamma') = +\infty$. بنابراین ثابتهای $B(\Gamma)$ هیچگاه یکتا نیستند. برای هر ردهٔ هم‌ارزی از فضاهای حالت (از دید رابطهٔ اتصال) می‌توان ثابتی پیدا کرد که جز از این لحاظ که ثابتها باید جمعی و تحت ترکیب و مقیاس‌بندی سیستمها، گسترشی باشند، دلخواه است. در جهان ما ۹۲ عنصر شیمیایی وجود دارد. (یا اگر بخواهیم دقیقتر باشیم کمی بیشتر ــ مثلاً N، چون ایزوتوپهای مختلف را در اینجا باید عناصر متفاوتی شمرد) پس دست‌کم ۹۲ ثابت آزاد داریم که هر یک مشخص‌کنندهٔ آنتروپیِ مثلاً یک گرم از هر یک از عناصر شیمیایی در یک حالت ویژه است.

سرچشمهٔ احتمالی دیگرِ نایکتایی، یعنی شکاف نابدیهی (۳۰) برای سیستمهای با ترکیب یکسان از عناصر شیمیایی، تا آنجا که ما می‌دانیم در طبیعت دیده نشده است. (توجه کنید که می‌توان این ادعا را به صورت تجربی بی‌یاری جستن از پوسته‌های نیم‌تراوا آزمود.) پس همین که ثابتهای آنتروپی برای عناصر شیمیایی و یک واحدِ دما را برگزیدیم (برای مشخص کردن ثابتهای صفر)، آنتروپی جهانی کاملاً تثبیت شده است.

در نوشتن این مقاله مرهون بسیاری کسان هستیم که گفتگوهای سودمندی با آنها داشته‌ایم از جمله، فرد آلمگرن، تور باک، برنهارت باوم‌گارتنر، پیراوییجی کونتوچی، روی جکسن، آنتونی کتاپ، مارتین کروسکال، مری بت روسکایی و یان فیلیپ سولووِی.

مراجع

1. J. B. Boyling, *An axiomatic approach to classical thermodynamics*, Proc. Roy. Soc. London **A329** (1972), 35-70.
2. H. A. Buchdahl, *The concepts of classical thermodynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.
3. C. Carathéodory, *Untersuchung über die Grundlagen der Thermodynamik*, Math. Ann. **67** (1909), 355-386.
4. J. L. B. Cooper, *The foundations of thermodynamics*, J. Math. Anal. Appl. **17** (1967), 172-193.
5. J. J. Duistermaat, *Energy and entropy as real morphisms for addition and order*, Synthese **18** (1968), 327-393.
6. R. Giles, *Mathematical foundations of thermodynamics*, Pergamon, Oxford, 1964.
7. E. H. Lieb and J. Yngvason, *The physics and mathematics of the second law of thermodynamics*, preprint, 1997; Phys. Rep. (to appear); Austin Math. Phys. arch. 97-457; Los Alamos arch. condmat/9708200.
8. M. Planck, *Über die Begrundung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. (1926), 453-463.
9. F. S. Roberts and R. D. Luce, *Axiomatic thermodynamics and extensive measurement*, Synthese **18** (1968), 311-326.

******

• Elliott H. Lieb and Jakob Yngvason, "A guide to entropy and the second law of thermodynamics", *Notices Amer. Math. Soc.* (5) **45** (1998).

* الیوت لیب، دانشگاه پرینستن آمریکا

Lieb@math.princeton.edu.

** یاکوب اونگواسون، دانشگاه وین اتریش

yngvason@thor.thp.univie.ac.at.

نشر ریاضی، سال ۹، شمارهٔ ۲، صص ۳۸ـ۴۲

روشهای هومولوژیک در جبر جابجایی

سیامک یاسمی*

مقدمه

از آغاز دههٔ ۱۹۵۰ روشهای هومولوژیک از جملهٔ مهمترین ابزارها در شاخه‌های مختلف ریاضیات بوده است. استفاده از این روشها مخصوصاً در موضوعات «جبری» مانند هندسهٔ جبری، توپولوژی جبری و جبر جابجایی بسیار بارز است. هدف از نگارش این گزارش، معرفی حدسهایی در جبر جابجایی است که با روشهای هومولوژیک به اثبات رسیده‌اند.

فرض بر این است که خوانندگان با نظریهٔ حلقه‌ها آشنایی مختصری دارند. در این گزارش تمامی حلقه‌ها جابجایی و یکدار (ناصفر) هستند.

۱. جبر جابجایی بدون روشهای هومولوژیک (۱۹۰۰ میلادی)

حلقهٔ R را نوتری گوییم در صورتی‌که هر ایده‌آل آن به‌وسیلهٔ تعداد متناهی عنصر تولید شود. قضیهٔ پایه‌ای هیلبرت نشان داد که حلقهٔ چندجمله‌ایهای با تعداد متناهی متغیر و با ضرایب مختلط، $R = \mathbb{C}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$، یک حلقهٔ نوتری است.

حلقهٔ R را موضعی نامیم در صورتی‌که دقیقاً یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد. به‌عنوان مثال اگر $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از حلقهٔ R باشد، آنگاه حلقهٔ موضعی‌شدهٔ R به‌وسیلهٔ $\mathfrak{p}$ یعنی

$$R_{\mathfrak{p}} = \{\frac{a}{s} | a \in R, s \in R \backslash \mathfrak{p}\}$$

یک حلقهٔ موضعی، و مجموعهٔ

$$\{\frac{p}{s} | p \in \mathfrak{p}, s \in R \backslash \mathfrak{p}\}$$

تنها ایده‌آل ماکسیمال آن است.

از این به بعد منظور از R حلقه‌ای نوتری و موضعی است که تنها ایده‌آل ماکسیمال آن $\mathfrak{m}$ است و k میدان $\frac{R}{\mathfrak{m}}$ می‌باشد.

معرفی مفهوم بُعد حلقه به‌وسیلهٔ کرول دریچهٔ جدیدی را به روی مطالعهٔ حلقه‌ها گشود. بُعد کرولِ حلقهٔ R، که آن را با نماد «$\dim R$» نمایش می‌دهیم، عبارت است از

$$\dim R = \sup\{l \in \mathbb{Z} | \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_l \text{ زنجیری از ایده‌آلهای اول } R\}$$

یکی از اساسیترین نتایج در جبر جابجایی، قضیه‌ای از کرول است که به «(تعمیم) قضیهٔ ایده‌آل اصلی کرول» معروف است.

قضیهٔ کرول. *فرض کنیم I ایده‌آلی از R باشد که به‌وسیلهٔ n عنصر تولید شده است. همچنین فرض کنیم $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولِ مینیمالِ I باشد ($I \subseteq \mathfrak{p}$، و ایده‌آل اول دیگری مانند $\mathfrak{q}$ موجود نباشد که $I \subseteq \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$). در این صورت*

$$\dim R_{\mathfrak{p}} \leq n$$

نتیجه. *اگر ایده‌آل ماکسیمال R به‌وسیلهٔ n عنصر تولید شود آنگاه*

$$\dim R \leq n$$

معرفی حلقه‌های منظم با توجه به نتیجهٔ فوق امکان‌پذیر می‌شود. فرض کنیم بُعد حلقهٔ R برابر n باشد. آنگاه R *را منظم* گوییم هرگاه $\mathfrak{m}$ به وسیلهٔ n عنصر تولید شود.

مثال ۱. الف) $\mathbb{Z}_{2\mathbb{Z}}$ یک حلقهٔ منظم است؛ ب) حلقهٔ $R = \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ منظم نیست زیرا $\dim R = 0$ ولی $\mathfrak{m} = \frac{2\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ با یک عنصر تولید می‌شود.

حدسهای زیر را کرول مطرح کرده است.

حدسهای کرول. *۱) اگر R منظم باشد، آنگاه به ازای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R، حلقهٔ $R_{\mathfrak{p}}$ منظم است. ۲) اگر R منظم باشد آنگاه R یک حوزهٔ [= دامنهٔ] صحیح با تجزیهٔ یکتا (UFD) می‌باشد. (طبق یکی از نتایج قبلی هر حلقهٔ منظم یک حوزهٔ صحیح است.)*

در بخش بعد تاریخچهٔ اثبات حدسهای فوق را می‌آوریم.

۲. مدولها و روشهای هومولوژیک (۱۹۵۵ میلادی)

می‌توان گفت که در اواخر دهۀ ۱۹۵۰ با استفاده از روشهای هومولوژیک انقلابی در جبر جابجایی صورت گرفت. افرادی مانند اوسلندر[1]، باکسبام[2]، سِر[3] و دیگران با استفاده از روشهای هومولوژیک موفق به حل تعدادی از حدسهای مهم در جبر جابجایی شدند. به‌علاوه حدسهای جدیدی نیز در حالتهای مختلف مطرح کردند. این حدسها را بعدها حدسهای هومولوژیک نامیدند. شاید بتوان گفت که مهمترین دستاورد دهۀ ۱۹۵۰، اثبات حدسهای کرول بوده است.

فرض کنیم M یک Rـمدول متناهی‌مولد و $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ مجموعۀ مولد M باشد. دراین صورت همریختیِ پوشای $\varphi_0 : R^{n_0} \longrightarrow M$ موجود است که iامین عضو پایۀ استاندارد R^{n_0} را با iامین مولد M یعنی x_i نظیر می‌کند. فرض کنیم L_0 هستهٔ φ_0 و $\{l_1, l_2, \ldots, l_{n_1}\}$ مجموعۀ مولد L_0 باشد (چون R نوتری است، L_0 متناهی‌مولد است). در نتیجه رشتهٔ دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow L_0 \xrightarrow{\lambda_0} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

را خواهیم داشت که در آن $F_0 = R^{n_0}$ و λ_0 تابع شمول است. (منظور از رشتهٔ دقیق کوتاه این است که λ_0 یک به یک است، $\mathrm{Im}\lambda_0 = \mathrm{Ker}\varphi_0$، و φ_0 پوشاست.) چون L_0 نیز متناهی‌مولد است، رشتهٔ دقیق کوتاه

$$0 \to L_1 \xrightarrow{\lambda_1} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} L_0 \to 0$$

را خواهیم داشت که در آن $F_1 = R^{n_1}$. با ادامهٔ این روش به‌ازای هر $i \geq 0$ رشتهٔ دقیق کوتاه

$$0 \to L_i \xrightarrow{\lambda_i} F_i \xrightarrow{\varphi_i} L_{i-1} \to 0$$

را داریم که در آن $F_i = R^{n_i}$. با وصل کردن این رشته‌های دقیق کوتاه به یکدیگر، رشتهٔ دقیق طولانی

$$F_M : \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\partial_i} F_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} M \longrightarrow 0$$

به‌دست می‌آید که در آن

۱) $\partial_0 = \varphi_0$

۲) $\partial_i = \lambda_{i-1}\varphi_i$ به‌ازای هر $i > 0$

۳) $\mathrm{Im}\partial_i = \mathrm{Ker}\partial_{i-1}$ به‌ازای $i \geq 1$

رشتهٔ دقیق طولانی F_M *را تحلیل آزاد متناهی‌مولد* M گوییم.

مثال ۲. فرض کنیم $R = \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ و $\mathfrak{m} = \frac{2\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ و $M = \frac{R}{\mathfrak{m}}$. در این صورت

$$\cdots \longrightarrow R \xrightarrow{2} R \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{2} R \xrightarrow{2} R \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

تحلیل آزاد متناهی‌مولد M خواهد بود. همان‌طورکه مشاهده می‌شود، زنجیر فوق از سمت چپ نامتناهی است و می‌توان نشان داد که در این مثال، تحلیل آزاد متناهی‌مولدی برای M که از سمت چپ کراندار باشد، موجود نیست.

1. Auslander 2. Buchsbaum 3. Serre

در بین Rـمدولها، Rـمدولهای آزادِ متناهی‌مولد (مدولهایی که برای آنها $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به‌طوری‌که مدول با R^n یکریخت شود) ساده‌ترین ساختار را دارند و هر چه تحلیل آزاد متناهی‌مولدِ یک مدول طویلتر باشد ساختار Rـمدول پیچیده‌تر خواهد بود.

یکی از نتایج جالبی که از کارهای هیلبرت و سِر به‌دست آمده است، نشان می‌دهد که هر مدول متناهی‌مولد M روی حلقهٔ چندجمله‌ای $R = k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ (k میدان است) دارای یک تحلیل آزاد متناهی‌مولدِ از چپ کراندار می‌باشد.

فرض کنیم M یک Rـمدول متناهی‌مولد باشد. طول کوتاهترین تحلیل آزاد متناهی‌مولد M را *بُعد پروژکتیو* M می‌نامیم و با نماد $\mathrm{pd}_R(M)$ نمایش می‌دهیم:

$$\mathrm{pd}_R(M) = \inf\{l \in \mathbb{Z} | 0 \longrightarrow F_l \longrightarrow F_{l-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \text{ تحلیل آزاد متناهی‌مولد } M\}$$

مثال ۳. در مثال ۲، بُعد پروژکتیو M نامتناهی است.

اوسلندر و باکسبام در [۱] از یک طرف و سِر در [۱۱] (به‌طور مستقل) از طرف دیگر نتیجهٔ مهم زیر را به‌دست آوردند.

قضیه. *حلقهٔ R منظم است اگر و فقط اگر بُعد پروژکتیو هر Rـمدول متناهی‌مولد، متناهی باشد.*

یکی از نتایج بسیار مهمی که از قضیهٔ فوق به‌دست آمد، اثبات حدسهای کرول بود. با این موفقیت، کاربرد روشهای هومولوژیک در جبر جابجایی آغاز شد. یکی از سؤالهای هومولوژیک که پس از اثبات قضیهٔ فوق مطرح شد آن بود که «آیا مدولهای با بُعد پروژکتیوِ متناهی روی حلقهٔ دلخواه، رفتاری مشابه با مدولهای روی حلقه‌های منظم دارند یا نه». حدس اشتراک[1] یکی از مهمترین حدسهای این دوره است. قدم بعدی درگزارش ما، معرفی این حدس است.

همانند موضعی‌سازیِ یک حلقه نسبت به یک ایده‌آل اول، می‌توان مفهوم موضعی‌سازی یک مدول نسبت به یک ایده‌آل اول را مطرح کرد. فرض کنیم M یک Rـمدول و $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از R باشد. دراین‌صورت *موضعی‌سازیِ* M نسبت به $\mathfrak{p}$ عبارت است از تشکیل مدولی که آن را با $M_{\mathfrak{p}}$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر است

$$M_{\mathfrak{p}} = \{\frac{x}{s} | x \in M, s \in R \backslash \mathfrak{p}\}$$

که یک $R_{\mathfrak{p}}$ـمدول می‌باشد. همچنین *محمل* مدول M را با $\mathrm{Supp}(M)$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از

$$\mathrm{Supp}(M) = \{\mathfrak{p} \text{ ایده‌آل اول } | M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$$

تذکر. اگر حلقهٔ R را به‌عنوان Rـمدول در نظر بگیریم، $\mathrm{Supp}(R)$ مجموعهٔ همهٔ ایده‌آلهای اول حلقهٔ R خواهد بود.

1. intersection conjecture

به روش مشابهٔ بُعد کرول Rـمدول M را تعریف می‌کنیم

$$\dim M = \sup\{l \in \mathbb{Z} | \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_l$$

{زنجیری از ایده‌آلهای اول در محمل M

حکم زیر را سیر اثبات کرده و به نام قضیهٔ اشتراک نامگذاری شده است.

قضیهٔ اشتراک. *فرض کنیم R یک حلقهٔ منظم، و M و N دو Rـمدول متناهی‌مولد باشند. در این صورت*

$$\dim M + \dim N \leq \dim R + \dim(M \otimes N)$$

تذکر. قضیهٔ فوق در حالت کلی برقرار نیست. برای این منظور به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴. فرض کنیم $R = \frac{K[X,Y]}{(XY)}$ و $M = \frac{R}{(X)}$ و $N = \frac{R}{(Y)}$. در این صورت $M \otimes N \cong k$ و بنابراین $\dim(M \otimes N) = 0$. از طرف دیگر $\dim M + \dim N = 1 + 1 = 2 > 1 = \dim R$.

حدس اشتراک. *فرض کنیم R یک حلقه (نه لزوماً منظم) باشد و M و N دو Rـمدول متناهی‌مولد باشند به‌طوری که بُعد پروژکتیو M متناهی باشد. در این صورت*

$$\dim M + \dim N \leq \dim R + \dim(M \otimes N)$$

وجه تسمیهٔ قضیهٔ اشتراک

فرض کنیم V و W دو زیرفضای برداری از یک فضای برداری nبعدی باشند. در این صورت طبق یکی از نتایج مقدماتی در جبر خطی

$$\dim V \cap W \geq \dim V + \dim W - n$$

مشابه این نتیجه در هندسهٔ جبری نیز برقرار است. بر اساس قضیهٔ «بُعد اشتراک آفین» (رجوع شود به [۵] قضیهٔ ۱.۷)، اگر X و Y دو واریتهٔ آفین از بُعدهای r و s در فضای آفین nبُعدی باشند و $X \cap Y$ ناتهی باشد، بُعد آن از $r + s - n$ کمتر نیست.

فرض کنیم $R = k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای nمتغیره روی میدان k باشد. همچنین فرض کنیم X و Y دو واریتهٔ آفین در R باشند و ایده‌آلهای تعریف‌کنندهٔ آنها I و J باشد. در این صورت بُعد X و Y به ترتیب با بُعد کرول حلقه‌های R/I و R/J برابر است. ایده‌آل $I + J$ مجموعهٔ جبری $X \cap Y$ را تعریف می‌کند و داریم $\frac{R}{I+J} \cong \frac{R}{I} \otimes_R \frac{R}{J}$ و لذا طبق قضیه بُعد اشتراک آفین

$$\dim R/I \otimes_R R/J \geq \dim R/I + \dim R/J - \dim R$$

که حالت خاصی از قضیهٔ اشتراک است.

تذکر. حدس فوق تاکنون (زمان نگارش این گزارش) به‌طور کامل اثبات نشده است.

افراد بسیاری برای اثبات یا در رد این حدس تلاش کرده‌اند و در این میان حدسهای قویتر و ضعیفتری از حدس فوق مطرح شده است که از آن جمله می‌توان از حدس ضعیف اشتراک نام برد.

حدس ضعیف اشتراک. *فرض کنیم M و N دو Rـمدول متناهی‌مولد باشند. در این صورت* $\dim N \leq \mathrm{pd} M + \dim(M \otimes N)$.

تذکر. با قراردادن $N = R$ در حکم فوق خواهیم داشت

$$\dim R \leq \mathrm{pd} M + \dim M$$

و بنابراین $\dim R - \dim M \leq \mathrm{pd} M$. از طرف دیگر $\dim N \leq (\dim R - \dim M) + \dim(M \otimes N)$ همان حدس اشتراک است. روابط فوق نشان می‌دهد که چرا حدس ضعیف اشتراک از حدس اشتراک ضعیفتر است.

همچنین حدس جدید اشتراک مطرح شده که قویتر از حدس ضعیف اشتراک است. با توجه به اینکه حدس جدید اشتراک نیز با روشهای هومولوژیک به اثبات رسیده است، در بخش بعد به معرفی و تاریخچهٔ اثبات آن می‌پردازیم.

۳. همبافتها و روشهای هومولوژیک (۱۹۸۰ میلادی)

در اواخر دههٔ ۱۹۸۰ با استفاده از روشهای ابرهومولوژیک (روشهای هومولوژیک در مورد همبافتها) اثبات حدس ضعیف اشتراک (به‌طور دقیقتر حدس جدید اشتراک) کامل شد. در اینجا ابتدا مطالب مختصری از نظریهٔ همبافتها را برای آشنایی مقدماتی خوانندگان به رشتهٔ تحریر درمی‌آوریم. برای مطالعهٔ عمیقتر همبافتها می‌توانید به [۴] مراجعه کنید.

فرض کنیم $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ خانواده‌ای از Rـمدولها باشد. همچنین فرض کنیم به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $d_n^X : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ یک Rـهمریختی باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $d_n^X d_{n+1}^X = 0$ (به‌عبارت دیگر $\mathrm{Im} d_{n+1}^X \subseteq \mathrm{Ker} d_n^X$). در این صورت

$$X = \cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^X} X_n \xrightarrow{d_n^X} X_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

را یک Rـهمبافت می‌نامیم. nامین هومولوژی مدولِ X را با علامت $\mathrm{H}_n(X)$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از

$$\mathrm{H}_n(X) = \frac{\mathrm{Ker} d_n^X}{\mathrm{Im} d_{n+1}^X}$$

فرض کنیم X و Y دو Rـهمبافت باشند. منظور از مورفیسم $\alpha : X \longrightarrow Y$ خانوادهٔ $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ از Rـهمریختی‌هاست که در آن به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$،

$\alpha_n : X_n \longrightarrow Y_n$، و نمودار زیر جابجایی باشد

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & X_{n+1} & \xrightarrow{d^X_{n+1}} & X_n & \xrightarrow{d^X_n} & X_{n-1} & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & Y_{n+1} & \xrightarrow{d^Y_{n+1}} & Y_n & \xrightarrow{d^Y_n} & Y_{n-1} & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

به‌ازای هر Rـهمبافت X، *همبافت هومولوژیک وابسته به* X را با $\mathrm{H}(X)$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از

$$\mathrm{H}(X) = \ldots \longrightarrow \mathrm{H}_{n+1}(X) \xrightarrow{d^{\mathrm{H}(X)}_{n+1}} \mathrm{H}_n(X) \xrightarrow{d^{\mathrm{H}(X)}_n} \mathrm{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \ldots$$

که در آن $d^{\mathrm{H}(X)}_n = 0$ به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$.

فرض کنیم X و Y دو Rـهمبافت باشند و $\alpha : X \longrightarrow Y$ یک مورفیسم باشد. در این صورت به‌سادگی می‌توان دید که به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $\alpha(\mathrm{Ker}d^X_n) \subseteq \mathrm{Ker}d^Y_n$ و $\alpha(\mathrm{Im}d^X_{n+1}) \subseteq \mathrm{Im}d^Y_{n+1}$.

در نتیجه α نگاشت یکتایی به‌صورت

$$\mathrm{H}_n(\alpha) : \mathrm{H}_n(X) \longrightarrow \mathrm{H}_n(Y) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

القا می‌کند. فرض کنیم $\mathrm{H}(\alpha) = \{\mathrm{H}_n(\alpha)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. در این صورت

$$\mathrm{H}(\alpha) : \mathrm{H}(X) \longrightarrow \mathrm{H}(Y)$$

یک مورفیسم است. اگر به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $\mathrm{H}_n(\alpha)$ یک Rـیکریختی باشد، آنگاه گوییم X و Y *به‌طور هومولوژیک یکریخت‌اند* و آن را با نماد $X \simeq Y$ نمایش می‌دهیم. به بیان دیگر می‌توان گفت

$$X \underset{\alpha}{\xrightarrow{\simeq}} Y \overset{\text{تعریف}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{H}(X) \underset{\mathrm{H}(\alpha)}{\xrightarrow{\cong}} \mathrm{H}(Y)$$

(با توجه به یکریختی هومولوژیک، همبافتها را دسته‌بندی می‌کنند و به‌جای مطالعهٔ همبافتها، دسته‌های جدید را مورد مطالعه قرار می‌دهند.)

اکنون به معرفی حدس جدید اشتراک می‌پردازیم.

حدس جدید اشتراک. *فرض کنیم*

$$F : 0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow 0$$

یک همبافت از Rـمدولهای آزاد متناهی‌مولد باشد. اگر به‌ازای هر $0 < i < n$ داشته باشیم $\mathrm{Supp}(\mathrm{H}_i(F)) = \{\mathfrak{m}\}$ و $\mathrm{H}_0(F) \neq 0$ آنگاه $\dim R \leq n$.

تاریخچهٔ اثبات حدس جدید اشتراک. اثبات این حدس را می‌توان به سه مرحله تقسیم کرد.

مرحلهٔ اول (۱۹۷۳ میلادی). پسکین و اشپیرو در [۸] حدس فوق را در حالتی که مشخصهٔ R با مشخصهٔ k برابر و مثبت باشد، اثبات کرده‌اند. در این مقاله روش بسیار مفید «تقلیل به مشخصهٔ p» و همریختی فروبنیوس مورد استفاده قرار گرفت. (فرض کنیم مشخصهٔ حلقهٔ R برابر p باشد. در این صورت همریختی φ از R به خودش را که هر عضو را به توان pام همان عضو تصویر می‌کند همریختی فروبنیوس گوییم.) همچنین با استفاده از روش فوق حدسهای هومولوژیک دیگری نیز در حالت خاص به اثبات رسیدند. با توجه به اینکه در حلقه‌های با مشخصهٔ p، به‌ازای هر دو عنصر a و b از حلقه، $(a+b)^p = a^p + b^p$ برقرار است و این مطلب در حلقه‌های با مشخصهٔ صفر برقرار نیست، لذا برای حلقه‌های با مشخصهٔ صفر نمی‌توان از روش فوق استفاده کرد.

مرحلهٔ دوم (۱۹۷۵ میلادی). هاکستر در [۶] حدس فوق را در حالتی که مشخصهٔ R با مشخصهٔ k برابر، و هر دو صفر باشند، ثابت کرد. در این مقاله از تقریب آرتین استفاده شده است. برای مطالعهٔ بیشتر در این مورد می‌توان به فصل دوازدهم [۱۱] که توسط وَن دِن دْریز[1] تهیه شده است، مراجعه کرد.

مرحلهٔ سوم (۱۹۸۶ میلادی). رابرتس در [۹] حدس فوق را در حالتی که مشخصهٔ R با مشخصهٔ k برابر نباشد، ثابت کرد. در این مقاله از نظریهٔ همبافتها استفادهٔ بسیار شده و تاکنون اثباتی بدون استفاده از نظریهٔ همبافتها ارائه نشده است.

نتیجه. *قضیهٔ ضعیف اشتراک از قضیهٔ جدید اشتراک نتیجه می‌شود.*

برهان. اگر $\mathrm{pd}M = \infty$ آنگاه حکم برقرار است. پس فرض کنیم $t = \mathrm{pd}M < \infty$. به استقرا روی $n = \dim(M \otimes N)$ عمل می‌کنیم. $n = 0$: قرار می‌دهیم $I = \mathrm{Ann}(N)$ و $\overline{R} = \frac{R}{I}$. در این صورت $\dim \overline{R} = \dim N$ و

$$\{\mathfrak{m}\} = \mathrm{Supp}(M \otimes N) = \mathrm{Supp}M \cap \mathrm{Supp}N = \mathrm{Supp}M \cap \mathrm{Supp}\overline{R}$$

چون $\mathrm{pd}M = t$، پس تحلیل آزاد متناهی‌مولد F از M موجود است:

$$F = 0 \longrightarrow F_t \longrightarrow F_{t-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

بنابراین همبافت

$$\overline{F} = 0 \longrightarrow F_t \otimes \overline{R} \longrightarrow F_{t-1} \otimes \overline{R} \longrightarrow \cdots F_1 \otimes \overline{R} \longrightarrow F_0 \otimes \overline{R} \to 0$$

از $\overline{R}$ـمدولهای آزادِ متناهی‌مولد به‌دست می‌آید. با توجه به خواص $\mathrm{H}_i(\overline{F})$ خواهیم داشت $\mathrm{H}_0(\overline{F}) = M \otimes \overline{R}$ و در نتیجه طبق لم ناکایاما، $\mathrm{H}_0(\overline{F}) \neq 0$. به‌علاوه به‌ازای هر $0 < i < t$ داریم

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{H}_i(\overline{F})) = \{\frac{\mathfrak{m}}{I}\}$$

بنابراین طبق قضیهٔ جدید اشتراک، $\dim \overline{R} \leq t$ و از این رو $\dim N \leq \mathrm{pd}M$. حال فرض کنیم حکم برای اعداد کمتر از n برقرار است و $n = \dim M \otimes N > 0$. بنابراین $\dim N > 0$ و در نتیجه می‌توان $x \in \mathfrak{m}$ چنان اختیار کرد که x در هیچ‌یک از ایده‌آلهای اول مینیمال $\mathrm{Supp}M \otimes N$ و $\mathrm{Supp}N$ قرار نداشته باشد. لذا

$$\dim(M \otimes \frac{N}{xN}) = \dim \frac{M \otimes N}{x(M \otimes N)} = \dim(M \otimes N) - 1$$

و

$$\dim \frac{N}{xN} = \dim N - 1$$

اکنون با استفاده از فرض استقرا حکم برقرار می‌شود.

1. van den Dries

تذکر. با استفاده از نظریهٔ همبافتها می‌توان همبافتی مانند X یافت به‌طوری‌که $\dim R \leq \dim X \leq \mathrm{pd}M + \dim M$. (برای توضیح بیشتر به [۱۳] و [۱۴] مراجعه کنید.)

با استفاده از قضیهٔ جدید تقاطع می‌توان اثبات کوتاهی برای قضیهٔ کرول عنوان کرد. بدین ترتیب که فرض کنیم $I = \langle X_1, X_2, \ldots X_n \rangle$ باشد. فرض کنیم K همبافت کُزول[1] روی X_1، X_2، ...، X_n باشد. آنگاه $\mathrm{H}_0(K) = \frac{R}{I}$. فرض کنیم $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول مینیمال روی I باشد. اگر K را نسبت به $\mathfrak{p}$ موضعی کنیم آنگاه به ازای هر $0 < i < n$، $\mathrm{Supp}\mathrm{H}_i(K_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}\}$ و $\mathrm{H}_0(K_\mathfrak{p}) \neq 0$. در نتیجه طبق قضیهٔ جدید تقاطع، $\dim R_\mathfrak{p} \leq n$.

۴. مدولهای مدرج دیفرانسیلی و روشهای هومولوژیک (۱۹۹۰ میلادی)

از اوایل دههٔ ۱۹۹۰ میلادی آورامف[2] و فاکسبی مطالعهٔ روش جدیدی را در جبر جابجایی با استفاده از روشهای هومولوژیک شروع کردند. فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ و $(S, \mathfrak{n})$ دو حلقهٔ نوتری باشند. همچنین فرض کنیم $\varphi : R \longrightarrow S$ یک همریختی موضعی ($\varphi(\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n})$) باشد. گروتندیک، همریختی φ را یکدست[3] می‌نامد در صورتی‌که S به‌عنوان Rـمدول یکدست باشد و نشان می‌دهد که $\frac{S}{\varphi(\mathfrak{m})S}$ خواص بسیار جالبی دارد. از جمله می‌توان نشان داد که $S \otimes_R \frac{R}{\mathfrak{m}}$ (که با موجود فوق یکریخت می‌باشد) یک حلقهٔ موضعی است.

حال فرض کنیم $\varphi : R \longrightarrow S$ یک همریختی موضعی باشد و نیز بُعد تخت S به‌عنوان Rـمدول، متناهی باشد. آنگاه آورامف و فاکسبی با استفاده از مفهوم ضرب تانسوری در نظریهٔ همبافتها، حلقهٔ موضعی مدرج دیفرانسیلی[4] و سپس مدولهایی روی این حلقه با عنوان مدولهای مدرج دیفرانسیلی را معرفی کردند. تفاوت این نظریه با نظریهٔ مدولها و همبافتها در این است که در نظریهٔ مدولها، عناصر مورد بررسیْ مدول و تحلیلها همبافت می‌باشند، در نظریهٔ همبافتها عناصر مورد بررسیْ همبافت و تحلیلها نیز همبافت‌اند. و در نظریهٔ مدولهای مدرج دیفرانسیلیْ عناصر مورد بررسی مدول و تحلیلها نیز مدول هستند.

آورامف و فاکسبی با استفاده از نظریهٔ فوق و روشهای هومولوژیک حکمهای دیگری را در جبر جابجایی به اثبات رساندند. چون برای توضیح این نظریه به ابزارهای زیادی نیاز داریم و بحث در این مورد خوانندگان را خسته می‌کند، به کسانی که به تعقیب این مبحث علاقه‌مندند توصیه می‌شود که به‌عنوان مثال به [۲ و ۳] مراجعه کنند.

1. Kozul 2. Avramov 3. flat

4. differential graded local ring

سپاسگزاری

لازم می‌دانم از آقای دکتر رحیم زارع‌نهندی که در تهیهٔ «تسمیهٔ قضیهٔ اشتراک» به اینجانب کمک کردند و همچنین از آقایان حمیدرضا رحمتی و کاوه لاجوردی که در تصحیح پیش‌نویس اول این گزارش مرا یاری نمودند، سپاسگزاری کنم.

مراجع

1. M. Auslander, and D. Buchsbaum, "Unique factorization in regular local ring", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **45** (1959) 733-34.

2. L. L. Avramov, and H. B. Foxby, "Locally Gorenstein homomorphismes", *Amer. J. Math.* **114** (1992) 1007-1047.

3. L. L. Avramov, H. B. Foxby, and J. Lescot, "Séries de Bass des homomorphismes locaux de Tor-dimension finie", *C. R. Acad. Sci. Paris, série I* **309** (1989) 645-649.

4. H. B. Foxby, *Hyperhomological Algebra and Commutative Algebra*, Springer (to appear).

5. R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer (1977).

6. M. Hochster, "Topics in the homological theory of modules over commutative rings", *CBMS Regional Conf. Ser. in Math.* vol. 24, Amer. Math. Soc. (1975).

7. C. Huneke, review of Homological Questions in Local Algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.* (2) **26** (1992) 361-367.

8. C. Peskine, and L. Szpiro, "Dimension projective finie et cohomologie locale", *IHES Publ. Math.* **42** (1973) 323-359.

9. P. Roberts, "Le theoreme d'intersection", *C. R. Acad. Sci. paris Sér. I Math.* **304** (1987) 177-180.

10. P. Roberts, "Intersection Theorems", in M. Hochster, C. Huneke and J. D. Sally (eds.), *commutative Algebra*, MSRI Publ. **15**, Springer (1989) 417-436.

11. J. P. Serre, *Algebre Locale Multiplicites*, LNM 11, Springer (1965).

12. J. R. Strooker, *Homological Questions in Local Algebra*, LMS lecture Note Series, **145** (1990).

13. S. Yassemi, "Generalized section functors", *J. Pure Applied Algebra*, **95** (1994) 103-119.

14. S. Yassemi, "G-dimension", *Math. Scand.* **77** (1995) 161-174.

******

* سیامک یاسمی، دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

yassemi@vax.ipm.ac.ir

پژوهشهای اخیر پیرامون تاریخ ریاضیات و نجوم در تمدن اسلامی (قرنهای دوم تا نهم هجری)*

یان پ. هوخندایک
ترجمهٔ محمد باقری

۱. مقدمه

تاریخ ریاضیات و نجوم در تمدن اسلامی اکنون در بسیاری از کشورهای جهان در دست پژوهش است. این موضوع بسیار گسترده است و کتابها و مقاله‌های مربوط به آن به زبانهای مختلف منتشر می‌شود؛ بنابراین ترسیم چشم‌اندازکلی آن کار آسانی نیست. بخش عمدهٔ سخنرانی من عبارت خواهد بود از بیان برداشت شخصی خودم از برخی جهات تازهٔ پژوهش که طی ده سالهٔ اخیر مهم بوده‌اند و می‌توانند تصویر کلی تکوین علوم دورهٔ اسلامی را تا حدی دگرگون کنند. همچنین موارد مشخصی را ذکر خواهم کرد؛ بنابراین بخش عظیمی از پژوهشهای اخیر به علت محدودیت وقت در این سخنرانی ناگفته خواهد ماند. عذر مرا برای این ناگفته‌ها که متضمن هیچ داوریِ ارزشی نیست بپذیرید. در اینجا تنها می‌توانم دربارهٔ چند مثال بحث کنم و بناگزیر از ذکر بسیاری پژوهشهای فوق‌العاده ارزشمند اخیر چشم‌پوشی خواهم کرد [۱].

تا چندی پیش، در پژوهش تاریخ ریاضیات و نجوم دورهٔ اسلامی، بیشتر توجه معطوف بود به تاریخ حساب و متنهای نظری در بارهٔ جبر، هندسهٔ محض، مثلثات محض و نجوم که عمدتاً شامل نظریهٔ حرکت خورشید، ماه و سیارات بود. البته پژوهش در این زمینه‌ها همچنان ادامه دارد و طی سالهای اخیر کشفیات مهمی در آنها صورت گرفته است. یک نمونهٔ جالب، کشف نسخهٔ کامل ترجمهٔ لاتینی کتاب *حساب* محمدبن موسی خوارزمی به وسیلهٔ پروفسور منسو فولکرتس از مونیخ (آلمان) است [۲]. کتاب *حساب* خوارزمی در کل تاریخ ریاضیات اهمیت ویژه‌ای دارد. نقش تاریخی این متن چنان است که هنوز هر روش محاسبه‌ای را *الگوریتم* [مشتق از نام الخوارزمی] می‌نامیم. پیش از این، تنها نسخهٔ ناقصی از ترجمهٔ لاتینی این متن اساسی خوارزمی موجود بود و متن اصلی عربی آن هیچ‌گاه یافته نشده است.

در سالهای اخیر، برخی متنهای مهم عربی نیز برای نخستین بار منتشر شده است. به عنوان مثال *التذکره فی علم‌الهیئة* اثر خواجه نصیرالدین طوسی (همراه با ترجمهٔ انگلیسی و شرح عالی) به کوشش جمیل رجب در سال ۱۹۹۳ منتشر شده است [۳]. در زمینهٔ ریاضیات و نجوم در اسپانیای اسلامی هم کارهای زیادی انجام شده است [۴].

در پژوهشهای اخیر همچنین توجه زیادی به تاریخ ریاضیات عملی و نجوم عملی، تأثیر متقابل نظریه و عمل و زمینهٔ تاریخی علم مشاهده می‌شود. اکنون چند نمونهٔ بارز از این مقوله را ذکر می‌کنم که نشان‌دهندهٔ امکانات آتی این نوع پژوهش است.

۲. جدولهای نجومی: برآورد مقادیر مشخصه‌ها

ریاضیدانان و منجمان دورهٔ اسلامی بیش از صد زیج از خود بر جا گذاشته‌اند که هر کدام معمولاً حاوی بیش از ۱۰۰ جدول عددی مورد استفاده در محاسبات نجومی است. با استفاده از کامپیوتر می‌توان معلوم کرد که این جدولها به چه روشی و بر مبنای چه مقادیری برای مشخصه‌های نجومی محاسبه شده‌اند. این بررسی کامپیوتری را دو پژوهشگر جوان، بنو وان‌دالن از فرانکفورت (آلمان) و گلن وان‌بروملن از ادمونتن (کانادا) در بارهٔ متنهای نجومی مختلفی از دورهٔ اسلامی انجام داده‌اند. در این گفتار برخی از کارهای بنو وان‌دالن را در بارهٔ زیج *جامع* کوشیار بن لبان گیلانی (حدود ۳۹۰ هجری) ذکر می‌کنم. [۵].

کار آقای وان‌دالن مربوط است به جدول کوشیار برای تعدیل زمان. بنابراین ابتدا تعریفی غیرفنی از این مفهوم عرضه می‌کنم. در طول روز، زمان را می‌توان بر اساس موضع خورشید در آسمان سنجید، و به این ترتیب زمان خورشیدی حقیقی را به‌دست آورد. فاصلهٔ زمانی بین دو عبور نصف‌النهاری متوالی خورشید تقریباً ۲۴ ساعت است، اما مقدار دقیق این فاصله در طول

فصلها اندکی تغییر می‌کند. به عبارت دیگر نمی‌توان ساعت را چنان تنظیم کرد که در همهٔ روزهای سال در ساعت ۱۲ خورشید دقیقاً در جنوب باشد. علت این تغییرات آن است که خورشید روی دایرةالبروج (نه استوای آسمانی) با سرعت نایکنواخت حرکت می‌کند.

منجمان دورهٔ اسلامی می‌توانستند اثر انباشتی این تغییرات را محاسبه کنند. این کمیت «تعدیل زمان» خوانده می‌شود. اگر تعدیل زمان را از زمان خورشیدی حقیقی بکاهیم، زمان خورشیدی متوسط به دست می‌آید که در محاسبات نجومی به کار می‌رود.

جدول تعدیل زمان کوشیار را در جدول ۱ آورده‌ایم. در این جدول ابتدا طول میانگین خورشید را، با اندکی جابه‌جایی که اکنون به آن نمی‌پردازیم، در نظر می‌گیریم (که با دانستن تاریخ در تقویم شمسی محاسبه می‌شود). مقادیر تعدیل زمان برحسب دقیقه و ثانیه در جدول داده شده است. مثلاً در ماه اسفند، طول میانگین خورشید بین ۳۳۰ و ۳۶۰ درجه است، پس تعدیل زمان بین ۱ دقیقه و ۱۰ دقیقه تغییر می‌کند.

کوشیار مقادیر تعدیل زمان (E) را از تابع زیر محاسبه کرده است:

$$E(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{15}(\tilde{\lambda} + \Delta - \alpha(\tilde{\lambda} + \Delta - \overline{q}(\tilde{\lambda} + \Delta)) + c)$$

که در آن

$$\alpha(x) = \arctan(\cos\epsilon \cdot \tan x)$$
$$\overline{q}(x) = \arctan\left(\frac{e\sin(x - \lambda_A)}{60 + e\cos(x - \lambda_A)}\right)$$

در اینجا $\tilde{\lambda}$ متغیر مستقل جدول (طول میانگین جابه‌جا شدهٔ خورشید)، ϵ میل دایرةالبروج، e خروج از مرکز مدار خورشید، λ_A اوج خورشید، c کمیتی به نام ثابت مبدأ، و Δ کمیتی موسوم به جابه‌جایی است. جزئیات این مفهومها مهم نیست؛ مهم این است که جدولی در یک نسخهٔ خطی دورهٔ اسلامی داریم که بر اساس یک تابع ریاضی شناخته شده و مقادیر مشخصه‌های ϵ، e، λ_A، c و Δ محاسبه شده است که برای منجمان آن دوره شناخته شده بود ولی اغلب ما از آن بی‌اطلاعیم.

در این مورد کوشیار مقادیر برخی از مشخصه‌هایی را که به کار برده، ذکر کرده است، اما در اغلب موارد این اطلاع در متنها داده نمی‌شود. حتی در این مورد، ممکن است بخواهیم امتحان کنیم که آیا این مشخصه‌ها واقعاً در محاسبهٔ جدول به‌کار رفته‌اند یا نه. زیرا این موضوع، دلیل اصالت جدول است. بنابراین برای بازیافتن مقادیر مشخصه‌های به کار رفته در جدول باید از برآوردگرهای آماری استفاده کرد. علت استفاده از آمار آن است که در این محاسبات خطاهای تصادفی ناشی از گردکردن وارد می‌شود.

آقای وان‌دالن این برآوردگرها را یافته و نشان داده است که مقادیر

جدول۱ جدول کوشیار برای تعدیل زمان [۶]

طول میانگین خورشید	تعدیل زمان	طول میانگین خورشید	تعدیل زمان
۰	۰;۹,۴۸	۱۸۰	۰;۲۴,۸
۶	۰;۱۱,۵۲	۱۸۶	۰;۲۶,۴
۱۲	۰;۱۳,۵۲	۱۹۲	۰;۲۷,۴۴
۱۸	۰;۱۵,۵۲	۱۹۸	۰;۲۹,۱۶۰
۲۴	۰;۱۷,۴۰	۲۰۴	۰;۳۰,۲۴
۳۰	۰;۱۹,۸	۲۱۰	۰;۳۱,۱۲
۳۶	۰;۲۰,۱۶	۲۱۶	۰;۳۱,۳۲
۴۲	۰;۲۱,۱۲	۲۲۲	۰;۳۱,۲۴
۴۸	۰;۲۱,۴۸	۲۲۸	۰;۳۰,۴۸
۵۴	۰;۲۱,۵۶	۲۳۴	۰;۲۹,۴۰
۶۰	۰;۲۱,۴۴	۲۴۰	۰;۲۷,۵۶
۶۶	۰;۲۱,۸	۲۴۶	۰;۲۵,۴۸
۷۲	۰;۲۰,۲۰	۲۵۲	۰;۲۳,۱۶
۷۸	۰;۱۹,۱۶	۲۵۸	۰;۲۰,۳۲
۸۴	۰;۱۷,۵۶	۲۶۴	۰;۱۷,۲۴
۹۰	۰;۱۶,۴۴	۲۷۰	۰;۱۴,۲۰
۹۶	۰;۱۵,۲۴	۲۷۶	۰;۱۱,۱۲
۱۰۲	۰;۱۴,۸	۲۸۲	۰;۸,۲۰
۱۰۸	۰;۱۳,۱۶	۲۸۸	۰;۵,۴۸
۱۱۴	۰;۱۲,۲۸	۲۹۴	۰;۳,۴۰
۱۲۰	۰;۱۲,۰	۳۰۰	۰;۱,۵۶
۱۲۶	۰;۱۱,۵۶	۳۰۶	۰;۰,۴۴
۱۳۲	۰;۱۲,۱۲	۳۱۲	۰;۰,۸
۱۳۸	۰;۱۲,۵۲	۳۱۸	۰;۰,۰
۱۴۴	۰;۱۳,۵۲	۳۲۴	۰;۰,۲۰
۱۵۰	۰;۱۵,۸	۳۳۰	۰;۱,۸
۱۵۶	۰;۱۶,۳۶	۳۳۶	۰;۲,۲۴
۱۶۲	۰;۱۸,۲۴	۳۴۲	۰;۳,۵۲
۱۶۸	۰;۲۲,۱۲	۳۴۸	۰;۵,۴۰
۱۷۴	۰;۲۲,۱۲	۳۵۴	۰;۷,۴۰

مشخصه‌ها در فاصله‌های اطمینان ۹۵٪ زیر واقع‌اند:

ϵ $(23^\circ\ 33'\ 4'', 23^\circ\ 35'\ 0'')$

e $(2^\circ\ 4'\ 27'', 2^\circ\ 4'\ 55'')$

λ_A $(84^\circ\ 1'\ 48'', 84^\circ\ 14'\ 26'')$

c $(4^\circ\ 3'\ 44'', 4^\circ\ 4'\ 2'')$

Δ $(1^\circ\ 57'\ 37'', 2^\circ\ 2'\ 27'')$

در این مورد، معلوم شده است که جدول زیج جامع مؤثق است، زیرا کوشیار می‌گوید که مقادیر مشخصه‌های $\Delta = 2^\circ$، $c = 4^\circ\ 4'$ و $\lambda_A = 84^\circ$ را به کار برده است. کوشیار در جای دیگری مقادیر $\epsilon = 23^\circ\ 35'$ و $e = 2^\circ\ 4'\ 45''$ را به کار برده است. پس می‌توان فرض کرد که در این

جدول هم از همان مقادیر استفاده کرده است. به این ترتیب همهٔ مقادیر مشخصه‌ها تعیین شده است، پس می‌توان جدول را مجدداً محاسبه کرد و حتی شاید بتوان اطلاعات بیشتری در بارهٔ روشهای محاسبهٔ کوشیار به دست آورد.

در این مثال از کامپیوتر به عنوان ابزاری برای استخراج اطلاعات راجع به مقادیر مشخصه‌ها و کسب تصوری در بارهٔ روشهای ریاضی عملی که کوشیار به کار برده، استفاده شده است. هنوز جدولهای بسیاری در منابع هست که باید با کامپیوتر تحلیل شود. با این گونه تحلیلها، اطلاعات موجود در بارهٔ محاسبهٔ عملی و مشخصه‌های نجومی بسیار افزایش خواهد یافت.

۳. تحلیل ساختار ریاضی جدولها

جدول کوشیار در بخش قبل شامل اعدادی است که مقادیر تابعی ریاضی از نوع شناخته شده‌اند. برخی کتابچه‌های نجومی شامل جدولهایی است که اعداد مندرج در آنها به بیان امروزی مقادیر تابعهایی از نوع ناشناخته هستند. در اینجا هدف تاریخنگاری یافتن صورت دقیق تابعی است که به کار رفته است.

مثالی از این نوع، جدول رؤیت ماه در زیج خوارزمی (حدود ۲۰۰ هجری) است. متن عربی این اثر گم شده است ولی مسلمةبن‌احمد مجریطی منجم اسپانیایی (درگذشتهٔ ۴۶۲ هجری) تحریری از آن فراهم کرد و ترجمهٔ لاتینی این تحریر که در سده‌های میانه فراهم شده موجود است. نیمهٔ اول جدول رؤیت ماه در این اثر به صورت زیر است [۷]:

برج	حمل	ثور	جوزا	سرطان	اسد	سنبله
۱۰	′۹°۲۶	′۹°۱۹	′۹°۳۳	′۱۱°۲۹	′۱۵°۵۸	′۲۰°۲۰
۲۰	′۹°۲۵	′۹°۱۸	′۹°۵۷	′۱۲°۴۸	′۱۷°۳۱	′۲۱°۰۴
۳۰	′۹°۲۱	′۹°۲۱	′۱۰°۳۷	′۱۴°۱۵	′۱۹°۱۱	′۲۱°۱۷

شیوهٔ استفاده از جدول چنین است. به فرض، می‌خواهیم بدانیم که آیا هلال ماه در شامگاه مفروضی، یک یا دو روز بعد از مقارنهٔ خورشید و ماه رؤیت می‌شود یا نه. مقدار مربوط به طول خورشید را در جدول پیدا می‌کنیم. مثلاً اگر تاریخ ۱۰ روز پس از نوروز باشد، طول خورشید (تقریباً) ۱۰ درجه است؛ پس در جدول عدد ′۹°۲۶ را می‌یابیم. این یعنی اگر در لحظهٔ غروب خورشید، تفاضل طولهای ماه و خورشید بیش از ′۹°۲۶ (و عرض ماه مساوی صفر) باشد، رؤیت ماه ممکن است؛ اگر تفاضل مذکور از این عدد کمتر باشد، ماه رؤیت نخواهد شد.

چگونگی محاسبهٔ این جدول در متن بیان نشده است. در دورهٔ اسلامی، نظریه‌های گوناگونی برای تعیین شرایط رؤیت ماه وجود داشت، بنابراین دقیقاً مشخص نیست کدام تابع در اینجا محاسبه شده است. پس از اختیار کردن یک نظریه، محاسبات به عرض جغرافیایی محل نیز بستگی دارد. کندی و جانجانیان بر اساس محاسبهٔ کامپیوتری در سال ۱۹۶۵ به این نتیجه رسیده‌اند که جدول مذکور بر اساس معیاری برای رؤیت ماه که پیش از ظهور اسلام در هند ابداع شده محاسبه شده است. بر طبق این معیار، ماه را در صورتی می‌توان دید که زمان غروب ماه بیش از ۴۸ دقیقه پس از زمان غروب خورشید باشد. سپس کندی و گریگوریان عددهای جدول را برای عرضهای جغرافیایی مختلف محاسبه کردند و بین نتایج به دست آمده آنچه بیش از همه با اعداد متن توافق داشت به محلی با عرض جغرافیایی ۴۲ درجه و ۳۰ دقیقه مربوط می‌شد. اما این توافق نزدیک نبود و عرض جغرافیایی مذکور از لحاظ تاریخی پذیرفتنی نیست زیرا، در غرب عالم اسلام، چه در زمان خوارزمی و چه در عهد مجریطی هیچ مرکز علمی در این عرض شمالی وجود نداشت.

پس از رواج کامپیوترهای شخصی، انجام محاسبات زیاد روی اعداد جدول به سادگی ممکن شد، و بدین‌ترتیب اصلاح مختصری امکان‌پذیر گردید. بر اساس فرض بسیار رایجی که درست نیست ولی با بسیاری از نظریه‌های تاریخی در بارهٔ رؤیت ماه تطبیق می‌کند (یعنی اینکه رؤیت ماه را بر اساس عرض جغرافیایی، انخفاض خورشید در لحظهٔ غروب ماه و سمت خورشید در لحظهٔ غروب ماه می‌توان پیش‌بینی کرد)، این امکان پدید آمد که روشی برای بازسازی کامل نظریهٔ رؤیت ماه بر اساس اعداد مندرج در جدول ایجاد شود. معلوم شد که نیمهٔ اول جدول (که در بالا آورده شده است) با دقت زیاد طبق معیار هندی برای عرض جغرافیایی ′۳۵ °۴۱ محاسبه شده است. در قرن پنجم هجری، یک مرکز علمی در غرب جهان اسلام در این عرض بالای شمالی وجود داشت، یعنی ساراگوسا (سَرَقُسْطَه) که در شمال اسپانیا واقع است. پس جدول رؤیت ماه را مجریطی که در کوردوبا (قُرطبه) کار می‌کرد محاسبه نکرده است.

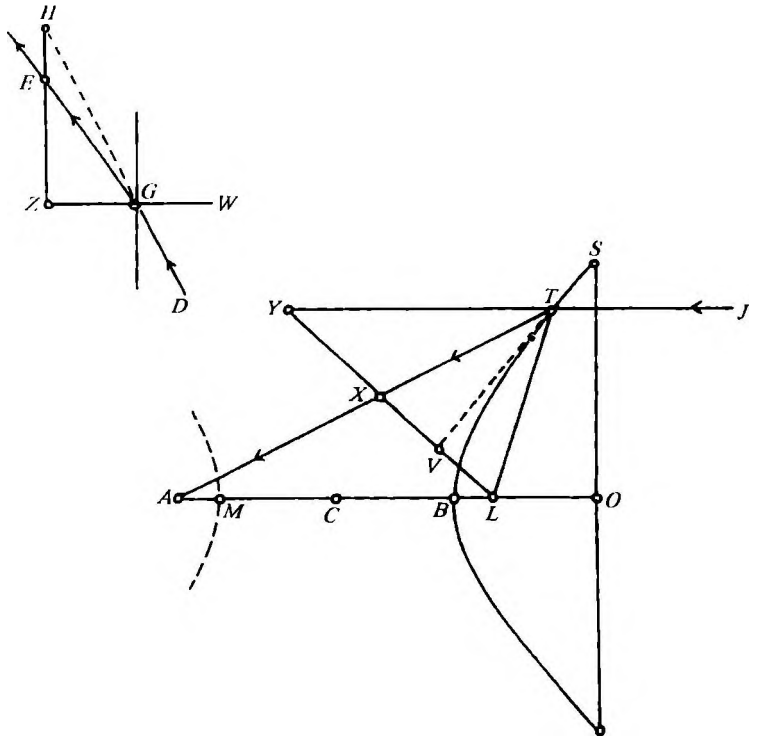
برای این نوع پژوهش، باید کامپیوتر شخصی و فهرستی از عرضهای جغرافیایی آبادیهای جهان اسلام در سده‌های میانه در اختیار داشت. البته، فهرستی امروزی از عرضها هم مفید خواهد بود، اما فهرست مرتب‌شده‌ای از عرضهای جغرافیایی ذکر شده در آثار همان دورهٔ اسلامی مفیدتر خواهد بود. پروفسور ادوارد استوارت کندی و خانم مری هلن کندی در سال ۱۹۸۷ چنین فهرستی منتشر کرده‌اند که در آن عرض ′۳۵ °۴۱ برای ساراگوسا آمده است [۸]. این کتاب نشان می‌دهد که کامپیوتر در پژوهشهای تاریخی برای مرتب‌کردن داده‌های پرشمار و تسهیل دسترسی به آنها نیز بسیار سودمند است.

دو مثال اخیر نشان می‌دهند که چگونه می‌توان کامپیوتر را برای استخراج انواع تازهٔ اطلاعات از زیجهای دورهٔ اسلامی مبتنی بر روشهای پیچیدهٔ ریاضی به کار گرفت. بدین‌ترتیب، کامپیوتر به کارهای پیشگامانه‌ای که کندی و کینگ روی زیجهای دورهٔ اسلامی انجام داده‌اند [۹] ابعاد تازه‌ای می‌بخشد.

۴. نور شناخت (اپتیک)

اکنون به سراغ کاربردهای هندسه می‌رویم. از هندسه می‌توان در نور شناخت، به ویژه در نظریهٔ آینه‌ها و شکست نور استفاده کرد. به عنوان مثالی از پژوهشهای اخیر، کشف مهمی را در متنی راجع به آینه‌های سوزان با عنوان *کتاب‌الحرقات* نوشتهٔ ابوسعد علاءبن سهل ذکر می‌کنم. این ریاضیدان در قرن چهارم هجری می‌زیست و رسالهٔ خود را برای امیر صمصام‌الدوله از آل‌بویه که بین سالهای ۳۷۲ و ۳۷۶ هجری در بغداد حکومت می‌کرد نوشته است. از خاستگاه ابوسعد علاء چیزی نمی‌دانیم، اما او با چند ریاضیدان ایرانی چون ابوسهل کوهی و احمدبن محمدبن عبدالجلیل سجزی در حوالی سال ۳۶۰ هجری که آنان در شیراز بودند ارتباط داشت. این رسالهٔ ابوسعد علاء در بارهٔ آینه‌های سوزان را اخیراً رشدی راشد منتشر کرده است [۱۰].

مهمترین بخش این رساله در بارهٔ عدسیهای هذلولی‌گون است. ابوسعد علاء ثابت می‌کند که برخی عدسیهای هذلولی‌گون همهٔ پرتوهای خورشید را



شکل۱

به سوی یکی ازکانونهای هذلولی می‌شکنند، و در اثبات خود به طور ضمنی قانون شکست نور را که به نام ویلیبرورد اسنل (۱۵۹۱ـ۱۶۲۶) دانشمند هلندی، «قانون اسنل» خوانده می‌شود به کار برده است. جزئیات اثبات ابوسعد علاء طبق شکل ۱ به قرار زیر است.

در شکل ۱، ابوسعد علاء پرتو نور DG را که در نقطهٔ G از بلوری خارج می‌شود و در مرز WGS سطح شکسته می‌شود، در نظر می‌گیرد. سپس از نقطهٔ E روی پرتو شکسته شدهٔ GE عمود EZ را بر WGZ (که خط راستی فرض می‌شود) رسم می‌کند و ZE را امتداد می‌دهد تا امتداد DG را در نقطهٔ H قطع کند.

وی سپس یک هذلولی با محور قاطع MB و کانونهای A و L رسم می‌کند چنانکه $AL : BM = GH : GE$. اگر مرکز هذلولی را C بنامیم و بگیریم $|CB| = |CM| = a$، $|CL| = |CA| = f$، خروج از مرکز هذلولی برابر است با $f : a = GH : GE = \frac{GZ}{GE} : \frac{GZ}{GH}$، یعنی نسبت بین سینوسهای زاویهٔ شکست و زاویهٔ تابش (که نسبت به قائم در G سنجیده می‌شود). ابوسعد علاء شاخه‌ای از هذلولی به محور BL را در نظر می‌گیرد و به وسیلهٔ عمود SO قطعه‌ای از هذلولی جدا می‌کند و این قطعه را حول محور می‌چرخاند. بدین‌ترتیب یک عدسی هذلولی‌گون به دست می‌آورد و فرض می‌کند که این عدسی از جنس بلور باشد. فرض کنید پرتو خورشید JT (که می‌توانیم آن را در صفحهٔ کاغذ فرض کنیم) به موازات محور در نقطهٔ T به سطح خمیدهٔ عدسی می‌رسد. پاره‌خطهای TL و TA و مماس TV را رسم می‌کنیم، LV را بر TV عمود می‌کنیم و LV را امتداد می‌دهیم تا TA را در X و امتداد JT را در Y قطع کند.

طبق دو قضیهٔ شناخته شده دربارهٔ هذلولی (ثابت شده به وسیلهٔ آپولونیوس پرگایی در کتاب *مخروطات* او که به عربی ترجمه شده و ابوسعد علاء با آن آشنا بود)، داریم $AT - LT = MB = ۲a$ و $\angle LTV = \angle VTX$. پس $LT = TX$، بنابراین $۲a = MB = AT - TX = AX$. پس

$$TY : TX = AL : AX = ۲f : ۲a = f : a = GH : GE$$

اگر $\angle JTV = \angle DGZ$، دو شکل $YTXV$ و $HGEZ$ متشابه‌اند و بنابراین پرتو JT به سوی نقطهٔ X شکسته می‌شود، و در نتیجه از نقطهٔ A خواهد گذشت.

اما ابوسعد علاء می‌خواهد ثابت کند همهٔ پرتوهای نور به سوی نقطهٔ A شکسته می‌شوند حتی اگر داشته باشیم $\angle JTV \neq \angle DGZ$. او در اثبات خود فرض می‌کند که هر پرتو نور JT در نقطهٔ T شکسته می‌شود و به صورت TX درمی‌آید چنانکه $TY : TX = GH : GE = f : a$. این یعنی نسبت $TY : TX$ ثابت است و به زاویهٔ JTV بستگی ندارد. همچنین می‌توان گفت که نسبت $GH : GE$ ثابت است و به $\angle DGZ$ بستگی ندارد. پس نسبت بین سینوس زاویهٔ شکست و سینوس زاویهٔ تابش ثابت فرض شده است. این همان قانون شکست اسنل است. پس اگر عدسی هذلولی‌گونی چنان باشد که خروج از مرکز آن با ضریب شکست

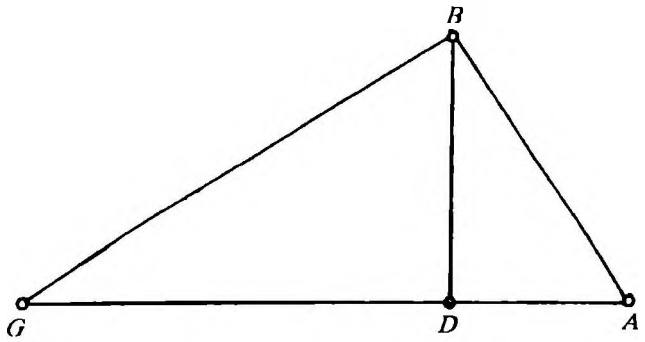
(از بلور به هوا) برابر باشد، همهٔ پرتوهای خورشید به موازات محور را به سوی یکی از کانونها خواهد شکست و بنابراین می‌تواند موجب سوختن در آن نقطه شود.

ابوسعد علاء اولین دانشمند در تاریخ نبود که پدیدهٔ شکست نور را مطالعه کرد. بطلمیوس (۱۵۰ میلادی) دانشمند یونانی نیز پدیدهٔ شکست را بررسی کرد و در کتاب *نورشناخت* خود جدول ساده‌ای حاوی زاویه‌های شکست به ازای مقادیر مختلف زاویهٔ تابش آورد. این کتاب *نورشناخت* به عربی ترجمه شد و ابوسعد علاء با آن آشنا بود. اما بطلمیوس نمی‌دانست که نسبت سینوسهای این زوایا ثابت است. بنابراین قانون شکست را ابوسعد علاء کشف کرده است.

ابوسعد علاء قانون شکست را صریحاً بیان نمی‌کند و مقدار عددی برای ضریب شکست نمی‌دهد. بنابراین نمی‌دانیم که او چگونه این قانون را کشف کرد. آیا او آزمایشهایی انجام داد، و از این راه قانون مذکور را کشف کرد؟ یا اینکه انگیزه‌ای نظری او را به این قانون رساند؟ یا ابتدا این سؤال برایش مطرح شد که کدام نوع عدسی پرتوهای خورشید را به سوی یک نقطه می‌شکند، حدس زد که این عدسی باید هذلولی‌گون باشد و سپس از این راه قانون شکست را یافت؟ این فرض نامعقولی نیست، زیرا در آن ایام ریاضیدانان از بین انواع منحنیها تنها دایره و مقاطع مخروطی را مطالعه کرده بودند؛ عدسی کروی، بیضی‌گون و سهمی‌گون دارای خاصیت موردنظر نیست. شاید پاسخ به این سؤال با مطالعهٔ بیشتر متن ابوسعد علاء یا با کشف مدارک تازه یافته شود. این سؤال هم به میان می‌آید که چرا دانشمندان پس از ابوسعد علاء نظیر ابن‌هیثم و کمال‌الدین فارسی این قانون را به کار نبردند. در هر صورت، قانون شکست نمونه‌ای از یک کشف منسوب به دانشمندان اروپایی قرن هفدهم میلادی است که در واقع قبلاً در دورهٔ اسلامی کشف شده بود.

گاهی می‌پرسند که آیا نمونه‌های دیگری از این نوع وجود دارد، و آیا بسیاری از یافته‌های علمی اروپاییان در قرن هفدهم به ویژه در زمینهٔ ریاضیات، قبلاً در دورهٔ اسلامی کشف شده بود. پاسخگویی به این سؤال دشوار است. از یک سو، می‌توان برخی نمونه‌های شبیه قانون شکست را ذکر کرد و بسیاری از آثار دورهٔ اسلامی هنوز مطالعه نشده‌اند که شاید حاوی نمونه‌های بیشتری از این دست باشند. از سوی دیگر نباید بیش از حد در صدد یافتن تشابهات با علوم اروپایی باشیم.

در سالهای اخیر، برخی تاریخنگاران گفته‌اند که مثلاً شرف‌الدین طوسی طرز یافتن مشتق تابع را می‌دانست. یا اینکه برخی ریاضیدانان دورهٔ اسلامی حساب (انتگرال) بینهایت کوچکها بلد بودند، یا اینکه منحنیها را درست مثل دکارت به کمک معادلات بررسی می‌کردند، یا اینکه سجزی هندسهٔ چهاربعدی می‌دانست، و مانند اینها. اما به این ترتیب آثار دانشمندان دورهٔ اسلامی تحریف می‌شود. اغلب ریاضیدانان دورهٔ اسلامی همانند اسلاف خود در یونان باستان به‌دقت از بینهایت کوچکها پرهیز می‌کردند. با خواندن آثار خود شرف‌الدین طوسی و سجزی، به مشتق تابع یا هندسهٔ چهاربعدی برنمی‌خوریم. شاید برخی تاریخنگاران معاصر به طور ناخودآگاه چنین فرض می‌کنند که علوم جدید اروپایی به تعبیری «بهترین» علوم است، بنابراین می‌خواهند هر چه بیشتر در آثار دورهٔ اسلامی علوم اروپایی را بیابند. به نظر من باید از این فرض دوری جست، زیرا ارزش علوم دورهٔ اسلامی وابسته به تشابهات احتمالی آن با علوم اروپای قرن هفدهم نیست.



شکل۲

۵. هندسه و معماری

هندسه نه تنها در علوم بلکه همچنین در هنر و معماری به کار می‌رفت. اکنون خیلیها عقیده دارند که هنر و معماری یکی از انگیزه‌های مطالعهٔ هندسه در تمدن اسلامی بوده است. اما اگر کسی در جستجوی مثالهای مشخص باشد، نمونه‌های معدودی را می‌توان ذکر کرد. تاکنون منابع معدودی بررسی شده‌اند و شاید تاریخنگاران این نمونه‌ها را در جای درست خود جستجو نکرده‌اند. شاید بتوان صنعتگرانی را در ایران یافت که از روشهای قدیمی مطلع باشند و بتوانند بسیاری از پیوندها را توضیح دهند.

یک پیوند آشکار بین هندسه و معماری، توصیفهای غیاث‌الدین جمشید کاشانی (درگذشتهٔ ۸۳۲ هجری) در کتاب *مفتاح‌الحساب* راجع به مقرنس و مساحت سطوح و حجم گنبد مساجد است. خانم ایوونه دولد این توصیفها را تحلیل کرده است. وی یک نوار ویدئویی تهیه کرده که در آن بازسازی کامپیوتری قبّه‌ای طبق دستورالعملهای کاشانی و همچنین رابطهٔ میان کارهای کاشانی و بناهای تاریخی مختلف سمرقند را نشان داده است [۱۱].

یک پیوند کم‌رنگ‌تر بین متنی در هندسهٔ نظری و مسأله‌ای در هنرهای تزیینی اخیراً به وسیلهٔ ازدورال بیان شده است [۱۲]. عمر خیام در رسالهٔ کوتاهی راجع به جبر که در سال ۱۳۲۹ در تهران [۱۳] چاپ شده است، از ترسیم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABG که در آن وتر برابر است با مجموع یکی از اضلاع و ارتفاع، بحث کرده است؛ در شکل ۲، $AG = AB + BD$. عمر خیام فرض می‌کند $AD = ۱۰$ و $BD = x$، سپس نشان می‌دهد که ترسیم این مثلث منتهی می‌شود به معادلهٔ درجهٔ سوم $x^۳ + ۲۰۰x = ۲۰x^۲ + ۲۰۰۰$. سپس این معادله را به کمک تقاطع هذلولی و دایره حل می‌کند.

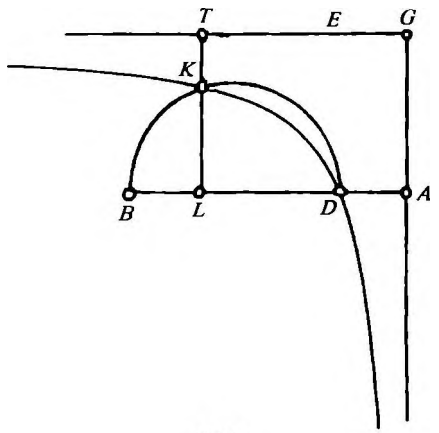
حل مثلث ABG به زاویهٔ قائمهٔ B و با ارتفاع BD چنان که $AB+BD = AG$، به وسیلهٔ عمر خیام به قرار زیر است (شکل ۳ را ببینید):

می‌گیریم $AD = ۱۰$، $BD = x$. طبق قضیهٔ فیثاغورس، $AB^۲ = ۱۰۰ + x^۲$. با توجه به تشابه مثلثها داریم $BD^۲ = AD \cdot DG$، پس $DG = \frac{x^۲}{۱۰}$. چون $AB + BD = AG$، داریم

$$AB = AG - BD = AD + DG - BD = ۱۰ - x + \frac{x^۲}{۱۰}$$

با مربع کردن دو طرف، داریم

$$۱۰۰ + x^۲ = ۱۰۰ - ۲۰x + ۳x^۲ - \frac{x^۳}{۵} + \frac{x^۴}{۱۰۰}$$



شکل۳

که از آن نتیجه می‌شود

$$x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$$

عمر خیام معادلهٔ $x^3 + bx = ax^2 + c$ را با مقاطع مخروطی به روش زیر حل می‌کند:

پاره‌خط ADB را چنان رسم می‌کنیم که $|AD| = \frac{c}{b}$ و $|AB| = a$. عمود AG را بر AB چنان اخراج می‌کنیم که $|AG| = \sqrt{b}$. سپس GE را موازی با AD می‌کشیم.

هذلولی گذرنده از D با مجانبهای AG و GE را رسم می‌کنیم.

دایره‌ای به قطر BD می‌کشیم.

نقطهٔ تقاطع دیگر هذلولی و دایره را K می‌نامیم. عمود KL را بر BD وارد می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت $x = AL$.

برهان. می‌گیریم $KL = y$. چون K روی دایره است، داریم $KL^2 = BL \cdot LD$، یا $y^2 = (a-x)(x-\frac{c}{b})$. چون K روی هذلولی است، داریم $KL : LD = TL : LA$ یا $y : (x-\frac{c}{b}) = \sqrt{b} : x$. پس

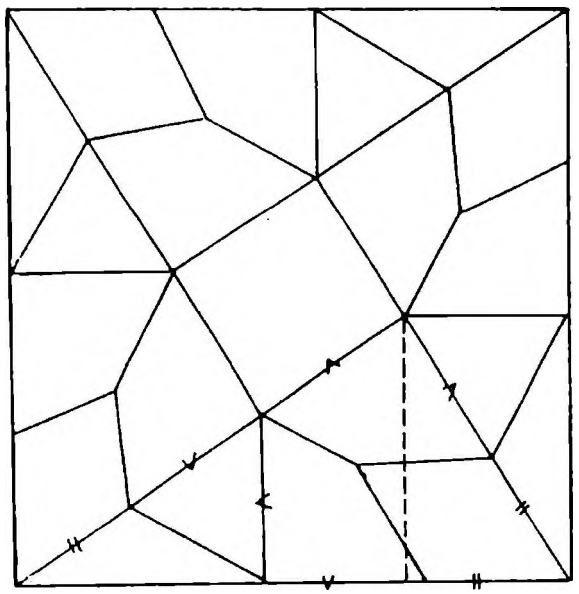
$$x^2 : b = (x-\frac{c}{b})^2 : y^2 = (x-\frac{c}{b}) : (a-x)$$

بنابراین، $ax^2 - x^3 = bx - c$.

ازدورال می‌گوید که همین مثلث در یک نسخهٔ خطی که احتمالاً در قرن شانزدهم میلادی در اصفهان نوشته شده، یافته شده است [۱۴]. این نسخه شامل ترسیمهای عملی و نقوش هندسی زیادی است و این مثلث در یکی از این نقوش ظاهر می‌شود (شکل ۴). به نوشتهٔ متن، این نقش را ابن‌هیثم نیز به کمک مقاطع مخروطی ترسیم کرده است.

در اینجا شاهد پیوندی میان صنعتگران از یک سو، و ریاضیدانانی چون خیام و ابن‌هیثم از سوی دیگر هستیم. پیش از کشف ازدورال، هیچ‌کس تصوری در بارهٔ سابقهٔ این مثلث نداشت. سؤال دیگر طبعاً این است که آیا پیوندی بین این مثلث و هیچ‌یک از بناهای تاریخی موجود وجود دارد یا نه.

شاید بسیاری پیوندهای ناشناختهٔ دیگر بین مسأله‌های هندسی در نسخه‌های خطی و کاربردهای موجود در آثار کهن یا هنرهای تزیینی وجود داشته باشد. در اینجا می‌خواهم چند سؤال طرح کنم که در باره‌اش فکر کنید.



شکل۴

این سؤالها برگرفته از نامهٔ منتشر نشده‌ای از احمدبن محمدبن عبدالجلیل سجزی (قرن ۴ هجری) است با عنوان *پاسخ به مسأله‌های یکی از هندسه‌دانان شیراز* (*اجوبه عن مسائل سئل عنه بعض مهندسی شیراز*) که نسخهٔ خطی آن در کتابخانهٔ ملی پاریس موجود است [۱۵]. (شکل ۵)

مسألهٔ ۳: می‌خواهیم متوازی‌الاضلاع AD را به چهار بخش $AGEHT$، $THEZM$، $MZDN$ و $AMNB$ تقسیم کنیم چنانکه مساحتهایشان برابر باشد و داشته باشیم $|HT| = |TM|$.

مسألهٔ ۴: می‌خواهیم متوازی‌الاضلاع $ABDG$ را به چهار بخش $ABZE$، $BZTD$ و $AGHE$ و $HEZT$ تقسیم کنیم چنانکه $AEHG = BZTD$ و $AEZB : ABGD$ نسبت مفروضی باشد، و $ZEHT : AEHG$ نسبت مفروض دیگری باشد.

مسألهٔ ۶: می‌خواهیم متوازی‌الاضلاع AD را چنان تقسیم کنیم که

$$AGCME = EMCKH = HKFT = ZTFQL = DQLZB$$

و مجموع آنها با $AHTB$ برابر باشد یا با $AHTB$ به نسبت مفروضی باشد.

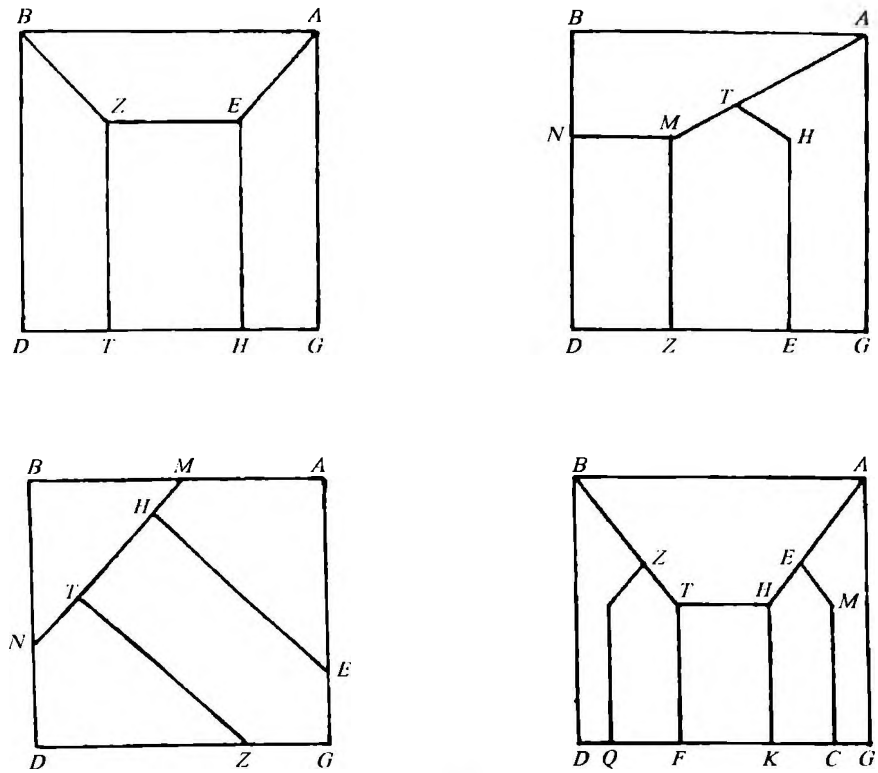
مسألهٔ ۸: می‌خواهیم متوازی‌الاضلاع $ABDG$ را چنان تقسیم کنیم که

$$AEHM = DZTN = EGZTH = BMN$$

و این تقسیم با خطهایی به موازات قطرهای متوازی‌الاضلاع انجام شود.

سجزی همهٔ این مسأله‌ها را حل کرده است. در اینجا کاری به راه‌حلهای او ندارم. (شما می‌توانید سعی کنید خودتان راه‌حلها را بیابید!) سؤالهای من به قرار زیر است:

۱. آیا این مسأله‌ها ارتباطی با نقوش تزیینی خاص یا مسائلی در معماری دورهٔ اسلامی دارد یا نه؟



شکل۵

۲. اگر پاسخ مثبت است، آیا این نقوش و بناهای تاریخی را هنوز می‌توان در ایران یا جای دیگر دید؟

۳. اگر پاسخ سؤال اول منفی است، چرا هندسه‌دانان شیراز به این مسائل علاقه‌مند بودند؟

پیوند میان هندسه و هنر می‌تواند کاربرد زیادی در آموزش ریاضیات داشته باشد. فرض کنید ارتباطی میان ترسیمهای موجود در نسخه‌های خطی و کاشیکاریها یا بناهای تاریخی قابل بازدید یافته باشیم. در این صورت می‌توان آن ترسیم را در مدرسه مطرح کرد و گردشی علمی برای بازدید از نمونهٔ عینی آن نقوش یا بناها ترتیب داد. یا اگر این کار مقدور نباشد، می‌توان از شاگردان خواست که این نقشها را رسم کنند و آثاری از هنر سنتی پدید آورند. امروزه بسیاری از کودکان، دست‌کم در دنیای غرب، از ریاضیات روگردانند، اما شاید اگر ارتباطی واقعی میان ریاضیات، تاریخ، و هنرهای زیبا ببینند، تغییر عقیده بدهند.

۶. ابزارها

تاکنون اغلب پژوهشها دربارهٔ تاریخ ریاضیات و نجوم دورهٔ اسلامی مبتنی بر متنهای مکتوب بوده است. اما منابع دیگری هم در این زمینه وجود دارد. در بخش قبل دیدیم که بناهای تاریخی و نقوش تزئینی نیز منابع دیگری هستند و شاید هم سنتهایی در زمینهٔ طراحی بناها و نقوش کاشیکاری سینه به سینه منتقل شده و باقی‌مانده باشد. ابزارهای نجومی برجا مانده مثل اسطرلابها و ابزارهای زمان‌سنجی مثل ساعتهای آفتابی نیز منابع مهم دیگری برای تاریخ علم‌اند.

تا همین اواخر به این ابزارها توجهی نمی‌شد، ولی خوشبختانه این وضع در حال تغییر است. حدود ده سال پیش، پروفسور دیوید کینگ از دانشگاه فرانکفورت در آلمان، طرح بسیار عظیمی را در مورد بررسی انواع پرشمار ابزارهای نجومی اسلامی و اروپایی که پیش از سال ۱۵۵۰ میلادی ساخته شده‌اند آغازکرد. او و همکارانش روی فهرستی چند جلدی شامل توصیفهای دقیق و تصاویر این ابزارها کار می‌کنند. بعلاوه، پروفسور کینگ و همکارانش از روشهای امروزی نظیر طراحی کامپیوتری برای تحلیل این ابزارهای مربوط به سده‌های میانه استفاده می‌کنند.

پروفسور کینگ به روش «وررفتن» کار می‌کند که به بیان خودش چنین است:

> «فلسفهٔ اساسی تهیهٔ فهرست این است، که ضرورت دارد شخص ابزار را در دست بگیرد، قطعاتش را از هم بازکند، هر قطعه را به دقت بررسی کند ــ خلاصهٔ کلام، قدری با آن بازی کند ــ تا کم‌کم از چند و چون آن خوب سر در بیاورد. برای این منظور دیدن عکس ابزار کفایت نمی‌کند.» ([۱۶]، ص. ۴)

این بررسیها تاکنون انبوهی از اطلاعات تازه پدید آورده است. بسیاری از آثار بی‌نام و نشان به طور تقریبی زمان‌گذاری شده‌اند. بسیاری اوقات، ابزارهای

یک دورهٔ خاص اطلاعات تازه‌ای در بارهٔ دانش نجوم آن عهد عرضه می‌کند که از متنهای خطی به دست نمی‌آید.

یکی از ابزارهای متعددی که پروفسور کینگ، مطالعه کرده، اسطرلابی است که حامدبن خضر خجندی در سال ۳۷۴ هجری در بغداد ساخته است. تصاویر بخشهایی از این اسطرلاب در منبع [۱۷] اثر کینگ منتشر شده، ولی اطلاعات کامل در بارهٔ این اسطرلاب انتشار نیافته است. این قدیمیترین اسطرلاب شناخته شدهٔ موجود از دورهٔ اسلامی است و اکنون در یک مجموعهٔ خصوصی در کویت نگهداری می‌شود.

کینگ یادآور شده است که عنکبوت اسطرلاب شامل تزئینی به صورت «چاربرگ» است. این تزئین اغلب در هنر گوتیک اروپای اواخر سده‌های میانه به کار می‌رفت و اکنون می‌بینیم که شاید منشأ آن از خاورمیانهٔ اسلامی بوده است. این نمونه نشان‌دهندهٔ ماهیت چندرشته‌ای مطالعهٔ اسطرلابهاست. اولین صفحهٔ اسطرلاب علاوه بر چیزهای دیگر شامل تسطیح کرهٔ آسمان با دایره‌های ارتفاع (مقنطرات) به فاصله‌های سه درجه و دایره‌های سمت به فاصله‌های پنج درجه برای عرض جغرافیایی بغداد (۳۳ درجه) است. صفحهٔ دوم اسطرلاب برای یافتن بیوت و تسییرات (در احکام نجوم) به ازای عرض جغرافیایی بغداد به کار می‌رفت. از این نظریه می‌توان نظریهٔ شعاعها و تسییرات در احکام نجوم مورد استفادهٔ خجندی را استنباط کرد. در این نظریه، کرهٔ آسمان به وسیلهٔ دایره‌هایی گذرنده از نقاط شمال و جنوب افق که استوای آسمانی را در نقاطی به فواصل منظم قطع می‌کنند، به بخشهایی تقسیم می‌شود.

ابزارهای نجومی دورهٔ اسلامی در موزه‌ها و مجموعه‌های خصوصی سراسر جهان پراکنده‌اند، بنابراین اگر کسی بخواهد آنها را به روش «وررفتن» پروفسور کینگ (که واقعاً آن را بهترین روش می‌دانم) مطالعه کند، باید سفرهای دور و درازی را در پیش بگیرد. پروفسور سزگین از مؤسسهٔ تاریخ علوم عربی-اسلامی در فرانکفورت طرحی را برای مشابه‌سازی اغلب ابزارهای نجومی مهم دورهٔ اسلامی و به نمایش گذاشتن این نمونه‌ها در مؤسسهٔ خود در فرانکفورت آغاز کرده است. به نظر من این هم طرح مهمی است، نه تنها به خاطر این که روش «وررفتن» بهترین روش پژوهش است، بلکه همچنین برای اینکه بنا به تجربهٔ من اسطرلاب کارایی آموزشی بالایی برای جمع کثیر مخاطبان دارد، به آسانی می‌توان دانشجویان و دانش‌آموزان را به ساختن اسطرلاب با مصالح ساده واداشت. نمونه‌ای ابتدایی که خودم (بر اساس یک اسطرلاب یمنی) رسم کرده‌ام در این گفتار نشان داده می‌شود. به نظر من این کار بسیار ارزنده‌ای است که یک مؤسسهٔ تاریخ علم نمونهٔ نسبتاً کاملی از یک اسطرلاب تاریخی دورهٔ اسلامی، مثلاً تصویر مناسبی از اسطرلاب خجندی را که تصاویرش ضمن این گفتار به نمایش گذاشته شده است، روی مقوا چاپ کند.

از اسطرلاب می‌توان برای توضیح برخی از اصول بنیادی نجوم، مثل طلوع و غروب ستارگان، حرکت خورشید، تغییرات طول روز و علت پیدایش فصلها استفاده کرد. در کشور ما (هلند) اغلب دانش‌آموزان و حتی بسیاری از دانشجویان به نحو دلسردکننده‌ای از این موضوعهای ساده بی‌اطلاع‌اند. از اسطرلاب می‌توان برای تعیین زمان (خورشیدی حقیقی) و یافتن جهت شمال استفاده کرد. به کمک برخی صفحه‌های خاص اسطرلاب می‌توان راه‌حلهای ترسیمی مسائلی از مثلثات کروی، مثلاً جهت قبله برای محلی با مختصات جغرافیایی معلوم را یافت. برای دانشجویانی با سطح ریاضیات بالاتر، می‌توان نظریهٔ ریاضی تسطیح کره و طرح ساخت اسطرلاب را مطرح کرد و آنان را واداشت که خود اسطرلاب ترسیم کنند و با اسطرلابی که ساخته‌اند برخی رصدهای نجومی را انجام دهند.

از موضوع قدری دور شدیم، زیرا فکر می‌کنم که تاریخ علم باید از حد یک رشتهٔ صرفاً علمی جالب برای متخصصان فراتر باشد. به گمان من باید توجه بسیاری از مردم را به تاریخ علم جلب کرد، زیرا تنها به این طریق می‌توان به این رشتهٔ شادابی و نشاط بخشید. اسطرلاب یکی از وسایل ممکن برای این کار است، زیرا تاریخی غنی دارد، کاربرد آن آسان است و زیبایی خاص خود را دارد. اسطرلاب برای بسیاری از افراد امروزی می‌تواند جالب باشد، همچنانکه برای خیلی از افراد زمانهای دور مورد توجه و نیاز بود. به عنوان شاهد گفتارم گفته‌هایی از مولانا جلال‌الدین رومی را در بارهٔ اسطرلاب نقل می‌کنم.

مولانا در مثنوی می‌گوید:

عشق اسطرلاب اسرار خداست

در *فیه‌مافیه* نیز می‌گوید: «آدمی اسطرلاب حقّست اما منجمی باید که اسطرلاب را بداند، تره‌فروش یا بقال اگرچه اسطرلاب دارد اما از آن چه فایده گیرد و به آن اسطرلاب چه داند احوال افلاک را و دوران و برجها و تأثیرات و انقلاب را الی غیرذلک، پس اسطرلاب در حق منجم سودمندست که **مَنْ عَرَفَ نَفْسَه فَقَدْ عَرَفَ رَبَّهُ**. همچنانک این اسطرلاب مسین آینهٔ افلاکست، وجود آدمی که **وَ لَقَدْ کَرَّمنا بَنِی آدَمَ** اسطرلاب حقّست چون او را حق تعالی به خود عالم و دانا و آشنا کرده باشد، از اسطرلاب وجود خود تجلی حق را و جمال بیچون را دم به دم و لمحه به لمحه می‌بیند و هرگز آن جمال از این آینه خالی نباشد». برای درک این جمله باید بدانیم که عنکبوت اسطرلاب «تصویر» (یعنی تسطیح) افلاک است و حرکت عنکبوت روی صفحه، بیانگر حرکت افلاک حول زمین است [۱۸].

۷. نتیجه‌گیری

همهٔ مثالهای اخیر بیانگر توجه به تاریخچهٔ کاربردهای ریاضیات و نجوم است. به نظر من این توجه در پژوهشهای اخیر اهمیت روزافزون دارد و در ورای آن همواره میل به قراردادن ریاضیات و نجوم در جایگاه اجتماعی و فرهنگی آنها نهفته است. مثالهای بسیار دیگری می‌توان مطرح کرد و البته آنچه من برگزیدم در عین حال نشان‌دهندهٔ علایق و محدودیتهای شخصی من نیز بوده است. بنابراین در بارهٔ پژوهشهای اخیر راجع به راه یافتن اصطلاحهای علمی از زبانهای دیگر (مثل یونانی، سریانی، پهلوی و سانسکریت) به عربی مثالی نیاورده‌ام.

بی‌شک هنوز به تصویری از تاریخ ریاضیات و نجوم دورهٔ اسلامی که به تعبیری کامل باشد دست نیافته‌ایم. پژوهشگران در حال کشف تکه‌های بیشتر و بیشتری از یک نقش کاشیکاری بسیار پیچیده‌اند که طرح کلی آن معمولاً چندان آشکار نیست. یکی از مشکلات کار، گستردگی این زمینه است؛ مسألهٔ دیگر ناشی از این است که منابع مطالعه و پژوهشگران در سراسر جهان پراکنده‌اند. بنابراین یافتن همهٔ منابع اطلاعات یا همهٔ منابع منتشر شده در یک موضوع خاص کار آسانی نیست. مقاله‌های بدیع در زمینهٔ

ریاضیات و نجوم دورهٔ اسلامی به زبانهای متعددی (عربی، ترکی، فارسی، انگلیسی، فرانسه، آلمانی، روسی، اسپانیولی، کاتالان، ایتالیایی، و غیر آن) عرضه می‌شود. خوشبختانه آثار کتابشناسی در زمینهٔ تاریخ ریاضیات و نجوم دورهٔ اسلامی وجود دارد که یکی به وسیلهٔ فواد سزگین در سالهای ۱۹۷۴ و ۱۹۷۸ [۱۹]، و دیگری به وسیلهٔ روزنفلد و ماتویفسکایا در سال ۱۹۳۸ منتشر شده است (ترجمهٔ انگلیسی کتاب اخیر به زودی انتشار خواهد یافت). این آثار بسیار مفیدند، اما به محض چاپ شدن به عبارتی تازگی خود را از دست می‌دهند.

یک گروه بین‌المللی از پژوهشگران که هسته‌هایش در کانادا، هلند و ایران ایجاد شده است، اکنون در حال پایه‌ریزی طرحی برای ایجاد یک پایگاه داده‌ها (قابل مقایسه با آثار سزگین و روزنفلد-ماتویفسکایا) روی شبکهٔ اینترنت و روزامد کردن مداوم آن با انتشارات جدید هستند. این پایگاه داده‌ها باید برای هر کسی که در هر جای جهان به شبکهٔ اینترنت دسترسی دارد به رایگان قابل استفاده باشد. این طرح بسیار عظیمی است و مشکلات متعددی برای آغاز کردن آن هست که هنوز برطرف نشده است. اما امیدوار هستیم که ایجاد این پایگاه داده‌ها سرانجام به تحقق درآید. در آن صورت، یکی از مشکلات پژوهش تا حدی برطرف خواهد شد. یک مشکل دیگر در این پژوهش ناشی از آن است که بسیاری از پژوهشگران به‌تنهایی یا در گروههای بسیار کوچک کار می‌کنند و فرصت محدودی برای پژوهش دارند، و برخی از معدود مراکز تاریخ علم عربی-اسلامی در شرایط دشواری کار می‌کنند. اما به نظر من در ایران شرایط خوبی برای این نوع کار در حال پیدایش است. امیدوارم که مؤسسه‌های جدید در ایران پژوهشگران پرشماری در زمینهٔ تاریخ ریاضیات و نجوم دورهٔ اسلامی تربیت کنند و امیدوارم که پاداش تلاشهای آنان به شایستگی داده شود.

مراجع

۱. مقاله‌های مروری در بارهٔ پژوهشهای اخیر راجع به تاریخ ریاضیات دورهٔ اسلامی به قرار زیرند

J. L. Berggren, Mathematics and her Sisters in Medieval Islam: a Selective Review of Work Done from 1985 to 1995, in *Historia Mathematica* **24** (1997), pp. 407-440 (with 182 references);

J. L. Berggren, History of Mathematics in the Islamic World: The Present State of the Art, in *Middle East Studies Association Bulletin* **19** (1985), pp. 9-33.

2. Menso Folkerts, *Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen nach al-Hwārizmī, Edition, Übersetzung und Kommentar,*
[کهنترین رسالهٔ لاتینی در بارهٔ حساب هندی به روایت خوارزمی: ویرایش، ترجمه، و شرح]
München: Bayerische Akademie der Wissenschaften, 1997.

3. Jamil Ragep, *Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī's Memoir on Astronomy,*
[تذکره فی‌الهیئة از خواجه نصیرالدین طوسی]
New York: Springer Verlag, 1993.

۴. نگاه کنید به کتاب زیر

Julio Samsó, *Las ciencias de los antiguos en al-Andalus*
[علوم عهد باستان (علوم دقیقه) در اندلس]
Madrid: MAPFRE, 1992.

۵. نگاه کنید به کتاب زیر، به خصوص فصلهای ۶.۲ و ۳.۳ آن

B. van Dalen, *Ancient and Medieval Astronomical Tables: Mathematical Structure and Parameter Values*, Utrecht 1993.

برای اطلاع از تحقیقات مشابه در بارهٔ کوشیار همچنین نگاه کنید به

B. van Dalen, A Table for the True Solar Longitude in the Jāmi^c Zīj, in: A. von Godstedter (ed.), *Ad Radices, Festschrift zum fünfzigjährigen Bestehen des Instituts für Geschichte der Naturwissenschaften ··· Frankfurt am Main*, Stuttgart: Steiner, 1994, pp. 171-190;

G. van Brummelen, Mathematical Methods in the Tables of Planetary Motion in Kūshyār ibn Labbān's Jāmi^c Zīj, to appear in *Historia Mathematica* **25** (1998) no. 1.

6. Yaḥyā ibn Abī Manṣūr, *The Verified Astronomical Tables for the Caliph al-Ma'mūn*, facsimile edition, Frankfurt: Institute for the History of Arabic-Islamic Sciences, 1986.

۷. نگاه کنید به منابع زیر

E. S. Kennedy, M. Janjanian, The Crescent Visibility Table in al-Khwārizmī's Zīj, *Centaurus* **11** (1965), pp. 73-78;

J. P. Hogendijk, Three Islamic lunar crescent visibility tables, *Journal for the History of Astronomy* **19** (1988), pp. 29-43.

8. E.S. and M.H. Kennedy, *Geographical Coordinates of Localities from Islamic Sources*, Frankfurt: Institute for the History of Arabic- Islamic Sciences, 1987.

۹. مقاله‌های مربوط به این موضوع در منابع زیر گردآوری شده‌اند

E.S. Kennedy, Colleagues and Former Students, *Studies in the Islamic Exact Sciences*, Beirut 1983;

David A. King, *Islamic Mathematical Astronomy*, London: Variorum Reprints, 1986.

10. R. Rashed, A Pioneer in Anaclastics: Ibn Sahl on Burning Mirrors and Lenses, *Isis* **81** (1990), pp. 464-491.

متن رسالهٔ ابوسعد علاء در اثر زیر آورده شده است

R. Rashed, *Géométrie et Dioptrique au Xe Siècle: Ibn Sahl, Al-Qūhī et Ibn al-Haytham*, Paris: Les Belles Lettres, 1993.

به خصوص صفحات ۲۳ تا ۳۰ آن را ببینید.

بررسی امروزی رسالهٔ مذکور در مقالهٔ زیر آمده است:

Mohsen Maesumi, Parabolic Mirrors, Elliptic and Hyperbolic Lenses, *The American Mathematical Monthly* **99** (1992), pp. 558-560.

11. Yvonne Dold, Practical Arabic Mathematics: Measuring the Muqarnas by al-Kāshī, *Centaurus* **35** (1992), pp. 193-242; Yvonne Dold, The volume of domes in Arabic mathematics, in M. Folkerts, J.P. Hogendijk, *Vestigia Mathematica: Studies in Medieval and Early Modern Mathematics in Honour of H.L.L. Busard*, Amsterdam: Rodopi. 1993, pp. 93-106.

نوار ویدئویی مربوطه را می‌توانید از انجمن ریاضی آمریکا خریداری کنید.

12. Alpay Özdural, On interlocking similar or corresponding figures and ornamental patterns of cubic equations, *Muqarnas* **13** (1996), pp. 191-211;

همچنین نگاه کنید به

Alpay Özdural, Omar Khayyām, Mathematicians and *Conversazioni* with Artisans, *Journal of the Society of Architectural Historians* **54** (1995), pp. 54-71.

۱۳. غلامحسین مصاحب، *حکیم عمرخیام به عنوان عالم جبر*، چاپ بهمن، ۱۳۳۹، ص ۵۹ـ۷۴.

۱۴. این متن به پیوست کتاب زیر (ص ۷۳ـ۹۳) چاپ شده است

هندسهٔ ایرانی، کاربرد هندسه در عمل، ابوالوفاء محمدبن محمدالبوزجانی، برگردان به عبارت روز و گردآوری ضمیمه از سیدعلیرضا جذبی، سروش، تهران، ۱۳۶۹.

۱۵. *اجوبه عن مسائل سئلها عنه بعض مهندسی شیراز*، نسخهٔ خطی کتابخانهٔ ملی پاریس، مجموعهٔ نسخ عربی، شمارهٔ ۲۴۵۷، برگهای ۱۵۱ تا ۱۵۶.

16. David A. King, Medieval Astronomical Instruments: A Catalogue in Preparation. *Bulletin of the Scientific Instrument Society* bf **31** (dec. 1991), pp. 3-7.

17. David A. King, Strumentazione astronomica nel mondo medievale islamico, in: G.L. Turner (ed.), *Gli strumenti*=vol. 1 of P. Galluzzi (ed.) *Storia della scienza*, Torino 1991, pp. 154-189, 581-585;

همچنین مراجعه کنید به

A. King, Astronomical Instruments between East and West, in *Kommunikation zwischen Orient und Okzident, Alltag und Sachkultur*, Wien: Österreichische Akademie der Wissenschaften, 1994, pp. 143-198.

۱۸. مولانا جلال‌الدین رومی، *کتاب فیه‌مافیه*، با تصحیحات و حواشی بدیع‌الزمان فروزانفر، چاپ سوم، تهران، ۱۳۵۸، ص ۱۰.

19. F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, Band V, Mathematik, Band VI, Astronomie, Band VII, Astrologie, Leiden: Brill, 1974, 1978, 1979; G.P. Matvievskaya, B.A. Rozenfeld, *Matematiki i Astronomi Musulmans'kogo Srednevekov'ya i ikh Trudi*, Moscow: Nauka, 1983, 3 vols.

[*ریاضیدانان و منجمان دورهٔ اسلامی و آثارآنها*، به روسی، مسکو، نائوکا، ۱۹۸۳، ۳ جلد.]

* * * * * *

• این مقالهٔ ترجمهٔ متن سخنرانی یان پ. هوخندایک (Jan P. Hogendijk) در پژوهشکدهٔ تاریخ علم دانشگاه تهران است که در تاریخ ۱۳۷۶/۱۲/۲۳ ایراد شده است. یان پ. هوخندایک پژوهشگر تاریخ ریاضیات و نجوم در دانشگاه اوترخت هلند، و هم‌اکنون سردبیر اجرایی *هیستوریاماتماتیکاست*. نشانی او در پست الکترونیک: hogend@math.uu.nl

اسطرلاب برنجی
ساخت محمدبن حامدالاصفهانی
۵۵۸ هجری قمری

نشر ریاضی، سال ۹، شمارهٔ ۲، ص ۵۳

۲ کتاب

«حل مسأله» چالشی بی‌همتاست که برای اهل معنی رضایت خاطری فراهم می‌کند که هیچ بدیلی ندارد و این خود شاید رازِ پنهانِ سرزندگی ریاضیات باشد. مقولهٔ حل مسأله از دهها سال پیش موجب تولید متون ویژهٔ فراوانی در زمینهٔ علوم ریاضی شده است. در سالهای اخیر نیز کتابهای شاخصی به بازار آمده‌اند که جذابیت زیادی دارند. به دو کتاب از این دست نظر می‌اندازیم.

.۱

Steven G. Krantz, *Techniques of Problem Solving*, American Mathematical Society (1997).

انجمن ریاضی آمریکا (AMS) معمولاً کتابهایی در عالیترین سطوح پژوهشی ریاضیات منتشر می‌کند ولی اخیراً کتابهایی در زمینهٔ ریاضیات مقدماتی نیز به چاپ رسانده است که هر یک از آنها ویژگیهای خاصی دارد. کتاب آقای کرانتس نیز از این قبیل کتابهاست. این کتاب پیش‌نیاز خاصی طلب نمی‌کند یعنی حتی به حساب دیفرانسیل و انتگرال نیز نیازی ندارد ولی مسائلی چالش‌برانگیز را در زمینه‌های مختلف پیشِ روی ما قرار داده است، مباحثی که در کتاب مورد توجه قرار گرفته است عمدتاً شامل بحثهایی در زمینهٔ شمارش، روابط بین اعداد، هندسه و برخی از مباحث ترکیبیات است. نگاهی به چند مسأله از این کتاب، که با بیان روان و صمیمی خود خواننده را مجذوب می‌سازد، خالی از لطف نیست.

۱.۱ تعداد صفرهایی را که عدد !۱۰۰ به آنها ختم می‌شود پیدا کنید.

۲.۱ نقاط P_1، P_2، P_3، ...، P_k، k نقطهٔ دلخواه در صفحه‌اند که همهٔ آنها در یک راستا نیستند. نشان دهید یک خط در صفحه وجود دارد که فقط از دو تا از این نقطه‌ها می‌گذرد.

۳.۱ فرض کنید $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ یک خم بسته در صفحه باشد که خودش را قطع نمی‌کند. ثابت کنید چهار نقطه روی این خم وجود دارد که رئوس یک مستطیل‌اند.

.۲

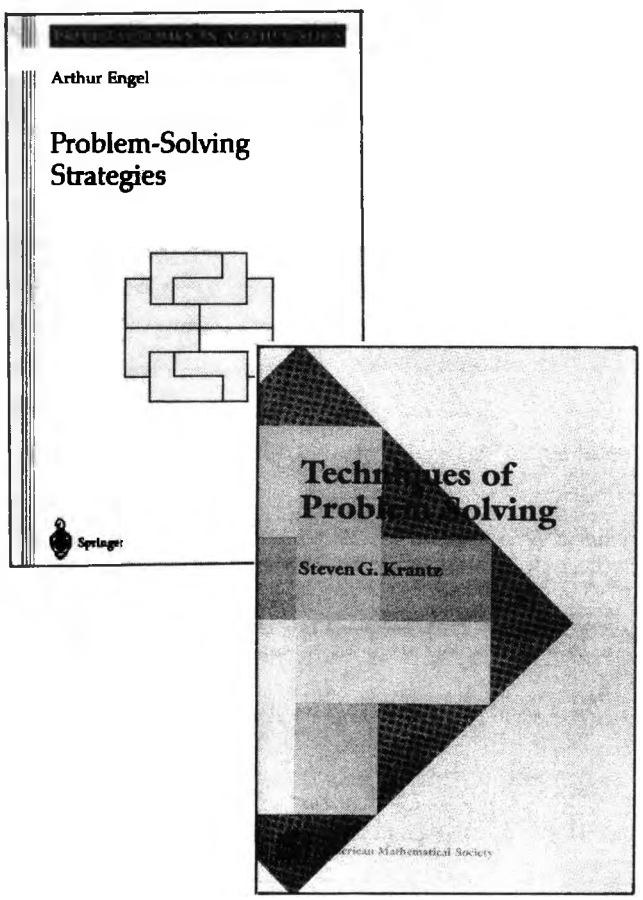
Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag (1998).

کتاب آقای اِنگل نیز مانند کتاب آقای کرانتس به مقولهٔ مسأله پرداخته است ولی عمدتاً جُنگی است که از دوره‌های آموزشی ویژهٔ المپیاد ریاضی در آلمان فراهم آمده و پاره‌ای از مسائل المپیادهای مختلف را نیز در برگرفته است. کتاب، بیانی رسمی و کلاسیک دارد و مباحث مختلفی از ترکیبیات، نظریهٔ اعداد، جبر و آنالیز مقدماتی، و هندسه در آن آمده است. به دو مسأله از این کتاب نیز نگاهی می‌اندازیم.

۱.۲ همهٔ توابع پیوستهٔ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ را پیدا کنید که سه جملهٔ یک تصاعد حسابی مثل x، $x+y$، و $x+2y$ را به $f(x)$، $f(x+y)$، و $f(x+2y)$ می‌برند که خود یک تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند.

۲.۲ فرض کنید $1 \le k \le n$ و همهٔ دنباله‌های متناهی با مجموع n را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید جملهٔ k در همهٔ دنباله‌ها به تعداد $T(n,k)$ مرتبه ظاهر شود. مقدار $T(n,k)$ را پیدا کنید.

ی. ت.

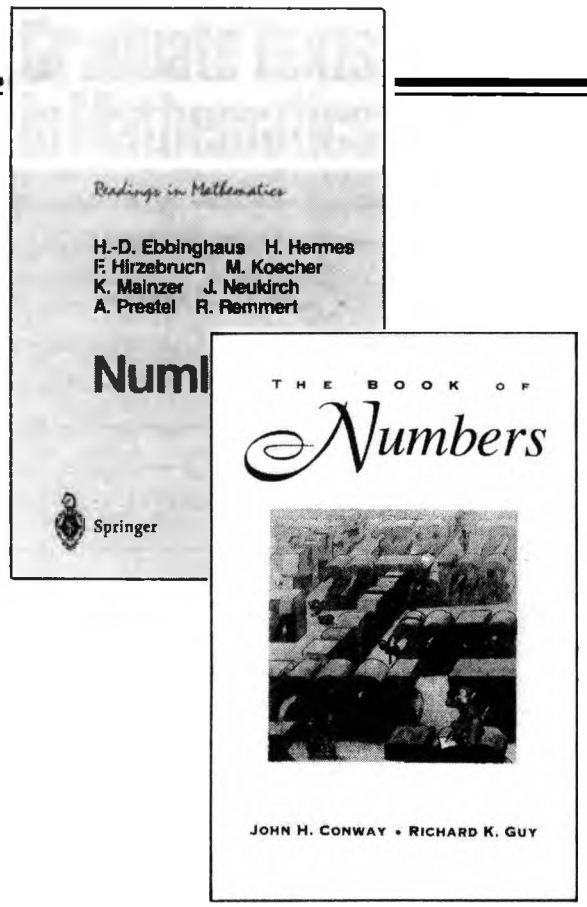


نشر ریاضی، سال ۹، شمارهٔ ۲، صص ۵۴-۵۷

کتاب

سیر و سفری در جهان اعداد

سیاوش شهشهانی*



1. *Numbers*, H.-D. Ebbinghaus *et al.*, Springer (1995).

2. *The Book of Numbers*, John H. Conway and Richard K. Guy, Copernicus (1998).

پیش از آنکه به مرور این دو کتاب استثنایی دربارهٔ *اعداد* بپردازیم، از خواننده می‌خواهیم اطلاعات عمومی عددی خود را با پاسخ دادن به ده سؤال زیر بیازماید:

(۱) خواص جبری جمع و ضرب اعداد مانند خاصیتهای 'شرکت‌پذیری' و 'تعویض‌پذیری' را چه کسی برای اولین بار، آگاهانه مورد توجه قرار داد و اصطلاحات مربوط را وضع کرد؟

(۲) لغت 'قرنطینه' از چه ریشهٔ عددی مشتق شده است؟

(۳) چه مفهوم عددی به 'پنتاگرام'، سمبل فیثاغورسیها، منسوب است؟ (شکل ۱).

(۴) فرض کنید a، b، c و d اعدادی صحیح هستند به‌طوری که ad و bc اعداد (صحیح) متوالی‌اند. در این‌صورت البته کسرهای $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{d}$ به هم نزدیک‌اند. روش هندسی ساده‌ای برای ترسیم کسر $\frac{a+b}{c+d}$ که بین $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{d}$ قرار دارد ارائه کنید.

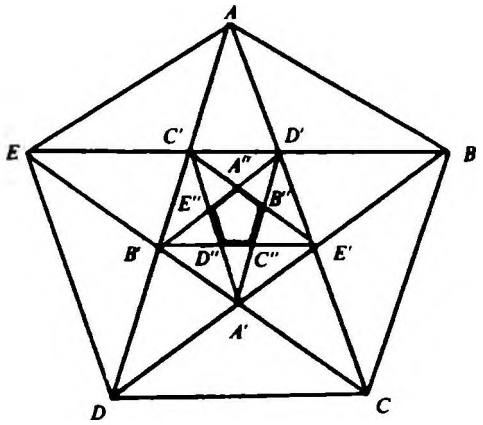
(۵) نمایش هندسی اعداد مختلط به‌صورت نقاط صفحه در چه تاریخی و توسط چه کسی ابداع شد؟

(۶) به چند شکل متمایز معنی‌دار می‌توان n زوج پرانتز را در یک عبارت ریاضی منظم کرد؟ مثلاً برای دو زوج پرانتز، آرایشهای ( )( ) و (( )) معنی‌دار هستند ولی)((معنی‌دار نیست.

(۷) اگر $p(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب کواترنیونی باشد، آیا معادلهٔ $p(x) = 0$ همواره در کواترنیونها جواب دارد؟

(۸) اعداد صحیح مثبت را نوشته شده در مبنای ۱۰ در نظر بگیرید. عدد اول p را *طویل* می‌نامیم اگر دورهٔ تناوب بسط اعشاری $\frac{1}{p}$ برابر $(p-1)$ باشد (یعنی همهٔ ارقام ممکن ۱، ۲، ... تا $(p-1)$ در آن ظاهر شوند). چند درصد اعداد اول طویل هستند؟

(۹) به چه مفهومی، تنها دستگاههای عددی شامل اعداد حقیقی، مجموعه‌های اعداد حقیقی، اعداد مختلط، کواترنیونها و اعداد کیلی هستند؟



شکل۱

(۱۰) آیا روش برش که ددکیند آن را برای ساختن اعداد حقیقی ابداع کرد در جای دیگری از ریاضیات کاربرد و مصداق پیدا کرده است؟

پاسخ به این سؤالها را در طی بررسی اجمالی دو کتابِ مورد نقد خواهیم یافت. با اینکه اعداد از ارکان مهم ریاضیات و شاید سنگ بنای اولیه آن هستند، کمتر به کتابی برمی‌خوریم که به سرگذشت 'عدد' به‌عنوان یک 'موجود' حائز هویت بپردازد یا اعداد را به‌گونه‌ای که مثلاً یک اخترشناس به بررسی انواع پدیده‌های سماوی می‌پردازد بررسی کند. دو کتابِ مورد نظر هر یک به شیوه‌ای ویژه خواننده را به سیر و سفری تماشایی و به‌خاطر ماندنی در جهان اعداد می‌برند. معرفی این دو کتاب را می‌توان با کاماتی از مقدمهٔ هر یک آغاز کرد. در پیشگفتار نسخهٔ انگلیسی کتاب *Numbers* (از این پس N) می‌خوانیم: «... [این کتاب] داستانی است پرشور از مفهوم 'عدد' ... از زبان هشت مؤلف که به سبک حکایتی تاریخی تنظیم شده است و خواننده را از مصر باستان تا اواخر قرن بیستم همراهی می‌کند. این داستان از بعضی از ساده‌ترین ایده‌های ریاضی آغاز می‌شود و به برخی از غامضترین مفاهیم متنهی می‌شود.» و در جایی دیگر: «برای ریاضیدانان همواره مشکل بوده است که از یک منظرگاه وسیع به موضوع علم خود بنگرند. با اینکه هر یک از ما به ریشه‌های رشتهٔ تخصصی خود درگذشته‌ها و گاهی نیز به ارتباط آن با سایر تخصصها اذعان داریم، لکن به‌ندرت به چشم‌انداز رشد ریاضیات در طی هزاره‌ها توجه می‌کنیم». در مورد *The Book of Numbers* (از این پس BN)، نویسندگان در مقدمه می‌نویسند: «... هدف ما این است که خواننده‌ای را که در ریاضیات زمینهٔ خاصی ندارد ولی از کنجکاوی بهره‌مند است از مضامین و مصداقهای بیشماری که در آن لغت 'عدد' به کار گرفته می‌شود آگاه سازیم. ما این کار را به نوعی انجام داده‌ایم که فارغ از تکلفها وتشریفات کتابها و برنامه‌های درسی باشد.»

کتاب N نخستین بار به زبان آلمانی با عنوان *Zahlen* در سال ۱۹۸۳ به چاپ رسید و با استقبال گرمی روبه‌رو شد. چاپ حاضر سومین چاپ از ترجمهٔ انگلیسی مبتنی بر ویراست دوم کتاب است. هشت ریاضیدان بنام آلمانی چهارده فصل این کتاب را در سه بخش کلی به تحریر درآورده‌اند. سیر فصول تاریخی است. بخش اول کتاب، مشتمل بر شش فصل، از پیدایش مفهوم عدد صحیح در دوران باستان آغاز می‌شود و در دو فصل اول به اعداد کسری، کشف اعداد ناگویا و پیدایش مفهوم عدد حقیقی می‌پردازد. فصلهای ۳ و ۴ به ظهور اعداد مختلط و کوششهایی که مصروف اثبات قضیهٔ اساسی جبر شد اختصاص دارد. در فصل پنج، مصداقهای گوناگون ظهور قدیمیترین عدد ناجبری شناخته شده، یعنی عدد پی (π) بررسی می‌شود و نهایتاً بحثی پیرامون ناجبری بودن عدد پی می‌آید و بالاخره در فصل شش، اعداد p-ای، ابداع ریاضیدان آلمانی کورت هنزل[1] در اوایل قرن بیستم، با تشریح ارتباط آنها با نظریهٔ اعداد، توصیف می‌شوند. در این فصول می‌خوانیم که اعداد حقیقی درواقع ریشه در هندسه دارند و پیش از آنکه به‌عنوان 'عدد' (یعنی هم‌خانواده با اعداد صحیح و کسری) مطرح باشند به‌عنوان نسبت طول پاره‌خطها در هندسه ظاهر شدند. آنچه را امروز به‌عنوان الگوریتم اقلیدسی برای یافتن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح می‌شناسیم اگر برای دو طول دلخواه به‌کار بندیم کسرهای مسلسل به‌دست می‌آیند که ائودوکسوس[2] از اصحاب افلاطون در مورد آن کاوشهای عمیقی انجام داد. همان‌طور که در N آمده است، کتاب پنجم *اصول اقلیدس* به نظریهٔ نسبتهای ائودوکسوس اختصاص دارد. بررسی جامعتری از کار ائودوکسوس را می‌توان در مقاله‌ای از دیوید فاولر [۱] یافت. شاید تعجب‌آور باشد که وحدت کامل مفاهیم حسابی و هندسی عدد، نخستین بار با ابداع هندسهٔ تحلیلی توسط فرما و دکارت به ثبت رسیده است. پیدایش اعداد مختلط که به‌گونه‌ای طبیعی، هر چند با اکراه و ناباوری، در مقولهٔ حل و بحث معادلات درجهٔ ۳ و ۴ در ایتالیای قرن ۱۶ بر ریاضیات تحمیل می‌شود حکایتی آشناست. در پاسخ به سؤال ۵ در آغاز این نقد، باید گفت که ظاهراً اولین اشارات مبهم به تناظر یک‌یک بین نقاط صفحه و اعداد مختلط در کتاب جبری که ریاضیدان بریتانیایی جان والیس در سال ۱۶۸۵ به چاپ رساند دیده می‌شود که دقیق و قانع‌کننده نیست. اویلر در مقاله‌ای به تاریخ سال ۱۷۴۹ اشاره‌ای به این موضوع دارد که برای یافتن لگاریتم یک عدد مختلط به شکل $\cos g + i \sin g$ باید زاویهٔ روی دایرهٔ واحد متناظر با نقطهٔ $(\cos g, \sin g)$ را در نظر گرفت. مساح نروژی کاسپار وسل[3] در مقاله‌ای که در سال ۱۷۹۸ در *گزارشهای آکادمی سلطنتی دانمارک* به چاپ رساند برای نمایش پاره‌خطهای جهتدار از اعداد مختلط استفاده کرد. حسابدار سوئیسی ژان رُبر آرگان[4] اندکی بعد (به‌طور مستقل) تعبیر جذر (-1) را به‌عنوان دوران 90° مطرح نمود که اصطلاح 'صفحهٔ آرگان' برای صفحهٔ اعداد مختلط از این مطلب نشأت گرفته است. شکی نیست که گاوس قبل از ۲۰ سالگی از تعبیر هندسی اعداد مختلط به‌عنوان نقاط صفحه اطلاع کامل داشته و در رسالهٔ خود در سال ۱۷۹۹ از آن بهرهٔ کامل گرفته است.

بخش دوم کتاب N (فصلهای ۷ تا ۱۱) با عنوان *جبرهای تقسیم حقیقی* به کوششهای مربوط به تعمیم و توسعهٔ اعداد مختلط اختصاص دارد. همیلتن نخست مصمم بود همان‌طور که از اعداد مختلط برای بررسی دوران در صفحه استفاده می‌شود نوعی جبر در فضای سه‌بعدی تعریف کرده و از آن برای بررسی دورانها در فضای سه‌بعدی استفاده کند. کوششهای ناکام وی بالاخره منجر به کشف جبر چهارتایی‌ها (کواترنیونها) در سال ۱۸۴۳ شد. در پاسخ به سؤال (۱)، ظاهراً همیلتن بود که اصطلاحاتی چون 'شرکت‌پذیری'

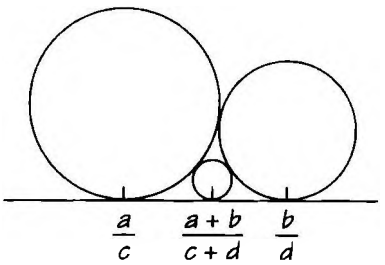
1. Kurt Hensel 2. Eudoxus 3. Caspar Wessel
4. Jean Robert Argand

و 'تعویض‌پذیری' را وضع کرد و توجه آگاهانهٔ ریاضیدانان را به این خواص جلب نمود. اینکه یک 'دستگاه عددی' از چه خواصی باید برخوردار باشد ذهن بسیاری از ریاضیدانان قرن نوزده را به‌خود جلب کرد. کواترنیونهای همیلتن از خاصیت تعویض‌پذیری برخوردار نیستند ولی سایر ویژگیهای اعداد حقیقی و مختلط را دارند. همیلتن کشف خود را در نامه‌ای به تاریخ اکتبر ۱۸۴۳ به دوست خود جان گریوز[1] اطلاع داد. به فاصلهٔ دو ماه، گریوز قانون ضرب هشت‌تایی‌ها (اکتانیون[2]ها) را کشف کرد و دستنویسی با این مضمون در ژانویهٔ ۱۸۴۴ برای همیلتن فرستاد. چاپ این نوشته بیش از چهار سال طول کشید و قبل از انتشار آن، آرتر کیلی مستقلاً به همین کشف نایل آمد که اصطلاح معادل 'اعداد کیلی' برای دستگاه اکتانیونها از این روست. همان‌گونه که همیلتن بلافاصله متوجه شد، اکتانیونها از ویژگی شرکت‌پذیری عمومی برخوردار نیستند ولی شرطهای ضعیفتر $x(xy) = x^2y$ و $(xy)y = xy^2$ برای آنها برقرار است. در فصلهای ۸، ۹ و ۱۰ کتاب N توصیف کم‌نظیری از قضایای فروبنیوس، هورویتس[3]، گلفاند-مازور[4]، و تسورن[5] ارائه شده است که هر یک به نوعی چهار حوزهٔ عددیِ اعداد حقیقی، اعداد مختلط، کواترنیونها و اکتانیونها را به‌عنوان تنها حوزه‌های عددی واجد نوعی شرایط 'طبیعی' مشخص می‌کنند. بالاخره در فصل ۱۱ هیرتسبروخ[6] شرحی از کاربرد توپولوژی جبری (در سال ۱۹۵۸) توسط بات[7]، کرور[8] و میلنر[9] در اثبات این قضیه دارد که تنها جبرهای حقیقی فاقد مقسوم‌علیه صفر همان چهار جبر فوق‌الذکر هستند.

بخش سوم N به نوع دیگری از تعمیم عدد اختصاص دارد که به منطق ریاضی و نظریهٔ مجموعه‌ها مربوط می‌شود. فصل ۱۲ توصیفی است از 'بینهایت کوچکها' به روایت آنالیز غیراستاندارد و فصل ۱۴ به مسائل اعداد ترامتناهی و ارتباط نظریهٔ مجموعه‌ها با سایر رشته‌های ریاضیات می‌پردازد. فصل ۱۳ که در واقع نقطهٔ اشتراکِ موضوعیِ دو کتاب تحت بررسی است 'اعداد کانوی'[10] را بررسی می‌کند. جان کانوی در دههٔ ۷۰ میلادی موفق شد تعمیمی از اعداد حقیقی مبتنی بر روش بُرش ددکیند (سؤال ۱۰ را ببینید) ارائه کند که بخشی از نظریهٔ بازیها را فرا می‌گیرد؛ این نظریه در فصل آخر کتاب BN نیز ارائه شده است و شرح جذابی از آن در رمان ریاضی *اعداد ماوراء حقیقی* [۲] نوشتهٔ دانلد کنوت آمده است.

توصیف BN کاری دشوارتر است. عنوان *The Book of Numbers* (سِفر اعداد) در واقع نام یکی از اسفار خمسهٔ عهد عتیق [درکتاب مقدس] است. BN یک روند تاریخی را دنبال نمی‌کند و به موضوع واحدی اختصاص ندارد (جز 'عدد' به مفهوم عام آن)، بلکه مجموعه‌ای است مانند یک مجموعه آثار کوتاه ادبی که کارِ دل دو ریاضیدان با ذوقی است که خواننده را در گنجینهٔ عظیم اطلاعات متعارف و غیرمتعارف خود در مورد اعداد سهیم می‌کنند، اطلاعاتی که برای اولین بار در یک جلد کتاب جمع شده و با سلیقهٔ شخصی خاصی در سراسر کتاب پراکنده شده است. کمتر صفحهٔ این کتاب است که برای خوانندهٔ متوسط حاوی نکته‌ای شوق‌آفرین و غیرمنتظره نباشد. لغت 'عدد' در این کتاب با حداقل ۵۴ صفت مختلف ظاهر می‌شود (عدد

1. John Graves 2. octonion 3. Hurwitz 4. Gelfand-Mazur 5. Zorn 6. Hirzebruch 7. Bott 8. Kervaire 9. Milnor 10. Conway numbers

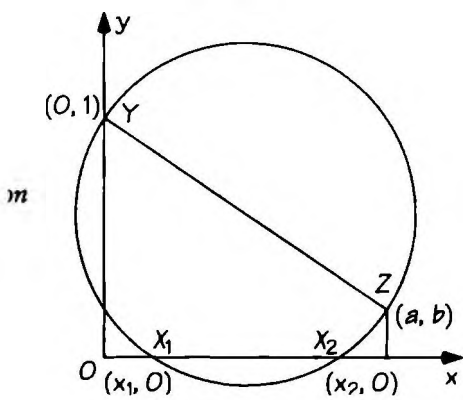


شکل۲

گویا، عدد فیبوناتچی، عدد اول، عدد مثلثی ...) و مصادیق ظهور آن شامل موضوعهای بسیار متنوعی است چون تصاعد عددی وابسته به گلبرگهای گل آفتابگردان، کتیبه‌های میخی، اعداد رامانوجان، دنبالهٔ شارکوفسکی[1]، ... . تصاویر متعدد (بعضی رنگی)، سبک بیان خودمانی، و چاپ نفیس کتاب همه عواملی هستند که به جذابیت کتاب می‌افزایند ولی مهمترین عاملی که باعث جاذبهٔ کتاب شده، نوعی روحیهٔ کنجکاوی کودکانه و شوخ‌طبعی نویسندگان است که سراسر متن را برای خواننده مفرح ساخته است.

به‌عنوان نمونه‌هایی از حکایات BN به جواب سؤالهای شمارهٔ زوج آغاز مقاله می‌پردازیم. لغت 'قرنطینه' (به انگلیسی quarantine از ریشهٔ لاتین quadraginta به معنی 'چهل') در فرهنگهای مختلف به آداب یا آیینهای گوناگونی از جمله انزوای چهل روزه (شبیهٔ 'چله‌نشینی'، در فرهنگ ما) اطلاق می‌شده است. در شکل ۲، جواب سؤال ۴ آمده است. دو دایرهٔ بیرونی در نقاط $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{d}$ بر محور مماس هستند و شعاع آنها به ترتیب $\frac{1}{c^2}$ و $\frac{1}{d^2}$ است (این دوایر به دوایر فُرد[2] معروف‌اند). دایره‌ای که بر این دو دایره و محور مماس است در نقطهٔ $\frac{a+b}{c+d}$ بر محور مماس می‌شود (مراجعه کنید به صفحات ۱۵۲ تا ۱۵۴ از BN). این تنها یک نمونه از ترسیمات جالب توجه در BN برای نمایش اعداد است. در صفحهٔ ۱۹۳ کتاب روش ساده‌ای برای یافتن ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 - ax + b = 0$ آمده است که در شکل ۳ مشاهده می‌کنید. mاُمین عدد کاتالان[3]، c_n، به‌صورت

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$



شکل۳

1. Sharkovskii 2. Ford circles 3. Catalan number

تعریف می‌شود. این اعداد در مسائل ترکیبیاتی گوناگونی ظاهر می‌شوند که از آن جمله است جواب سؤال ۶ (مراجعه کنید به صفحات ۱۰۰ تا ۱۰۶ از BN). در مورد سؤال ۸، اعداد اول طویل در پایهٔ ۱۰ عبارت‌اند از

$$۷, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۴۷, ۵۹, ۶۱, ۹۷, ۱۰۹, ۱۱۳, ۱۳۱, \ldots$$

از تحقیق آماری به نظر می‌آید که حدوداً ۳۷ درصد اعداد اول طویل هستند (نسبت به مبنای ۱۰). آرتین حدس زده است که درصد واقعی برابر است با

$$c = \frac{۱}{۲} \times \frac{۵}{۶} \times \frac{۱۹}{۲۰} \times \frac{۴۱}{۴۲} \times \frac{۱۰۹}{۱۱۰} \times \frac{۱۵۵}{۱۵۶} \times \frac{۲۷۱}{۲۷۲} \times \cdots$$
$$\approx ۰/۳۷۳۹۵۵۸۱۳۶$$

که در اینجا عوامل ضرب طرف راست فرمول c، اعداد به شکل $\frac{p^۲-p-۱}{p^۲-p}$ هستند که در آن p عدد اول است. این حدس هنوز ثابت نشده است. طبق حدس دیگری از دِریک لِه‌مِر[1]، نسبت اعداد اول طویل در هر مبنا مضربی گویا از c فوق است. صفحات ۱۶۹ تا ۱۷۱ کتاب BN بحث شیرینی در این مقوله دارد. و بالاخره به سؤال ۱۰ (اعداد کانوی) قبلاً اشاره شد.

در میان سؤالهای آغاز مقاله فقط جواب سؤالهای ۳ و ۷ مانده است که بر مبنای N به آنها می‌پردازیم. پنتاگرام نمایشی هندسی از کسر مسلسل مربوط به نسبت طلایی $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است که ناگویا بودن این عدد (از اسرار فیثاغورسیها) را نیز نشان می‌دهد (مراجعه کنید به بحث مربوط در صفحهٔ ۲۹ کتاب N). در مورد (۷)، قضیه‌ای که ایلنبرگ[2] و نیون[3] در سال ۱۹۴۴ ثابت کردند نشان می‌دهد که اگر چندجمله‌ای $p(x)$ را بتوان به شکل $p(x) = m(x) + q(x)$ نوشت که در آن m یک تک‌جمله‌ای از درجهٔ $n > ۰$ و درجهٔ q اکیداً کوچکتر از n باشد، آنگاه $p(x) = ۰$ جواب دارد. یک مثال ناقض ساده در حالتی که بیش از یک جملهٔ درجهٔ بالا وجود دارد معادلهٔ $i \cdot x - x \cdot i + ۱ = ۰$ است که ریشه ندارد. توجه کنید که به سبب تعویض‌ناپذیری ضرب نمی‌توان مجموع دو جملهٔ ix و xi را به‌صورت یک تک‌جمله‌ای نوشت.

در پایان شایان ذکر است که کتابهای فوق هنوز به فارسی ترجمه نشده‌اند و جای هر دو در نوشتگانِ ریاضی به زبان فارسی خالی است چه هر یک قشر وسیعی خوانندهٔ بالقوه دارد. ترجمهٔ BN از نظر ادبی دشوارتر است و انتقال بیان شوخ‌طبعانهٔ نویسندگان مترجمی مسلط به هر دو زبان را می‌طلبد. متن N از نظر زبانی متعارفتر ولی از نظر ریاضی سنگینتر است.

مراجع

1. David Fowler, "Ratio in early Greek mathematics", *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* (6) **1** (1979).
2. D. Knuth, *Surreal Numbers*, Addison-Wesley (1974).

******

* سیاوش شهشهانی، دانشگاه صنعتی شریف و پژوهشگاه دانشهای بنیادی

shahshah@ipm.ac.ir

1. Derrick Lehmer 2. S. Eilenberg 3. I. Niven

سه روایت از تعریف پیوستار بر اساس برش•

ارسطو:

«من آن را پیوسته می‌نامم اگر چیزی که مرز بخشهای آن [در هر بخش‌بندی] است، یک چیز باشد و چنانکه از خود کلمه برمی‌آید، به هم چسبیده باشد.»

[*طبیعیات*، ۲۲۷a، ۱۱ـ۱۲]

لایب‌نیتس:

«پیوستار کلِّ واحدی است که هر دو جزء سازندهٔ آن (یعنی هر دو بخشی که روی هم آن را تشکیل دهند) چیزِ مشترکی داشته باشند ... دست‌کم مرزِ مشترکی داشته باشند.»

[*Mathem. Schr.* VII, 284.]

ددکیند:

«اگر نقطه‌های یک خط به دو دسته تقسیم شوند چنانکه هر نقطه از دستهٔ اول در طرف چپ هر نقطه از دستهٔ دوم باشد، آنگاه یک و فقط یک نقطهٔ تقسیم وجود دارد که این‌گونه دسته‌بندی نقاط، این‌گونه برش خط به دو بخش، را امکان‌پذیر می‌سازد.»

[*Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig 1872, 10.]

******

• نقل از کتاب *Numbers* (مورد بحث در مقالهٔ روبه‌رو)، ص ۲۷.

بشر اعداد صحیح را آفرید، مابقی کار دیودونه است.

ریچارد گای

دیدگاه

مطالب این بخش بیانگر آرای نویسندگان آنهاست و ضرورتاً مبیّن دیدگاه *نشر ریاضی* نیست.

در دفاع از «ریاضی‌نویسی»

در شمارهٔ پیاپی ۱۶ از *نشر ریاضی* نوشته‌ای به قلم آقای کاوه لاجوردی دربارهٔ این موضوع، توجهم را به خود جلب کرد.[۱]

نویسندهٔ محترم پس از بررسی همه جوانب و سنجیدن زیروبم کارها به این نتیجه می‌رسد که: «این مباحث...قابلیت این را ندارند که در درسی رسمی (مثلاً با عنوان «مباحثی در ریاضی‌نویسی») تدریس شوند» چرا که: «ضروریات TEX را می‌توان از کتاب راهنما یا در جریان اولین کار جدی نگارش یاد گرفت و نوشته‌های «ریاضی نویسانهٔ» بوآس و کلی و هالموس و دیگران را در حال تماشای برنامهٔ ورزشی تلویزیون، می‌توان خواند و فهمید.»

در اینجا قصدم جانبداری از کتاب کرانتس[۲] که در نوشتهٔ آقای لاجوردی مورد انتقاد قرار گرفته نیست. بیشتر ایرادهایی که در آن نوشته آمده‌اند، به واقع بر این کتاب واردند اما استدلالی به این شیوه که: «کتاب الف در (مثلاً آنالیز) چندان به آنالیز مربوط نیست یا کتاب ب کتابی سست و کم‌مایه است پس احتمالاً آنالیز حرفی برای گفتن ندارد.» که بی‌شباهت به استدلالهای نویسندهٔ محترم نیست، چندان مرا راضی نمی‌کند.

بر این که این مباحث، اگر نه بیش از دستور زبان پرتغالی ولی دست‌کم به همان اندازه، قابلیت دارند که تدریس شوند و بر سودمندی آنها، دست‌کم به دیدهٔ من، نمی‌توان خرده گرفت چرا که اگر چه ممکن است چندان حجیم نباشند (و در واقع قابلیت «واحد درسی» شدن نداشته باشند) بی‌شک، بی‌اندازه ضروری‌اند. و اگر عقل سلیم به‌تنهایی کافی می‌بود، دیگر هیچ استاد ریاضی جملات بی‌فعل نمی‌نوشت یا در املای واژه‌ای مثل «گنجنگاری» دچار مشکل نمی‌شد. این حرفها نه تعریض و کنایه، که واقعیتی نمایان است و پیدا کردن شاهدهای دیگر بر این مدعا مطمئناً بیش از آن ده دقیقهٔ کذایی وقت نویسنده محترم را نخواهد گرفت.

و اما پاره‌ای از ایرادهای نویسنده به کتاب کرانتس هم محل تأمل است. در سه ستون نخست مقاله به بررسی اجمالی کتاب پرداخته شده است. در بخشهای (۱) و (۲) مثالهایی برای رد مدعای کرانتس در یک مورد آورده شده است؛ گمان نمی‌کنم این مثالها، به‌تنهایی، نادرست بودن ادعا را برسانند و تازه توجه باید کرد که دو مثال پایانی از نوشته‌های کسانی است که زبان مادریشان انگلیسی نیست؛ و یقیناً نوشتهٔ یک خارجی ملاک ذوق در یک زبان نیست. اگر، مثلاً با یک نظرسنجی محدود، معلوم شد که اتفاقاً ایرادهای کرانتس بر نوشته‌های آن بزرگان وارد است، دیگر عذری پذیرفته نیست.

اشکالی هم که در بخش (۳) آمده است تا حدی تصنعی به نظر می‌آید. اگر چه لابد جملات «اگر ϕ ثابت کنید ψ» و «ثابت کنید اگر ϕ آنگاه ψ» تفاوتهای بنیادین دارند، ولی اشکالی که تا این حد از دیده‌ها پنهان است و برای درک درست آن به توضیحات استادی در منطق نیاز است، دست‌کم این را می‌رساند که خود نویسنده هم از تفاوت دو جمله آگاه نبوده است یا به نظرش، در حد نوشتهٔ خود، تفاوت آن دو قابل اغماض بوده است و شاید در این موارد جنبهٔ روشن‌نویسی که مدنظر کرانتس بوده است، بچربد.

در آغاز هم گفتم که قصدم دفاع از این کتاب نیست ولی اگر چه ممکن است مطالب «ریاضی‌نویسانهٔ» آن چندان نباشند، دست‌کم دستاویزی است برای یادآوری این مطالب. و بازهم اگر چه ممکن است خود آن بزرگان، نه «با مطالعهٔ چنین مطالبی، نویسنده مبرزی شده باشند»، دلیلی هم در دست نیست که بازگو کردن تجربیاتشان سودمند نباشد. و آن جملهٔ تقریباً عرفانی در پایان مقال، «خوب نوشتن ... الخ»، با آن حالت روحانی (شاید در هاله‌ای از نور!) با آن جدایی از بقیهٔ متن و شاید هم با یک جاافتادگی: «چنین گفت یهوه:» (!) صحتش مورد تردید است، چه جای بازگفتنش.

در پایان باید بگویم که اگرچه مانند نویسندهٔ محترم با آثار (لابد) بزرگانی چون ویتگنشتاین آشنا نیستم، اما فارسی‌زبانم و گلستان و کلیله را خوانده‌ام و اتفاقاً در همین کتابهای خودمان هم جملاتی درخور موجودند. پس من هم رشتهٔ کلام را به نصراله منشی می‌سپارم که:

> «هر سخن که از سر نصیحت و شفقت رود و از استماع آن شنونده را کراهیت افزاید، بر ادای آن دلیری نتوان کرد مگر به عقل و تمییز شنونده ثقتی تمام باشد، خاصه که منافع و فوائد آن بدو بازگردد، چه گوینده را در آن کار و رای جز گزارد حقوق تربیت و تقدیم لوازم نصیحت، فایده‌ای دیگر نتواند بود.»[۱]

هادی جرئتی، دانشگاه صنعتی شریف

۱. کاوه لاجوردی. «نگارش ریاضیات: الف، ب، پ»، *نشر ریاضی*، شمارهٔ پیاپی ۱۶، صص ۵۵-۵۷.

2. Steven G. Krantz, A *Primer of Mathematical Writing: Being a Disquisition on Having Your Ideas Recorded, Typeset, Published, Read, and Appreciated.* American Mathematical Society (1997), xv+223 pp.

۱. *کلیله و دمنه* بر اساس طبع استاد عبدالعظیم قریب، انتشارات هیرمند، تهران، ۱۳۷۴.

فهرست جامع نشر ریاضی

۱۳۶۷_۷۶

بنیامین کاویانی

سرمقاله

۱ *بیست سال کنفرانس ریاضی*، ۲، ۱، ۳_۲.
۲ *تدابیر داهیانه*، ۴، ۳، ۳_۲.
۳ *جذب استاد*، ۱، ۳، ۱۵۴.
۴ *چشم‌انداز دههٔ ۷۰*، ۴، ۱ و ۲، ۳_۲.
۵ *دانشجوی ریاضی*، ۲، ۲، ۷۹_۷۸.
۶ *در دفاع از المپیاد*، یحیی تابش، سیاوش شهشهانی، امیدعلی کرمزاده، ۸، ۲، ۳_۲.
۷ *دورهٔ دکتری ریاضی پس از دو سال*، ۳، ۱ و ۲، ۲.
۸ *سخن مدیر مسئول؛ یادداشت هیأت ویراستاران*، ۲، ۳، ۱۶۷_۱۶۶.
۹ *سرآغاز*، ۱، ۱، ۲.
۱۰ *فرصتی از دست نرفته*، ۳، ۳، ۹۰.
۱۱ *مسألهٔ پژوهشکده*، ۱، ۲، ۷۸.

گفتگو

۱۲ *آیندهٔ ریاضیات در روسیه* [*آ. ام. ورشیک، او. یا. ویرو؛ ال. آ. بوکوت*]، ترجمهٔ سیامک کاظمی، ۴، ۳، ۲۶_۲۳.
۱۳ *چند پرسش از آرنولد*، میشل اودَن، پاتریک ایگلزیاس، ترجمهٔ یوسف امیرارجمند، ۵، ۱ و ۲، ۵۳_۴۹.
۱۴ *دو مصاحبه* [*رنه توم؛ استیو اسمیل*]، محمد جلوداری ممقانی، مینا آزاد؛ یحیی تابش، ۱، ۳، ۱۸۸_۱۸۳.
۱۵ *دیدار با پیشکسوتان* [*علینقی وحدتی؛ منوچهر وصال*]، غلامرضا برادران خسروشاهی، مهدی بهزاد، یحیی تابش، سیاوش شهشهانی، ۲، ۱، ۳۹_۲۹.
۱۶ *رشد ریاضیات در جهان سوم: تجربهٔ برزیل* [*ژاکوب پلیس*]، یحیی تابش، ۴، ۳، ۹_۴.
۱۷ *کتابهای ریاضی دانشگاهی: گذشته، حال، آینده* [*غلامرضا برادران خسروشاهی، مهدی بهزاد، حسین معصومی همدانی، محمد قاسم وحیدی اصل*]، ۲، ۲، ۸۹_۸۰.
۱۸ *گفتگو با سه دانشمند ایرانی مقیم خارج* [*امیرحسین اسدی، سیف‌الله رنجبر، کامران وفا*]، غلامرضا برادران خسروشاهی، ۲، ۳، ۱۷۵_۱۶۸.
۱۹ *گفتگو با ولادیمیر ایگورویچ آرنولد*، اسمیاکا ازدرافکوفسکا، ترجمهٔ مهدی نیلچیانی، ۲، ۲، ۱۲۳_۱۲۰.
۲۰ *گفتگو با یاکوب سینایی*، یحیی تابش، ۵، ۱ و ۲، ۵۶_۵۴.
۲۱ *گفتگویی در بارهٔ منطق، مبانی، و فلسفهٔ ریاضی* [*ژاک استرن، شاپور اعتماد، موریس بوفا، رولاندو شواکی، عباس عدالت، علی عنایت، دورو کورپا، محمد جواد لاریجانی، ای. جی. کی. اوپز اسکوبار*]، سیاوش شهشهانی، ۳، ۱ و ۲، ۱۲_۳.
۲۲ *مسألهٔ روز: گفتگویی در بارهٔ دورهٔ دکتری ریاضی* [*غلامرضا برادران خسروشاهی، مهدی بهزاد، یحیی تابش، مهدی رجبعلی‌پور، سیاوش شهشهانی*]، ۱، ۱، ۸_۲.
۲۳ *مصاحبه با دیوید مامفرد، رئیس اتحادیه بین‌المللی ریاضیدانان*، ۷، ۲، ۴.

مقاله

۲۴ *آدولف پاولویچ یوشکویچ (۱۹۰۶_۱۹۹۳)*، م. ه. شفیعیها، ۵، ۱ و ۲، ۵.
۲۵ *آزمایشگاه ریاضیات*، یحیی تابش، سیدعبادالله محمودیان، ۲، ۳، ۲۱۱_۲۰۸.
۲۶ *آنالیز مختلط و نظریهٔ عملگرها*، کریم صدیقی، ۴، ۱ و ۲، ۲۵_۱۸.
۲۷ *آندری نیکولایویچ کولموگوروف*، و. م. تیهومیروف، ترجمهٔ محمد باقری، ۳، ۱ و ۲، ۲۷_۲۳.
۲۸ *آیا می‌توان شکل طبل را شنید؟*، مارک کاتس، ترجمهٔ مجید حسینی، ۷، ۲، ۵۰_۳۹.
۲۹ *اثبات چند قضیهٔ جبر خطی برای کلاس درس*، امیدعلی کرمزاده، ۲، ۲، ۱۴۲_۱۳۹.
۳۰ *اثبات حدس تانیاما و استنتاج قضیهٔ فرما*، کنت ریبت، ترجمهٔ رحیم زارع‌نهندی، ۵، ۱ و ۲، ۲۰_۱۸.
۳۱ *اثباتهای ریاضی: پیدایش شک موجّه*، جینا کولاتا، ترجمهٔ سعید ذاکری، ۲، ۳، ۲۱۳_۲۱۲.
۳۲ *اثباتی مقدماتی از قضیهٔ اعداد اول*، نورمن لوینسن، ترجمهٔ محمدصادق منتخب، ۸، ۱، ۳۶_۲۶.
۳۳ *از مثلث تا خمینه*، شینگ‌شن چرن، ترجمهٔ محمد جلوداری‌ممقانی، ۲، ۳، ۱۸۴_۱۷۶.
۳۴ *اصلاح حساب دیفرانسیل و انتگرال*، موری پراتر، ترجمهٔ سیامک کاظمی، ۳، ۳، ۱۵۳_۱۵۰.
۳۵ *اصول موضوع عددهای اصلی بزرگ، و استقلال: نگاهی دوباره به مسألهٔ پیوستار*، و. هیو وودین، ترجمهٔ عطاءالله تقا، ۶، ۱ و ۲، ۲۵_۲۱.
۳۶ *اعداد «مناسب» لئونهارت اویلر*، گونتر فرای، ترجمهٔ کریم احمدی‌دلیر، ۴، ۱ و ۲، ۵۴_۵۰.

۳۷ *الگوریتم L^2 و کاربردهای آن*، غلامرضا برادران خسروشاهی، شاهین آجودانی نمینی، محمد رجبی‌طرخورانی، ۲، ۲، ۱۰۲ـ۹۰.

۳۸ *الگوریتم در ریاضیات جدید و علم کامپیوتر*، دانلد کنوت، ترجمهٔ علی پارسا، ۱، ۳، ۱۸۲ـ۱۷۲.

۳۹ *اویلر*، آندره ویل، ترجمهٔ محمد جلوداری‌ممقانی، ۲، ۲، ۱۱۳ـ۱۰۹.

۴۰ *ایده‌های کومر در مورد آخرین قضیهٔ فرما*، پائولو ریبنبویم، ترجمهٔ مهدی مجیدی ذوالبنین، ۴، ۱ و ۲، ۴۹ـ۴۴.

۴۱ *با تثلیث‌گرها چگونه برخورد کنیم؟*، اندروود دادلی، ترجمهٔ محمد باقری، ۲، ۳، ۲۲۷ـ۲۲۲.

۴۲ *براور و توپولوژی*، دیرک وان‌دالن، ترجمهٔ ابوالقاسم لاله، ۹، ۱، ۲۹ـ۲۰.

۴۳ *برخی از قاعده‌های نگارش متنهای ریاضی*، ۳، ۳، ۱۴۹ـ۱۴۷.

۴۴ *برخی کاربردهای توپولوژی در جبر*، هاینتس هوپف، ترجمهٔ مهدی مجیدی ذوالبنین، ۷، ۱، ۳۷ـ۳۱.

۴۵ *بررسی انحنا و شکل از طریق هندسهٔ مقایسه‌ای*، استین مارک‌ورسن، ترجمهٔ اسدالله رضوی، ۸، ۲، ۲۲ـ۱۵.

۴۶ *بعد فضای برداری و بعد گادی*، منصور معتمدی، ۴، ۳، ۲۲ـ۱۸.

۴۷ *بیایید فلسفهٔ ریاضی تدریس کنیم!*، روبن هرش، ترجمهٔ محمد صال‌مصلحیان، بهزاد بوستانچی، ۷، ۱، ۴۶ـ۴۳.

۴۸ *بینهایت کوچکها به مدرسه باز می‌گردند*، ویکتور هارنیک، ترجمهٔ رضا کرمی، ۱، ۱، ۳۰ـ۲۴.

۴۹ *پوانکاره و توپولوژی*، پاول آلکساندروف، ترجمهٔ منوچهر میثاقیان، ۲، ۳، ۱۹۸ـ۱۹۳.

۵۰ *تا چه حد استاد ریاضی خوبی هستید؟*، ریچارد گای، ترجمهٔ علیرضا افشارمحرابی، ۱، ۲، ۱۱۸ـ۱۱۷.

۵۱ *تاریخچهٔ قضیهٔ استوکس*، ویکتور کاتس، ترجمهٔ حسین ترابی‌تهرانی، ۱، ۳، ۲۰۸ـ۲۰۲.

۵۲ *تاریخچهٔ موضوعیِ کوتاهی از نظریهٔ هوموتوپی و هوموتوپی در قرن بیستم*، پیتر هیلتن، ترجمهٔ سعید ذاکری، ۳، ۳، ۱۲۸ـ۱۲۱.

۵۳ *تاریخ ریاضیات دورهٔ باستان را چگونه باید بررسی کرد؟*، آرباد سابو، ترجمهٔ شاپور اعتماد، ۱، ۱، ۳۶ـ۳۱.

۵۴ *تاریخ و ریاضیات؛ تاریخ ریاضیات؛ تاریخهای ریاضیات*، حسین معصومی‌همدانی، ۱، ۲، ۱۴۶ـ۱۴۰.

۵۵ *تثلیث زاویه، هفت‌ضلعی منتظم، و سیزده‌ضلعی منتظم*، اندرو گلیسن، ترجمهٔ مسعود هادیان، ۲، ۲، ۱۰۸ـ۱۰۳.

۵۶ *تحلیلی از روشهای مرتب کردن*، جاناتان آمستردام، ترجمهٔ سیدغلامرضا بناهی، ۴، ۳، ۳۹ـ۳۵.

۵۷ *تدریس ریاضیات*، آبه [=ایب] شنیتسر، ترجمهٔ منوچهر وصال، ۲، ۱، ۶۶ـ۶۲.

۵۸ *تصمیم‌ناپذیری در نظام پرینکیپیا ماتماتیکا*، کورت گودل، ترجمهٔ شاپور اعتماد، ۲، ۱، ۴۵ـ۴۳.

۵۹ *تعریف آنالیز عددی*، لوید ترفتن، ترجمهٔ نظام‌الدین مهدوی امیری، ۵، ۱ و ۲، ۲۹ـ۲۷.

۶۰ *تمهای الگوریتمی*، دانلد کنوت، ترجمهٔ ابراهیم نقیب‌زادهٔ مشایخ، ۵، ۱ و ۲، ۳۲ـ۳۰.

۶۱ *جان کلام در نظریهٔ اندازه*، جوزف کوپکا، ترجمهٔ مهدی رجبعلی‌پور، ۱، ۲، ۱۰۴ـ۹۷.

۶۲ *جای خالی ریاضیات: مروری بر نشریات ادواری ریاضی در ایران*، غلامرضا برادران خسروشاهی، ۱، ۱، ۲۳ـ۱۹.

۶۳ *جدال موش و قورباغه: بحران ماتماتیشه آنالن*، دیرک وان‌دالن، ترجمهٔ سیامک کاظمی، ۹، ۱، ۴۹ـ۳۶.

۶۴ *چشم‌اندازی از نظریهٔ گرافها*، مهدی بهزاد، ۱، ۳، ۱۷۱ـ۱۶۳.

۶۵ *چند خاطره از ریاضیدانهایی که شناخته‌ام*، جورج پولیا، ترجمهٔ محمد باقری، ۱، ۱، ۴۱ـ۳۷.

۶۶ *چند مسألهٔ حل‌نشده در هندسهٔ مسطحه*، پیر دلاهارپ، ترجمهٔ علینقی زند، ۵، ۱ و ۲، ۲۶ـ۲۱.

۶۷ *چند مسألهٔ قدیمی و نتیجهٔ تازه در مورد فرمهای درجه دوم*، ویلیام دوک، ترجمهٔ مهدی مجیدی ذوالبنین، ۸، ۲، ۱۴ـ۹.

۶۸ *چه مطالبی منتشر کنیم؟*، پال هالموس، ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی، ۲، ۱، ۶۸ـ۶۷.

۶۹ *چه وقت یک تابع C^∞ تحلیلی است؟*، رالف بواس، ترجمهٔ مهدی حسینی‌نسب، ۲، ۳، ۲۰۱ـ۱۹۹.

۷۰ *حدس بیبرباخ*، پاول سوون، ترجمهٔ جعفر زغفرانی، ۲، ۱، ۲۸ـ۱۷.

۷۱ *حروفچینی کامپیوتریِ متنهای ریاضی*، علی پارسا، ۲، ۲، ۱۱۹ـ۱۱۴.

۷۲ *خمهای جبری*، سیاوش شهشهانی، ۱، ۲، ۹۶ـ۸۵.

۷۳ *خمینه‌های چهاربعدی*، سیدمحمدباقر کاشانی، ۶، ۱ و ۲، ۱۲ـ۸.

۷۴ *در پیرامون مسألهٔ زیرفضاهای پایا*، حیدر رجوی، ۴، ۱ و ۲، ۱۷ـ۱۳.

۷۵ *دریچه‌ای به حلقه‌های تقسیم*، سعید اکبری، ۸، ۱، ۲۵ـ۱۸.

۷۶ *دستاورد نیوتن*، ریچارد وستفال، ترجمهٔ محمدرضا خواجه‌پور، ۲، ۳، ۲۱۷ـ۲۱۴.

۷۷ *دستاوردهای پژوهشهای اخیر در ریاضیات (۱)*، ۵، ۱ و ۲، ۴۲ـ۳۳.

۷۸ *دستاوردهای پژوهشهای اخیر در ریاضیات (۲)*، ۶، ۱ و ۲، ۴۱ـ۳۴.

۷۹ *دستگاههای دینامیکی گسسته‌ـجانشینی برای حساب دیفرانسیل و انتگرال؟*، جیمز ساندفر، ترجمهٔ محمدصادق منتخب، ۱، ۱، ۱۲۰ـ۱۱۹.

۸۰ *دو شکل در صفحهٔ هذلولوی*، ریفل رابینسن، ترجمهٔ خداداد خسروی، ۷، ۱، ۴۸ـ۴۷.

۸۱ *دو مسألهٔ الگوریتمی*، برونو پوزا، ترجمهٔ یوسف امیرارجمند، ۷، ۲، ۲۴ـ۱۵.

۸۲ *رامانوجان*، بروس برنت، ترجمهٔ کورس ضیائی، محمد باقری، ۳، ۳، ۱۲۰ـ۱۱۵.

۸۳ *روشهای احتمالاتی در بررسی سیالات*، فریدون رضاخانلو، ۸، ۲، ۸ـ۴.

۸۴ *رویه‌های مینیمال*، سیدمحمدباقر کاشانی، ۴، ۳، ۱۷ـ۱۰.

۸۵ *ریاضیات آشوب*، عباس عدالت، ۱، ۱، ۱۵ـ۹.

۸۶ *ریاضیات کاربردی بد ریاضیاتی است*، پال هالموس، ترجمهٔ محمدرضا بهاری، ۳، ۱ و ۲، ۵۹ـ۵۴.

۸۷ *«ریاضیات نظری»: تلفیق سنتهای فیزیک نظری و ریاضیات*، آرتر جفی، فرنک کوین، ترجمهٔ سیامک کاظمی، ۶، ۱ و ۲، ۲۰ـ۱۳.

۸۸ *ریاضیات و اینترنت*، بل دیویس، ترجمهٔ میلاد نیکویی [اصلاحیه در همین شماره]، ۸، ۲، ۵۲ـ۴۹.

۸۹ *ریاضیدانِ فیلسوف: هانس هان و حلقهٔ وین*، کارل زیگموند، ترجمهٔ سیامک کاظمی، ۷، ۲، ۳۸ـ۲۵.

۹۰ *زنده باد دترمینان!*، سیاوش شهشهانی، احمد شفیعی‌ده‌آباد، ۸، ۲، ۴۶ـ۴۵.

۹۱ *زوالِ قریب‌الوقوع مجلات تحقیقیِ چاپی: فقدان مصیبت بار یا خلاصیِ مسرت‌انگیز؟*، اندرو اُولیزکو، ترجمهٔ تقی یزدانبخش، ۷، ۱، ۳۰ـ۲۵.

۹۲ *ژان دیودونه (۱۹۰۶ـ۱۹۹۲)*، هانری کارتان، ترجمهٔ منوچهر وصال، ۵، ۱، و ۲، ۵ـ۴.

۹۳ *ساختار گروهی خمهای درجهٔ سوم*، رحیم زارع‌نهندی، ۵، ۱ و ۲، ۱۷ـ۸.

۹۴ *ساختار موج شوک در دینامیک سیالات*، مجید محمودزادهٔ نیکنام، ۷، ۱، ۲۰ـ۱۵.

۹۵ *سرانجامِ فضیهٔ آخر فرما؟*، پیتر سوینرتن‌ـدایر، ۵، ۱ و ۲، ۲.

۹۶ *سفری به MathSciNet*، یحیی تابش، ۸، ۲، ۴۸ـ۴۷.

۹۷ *سموئل مغربی: ریاضیدان اسلامی که اعداد منفی را می‌شناخت*، عادل انبویا، ترجمهٔ حسین معصومی همدانی، ۱، ۳، ۲۱۱ـ۲۰۹.

۹۸ *سنّتِ همگانی‌سازی ریاضیات در روسیه: گذشته و حال*، آ. ب. سوسینسکی، ترجمهٔ سیامک کاظمی، ۵، ۱ و ۲، ۶۱ـ۵۷.

۹۹ *سوفوس لی*، سیگوردور هلگاسون، ترجمهٔ تقی یزدانبخش، ۶، ۱ و ۲، ۳۳ـ۲۶.

۱۰۰ *سیر تحولات فکری کورت گودل*، هائو وانگ، ترجمهٔ شاپور اعتماد، ۲، ۱، ۴۳ـ۴۱.

۱۰۱ *سیر ریاضیات در ویتنام*، هونگ، وان‌له، ترجمهٔ سپیده چمن‌آرا، ۴، ۳، ۶۳ـ۶۲.

۱۰۲ *سیزده راه نگرش به ضریب همبستگی*، جوزف‌لی راجرز، و. الن نایسواندر، ترجمهٔ علی عمیدی، ۲، ۲، ۱۳۱ـ۱۲۴.

۱۰۳ *سیصد و پنجاهمین سال معادلات دیفرانسیل*، گرهارت وانر، ترجمهٔ منوچهر وصال، ۳، ۱ و ۲، ۴۰ـ۳۱.

۱۰۴ *شکوفا شدن ریاضیات کاربردی در آمریکا*، پیتر لَکس، ترجمهٔ کورس ضیایی، ۳، ۱ و ۲، ۶۵ـ۶۰.

۱۰۵ *شهودگرایی براؤری*، محمد اردشیر، ۹، ۱، ۱۹ـ۵.

۱۰۶ *شهودگرایی و صورتگرایی*، لوئیتزن اِخبرتوس یان براؤر، ترجمهٔ محمد اردشیر، ۹، ۱، ۳۵ـ۳۰.

۱۰۷ *صد سالگی اتحادیهٔ ریاضیدانان آلمانی*، فریدریش هیرتسبروخ، ترجمهٔ سیامک کاظمی، ۴، ۱ و ۲، ۲۹ـ۲۶.

۱۰۸ *صورتبندی نظام عالم: نقش ریاضیات (۱)*، آرتور جفی، ترجمهٔ بهرام معلمی، ۱، ۲، ۴۹ـ۴۲.

۱۰۹ *صورتبندی نظام عالم: نقش ریاضیات (۲)*، آرتور جفی، ترجمهٔ بهرام معلمی، ۱، ۲، ۱۳۳ـ۱۲۸.

۱۱۰ *صورتبندی نظام عالم: نقش ریاضیات (۳)*، آرتور جفی، ترجمهٔ بهرام معلمی، ۱، ۳، ۲۱۷ـ۲۱۲.

۱۱۱ *«صورت سادهٔ» قضیهٔ دوجمله‌ای در چه هیأتهایی برقرار است؟*، دیوید دابن، ترجمهٔ علیرضا جمالی، ۳، ۳، ۱۴۶ـ۱۴۲.

۱۱۲ *طبلهای همصدا*، جاناتان چیمن، ترجمهٔ مجید حسینی، ۷، ۲، ۵۵ـ۵۱.

۱۱۳ *قانون قوی اعداد کوچک*، ریچارد گای، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی‌اصل، ۳، ۱ و ۲، ۵۳ـ۴۵.

۱۱۴ *قضیهٔ جداسازی ژوردان‌ـبراوئر برای آبررویه‌های هموار*، الون لینا، ترجمهٔ سعید ذاکری، ۳، ۱ و ۲، ۳۰ـ۲۸.

۱۱۵ *قضیهٔ کرکیارتو در بارهٔ همسانریختیهایِ دوره‌ایِ قرص و کره*، آدرین کنستانتین و بوریس کولف، ترجمهٔ شهرام محسنی‌پور، ۷، ۱، ۴۲ـ۳۸.

۱۱۶ *کاربردهایی از قضیهٔ گودل در ریاضیات*، جینا کولاتا، ترجمهٔ محمد باقری، ۲، ۱، ۵۷ـ۵۵.

۱۱۷ *کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در زوریخ، ۱۸۹۷ـ دعوتنامه*، ترجمهٔ م. ه. شفیعیها، ۵، ۱ و ۲، ۷ـ۶.

۱۱۸ *گروههای ماتیو*، محمدرضا درفشه، غلامرضا برادران خسروشاهی، ۳، ۱ و ۲، ۲۲ـ۱۳.

۱۱۹ *گروهها و گرافها: گروههای عمل‌کننده بر درختها، پایانها، و نمودارهای حذفی*، پال شوب، ترجمهٔ کامبیز محمودیان، ۳، ۳، ۱۴۰ـ۱۳۳.

۱۲۰ *لذات نگرهٔ توابع*، لارس آلفرس، ترجمهٔ کاوه لاجوردی، ۸، ۱، ۵ـ۴.

۱۲۱ *ماهیت تفکر ریاضی*، نوربرت وینر، ترجمهٔ شاپور اعتماد، ۱، ۳، ۲۰۱ـ۲۰۰.

۱۲۲ *مجاداه در مبانی آمار*، بردلی افرون، ترجمهٔ علی عمیدی، ۸، ۲، ۳۴ـ۲۳.

۱۲۳ *مجله‌های ریاضی جهان و کتابخانه‌های ریاضی ایران*، سیاوش شهشهانی، ۴، ۳، ۵۱ـ۴۵.

۱۲۴ *مجموعه‌های ژولیا*، یحیی تابش، صفا نوربخش، ۲، ۱، ۱۶ـ۸.

۱۲۵ *مجموعهٔ کانتور و تربیع هندسی*، مارکو پاؤن، ترجمهٔ علی عمیدی، ۳، ۱ و ۲، ۴۴ـ۴۱.

۱۲۶ *مرگ بر دترمینان!*، شلدن اکسلر، ترجمهٔ روح‌الله جهانی‌پور، ۸، ۲، ۴۴ـ۳۵.

۱۲۷ *مسألهٔ پیوستار کانتور چیست؟*، کورت گودل، ترجمهٔ ضیاء موحد، ۲، ۱، ۵۴ـ۴۶.

۱۲۸ *مسألهٔ دهم هیلبرت*، مارتین دیویس، روبن هرش، ترجمهٔ محمد جلوداری ممقانی، ۱، ۲، ۱۱۶ـ۱۰۹.

۱۲۹ *مفهوم جبر در تاریخ جبر*، الهه خیراندیش، ۲، ۳، ۲۲۱ـ۲۱۸.

۱۳۰ *مفهوم رشد در گروهها*، محمد جلوداری ممقانی، ۸، ۱، ۱۷ـ۶.

۱۳۱ *موجنگاشتها یا نگاشتهای همسازِ خمینه‌های اورتنسی*، ع. شادی تحویلدارزاده، ۷، ۱، ۱۴ـ۶.

۱۳۲ *مهره‌ها، توپها و دیوارها: تحلیل یک، بازی ترکیبیاتی*، ریچارد اندرسن، جوئل اسپنسر، شموئل وینوگراد، پیتر شور، لاسلو لواش، اوا تاردوش، ترجمهٔ محمدصادق منتخب، ۴، ۳، ۳۴ـ۲۷.

۱۳۳ *نخستین ۵۰ میلیون عدد اول*، دان زاگیر، ترجمهٔ رحیم زارع‌نهندی، ۱، ۳، ۱۹۹ـ۱۸۹.

۱۳۴ *نظراتی در بارهٔ ریاضیات دورهٔ کارشناسی*، اندرو گلیسون، لین آرتور استین، ترجمهٔ منوچهر وصال، ۱، ۲، ۱۲۷ـ۱۲۱.

۱۳۵ *نظریهٔ ابعاد در جبر*، احمد حقانی، ۲، ۳، ۱۹۲ـ۱۸۵.

۱۳۶ *نظریهٔ گرهها و مکانیک آماری*، وان جونز، ترجمهٔ روزبه توسرکانی، ۵، ۱ و ۲، ۴۸ـ۴۳.

۱۳۷ *نقد خوب چیست؟*، آلن ادموندز، جان اوینگ، ترجمهٔ م. ه. شفیعیها، ۱، ۱، ۶۷ـ۶۶.

۱۳۸ *نگاهی اجمالی به نظریهٔ خمینه‌های سه‌بعدی*، ابوالقاسم لاله، ۳، ۳، ۱۱۱ـ۱۰۴.

۱۳۹ *نگاهی به ریاضیات در اسپانیای دورهٔ اسلامی*، یان پیتر هوخندایک، ترجمهٔ محمد باقری، ۸، ۱، ۴۹ـ۴۳.

۱۴۰ *نگاهی به فرضیهٔ ریمان*، هربرت ویلف، ترجمهٔ مجتبی منیری، ۱، ۱، ۱۸ـ۱۶.

۱۴۱ *نیوتون دقیقاً چگونه مدارهای سیارات را بررسی کرد؟*، شرمن استاین، ترجمهٔ ابوالقاسم لاله، ۸، ۱، ۴۲ـ۳۷.
۱۴۲ *وقتی که بیضیها دایره به نظر می‌رسند: صورتِ نظریهٔ اندازه‌ای قضیهٔ نگاشت ریمان*، سعید ذاکری، محمود زینلیان، ۷، ۲، ۱۴ـ۵.
۱۴۳ *وقتی که شبه‌نرمال بودن بر نرمال بودن دلالت می‌کند*، دین هیکرسن، شرمن استاین، کنیا یامانوکا، ترجمهٔ طیبه کوچکپور، ۳، ۳، ۱۱۴ـ۱۱۲.
۱۴۴ *ویروسهای کامپیوتری: قطری کردن و نقاط ثابت*، ویلیام داولینگ، ترجمهٔ غلامرضا بیات، ۳، ۳، ۱۳۲ـ۱۲۹.
۱۴۵ *همبندی و حلقه‌های دود*، تامس آرچینالد، ترجمهٔ امیر اکبری‌مجدآبادنو، ۴، ۱ و ۲، ۴۳ـ۳۶.
۱۴۶ *یانگ و ریاضیات معاصر*، دیانژو ژانگ، ترجمهٔ مجید حسینی، ۶، ۱ و ۲، ۵۰ـ۴۲.
۱۴۷ *یکتایی تجزیه*، پیر ساموئل، ترجمهٔ روشن تجرد، روزبه حضرت، ۹، ۱، ۵۴ـ۵۰.
۱۴۸ *یک درس چندموضوعی در ریاضیات*، ایب شنیتسر، ترجمهٔ سیامک کاظمی، ۳، ۱ و ۲، ۷۷ـ۷۰.

گزیدهٔ کتاب

۱۴۹ *اشطباهات*، والتر رودین، ترجمهٔ آرمان بهرامیان، ۹، ۱، ۵۷ـ۵۵.
۱۵۰ *بورباکی به روایت آندره ویل*، آندره ویل، ترجمهٔ عطاءالله تقا، ۵، ۱ و ۲، ۷۰ـ۶۷.
۱۵۱ *تجربهٔ ریاضی*، فیلیپ دیویس، روبن هرش، ترجمهٔ رضا کرمی، ۴، ۱ و ۲، ۶۵ـ۵۹.
۱۵۲ *چند مسأله*، گ. پولیا، گ. سگو، ترجمهٔ محمد جلوداری‌ممقانی، ۲، ۲، ۱۵۰ـ۱۴۹.
۱۵۳ *چند مسأله از کتاب محفلهای ریاضی (تجربهٔ روسی)*، دمیتری فومین، سرگی گنکین، ایلیا ایتنبرگ، ۹، ۱، ۵۸.
۱۵۴ *دفاعیهٔ یک ریاضیدان*، گادفری هرله هاردی، ترجمهٔ سیامک کاظمی، ۲، ۲، ۱۳۸ـ۱۳۲.
۱۵۵ *دوئل‌کننده و هیولا*، یان استیوارت، ترجمهٔ علیرضا جمالی، ۴، ۱ و ۲، ۳۵ـ۳۰.
۱۵۶ *شرف‌الدین طوسی و مفهوم مشتق*، رشدی راشد، ترجمهٔ م. ه. شفیعیها، ۴، ۳، ۶۰ـ۵۲.
۱۵۷ *گزیده‌هایی از کتاب ریمان، توپولوژی، و فیزیک*، میخائیل موناستیرسکی، ترجمهٔ سیامک کاظمی، ۲، ۳، ۲۰۷ـ۲۰۲.
۱۵۸ *ماشینهای متفکر*، ژان‌پیر شانژو، آلن کُن، ترجمهٔ احمد شفیعی‌ده‌آباد، ۴، ۱ و ۲، ۱۲ـ۴.
۱۵۹ *معلمان ریاضی دارالفنون*، شمس‌الدین رشدیه، ۱، ۲، ۱۳۴.
۱۶۰ *می‌خواهم ریاضیدان به حساب آیم*، پال هالموس، ترجمهٔ حسین معصومی‌همدانی، ۱، ۲، ۱۰۸ـ۱۰۵.
۱۶۱ *یک صفحه مسأله*، رانلد گراهام، دانلد کنوت، آرن پاتاشنیک، ۸، ۲، ۵۳.

مسأله

۱۶۲ *آموزش، هنر مسئله حل‌کردن*، آنی شوئنفلد، ترجمهٔ محمد جلوداری‌ممقانی، ۱، ۱، ۵۸ـ۵۰.
۱۶۳ *اردیش [=اردوش] و مسأله*، محمد جلوداری‌ممقانی، ۱، ۲، ۱۳۹ـ۱۳۵
۱۶۴ *بعضی از مسأله‌های محبوب من*، پال اردوش، ترجمهٔ سیامک کاظمی، ۸، ۱، ۶۱ـ۵۰.
۱۶۵ *بیستمین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی*، یحیی تابش، ۷، ۲، ۵۸ـ۵۶.
۱۶۶ *پنج مسأله از مجلهٔ اینتلیجنسر با حل*، مهدی حسینی نسب، ۳، ۱ و ۲، ۶۹ـ۶۶.
۱۶۷ *پولیا، حل مسأله، و آموزش*، آلن شوئنفلد، ترجمهٔ سعید ذاکری، ۲، ۲، ۱۴۹ـ۱۴۳.
۱۶۸ *سی و سه مسألهٔ قدیمی از مجلهٔ مانتلی*، سیاوش شهشهانی، ۲، ۳، ۲۳۰ـ۲۲۸.
۱۶۹ *شگردهای آشنا و ناآشنا*، بهرنگ نوحی، ۷، ۱، ۵۲ـ۴۹.
۱۷۰ *صد مسأله از آرنولد*، ولادیمیر آرنولد، ترجمهٔ علی عمیدی، ۴، ۳، ۴۴ـ۴۰.
۱۷۱ *مسائل امتحانی دانشگاه مستقل مسکو*، ترجمهٔ سیامک کاظمی، ۵، ۱ و ۲، ۶۶ـ۶۵.
۱۷۲ *مسابقهٔ ریاضی پاتنام*، محمد جلوداری‌ممقانی، ۱، ۳، ۲۲۱ـ۲۱۸.
۱۷۳ *مسابقهٔ ریاضی کشور*، محمد جلوداری‌ممقانی، ۲، ۱، ۶۱ـ۵۸.
۱۷۴ *مسأله*، ۳، ۱ و ۲، ۶۶؛ ۳، ۳، ۱۴۱؛ ۴، ۱ و ۲، ۵۴؛ ۵، ۱ و ۲، ۶۴ـ۶۲؛ ۶، ۱ و ۲ ۵۲ـ۵۱ [اصلاحیه در ۷، ۱، ۵۲]؛ ۷، ۲، ۵۸؛ ۸، ۱، ۶۱؛ ۸، ۲، ۵۴.

معرفی و نقد

۱۷۵ *اصل موضوع انتخاب تسرملو*، رابرت بون، ترجمهٔ محمد اردشیر، ۲، ۳، ۲۳۷ـ۲۳۱.
۱۷۶ *پنجاه سالگی متمتیکال ریویوز*، رابرت بارتل، جین کیستر، ترجمهٔ سیامک کاظمی، ۳، ۱ و ۲، ۸۵ـ۸۲.
۱۷۷ *تابع زتای ریمان*، پیتر سرنک، ترجمهٔ کورش علیانی، ۸، ۱، ۶۳ـ۶۲.
۱۷۸ *تحقیق و خلاقیت*، شاپور اعتماد، ۲، ۲، ۱۵۶ـ۱۵۱.
۱۷۹ *ترکیبیات شمارشی*، جورج اندروز، ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی، ۱، ۲، ۱۵۰ـ۱۴۸.
۱۸۰ *چند کاربردِ منطق در جبر*، اولریخ فِلْگِنر، ترجمهٔ کاوه لاجوردی، ۷، ۲، ۷۰ـ۶۹.
۱۸۱ *در بارهٔ ترجمه‌ای از مقدمه بر فلسفهٔ ریاضی*، کاوه لاجوردی، ۹، ۱، ۷۳ـ۷۰.
۱۸۲ *ریاضیات: علم الگوها*، هنری پولاک، ترجمهٔ سیامک کاظمی، ۸، ۲، ۶۰ـ۵۸.
۱۸۳ *ریاضیات و فیزیک*، فریمن دایسون، ترجمهٔ حسین معصومی همدانی، ۱، ۳، ۲۲۴ـ۲۲۲.
۱۸۴ *سهم ما از منطق ریاضی*، ضیاء موحد، ۱، ۱، ۶۵ـ۵۹.
۱۸۵ *شبه‌باورها و هندسه*، چارلز ریدین، ترجمهٔ مهدی مجیدی ذوالبنین، ۸، ۱، ۷۳ـ۶۸.
۱۸۶ *شهودگرایی براؤر*، کریگ اسمورینسکی، ترجمهٔ کاوه لاجوردی، ۹، ۱، ۶۱ـ۵۹.
۱۸۷ *شهودگرایی براؤر*، ویم رویتنبرگ، ترجمهٔ بردیا حسام، ۹، ۱، ۶۳ـ۶۱.
۱۸۸ *عصر جدید منطق*، ضیاء موحد، ۴، ۱ و ۲، ۵۸ـ۵۵.
۱۸۹ *فلیکس کلاین و رشد ریاضیات در قرن نوزدهم*، سیف‌الله رنجبر، ۳، ۱ و ۲، ۸۱ـ۷۸.

۱۹۰ *فهرست فیلمهای ریاضی موجود در ایران*، محمد باقری، ۱، ۳، ۲۲۷ـ۲۲۵.
۱۹۱ *فهرست کتابهای ریاضی فارسی (سال ۱۳۶۵)*، فرخ امیرفریار، شیوا دخت شیوایی، ۱، ۱، ۷۰ـ۶۸.
۱۹۲ *فهرست کتابهای ریاضی فارسی (سال ۱۳۶۶)*، فرخ امیرفریار، ۲، ۱، ۷۳ـ۶۹.
۱۹۳ *فهرست گزیده‌ای از فیلمهای فارسی*، ۲، ۲، ۱۵۸ـ۱۵۷.
۱۹۴ *کتابشناسی ریاضیات*، فرخ امیرفریار، غلامرضا برادران خسروشاهی، ۱، ۲، ۱۴۸ـ۱۴۷.
۱۹۵ *گوشه‌هایی از «گوشه‌ها»*، الهه خیراندیش، ۷، ۱، ۵۵ـ۵۳.
۱۹۶ *مسألهٔ دهم هیلبرت*، مجتبی منیری، ۸، ۱، ۶۵ـ۶۴.
۱۹۷ *مسألهٔ ریمان-هیلبرت*، هلموت رورل، ترجمهٔ رضا چمن‌آرا، ۸، ۱، ۶۸ـ۶۶.
۱۹۸ *مسألهٔ کاپلانسکی*، تامس یخ، ترجمهٔ کاوه لاجوردی، ۷، ۲، ۶۸.
۱۹۹ *منابع کتاب جبر نوین من*، بارتل وان‌دروردن، ترجمهٔ مهدی مجیدی ذوالبنین، ۹، ۱، ۶۹ـ۶۴.
۲۰۰ *منطق و ساخت*، محمد اردشیر، ۷، ۲، ۶۷ـ۶۶.
۲۰۱ *نظریهٔ نوین دستگاههای دینامیکی*، فلوریس، تاکنس، ترجمهٔ سپیده چمن‌آرا، ۸، ۲، ۶۶ـ۶۴.
۲۰۲ *نگارش ریاضیات: الف، ب، پ*، کاوه لاجوردی، ۸، ۲، ۵۷ـ۵۵.
۲۰۳ *نگرهٔ مدلها*، جان بالدوین، ترجمهٔ کاوه لاجوردی، ۸، ۲، ۶۳ـ۶۰.
۲۰۴ *واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار: گزارش کار*، سیامک کاظمی، ۱، ۱، ۷۳ـ۷۱.
۲۰۵ *واقعگرایی در ریاضیات*، موریس هرش، ترجمهٔ شاپور اعتماد، ۷، ۲، ۶۵ـ۵۹.

دیدگاه/گزارش/نامه

۲۰۶ *آیا هنوز هم باید درگذشتگان را از گورشان بیرون کشید و شلاق زد؟* م. هـ. شفیعها، ۴، ۱ و ۲، ۷۶ـ۷۴.
۲۰۷ *از تنگ جامی ما میکده رسوا گردید*، احمد شفیعی‌ده‌آباد، ۵، ۱ و ۲، ۷۱.
۲۰۸ *از دیدگاه یک دانشجوی سابق*، سعید قهرمانی، ۶، ۱ و ۲، ۶۱ـ۶۰.
۲۰۹ *اقتراح: ریاضیات و کامپیوتر*، غلامرضا انصاری، غلامرضا برادران‌خسروشاهی، پرویز جبه‌دار مارالانی، سیاوش شهشهانی، کارو لوکس، ابراهیم نقیب‌زادهٔ مشایخ، ۱، ۲، ۸۴ـ۷۹.
۲۱۰ *المپیاد، اعزام دانشجو، و فرار مغزها*، سیاوش شهشهانی، ۸، ۱، ۷۶ـ۷۵.
۲۱۱ *انتظارات اهل علم و موعظهٔ مقامات*، حمیدرضا طاهری، ۶، ۱ و ۲، ۵۷ـ۵۵.
۲۱۲ *این همه تکرارِ نالازم*، احمد شفیعی‌ده‌آباد، ۷، ۱، ۵۷ـ۵۶.
۲۱۳ *باز هم در بارهٔ درس مبانی ریاضیات*، مرتضی منیری، ۸، ۱، ۷۵ـ۷۴.
۲۱۴ *«بافت» بهتر از «متن» است*، گروه ریاضی کاربردی جهاد دانشگاهی صنعتی شریف، ۲، ۱، ۷۶.
۲۱۵ *بهشتِ کانتور و برزخ «مبانی»*، کاوه لاجوردی، ۷، ۱، ۵۹ـ۵۸.
۲۱۶ *«بدبدهٔ هشترودی» تکرارشدنی نیست*، سیاوش شهشهانی، ۴، ۱ و ۲، ۷۳ـ۷۲.
۲۱۷ *تفکر منطقی را نمی‌توان با مطالعهٔ منطق آموخت*، هوشنگ شکرانیان، ۷، ۱، ۵۸ـ۵۷.
۲۱۸ *جایگاه کامپیوتر در دانشگاه*، عبدالله ناظمی، ۱، ۳، ۲۳۴.
۲۱۹ *جبر هومولوژیک یا بازی موش و پنیر*، سیامک یاسمی، ۹، ۱، ۷۴.
۲۲۰ *دادوستد اندیشه*، محمد باقری، ۶، ۱ و ۲، ۵۴ـ۵۳.
۲۲۱ *در بارهٔ کتاب آشنایی با منطق ریاضی*، محمد اردشیر، ۱، ۳، ۲۳۵ـ۲۳۴.
۲۲۲ *دو نکته از کنفرانس اول*، هوشنگ شکرانیان، ۶، ۱ و ۲، ۵۵ـ۵۴.
۲۲۳ *ریاضیات سال اول، هم آسان و هم دشوار*، جواد بهبودیان، ۳، ۳، ۹۳ـ۹۱.
۲۲۴ *ریاضیات عمومی برای رشتهٔ ریاضی بی‌معناست*، احمد شفیعی‌ده‌آباد، ۳، ۳، ۹۸ـ۹۶.
۲۲۵ *ریاضیات عمومی برای رشتهٔ ریاضی لازم است*، سیاوش شهشهانی، ۳، ۳، ۱۰۳ـ۹۹.
۲۲۶ *ریاضیات عمومی، مشکلی دیرپای*، هوشنگ شکرانیان، ۴، ۱ و ۲، ۷۱ـ۶۹.
۲۲۷ *شاید دفعهٔ آینده ...*، رامین تکلوبیغش، ۶، ۱ و ۲، ۵۴.
۲۲۸ *ششمین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضیات*، محمدعلی نجفی، ۱، ۳، ۲۳۲ـ۲۲۸.
۲۲۹ *عوامل ناخوشایندیِ تدریس ریاضیات عمومی*، علی رجالی، ۳، ۳، ۹۵ـ۹۴.
۲۳۰ *قطع سهمیه ارزی دانشجویان دورهٔ کارشناسی برای خرید کتاب و مجله*، کاوه لاجوردی، ۴، ۱ و ۲، ۷۲ـ۷۱.
۲۳۱ *قیمت مجله*، مسعود ص.، ۱، ۳، ۲۳۴.
۲۳۲ *گزارشی از اتصال ایران به شبکه‌های کامپیوتری جهانی*، ابراهیم نقیب‌زادهٔ مشایخ، ۷، ۱، ۲۴ـ۲۱.
۲۳۳ *گزارشی از بیستمین کنفرانس ریاضی کشور*، منوچهر میثاقیان، ۲، ۲، ۱۶۴ـ۱۶۳.
۲۳۴ *گزارشی از نخستین کنگرهٔ منطق*، ۳، ۱ و ۲، ۸۸.
۲۳۵ *مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات*، محمدجواد ا. لاریجانی، ۲، ۲، ۱۶۲.
۲۳۶ *مرکز فیزیک تئوری و ریاضی-سازمان انرژی اتمی ایران*، محمد لامعی، ۲، ۲، ۱۶۳ـ۱۶۲.
۲۳۷ *مشکلات دورهٔ کارشناسی ریاضی در دانشگاههای توسعه‌نیافته*، هوشنگ شکرانیان، ۴، ۳، ۶۸ـ۶۴.
۲۳۸ *مشکل کتابخانه‌های ریاضی*، غلامرضا برادران‌خسروشاهی، مهدی رجبعلی‌پور، فریده طاهری، منوچهر میثاقیان، ۲، ۱، ۷ـ۴.
۲۳۹ *مناسبترین افراد برای ترجمهٔ آثار ریاضی چه کسانی هستند؟*، علی کافی، ۶، ۱ و ۲، ۶۴ـ۶۲.
۲۴۰ *نشریات ریاضی برای دانش‌آموزان دبیرستانی*، علی داوری، ۲، ۱، ۷۶.
۲۴۱ *نظرخواهی: نظام آموزشی دورهٔ کارشناسی ریاضی در ایران*، مگردیچ تومانیان، علی رجالی، مهدی رجبعلی‌پور، رحیم زارع‌نهندی، ارسلان شادمان، احمد شفیعی‌ده‌آباد، کریم صدیقی، طاهر قاسمی، ۱، ۳، ۱۶۲ـ۱۵۵.
۲۴۲ *نگاهی از حاشیه به میانه*، کورش علیانی، ۶، ۱ و ۲، ۶۰ـ۵۷.
۲۴۳ *... و آن برای شما بهتر است*، کاوه لاجوردی، ۶، ۱ و ۲، ۶۱.

مؤلفان

[شماره‌های ستاره‌دار، به گفتگوها ارجاع می‌دهند.]

مترجمان

مرکز نشر دانشگاهی منتشر کرده است

آشنایی با اقتصادسنجی
اسکار لانگه
ترجمهٔ محمدحسین طوفانی نژاد

آشنایی با تاریخ ریاضیات (دوجلد)
هاورد و. ایوز
ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل

آشنایی با تحقیق در عملیات (جلداول)
حمدی طه
ترجمهٔ محمد باقر بازرگان

آشنایی با توپولوژی و آنالیز نوین
ج. ف. سیمونز
ترجمهٔ اسدالله نیکنام

آشنایی با دانش کامپیوتر
توماس بارتی
ترجمهٔ ابراهیم نقیب‌زادهٔ مشایخ،
داریوش موسوی‌زاده

آشنایی با فرایندهای تصادفی
هونل، پورت، استون
ترجمهٔ محمدحسین افقهی

آشنایی با منطق ریاضی
هربرت ب. اندرتون
ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی،
محمدرجبی طرخورانی

آشنایی با نظریهٔ اعداد
ویلیام و. آوامز، لری جونل گولدشتین
ترجمهٔ آدینه محمد نارنجانی

آشنایی با نظریهٔ گروهها
والتر لدرمن
ترجمهٔ محمدحسین بیژن‌زاده

آمار ریاضی
جان فروند، رانلد والپول
ترجمهٔ علی عمیدی، محمد قاسم وحیدی اصل

آمار کاربردی
جان نتر، ویلیام واسرمن، ویتمور
ترجمهٔ علی عمیدی

آمار مقدماتی (دو جلد)
تامس اچ. وواناکات، رانلد جی. وواناکات
ترجمهٔ محمدرضا مشکانی

آمار ناپارامتری کاربردی
کنوور
ترجمهٔ سیدمقتدی هاشمی پرست

آموزش تدریس ریاضیات دبیرستانی
اتو س. بلر، جان ر. کولب
ترجمهٔ جواد همدانی‌زاده

آنالیز عددی مقدماتی به شیوهٔ الگوریتمی
سمونل د. کونت، کارل دوبور
ترجمهٔ سراج‌الدین کاتبی

آنالیز مختلط و کاربردهای آن
ریچارد ا. سیلورمن
ترجمهٔ علی عمیدی، خلیل پاریاب

استنباط آماری ناپارامتری
جین دیکنسن گیبنز
ترجمهٔ عبدالرحیم شهلایی، علی عمیدی

اصول آماری، در طرح آزمایشها (دو جلد)
ب. وایتر
ترجمهٔ زهرهٔ سرمد، مهتاش اسفندیاری

اصول آنالیز حقیقی
روبرت جی بارتل
ترجمهٔ جعفر زعفرانی

اعداد مختلط
والتر لدرمان
ترجمهٔ علی‌اکبر مهرورز

برنامه‌نویسی سیستم برای کامپیوترهای شخصی (PC) (دوجلد)
مایکل تیشر
ترجمهٔ امیر صادقی

تابع گاما
امیل آرتین
ترجمهٔ سعید ذاکری،

تحقیقی در آثار ریاضی ابوریحان بیرونی (تحریری نوین از بیرونی نامه)
ابوالقاسم قربانی

توابع متغیر مختلط
د. ا. تال
ترجمهٔ مجید محمدزاده

توپولوژی
کلاوس یینیش
ترجمهٔ ارسلان شادمان

توپولوژی، نخستین درس
جیمز ر. مانکرز
ترجمهٔ یحیی تابش، ابراهیم صالحی،
جواد لآلی، نادر وکیل

جبر خطی
مایکل اونان
ترجمهٔ علی‌اکبر محمدی حسن‌آبادی

جبر خطی
چارلز کرتیس
ترجمهٔ نوروز ایزد دوستدار،
بیژن شمس، اسدالله کارشناس

جبر خطی
کنت هافمن، ری کنزی
ترجمهٔ جمشید فرشیدی

جبر ماتریسها برای علوم زیستی و کاربردهای آماری آن
س. سیرل
ترجمهٔ جلال داودزاده

حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد اول)
تام م. آپوستل
ترجمهٔ علیرضا ذکائی، مهدی رضائی دلفی،
علی‌اکبر عالم‌زاده، فرخ فیروزان

حساب دیفرانسیل وانتگرال (برای رشته‌های بازرگانی، زیست‌شناسی و علوم اجتماعی)
د. ج. کرودیس، س. م. شلی، ب. و. ویلر
ترجمهٔ ابوالقاسم لاله

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی (دو جلد، جلد اول در دو قسمت)
جورج توماس، راس فینی
ترجمهٔ مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، علی کافی

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی (دو جلد، هر جلد در دو قسمت)
لوئیس لیتهلد
ترجمهٔ مهدی بهزاد، محسن رزاقی، سیامک کاظمی، اسلام ناظمی

روشهای آنالیز حقیقی
ریچارد گولد برگ
ترجمهٔ محمدعلی پورعبدالله‌نژاد، باقر نشوادیان

روشهای بنیادی اقتصاد ریاضی
آلفاسی. شیانگ
ترجمهٔ مجید کوپاهی

ریاضیات در علوم زیستی (جلد اول)
ادوارد باچلت
ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی،
ابوالقاسم شریفیان

ریاضیات مهندسی پیشرفته
اروین کرویت‌سیگ
ترجمهٔ عبدالله شیدفر، حسین فرمان

زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی، از سدهٔ سوم تا سدهٔ یازدهم هجری
ابوالقاسم قربانی

سری فوریه
ی. ن. اسنودن
ترجمهٔ بتول جذبی

طراحی منطقی دستگاههای رقمی
آرتور د. فریدمن
ترجمهٔ فرهاد صاحبان، شهلا طباطبایی

علم و هنر شبیه‌سازی سیستمها
رابرت شانون
ترجمهٔ علی‌اکبر عرب‌مازار

فرمولهای ریاضی
آ. گ. تسیپکین، گ. گ. تسیپکین
ترجمهٔ و. روگوف

کاشانی نامه (احوال و آثار غیاث‌الدین جمشید کاشانی)
ابوالقاسم قربانی

مبانی اقتصادسنجی
یان کمتا
ترجمهٔ کامبیز هژبر کیانی

مبانی ریاضیات
ایان استیوارت، دیوید تال
ترجمهٔ محمد مهدی ابراهیمی

مبانی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
ایان اسنودن
ترجمهٔ مرتضی شفیعی موسوی، علی کدخدایی

مبانی نظریهٔ تصمیم
برنارد و. لیندگرن
ترجمهٔ عبدالرحمن ستارزادهٔ آذری، علی عمیدی

مبانی نظریهٔ صف
دانلد گراس، کارل م. هریس
ترجمهٔ غلامحسین شاهکار

متغیرهای مختلط و کاربرد آنها
رونل و. چرچیل، جیمز و. براون، راجر ف. ورهی
ترجمهٔ امیر خسروی

معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها
جرج ف. سیمونز
ترجمهٔ علی‌اکبر بابائی، ابوالقاسم میامنی

معماری سیستمهای کامپیوتری
م. موریس مانو
ترجمهٔ امیر صادقی

مفاهیم و روشهای آماری (دو جلد)
گوری ک. باتاچاریا، ریچارد ا. جانسون
ترجمهٔ مرتضی ابن شهرآشوب، فتاح میکائیلی

مقدمات معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی
ویلیام ا. بویس، ریچارد ک. دیپریما
ترجمهٔ محمدرضا سلطانپور، بیژن شمس

نخستین درس در جبر مجرد
جان ب. فرالی
ترجمهٔ مسعود فرزان

نخستین درس در جبر مجرد
ف. ج. هیگینز
ترجمهٔ محمدرضا رجب‌زادهٔ مقدم

نخستین گامها در آنالیز عددی
هوسکینگ، جویس، ترنر
ترجمهٔ اسماعیل بابلیان، میرکمال میرنیا

نظریهٔ آمار
برنارد م. و. لیندگرن
ترجمهٔ ابوالقاسم بزرگ‌نیا

نظریهٔ اعداد
ت. ه. جکسن
ترجمهٔ اکبر حسنی

نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها
پ. ر. هالموس
ترجمهٔ عبدالحمید دادالله

نظریهٔ گالوا
یاوامن مورتی و همکاران
ترجمهٔ محمدتقی دیبایی

نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربرد آنها
شوینگ نی. لین، یوفنگ. لین
ترجمهٔ عمید رسولیان

نظریهٔ مقدماتی احتمال و فرایندهای تصادفی
کای لای چانگ
ترجمهٔ ابوالقاسم میامنی، محمدقاسم وحیدی اصل

نظریهٔ و کاربردهای آنالیز عددی
ج. م. فیلیپس، پ. ج. تیلر

واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار
انجمن ریاضی ایران با همکاری مرکز نشر دانشگاهی

هندسهٔ جبری مقدماتی
مایلز رید
ترجمهٔ رحیم زارع نهندی

هندسهٔ دیفرانسیل مقدماتی
بارت اونیل
ترجمهٔ بیژن شمس، محمدرضا سلطانپور

هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی
ماروین جی. گرینبرگ
ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها

نظرخواهی در بارهٔ ده‌سالهٔ نخست نشر ریاضی (۱۳۶۷ تا ۱۳۷۶)

نام و نام خانوادگی (در صورت تمایل):

سن:

میزان تحصیلات:

محل سکونت:

از چه سالی با نشر ریاضی آشنا شده‌اید؟

آیا تاکنون مشترک مجله بوده‌اید؟

چگونه از انتشار شماره‌های جدید آگاه می‌شوید؟

لطفاً نظرتان را در مورد هر یک، از اینها در یکی-دو سطر بنویسید:

ویرایش مطالب:

صفحه‌آرایی مجله:

طرحهای روی جلد:

قطع مجله:

تعداد صفحات هر شماره:

فواصل انتشار شماره‌ها:

مطالب بخشهای زیر تا چه حد، به لحاظ سطح علمی و جالب توجه بودن، انتظارات شما را بر می‌آورد؟

سرمقاله‌ها:

مقاله‌ها:

نقدها:

مسأله‌ها:

خبرها و گزارشها:

دیدگاهها:

گزیده‌های کتابها:

عنوان حداکثر پنج تااز بهترین مطالبی که تاکنون در نشر ریاضی خوانده‌اید (می‌توانید از شمارهٔ ردیف مطالب در فهرست جامع استفاده کنید):

● به هرگونه پیشنهاد و نظر دیگر شما در بارهٔ مجله با دقت و علاقه توجه می‌کنیم.


اعداد مختلط و هندسه
گامهایی در جبر تعویضپذیر
۲۰۰۰ مسئلهٔ حل شده در
ریاضیات گسسته
سیمور لیپشوتس، مارک لارس لیپس
حساب دیفرانسیل و انتگرال
ترجمهٔ عبدالرضا راشدی اشرفی
ریاضیات گسسته و ترکیباتی
از دیدگاه کاربردی
جلد اول
ریاضیات در علوم زیست
ادوارد باچلت
تحلیل چند متغیره
توپولوژی
کلاوس یئیش

NASHR-E RIYĀZI

Volume 9, Number 2, October 1998

Nashr-e Riyāzi is a Persian-language, expository mathematics journal published biannually (in April and October) by Iran University Press.

Annual subscription rates (including airmail postage) are: Middle East £ 18, Europe & Asia £ 20, North America & Far East £ 25.

For more information write to Iran University Press, 85 Park Avenue, Tehrān 15134, Iran, or contact ⟨nashriaz @vax. ipm. ac. ir⟩.

CONTENTS

* An asterisk indicates that the article was originally published elsewhere; complete address of the original article appears at the end of the article.

ISSN: 1015-2857

در شماره‌های آینده می‌خوانید

صدق ریاضی	پال بناسراف
ریاضیات بدون مبانی	هیلری پاتنم
حل معادلات	جری کزدان
نمایش گروههای متناهی	ت. ی. لَم