نشریه فیزیک

سال ۹، شمارهٔ ۱

شمارهٔ پیاپی: ۱۷

بسم‌الله الرحمن الرحیم

مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

شمارهٔ ۸۵ خیابان پارک خیابان دکتر بهشتی، تهران ۱۵۱۳۴

بهای این شماره ۲۵۰۰ ریال؛ حق اشتراک سالانه برای داخل کشور ۵۰۰۰ ریال.
(برای دانشجویان با ۳۰٪ تخفیف)

وجه اشتراک به حساب شمارهٔ ۹۰۰۰۹ بانک ملی شعبهٔ خیابان پارک تهران به نام مرکز نشر دانشگاهی واریز شود.

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر شش ماه یک بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجّه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی پژوهان فارسی زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چهارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبک مقاله‌های چاپ‌شده در *نشر ریاضی* باشد. به همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حک و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ شدهٔ در *نشر ریاضی* باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۹، شمارهٔ ۱

تاریخ انتشار: اسفند ۱۳۷۶

شمارهٔ پیاپی: ۱۷

nashriaz@rose.ipm.ac.ir

مدیر مسؤول: سیاوش شهشهانی

فهرست

گزارش ۲

مقاله‌ها

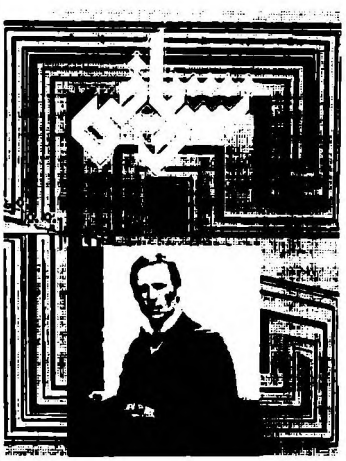
شهودگرایی براؤری	محمد اردشیر	۵
براؤر و توپولوژی	دیرک وان دالن	۲۰
شهودگرایی و صورتگرایی	لوئیتزن اِجبرتوس یان براؤر	۳۰
جدال موش و قورباغه: بحران ماتماتیشه آنالن	دیرک وان دالن	۳۶
یکتایی تجزیه	پیر ساموئل	۵۰
اشطباهات	والتر رودین	۵۵

مسأله یحیی تابش ۵۸

کتاب

دو نقد در بارهٔ کتاب شهودگرایی براؤر	گریک اسورینسکی، ویم روینتبرگ	۵۹
منابع کتاب جبر نوین من	بارتل وان در وردن	۶۴
در بارهٔ ترجمه‌ای از مقدمه بر فلسفهٔ ریاضی	کاوه لاجوردی	۷۰

دیدگاه



روی جلد

طرحی از یک مقالهٔ براؤر در بارهٔ توپولوژی همراه با عکسی از براؤر.

گزارش

سال جهانی ریاضیات

در بخش گزارش شمارهٔ ۲ سال ۷ نشر ریاضی به اطلاع رساندیم که یونسکو سال ۲۰۰۰ را «سال جهانی ریاضیات» اعلام کرده است. در این فاصلهٔ یک‌ونیم ساله شاهد تشکیل «ستاد ملّی سال جهانی ریاضیات» در کشورمان بوده‌ایم که نقش هماهنگی و حمایت از فعالیتهای گوناگونی را که سازمانهای مختلف برای برگزاری سال جهانی ریاضیات انجام می‌دهند برعهده دارد. ریاست این ستاد با وزیر فرهنگ و آموزش عالی است و تنی چند از سایر مقامات مملکتی از جمله وزرای آموزش و پرورش، پست و تلگراف و تلفن، فرهنگ و ارشاد اسلامی، رئیس سازمان برنامه و بودجه و رئیس سازمان صدا و سیمای جمهوری اسلامی ایران در آن عضویت دارند. سایر اعضای ستاد را عده‌ای از اعضای هیأت علمی رشته‌های علوم ریاضی دانشگاهها و بعضی دیگر از مسؤولان ذیربط تشکیل می‌دهند. از مقام ریاست جمهوری نیز تقاضا شده است که ریاست عالیهٔ ستاد را بپذیرند. کمیتهٔ اجرائی ستاد، متشکّل از عده‌ای از اعضای ستاد ملّی، زیر نظر معاون پژوهشی وزارت فرهنگ و آموزش عالی (دبیر ستاد ملّی)، مسؤولیت تنظیم برنامه‌ها، بودجه، و تدوین آیین‌نامه‌های اجرائی و تعیین نحوهٔ مشارکت سازمانها و ارائهٔ پیشنهادهای لازم به ستاد ملّی را به عهده دارد. قرار است در یک گردهمایی که در اردیبهشت ۱۳۷۷ تشکیل می‌شود ساختار کلّی فعالیتها و نحوهٔ مشارکت سازمانها و افراد اعلام گردد. امید است که در پرتو برگزاری مراسم سال جهانی ریاضیات، نقش ریاضیات در توسعهٔ فرهنگی، علمی، صنعتی و اقتصادی کشور به نحو شایسته‌ای در جامعه تبیین گردد و گامهای مؤثری در رفع تنگناهای موجود در راه ترویج و پیشرفت علوم ریاضی در کشور برداشته شود. برای اطّلاع بیشتر در مورد امکانات همکاری در برگزاری «سال جهانی ریاضیات»، علاقه‌مندان می‌توانند با دبیرخانهٔ سال جهانی ریاضیات، ساختمان فجر وزارت فرهنگ و آموزش عالی، تقاطع انقلاب و فلسطین، صندوق پستی ۱۳۱۴۵/۵۵۴، تهران، تماس بگیرند.

کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان، برلین، ۱۹۹۸

بیست وسومین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان از تاریخ ۱۸ تا ۲۷ ماه اوت ۱۹۹۸ در شهر برلین آلمان برگزار خواهد شد. کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان که هر چهار سال یک بار از سال ۱۸۹۷، به استثنای وقفه‌های مربوط به جنگهای جهانی، تشکیل شده است هر بار چند هزار ریاضیدان از سراسر جهان را گرد هم می‌آورد. برنامهٔ علمی کنگرهٔ سال ۱۹۹۸ از ۲۱ سخنرانی اصلی یک ساعتی، ۱۶۷ سخنرانی دعوتی ۴۵ دقیقه‌ای، چند صد سخنرانی کوتاه آزاد و نمایش پوستر، و نیز تعدادی سمینار تخصصی جانبی تشکیل شده است. از جمله مراسم دیگر کنگره، اعطای مدالهای فیلدز در ریاضیات و مدال نوانلینا در علوم نظری کامپیوتر است. اسامی ۲۱ سخنران مدعو اصلی همراه با کشور و سازمان متبوع آنها و رشته‌های کاریشان همانگونه که خود اعلام کرده‌اند در جدول روبه‌رو مشاهده می‌شود. پدیدهٔ چشمگیر از نظر جامعهٔ علمی ایران، وجود نام کامران وفا فیزیکدان شهیر ایرانی در میان این اسامی است. در هر دورهٔ کنگره عده‌ای از دانشمندان رشته‌های نزدیک به ریاضیات نیز که کارشان از لحاظ محتوای ریاضی قابل توجه است به‌عنوان سخنران دعوت می‌شوند. کامران وفا اولین ایرانی است که در تاریخ یکصد سالهٔ کنگره به‌عنوان سخنران مدعو شرکت می‌کند. علاقه‌مندان به دریافت اطلاع بیشتر در مورد کنگره و نحوهٔ شرکت در آن می‌توانند از طریق شبکهٔ الکترونیک:

icm98@zib.de
http://elib.zib.de/ICM98/info.html

یا از طریق آدرس پستی

ICM '98
TU Berlin, MA 8-2
Str.des 17 Juni 135
D-10623 Berlin, Germany

با دفتر کنگره تماس حاصل کنند. اسامی ۱۶۷ سخنران مدعو دیگر در جایگاه شبکهٔ الکترونیک ذکر شده در بالا موجود است.

سموئل ایلنبرگ (۱۹۱۳ـ۱۹۹۸)

سموئل ایلنبرگ (Samuel Eilenberg) که از نوآورترین ریاضیدانان معاصر محسوب می‌شود در ۳۰ ژانویهٔ ۱۹۹۸ پس از آنکه هفت ماه در حالت اغماء بود در نیویورک درگذشت. ایلنبرگ متولّد شهر ورشو در لهستان بود. او در سال ۱۹۳۹ به آمریکا رفت و بیشتر عمر علمی خود را به‌عنوان استاد دانشگاه کلمبیا در نیویورک گذراند. ایلنبرگ اولین غیرفرانسوی بود که به عضویت گروه بورباکی دعوت شد. او همراه با نورمن استین‌راد (Norman Steenrod) اصول موضوع هومولوژی و کوهومولوژی در توپولوژی جبری را عرضه کرد و علاوه بر داشتن آثار عمیق در این رشته، بنیانگذار جبر هومولوژیک (همراه با هانری کارتان) و نظریهٔ کاتگوری (همراه با ساوندرز مک‌لین Saunders Mac Lane) محسوب می‌شود و نیز آثاری در نظریهٔ اتوماتونها و زبانهای صوری دارد. در بیرون از حوزهٔ تحقیقات ریاضی، ایلنبرگ در باستانشناسی و بررسی آثار عتیق آسیای جنوبی و شرقی تبحّر داشت. گویا وی برای مطالعات باستانشناسی و کشف آثار عتیق به ایران نیز سفر کرده است.

سخنرانان اصلی کنگرهٔ برلین

- **Jean-Michel Bismut**
(Université Paris-Sud, Orsay, France): Differential Geometry and Global Analysis
- **Christopher Deninger**
(Universität Münster, Germany): Arithmetic Algebraic Geometry, L-Functions of Motives
- **Persi Diaconis**
(Mathematics and ORIE, Cornell University, Ithaca, USA): Statistics, Probability, Algebraic Combinatorics
- **Giovanni Gallavotti**
(Universitá La Sapienza, Roma, Italy): Dynamical Systems, Statistical Mechanics, Probability
- **Wolfgang Hackbusch**
(Universität Kiel, Germany): Numerical Analysis, Scientific Computing
- **Helmut H. W. Hofer**
(Courant Institute, New York University, USA): Global Analysis, Dynamical Systems
- **Ehud Hrushovski**
(Hebrew University of Jeru-sa-lem, Israel): Logic
- **I. G. Macdonald**
(Queen Mary and Westfield College, University of London, England): Lie Groups, Algebraic Combinatorics
- **Stéphane Mallat**
(École Polytechnique, CMAP, Palaiseau, France): Applied Mathematics, Signal Processing
- **Dusa McDuff**
(SUNY Stony Brook, USA): Symplectic Topology
- **Tetsuji Miwa**
(RIMS, Kyoto University, Japan): Integrable Systems, Infinite Dimensional Algebras
- **Jürgen Moser**
(ETH Zürich, Switzerland): Dynamical Systems, Partial Differential Equations
- **George C. Papanicolaou**
(Stanford University, USA): Applied Mathematics, Probability
- **Gilles Pisier**
(Université Paris VI, France and Texas A&M University, College Station, USA): Functional Analysis
- **Peter Sarnak**
(Princeton University, USA): Number Theory
- **Peter W. Shor**
(AT&T Labs, Florham Park, USA): Computer Science
- **Karl Sigmund**
(University of Vienna, Austria): Mathematical Ecology, Evolutionary Game Theory
- **Michel Talagrand**
(C.N.R.S., Université Paris VI, France): Probability, Statistical Mechanics, Functional Analysis, Measure Theory
- **Cumrun Vafa**
(Harvard University, Cambridge, USA and Tehran, Iran): String Theory, Quantum Field Theory and Quantum Gravity
- **Marcelo Viana**
(IMPA, Rio de Janeiro, Brazil): Dynamical Systems, Ergodic Theory
- **Vladimir Voevodsky**
(Northwestern University, Evanston, USA): Algebraic Cycles and Motives

ویژه‌نامهٔ براؤر

نگاهی به فهرست مندرجات این شماره نشان می‌دهد که بخش عمدهٔ مطالب به بررسی آثار براؤر در فلسفهٔ ریاضیات و توپولوژی اختصاص یافته است. هدف از انتشار این شمارهٔ ویژه، که هدایت آن را آقای دکتر اردشیر عضو هیأت ویراستاران مجله به عهده داشته است، علاوه بر معرّفی یکی از درخشانترین ریاضیدانان نیمهٔ اول قرن بیستم، کمک به درک بهتر آثار و شخصیت پر از ابهام و گاه جنجالی براؤر است. فلسفهٔ شهودگرایی براؤر در ریاضیات برانگیزندهٔ نظرات تند موافق و مخالف بوده است و نیز سوءتفاهمهای بسیاری ایجاد کرده است. علاوه بر مقالهٔ تألیفی «شهود گرایی براؤری»، مقالهٔ دیرک وان دالن در مورد دستاوردهای توپولوژیک براؤر نیز برای اولین بار به چاپ می‌رسد. قرار است متن انگلیسی این مقاله در مجموعه‌ای زیر عنوان *Handbook of Topology* به ویراستاری I. James استاد ریاضیات دانشگاه اکسفرد منتشرگردد. قسمتهای آغازین این مقاله در واقع زندگینامهٔ کوتاهی از براؤر است. نشر ریاضی از پروفسور وان دالن و ناشر این مجموعه که اجازهٔ چاپ ترجمهٔ فارسی این مقاله را داده‌اند، سپاسگزاری می‌کند.

******

انتشار ویژه‌نامهٔ براؤر فرصتی است که نکاتی چند در مورد مشکلات تهیهٔ یک مجلهٔ علمی-ترویجی اصیل مطرح کنیم. مدتّی پیش جلسه‌ای داشتیم با یکی از مسؤولان امتیازبندی مجلات علمی در وزارت فرهنگ و آموزش عالی. وقتی به ایشان توضیح دادیم که مجلهٔ ما یک مجلهٔ توصیفی و ترویجی است نه تحقیقاتی (به مفهوم رایج تحقیق در علوم پایه و ریاضیات) و ضوابط و آیین‌نامه‌های وزارتخانه اساساً جای ویژه‌ای برای این‌گونه نشریات در نظر نگرفته است، وی تصوّرکرد که شکسته‌نفسی می‌کنیم. توضیح دادیم که نشریهٔ ترویجی به مقوله‌ای متفاوت از مجلهٔ پژوهشی تعلّق دارد و ضوابط حاکم بر ارزشیابی آن نیز باید متفاوت باشد. ولی سخنانمان مؤثر نیفتاد و فرمودند که اگر حتّی امتیاز «علمی-ترویجی» بیاورید! ما کافی برای نشریهٔ تحقیقاتی کسب نکنید ممکن

است امتیاز کافی برای دریافت عنوان از خیر رده‌بندی گذشتیم زیرا معتقد بودیم مجلهٔ علمی-ترویجی فی‌نفسه اصالت دارد نه اینکه یک مجلهٔ تحقیقی در سطح پایینتر از استاندارد باشد. به هر حال با کوشش فراوان سعی کرده‌ایم مجله را با کیفیت مورد نظرمان سر موعد آمادهٔ چاپ کنیم و همواره مشوّق ریاضی‌کاران باذوق بوده و هستیم که علی‌رغم برخوردار نبودنِ مجله از امتیاز رده‌بندی مجلات، در تألیف مقالات توصیفی در ریاضیات پیشگام شوند. کوشش نشر ریاضی از آغاز این بوده است که به یک جُنگِ ترجمه تبدیل نشود بلکه در راه دست‌یافتن به یک هویّت اصیل حرکت کند و از نظر استانداردهای دقّتِ علمی و ژورنالیستی همردیف نشریه‌های مشابه خارجی باشد. این کوشش متضمن صرف وقت و گاهی باعث تأخیر در فرستادن مجله به چاپخانه است. به یک نمونه از مشکلات که چاپ همین شمارهٔ مجله را یک ماه به تعویق انداخت توجّه کنید. متن انگلیسی مقالهٔ «براؤر و توپولوژی» که وان دالن در اختیار ما قرار داد، چنانکه گفته شد، هنوز به چاپ نرسیده و پُر از اشکالات و ناهنجاریهای معمول در نسخه‌های پیش‌چاپ مقالات بود. با اصرار از دوست و همکار عزیزمان آقای ابوالقاسم لاله تقاضا کردیم که ترجمهٔ متن را بپذیرد. وی از سر محبّتی که نسبت به مجلهٔ نشر ریاضی دارد قبول زحمت کرد. مواردی در مقاله بود، به‌خصوص در نقل‌قولهای مستقیم از براؤر، که مترجم و ویراستاران در کشف معنی آنها درماندند. به نویسنده متوسّل شدیم، او توضیح داد که براؤر به سبک هلندی قرن نوزدهم می‌نوشته و این ابهامات طبیعی است. پاره‌ای از مشکلات به کمک نویسنده حل شد ولی در یک موردْ نظر نویسنده در بارهٔ مقصود براؤر از یک عبارت ریاضی ما را قانع نکرد و ناچار به حذف یک نقل‌قول مستقیم از صورت قضیه شدیم. بخشی از مکاتباتی را که در این مورد با نویسنده انجام شد در تصویر ملاحظه می‌کنید. جملهٔ حذف‌شده نیز مشاهده می‌شود. اگر خواننده‌ای بتواند از مقصود براؤر پرده بردارد مشتاق شنیدن نظر او هستیم.

س. ش.

To: Dirk.vanDalen@phil.ruu.nl
Subject: Brouwer's Topology
Date: Fri, 16 Jan 1998 18:42:11

Dear Professor van Dalen
.....
..... I just wrote to Professor I. James for his permission to include your paper in our special issue. I am having a second look at the manuscript in the the new version and hope to have my questions settled but let me just ask this question: By `invariant indicatrix' does Brouwer mean Euler characteristic(e.g., with reference to fixed-point properties of surfaces?). I can't think of anything else that would give sense to some of the statements. I would appreciate your clarification.
Sincerely yours
S. Shahshahani

.....
Dear Professor Siavash Shahshahani,
.....
.....
..... In this case 'invariant indicatrix' just means "orientation preserving". It was an old-fashioned terminology.

I am glad that you are looking after the topology part of the Brouwer issue that Ardeshir is organizing.
Dont hesitate to contact me if I can help you.
Sincerely yours
D. van Dalen

.....
.....
Dear Professor van Dalen
Thank you for your attention to the `invariant indicatrix' problem I had encountered. Let me pursue your response a little further. I am referring to the follwing quote which starts on page 6 of your manuscript:

> A continuous one-one transformation in itself with invariant indicatrix of a singly connected , two-sided closed surface possesses at least one invariant point.

Of course it is true that if one adds the adjective `orientation preserving' for the transformation and deletes `with invariant indicatrix', then one will have a correct statement, but that sounds like a very strange transformation to me; is there other evidence that Brouwer used this kind of phrasing? It seems to me that if one were to interprete `invariant indicatrix' as something like the Lefschetz number of a map and then the inv. ind. of a surface as that of its identity map (i.e., the Euler characteristic), then this interpretation would sound more consistent with the grammar used(and the statement would still be correct). What do you think?

With best regards
Siavash Shahshahani

.....
Dear Professor Siavash Shahshahani,
.....
.....
It would be historically unlikely that at this point Brouwer would already use such sophisticated notions. He was just beginning to do topology. I think that we have to stick to the orientation preservation. That the grammar is odd, must not be taken as a serious objection, it was the manner of expression of the nineteenth century. brouwer was rather oldfashioned in such matters.
.....
Sincerely yours,
Dirk van dalen

Prof . Dr. D. van Dalen
Department of Philosophy

نشر ریاضی، سال ۹ شمارهٔ ۱، صص ۵ـ۱۹

شهودگرایی براؤری

محمد اردشیر*

تقدیم به دیرک وان دالن به مناسبت شصت و پنجمین سالگرد تولدش.

شهودگرایی به‌عنوان یک برنامهٔ عملی ریاضیاتِ ساختی[1] با براؤر آغاز شد. در این مقاله سعی ما بر این است که اصول شهودگرایی براؤری را به زبانی غیرفنی شرح دهیم. بدیهی است که در یک مقالهٔ غیرفنی، همهٔ جوانب شهودگرایی قابل ذکر نیستند، اما امیدواریم که اتهات این مکتب را بیان کنیم.

شهودگرایی براؤر را باید در چارچوب ریاضیات ساختی دید. به همین دلیل، برای درک بهتر شهودگراییْ مکاتب مختلف ریاضیات ساختی را در قالب تاریخی مرور می‌کنیم.

مقالهٔ حاضر شامل بخشهای زیر است:

۱. تاریخچهٔ مختصری از ساختگرایی
۲. ساختی‌بودن
۳. منطق شهودگرایی
۴. حساب شهودگرایی
۵. آنالیز شهودگرایی
۶. جبر شهودگرایی
۷. مبانی فلسفی شهودگرایی

در نگارش مقالهٔ حاضر، مرجع [۳۰] بیش از دیگر مراجع مورد استفاده قرارگرفته و به‌ویژه اکثر مطالب تاریخی بخش ۱ برگرفته از این مرجع است.

۱. تاریخچهٔ مختصری از ساختگرایی

ساختگرایی[2] نظریه‌ای در بارهٔ ریاضیات است که کم و بیش در مقابل نگرش اکثر ریاضیدانان نسبت به ریاضیات قرار دارد. در بین نمایندگان مختلف مکتب ساختگرایی اختلافات اساسی وجود دارد. حتی بدتر (بهتر؟) از این، در عقاید یک ریاضیدان ساختگرا در دورهٔ حیاتش نیز، گاهی اوقات، ناهمگونی و اختلاف به چشم می‌خورد.

در این مقاله منظور ما از ریاضیات یا منطق کلاسیک، استدلالی است مبتنی بر منطق دو ارزشی، که مطابق آن، هر حکمی (با معنی) یا راست است یا غلط. حال به نحله‌های مختلف ساختگرایی اشاره می‌کنیم:

۱.۱ متناهی‌گرایی. متناهی‌گرایی[1] نوعی ساختگرایی است که اصول اساسی آن عبارت‌اند از:

(الف) فقط ساختهایی می‌توانند اشیاء ریاضیات باشند که به‌طور انضمامی[2] متناهیاً قابل نمایش باشند، مثل اعداد طبیعی. اَعمال روی این ساختها چیزی جز ترکیبیات متناهی نیست، و بنابراین روش مبتنی بر متناهی‌گرایی، کارا[3]ست.

(ب) اشیاء مجرّد مثل مجموعه، عمل، ... هیچ جایی در ریاضیات ندارند.

کرونکر (۱۸۲۳ـ۱۸۹۱) را می‌توان بانی اولیهٔ مکتب متناهی‌گرایی نامید. گفتهٔ معروف او را که «خداوند فقط اعداد صحیح را آفرید» اغلب ریاضیدانان شنیده‌اند. معنای بلاواسطهٔ این گفته آن است که فقط اعداد صحیحْ وجود واقعی یا وجود عینی دارند. ساختگرایی کرونکر به‌راحتی از نظراتش در بارهٔ وضعیت اشیاء ریاضی دریافته می‌شود. در [۲۰] طرح حسابی‌سازی[4] جبر و آنالیز ریخته می‌شود. او صراحتاً، با الهام از گاوس حسابی‌سازی خود را به آنالیز و جبر محدود می‌کند و هندسه و مکانیک را به‌عنوان موجودات

1. constructive mathematics 2. constructivism

1. finitism 2. concretely 3. effective 4. arithmetizing

مستقل به کنار می‌نهد. برنامهٔ کرونکر را ژول مُلک[1] ادامه داد. او در مقالهٔ مفصلی [۲۳] به کارهای کرونکر اشاره می‌کند و در مبحث تعاریف می‌گوید که «تعاریف باید جبری باشند و نه منطقی. کافی نیست که بگوییم چیزی هست یا چیزی نیست». او اشاره می‌کند که تعاریف منطقی، مثلِ «یک تابع تحویل‌ناپذیر[2] بنابر تعریف تحویل‌پذیر نیست» هیچ فایده‌ای ندارند. در جبر، تعریف تحویل‌ناپذیری باید به‌گونه‌ای باشد که بتوان در تعدادی متناهی مرحله آزمود که آیا یک تابع به عوامل اول تجزیه می‌شود یا نه. تنها چنین آزمونهایی به کلمات تحویل‌پذیر یا تحویل‌ناپذیر معنی می‌دهد.

شایان ذکر است که مُلک به صدقِ احکامی مثل «هر مجموعهٔ کراندار از اعداد حقیقی دارای یک کوچکترین کران بالا است» اعتراض ندارد، او این قبیل احکام را احکام صادق منطقی می‌داند که به جبر تعلق ندارند. با توجه به اشارات کرونکر به طبیعت اشیاء ریاضی و براهین ریاضی به‌نظر می‌رسد که کرونکر احکام فوق را بامعنی نمی‌داند.

متناهی‌گرایی را به‌طور مشخص اسکولم در مقالهٔ [۲۸] و گودشتاین در دو کتاب [۱۲] و [۱۳] معرفی کرده‌اند. متناهی‌گرایی نقش مهمی در برنامهٔ هیلبرت ایفا می‌کند: روشهایی را که به‌وسیلهٔ همهٔ ریاضیدانان قابل قبول است به کار بریم تا نشان دهیم که ریاضیات موجود فارق از تناقض است. این روشها چیزی جز ریاضیات متناهی نیست. این البته بدان معنی نیست که هیلبرت را باید متناهی‌گرا به حساب آورد. دستگاه صوری که بیانگر نوعی ریاضیات متناهی است در حساب بازگشتی مقدماتی[3] (PRA) متجلّی است.

۲.۱ حملی‌گرایی. حملی‌گرایی[4] را می‌توان «ساختگرایی نسبت به تعاریف» در نظر گرفت. در حملی‌گرایی:

(الف) تعاریف اشیاء ریاضی باید حملی یا اسنادی باشند، یعنی تعریف یک شیء d با ارجاع به مجموعه‌ای چون D که شیء d خود عضوی از آن است، مجاز نیست؛ به‌طور خاص، تسویر روی D برای تعریف d مجاز نیست (برای اجتناب از «دور باطل» در تعریف).

(ب) مطلوبیت تعاریف حملی با منطق سنتّی همخوانی دارد، که در آن احکام ریاضی، جدا از معرفت بشری، باید راست یا دروغ باشند.

معمولاً، مجموعهٔ اعداد طبیعی از نظرگاه حملی‌گرایی هیچ مشکلی ندارد. این بدان معنی است که تسویر روی مجموعهٔ اعداد طبیعی پذیرفتنی است و محمولهایی که بدین ترتیب تعریف می‌شوند معنی دارند. با درک ایدهٔ مجموعه‌ای که به‌طور حسابی تعریف شده است (مجموعه‌های تراز ۱)، می‌توان روی چنین مجموعه‌هایی تسویر کرد و مجموعه‌های ترازهای ۲، ... را ساخت. از طرف دیگر، تعریف کوچکترین کران بالای یک مجموعهٔ X از اعداد حقیقی (که به عنوان برشهای (چپ) دِدِکیند تعریف می‌شود) به صورت اشتراک همهٔ برشهای چپ که کران بالای X هستند مجاز نیست؛ کوچکترین کران بالا خود یکی از اعضای مجموعهٔ کرانهای بالاست.

اولین تلاش برای نشان دادن اینکه بخشهایی از آنالیز را می‌توان به‌طور حملی بنا کرد، به‌وسیلهٔ وایل در «پیوستار» [۳۱] انجام شد. شبه‌شهودگرایان[5] فرانسوی مثل پوانکاره و بورل را می‌توان جزء حملی‌گرایان قلمداد کرد. نظرات پوانکاره در انتقاد از نظریهٔ (کانتوری[6]) مجموعه‌ها معروف است. گرچه او را

1. Jules Molk 2. irreducible 3. Primitive Recursive Arithmetic
4. predicativism 5. semi-intuitionists 6. Cantorian

نمی‌توان ساختگرا دانست ولی تأثیر مستقیم او در تحولات بعدی ساختگرایی عمدتاً محدود به دیدگاههای او در بارهٔ شهود است. او هم به منطق ارسطویی بدبین بود و هم به انواع جدیدتر منطق از نوع منطق راسل، فرگه و پئانو.

پوانکاره ادّعا می‌کند که در ریاضیات بیش از منطق به شهود نیاز است. او سه نوع شهود را مطرح می‌کند: احساس و تصور، تعمیم به‌وسیلهٔ استقراء، و بالاخره شهودِ عدد محض. این آخری دقت ریاضیات را تضمین می‌کند. ریاضیات روشهای اثبات خاص خود را دارد، و روش خاص آن، اصل استقراء، طبقْ نظر پوانکاره یک حکم ترکیبیِ پیشینی است.

از چند لحاظ می‌توان پوانکاره را یکی از پیشگامان ساختگرایان بعدی دانست: پذیرش او از اصل استقراء به‌عنوان یک حکم غیرقابل اثبات، نفی او از بینهایت بالفعل کانتوری و بالاخره سهیم‌کردن شهود در ریاضیات.

در عین حال نباید سازگاری زیادی از آثار فلسفی پوانکاره انتظار داشت. به‌عنوان مثال او در [۲۴] از نوعی افلاطون‌گرایی دفاع می‌کند: «وجود فقط یک معنی می‌تواند داشته باشد، فارغ بودن از تناقض». به نظر او تنازعهای اوایل قرن بیستم به‌علّت استدلالهای غیرحملی پیدا شده‌اند.

بعد از پوانکاره، گرچه امیل بورل را سخنگوی شبه‌شهودگرایان لقب داده‌اند، ولی نظرات بورل به کرونکر نزدیکتر بود تا به پوانکاره. برای مثال، او معتقد بود که فقط شیئی که به‌طور کارا (مثلاً به‌وسیلهٔ تعدادی متناهی کلمه) تعریف شود، در قلمرو علم وجود دارد؛ سازگاری برای علم کافی نیست. در مقایسه با نظر کرونکر: «قابل تعیین در تعدادی متناهی مرحله»، این «تعریف‌پذیری متناهی» آشکارا مفهومی لیبرال است. مثلاً، تابع f که به‌صورت زیر تعریف شده، خوش تعریف و موجود است: $f(x) = 0$ به ازای xهای گویا و $f(x) = 1$ به‌ازای xهای غیرگویا. ایگ در این مورد با بورل هم‌عقیده بود. از نظر بورل، اعداد حقیقی منفرد باید با یک تعریف متناهی داده شوند، بنابراین مجموعه‌ای که آنها را دربر می‌گیرد نمی‌تواند از شمارا بیشتر باشد. چون پیوستار شمارا برای بورل غیرقابل باور بود، فرض می‌کرد پیوستار به‌وسیلهٔ شهود داده شده است؛ او صحبت از «پیوستار هندسی» می‌کرد، نظری که براؤر مستقلاً در رسالهٔ دکتری خود به بسط آن پرداخت.

این مفهوم از پیوستار هندسی منجر به «کل»[1]ی می‌شود که از اجزاء خود جامعتر است و نمی‌توان آن را یک «مجموعه از اعداد حقیقی» تصورکرد. نکتهٔ جالب و در عین حال عجیب این است که بورل برای عمل ریاضی به نوعی پیوستار، پیوستار عملی[2]، رسید که می‌تواند از «اعداد حقیقی منفرد تشکیل شود»؛ این پیوستار عملی شامل اعداد حقیقیِ متناهیا تعریف‌پذیر می‌باشد.

۳.۱ شهودگرایی براؤری. مبانی فلسفی شهودگرایی براؤری به‌عنوان روشی ساختی در ریاضیات، در رسالهٔ دکتری براؤر آمده است. عنوان رسالهٔ دکتری براؤر «مبانی ریاضیات» است و ترجمهٔ انگلیسی آن در ۱۹۷۵ در [۴] آمده است. اصول اساسی شهودگرایی براؤری را می‌توان در عبارات زیر خلاصه کرد:

(الف) ریاضیات با ساختهای ذهنی سروکار دارد، که بلاواسطه به‌وسیلهٔ ذهن درک می‌شود؛ ریاضیات عبارت از دستکاریهای صوری علائم نیست، و استفاده از زبان ریاضی یک امر ثانوی است، که به خاطر محدودیتهای ما (در مقایسه با یک ریاضیدان ایده‌آل با حافظهٔ نامحدود و حضور ذهن کامل) بر ما تحمیل می‌شود، و برای ارتباط برقرارنمودن بین ساختهای ریاضیمان با ساختهای ریاضی دیگران از آن استفاده می‌کنیم.

1. whole 2. parctical

(ب) تصور صدق یا کذب یک حکم ریاضی مستقل از معرفت ما نسبت به آن حکم، بی‌معنی است. یک حکم راست است اگر برهانی برای آن داشته باشیم و غلط است اگر بتوانیم نشان دهیم که فرض اینکه برهانی برای آن وجود دارد منجر به تناقض می‌شود. بنابراین برای یک حکم معین نمی‌توانیم ادعا کنیم که یا راست است یا غلط.

(ج) ریاضیات یک آفرینش آزاد است؛ ریاضیاتْ بازسازی ذهنی یا درک حقیقت در بارهٔ اشیاء ریاضی که مستقل از ما وجود داشته باشند نیست.

از (ب) این نتیجه حاصل می‌شود که باید تعبیر دیگری برای احکامی مثل «وجود دارد x به‌طوری‌که $A(x)$ برقرار است» و «A یا B» یافت. به‌طور خاص، بر اساس قرائت شهودگرایانهٔ اداتهای «یا» و «نه»، حکم «A یا $\neg A$» در حالت کلی برقرار نیست. مطلبی در توافق با (ج) اما نه ضرورتاً نتیجهٔ آن، این است که شهودگراییْ فرایندهای تمام‌نشدنی را مجاز می‌شمرد: ریاضیدان ایده‌آل می‌تواند دنباله‌های طویل و طویلتری از قطعات ابتدایی $\alpha(0)$، $\alpha(1)$، ...، $\alpha(n)$ را از یک دنبالهٔ نامتناهی از اعداد طبیعی α بسازد که α از قبل به‌وسیلهٔ فرایند ثابتی برای تولید مقادیر معین نشده است. بنابراین ساختمان α هرگز تمام نمی‌شود؛ α مثالی از دنبالهٔ انتخاب است. به این مفهوم در بخش ۵ برمی‌گردیم.

براؤر صورتگرایی هیلبرت و نظریهٔ کانتوری مجموعه‌ها را رد می‌کند. انتقاد براؤر از بخشهای اساسی ریاضیات سنتّی به این نظر نادرست منجر شد که «انقلاب» براؤر (این اصطلاح وایل است) اساساً امری منفی است. این نظر هیلبرت بود. در واقع، جریانْ خلافِ این نظر بود، براؤر مفاهیم بدیعی را معرفی کرد که ریاضیات شهودگرای او را فراتر از سطح معمول قرار می‌دهد. برای توضیح این مطالب به معرفی غیررسمی این مفاهیم بدیع می‌پردازیم.

اولین مفهومی که با نام براؤر گره خورده است، مفهوم «دنبالهٔ انتخاب» است. دنباله‌هایی از اعداد که با انتخاب معین شده‌اند قبل از توصیف براؤر نیز در متون ریاضی یافت می‌شدند. بورل آنها را در ارتباط با مقالهٔ تسرملو مطرح کرد و خاطرنشان کرد که برای بهبود «مفهوم حسابی کامل پیوستار» به دنباله‌های شمارا از انتخابها نیاز است. در بیان بورل، این دنباله‌ها همچنان جزء اسرار باقی ماندند. براؤر اولین کسی بود که کشف کرد چگونه مفهوم انتخاب را به خدمت بگیرد. دربادی امر این مفهوم را به‌عنوان مفهومی غیرشهودگرایانه رد کرد (در ۱۹۱۲) اما بعداً (در ۱۹۱۴) آن‌را پذیرفت و اولین مقالهٔ شهودگرایانهٔ خود را در بارهٔ دنباله‌های انتخاب (در ۱۹۱۸) به چاپ رساند. او در همان مقاله «اصل پیوستگی[1]» را بیان کرد و با استفاده از آن نشان داد که $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ناشماراست. بررسی بیشتر در دنباله‌های انتخاب، براؤر را به اثبات «قضیهٔ پیوستگی یکنواخت» (یعنی اینکه همه توابع از $[0,1]$ به $\mathbb{R}$ پیوستهٔ یکنواخت هستند) رهنمون کرد. تحلیل برهان او نشان می‌دهد که از اصل دیگری به‌نام اصل استقراء مانع[2] استفاده شده است. در بخش ۵ به این مطالب باز می‌گردیم.

در انتقاد براؤر از ریاضیات دورانش، می‌توان جنبه‌های منفی دیدگاه او را یافت. از نظر او ریاضیات یک امر درونی و فعالیتی ذهنی است، و زبان و منطق اموری ثانوی به حساب می‌آیند. زبان یک ابزار غیرمطمئن برای ارتباط است، که نباید منشأ ادراک تلقی گردد و منطق محصولی است از ریاضیات. براؤر در بارهٔ منطق نظرات محافظه‌کارانه‌ای داشته است. بعضی وقتها منطق را همان نظریهٔ سنتّی ارسطویی قیاسها در نظر می‌گیرد و بعضی وقتها منطق پئانو و راسل. در مقالهٔ [۹] تحولات دیدگاه براؤر در بارهٔ منطق به خوبی شرح داده شده است. به طور خلاصه می‌توان گفت که از نظر براؤر، استدلال ریاضی عبارت است از ساختن ساختهای ریاضی، و حضور زنجیره‌ای از کاربردهای قواعد منطقی (قیاسها) عملی است که فقط با ساختمانهای ریاضیِ همراه آنها توجیه می‌شود. این امر برای استدلالهای منطقی شهودی نیز صادق است. منطق نظری، کاربردی از ریاضیات است و بنابراین یک علم تجربی است.

۴.۱ ریاضیاتِ ساختی بیشاپ. این نگرش در ریاضیات ساختی ازکتاب معروف بیشاپ، مبانی آنالیز ساختی [۱]، در ۱۹۶۷ نشأت گرفته است. بیشاپ خود می‌گوید: «این کتاب سه هدف دارد؛ اول، معرفی و ارائهٔ دیدگاه ساختی؛ دوم، نشان دادن اینکه برنامهٔ ساختی می‌تواند موفّق باشد؛ سوم، طرحِ اصول برای کارهای بیشتر. این اهداف با هدف نهایی گره می‌خورد که آن به جلو انداختن روز موعودی است که ریاضیاتِ ساختی به‌عنوان نرم ریاضیاتْ پذیرفته شده باشد.» پیام بیشاپ این بود که کار ریاضیات ساختی ریاضیات است، و در زمانی کار او به منصهٔ ظهور آمد که ساختگرایی، عمدتاً روی مبادی متمرکز شده بود.

در این مکتب، بحثهای فلسفی جای کمی را می‌گیرند، تأکید کاملاً روی عمل ریاضیات ساختی است. اصول اساسی مکتب بیشاپ را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

(الف) «احکام ریاضی باید معنای عددی داشته باشند». به‌طور خاص، این بدان معنی است که احکام وجودی، در اصل، باید قابل صریح‌شدن باشند (و همچنین، در ادعای $A \vee B$، انتخاب بین A یا B در اصل، باید ممکن باشد). تنها در صورتی می‌توان اثبات کرد یک شئ موجود است که یک روش متناهی برای یافتن آن ارائه شود.

(ب) این فرض پذیرفته نیست که همهٔ اشیاء ریاضی باید به شکل الگوریتم داده شده باشند. دنباله‌های انتخاب به‌عنوان اشیاء ریاضی مجاز شمرده نمی‌شوند.

از نظر بیشاپ مجموعه‌ها «کلیّت‌هایی از اشیاء ریاضی هستند که مطابق شرایط معینی ساخته می‌شوند» و آنها با رابطه‌ای هم‌ارزی همراه هستند که همان «تساوی» است. اشیاء مرتبهٔ بالاتر، عملگرها هستند، قواعدی که عناصر یک مجموعهٔ A را به عناصر مجموعهٔ B نسبت می‌دهد. یک چنین قاعده‌ای، مثل f، باید یک فرایند مکانیکی متناهی و صریح فراهم کند که ساختن $f(a)$ را به فرایندِ ساختن a تحویل نماید. تابع عملگری است که تساوی را حفظ می‌کند. گرچه بیشاپ مفهوم «قاعده» را صریحاً روشن نمی‌سازد، اما می‌توان در همه جا آن را معادل بازگشتی بودن فرض کرد. بدین معنی، ریاضیات بیشاپ با تز چرچ[1] سازگار است.

تز اساسی بیشاپ این است که «همهٔ ریاضیات باید دارای معنای عددی باشد». این تز به دیدگاه کرونکر نزدیکتر است تا به دیدگاه براؤر. ریاضیات بیشاپ بر پایه‌های خنثا یا بی‌طرف بنا شده است و هیچ‌گونه هستی‌شناسی[2] یا اصول و اشیاء ایده‌آلیستی را فرض نمی‌کند. بنابراین، بر خلاف براؤر، او نمی‌تواند ثابت کند که همهٔ توابع حقیقی پیوسته‌اند، گرچه به عنوان یک ریاضیدان عملگرا توجهش را به توابع پیوسته محدود می‌کند.

1. Continuity Principle 2. Bar Induction

1. Church's thesis 2. ontology

ریاضیات ساختی بیشاب برای بخش خنثای ریاضیات ساختی بنا شده و با ریاضیات کلاسیک سنتی سازگار است. ریاضیات ساختی بیشاب را می‌توان هم در جهت شهودگرایی براؤر توسعه داد و هم در جهت ریاضیات بازگشتی به مفهوم مورد نظر مارکوف[1].

۵.۱ ریاضیات بازگشتی ساختی. این طرز نگرش به ریاضیات ساختی به‌وسیلهٔ مارکوف از حدود ۱۹۵۰ پدید آمد. اصول اساسی ریاضیات بازگشتی ساختی را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

(الف) اشیاء ریاضی الگوریتمها هستند، که به معنی دقیق ریاضی تعریف می‌شوند. هر الگوریتم به یک معنی عبارت است از یک «کلمه» در یک الفبای متناهی.

(ب) محدودیتهای ناشی از حافظهٔ متناهی را می‌توان در نظر نگرفت؛ طول رشته‌های علائم، گرچه همیشه متناهی‌اند، می‌تواند بیکران باشد.

(ج) احکام مرکب منطقی که شامل $\exists$، $\vee$ نیستند، به شکل معمولی تعبیر می‌شوند؛ اما احکام وجودی یا فصلی همیشه باید به صورت صریح درآیند.

(د) اگر غیرممکن باشد که یک محاسبهٔ الگوریتمی پایان نپذیرد، می‌توانیم فرض کنیم که پایان می‌پذیرد. این همان اصل مارکوف است.

انگیزه‌های شکل‌گیری ریاضیات بازگشتیِ ساختی مبتنی بر فلسفه‌ای کاملاً متفاوت با شهودگرایی براؤر است. تورینگ[2] در ۱۹۳۷ یک توصیف مفهومی از الگوریتم ارائه کرد که به‌نام ماشین تورینگ معروف شد. تورینگ مفهوم شهودی «قابل محاسبهٔ مکانیکی به‌وسیلهٔ انسان» را تحلیل کرد و دلایل متقاعدکننده‌ای آورد که «محاسبه‌پذیری» با «محاسبه‌پذیری به‌وسیلهٔ ماشین تورینگ» یکی است. چرچ نیز در ۱۹۳۶ توصیفی از محاسبه‌پذیری به دست داد و بر حسب مفهوم بازگشتی، «محاسبه‌پذیری» و «بازگشتی» را یکی گرفت. این یکسان گرفتن به‌نام تز چرچ معروف است. ریاضیات مبتنی بر تز چرچ به‌وسیلهٔ مارکوف، بنیانگذار مکتب ریاضیات ساختی در مسکو ترویج شد. یکی از نتایج نظرات مارکوف این است که توابع عددی، بازگشتی هستند، این بدان معنی است که جنبهٔ تحقق‌پذیری بالقوه[3] این شئ «نامتناهی» باید یک نمایش اندیس‌دار داشته باشد. این بدین معناست که ریاضیات ساختی مارکوف نظریه‌ای مبتنی بر تز چرچ است.

گرچه مارکوف از لحاظی، سختگیرتر از شهودگرایان است زیرا دنباله‌های انتخاب را قبول ندارد، از لحاظ دیگر لیبرالتر از آنهاست. استدلال او برای توجیه اصل انتخاب ساختی[4] که به‌نام اصل مارکوف معروف است، این مطلب را نشان می‌دهد. این اصل اگر با اصطلاحات آشنا بیان شود، حاکی است که اگر این حالت برقرار نمی‌شود که یک ماشین تورینگ با ورودی داده شده متوقف نشود، آنگاه متوقف می‌شود. استدلال مارکوف بر حسب ماشین تورینگ به قرار زیر است: اگر غیرممکن است که ماشین تورینگ برای همیشه محاسبه کند، واضح است که الگوریتمی برای به‌دست آوردن خروجی موجود است: فرایند را ادامه دهید تا بایستد.

گرچه اصل مارکوف را اکثر ساختگرایان نپذیرفتند، اما این اصل جای خاصی در فلسفهٔ ریاضیاتِ ریاضیاتِ ساختی پیدا کرد.

1. Markov 2. Turing 3. potentially realizable 4. principle of constructive choices

۲. ساختی‌بودن

در این بخش سعی خواهیم کرد مفهوم ساختی‌بودن[1] را با ارائهٔ مثالهای ساده‌ای شرح دهیم. چه اشیائی را می‌توان گفت که به‌عنوان ساختمانهای ذهنی وجود دارند؟ از نظرگاه ساختی، اعداد طبیعی چنین‌اند. اعداد طبیعی با یک ساختمان ذهنی ساده مطابقت می‌کنند؛ به یک واحد مجرد فکر کنید، بعد به واحد مجزای دیگری فکر کنید و آنگاه ترکیب آنها را بررسی کنید، یعنی آنها را با هم در نظر بگیرید. تکرار نامتناهی این فرایند مجموعهٔ $\mathbf{N}$ از اعداد طبیعی را تولید می‌کند.

در این فرایند تکرار نامتناهی، نوعی ایده‌آل‌سازی نهفته است. ما اعداد ۵، ۱۰۰۰۰۰ و $10^{10^{10}}$ را از یک نوع به حساب می‌آوریم گرچه تصویر ذهنی آنها در هر حالت مختلف است: همهٔ مکاتب ساختگرایی به نوعی ایده‌آل‌سازی باور دارند، به‌عبارت دیگر توصیف آنها از ریاضیات ساختی شامل عناصر «نظری» نیز هست. به این دلیل است که ما شهودگرایی براؤر و ساختگرایی مارکوف را نظریه‌هایی در بارهٔ ریاضیات می‌دانیم.

اینکه چه مفهومی دقیقاً ساختی است، کاری بس دشوار و به اعتقاد بعضی از ساختگرایان ناممکن است. اما با مثالهای زیر می‌توانیم تصویری از آنچه که ساختی نیست به‌دست آوریم.

۱.۲ مثال. یک تعریف غیرساختی. فرض کنید A یک حکم ریاضی باشد که تا زمان حاضر نه اثبات شده است و نه رد شده است، مثلاً، «تعدادی نامتناهی اعداد اول دوقلو وجود دارد». تعریف زیر را برای عدد طبیعی p در نظر بگیرید:

$$p = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } A \text{ صادق باشد} \\ ۲ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

از نظر ساختی این تعریف قابل قبول نیست، زیرا صدق A معلوم نیست. ما نمی‌توانیم معین کنیم که آیا $p = ۱$ یا $p = ۲$. به‌عبارت دیگر نمی‌دانیم چگونه با «تصوّر چند واحد مجرّد با هم» p را به‌دست آوریم.

مثال زیر نمونهٔ مشهوری از برهان غیرساختی است:

۲.۲ مثال (قضیه). اعداد ناگویای a و b موجودند به‌طوری‌که a^b یک عدد گویاست.

اثبات. $(\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}}$ را در نظر بگیرید. اگر گویا باشد، می‌توانیم بگیریم $a = b = \sqrt{۲}$ و اگر ناگویا باشد، می‌گیریم $a = (\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}}$ و $b = \sqrt{۲}$. ■

این برهان به این دلیل غیرساختی است که روشی برای ساختن a به عنوان یک عدد حقیقی ارائه نمی‌دهد. یعنی به هیچ روشی ما را به محاسبهٔ a با هر درجهٔ مطلوبی از دقت قادر نمی‌سازد. به‌عبارت دیگر نمی‌دانیم که چگونه یک تقریب نزدیک دلخواه از اعداد گویا برای a بیابیم. باید خاطرنشان کرد که برهان ساختی برای قضیهٔ فوق ممکن است:

قضیه (گلفوند)[2]. اگر $a \notin \{۰, ۱\}$، a جبری و b یک عدد جبری ناگویا باشد، آنگاه a^b ناگویاست.

اثبات. [۱۰] صفحهٔ ۱۰۶، قضیهٔ ۲. ■

بنابر قضیهٔ گلفوند، $a = (\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}}$ و $b = \sqrt{۲}$ برای اثبات قضیهٔ مثال ۲.۲ کار می‌کند. دلیل اساسی برای رد برهان قضیه در مثال ۲.۲، مبتنی بر

1. constructivity 2. Gelfond

قرائت ساختگرایان از «وجود دارد» است. از نظر ساختگرایان، «وجود دارد» یعنی «می‌توان ساخت».

مثال بعدی از یک برهان غیرساختی، برهان قضیهٔ معروف کونیگ[1] است:

۳.۲ مثال (قضیهٔ کونیگ). فرض کنید T یک درخت نامتناهی باشد که از هر گره آن تعدادی متناهی شاخه می‌گذرد. در این صورت T یک شاخهٔ نامتناهی دارد.

اثبات. شاخهٔ نامتناهی $\alpha : \mathbb{N} \to T$ را به‌صورت زیر «می‌سازیم». $\alpha(0)$ را ریشهٔ درخت می‌گیریم. فرض کنید $\alpha(n)$ طوری ساخته شده است که به تعداد نامتناهی تالی دارد. از بین مجموعهٔ متناهی تالیهای بلاواسطهٔ $t_0, \ldots, t_k$ برای $\alpha(n)$، حداقل یکی از t_iها بینهایت تالی دارد؛ بگیرید $\alpha(n+1) = t_i$. این فرایند را به‌طور نامتناهی می‌توانیم ادامه دهیم و بدین ترتیب یک شاخهٔ نامتناهی تولید می‌شود. ■

گرچه در ابتدای برهان فوق از کلمه «می‌سازیم» استفاده شده، اما این «ساختن» از دیدگاه ساختی پذیرفتنی نیست. دلیل این امر این است که در هر مرحله، مثلاً $\alpha(n)$، هیچ روشِ ساختی برای تعیین اینکه کدام یک از گرههای $t_0, \ldots, t_k$ بینهایت تالی دارند، در دست نداریم. با آنکه می‌دانیم چنین نیست که هر یک از گرههای $t_0, \ldots, t_k$ تعداد متناهی تالی داشته باشند، اما از این مقدمه نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که حداقل یکی از گرههای $t_0, \ldots, t_k$ بینهایت تالی دارد. از دیدگاه ساختی، هر برهان برای یک ادعای وجودی، مستلزم ارائهٔ روشی ساختی برای شئ مورد ادعاست. به عبارت منطقی، جملهٔ $\neg\forall x A(x) \to \exists x \neg A(x)$ یک اصل معتبر منطق مرتبهٔ اول نیست.

ذکر این نکته لازم است که صورت شهودگرایانهٔ قضیهٔ کونیگ، معروف به «قضیهٔ بادبزن[2]» از نظر ساختی معتبر است. در بخش ۵ به این مسأله برمی‌گردیم.

۴.۲ مثالهای ناقض ضعیف[3]. قرائتِ ساختی از فصل منطقی، «$\vee$»، منجر به عدم اعتبار اصل طرد شق ثالث می‌شود. از نظر فردِ ساختگرا، صدق یک حکم عبارت است از ارائهٔ برهانی برای آن حکم. برهان برای $A \vee B$ عبارت است از برهانی برای A یا برهانی برای B. با این تعبیر، اصل طرد شق ثالث، یعنی این اصل که برای هر حکم A، $A \vee \neg A$، از درجهٔ اعتبار ساقط می‌شود زیرا قبول آن مستلزم داشتن روشی کلی است که با آن روش برای هر حکم A، بتوانیم برهانی برای A به‌دست آوریم یا برهانی برای $\neg A$. ریاضیات پُر از مثالهایی است که فعلاً نه خود آنها را می‌توانیم ثابت کنیم و نه نقیض آنها را.

در ۱۹۰۸ براؤر برای اولین بار مفهوم «مثالهای ناقض ضعیف» را مطرح کرد. هدفش این بود که نشان دهد بعضی از احکام که از نظر کلاسیک پذیرفته شده‌اند از نظر ساختی، پذیرفتنی نیستند. روش کار به این صورت است که اگر آن احکام را بپذیریم، نتیجه‌اش اصل طرد شق ثالث است، و چون اصل طرد شق ثالث از نظر ساختی معتبر نیست، پس آن احکام هم از نظر ساختی پذیرفتنی نیستند. این مثالهای ناقض را مثالهای ناقض براؤری نیز می‌نامند.

۱.۴.۲ تساوی بین اعداد حقیقی تصمیم‌ناپذیر است. می‌خواهیم ثابت کنیم که برای هر عدد حقیقی x، چنین نیست که $x = 0 \vee x \neq 0$.

1. König 2. Fan theorem 3. weak counter examples

فرض کنید $A(n)$ محمولی در بارهٔ اعداد طبیعی است که گرچه به ازای هر n، $A(n)$ تصمیم‌پذیر است، اما صدق $\forall n A(n)$ تا زمان حاضر نامعلوم است؛ مثلاً می‌توانیم $A(n)$ را حدس گلدباخ بگیریم، یعنی این حدس که «اگر n زوج باشد، اعداد اول p_1 و p_2 موجودند که $n = p_1 + p_2$». حال عدد حقیقی x را با دنبالهٔ کوشی از اعداد گویا به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_n = \begin{cases} 2^{-n} & \forall k \leq n \ \ A(k) \quad \text{اگر} \\ 2^{-k} & \neg A(k) \wedge k \leq n \wedge \forall k' < k A(k') \quad \text{اگر} \end{cases}$$

$(x_n)_n$ یک دنبالهٔ کوشی است. توجه کنید که به ازای هر $m \leq n$، $|x_n - x_m| < 2^{-m}$. x را عدد حقیقی منسوب به دنبالهٔ کوشی $(x_n)_n$ تعریف می‌کنیم. آنگاه به‌راحتی دیده می‌شود که $x = 0$ اگر و فقط اگر $\forall n A(n)$. بنابراین $x = 0 \vee x \neq 0$ معادل $\forall n A(n) \vee \neg\forall n A(n)$ است. به‌عبارت دیگر تصمیم‌پذیری تساوی بین اعداد حقیقی، تصمیم‌پذیری حدس گلدباخ را به دنبال دارد. □

این مثال یک مثال کلیدی برای ساختن مثالهای ناقض فراوانی در ریاضیات ساختی است. از نتایج شگفت‌انگیز مثال فوق این است که نمی‌توان ثابت کرد مجموعهٔ $X = \{0, x\}$، که x همان عدد حقیقی ساخته شده در مثال ۲.۴.۱ می‌باشد، متناهی است. یادآوری می‌کنیم که یک مجموعه را متناهی گویند اگر در تناظر یک‌به‌یک با یک عدد طبیعی باشد. اثبات متناهی بودن X مستلزم این است که بتوانیم تصمیم بگیریم X یک عضو دارد یا دو عضو متمایز. و این تصمیم‌گیری معادل این است که به ازای هر A بتوانیم تصمیم بگیریم که $\forall n A(n) \vee \neg\forall n A(n)$.

۳. منطق شهودگرایی

قبلاً تذکر داده شد که در بنای ریاضیات ساختی، به منطق نیازی نیست. براؤر از استفاده از علائم منطقی احتراز می‌کرد. صوری‌سازی منطق شهودی اساساً کار یکی از شاگردان براؤر، به‌نام آرند هیتینگ[1] است. این کار در ۱۹۲۵ انجام شد و شواهدی دال بر تأئید براؤر از این صوری‌سازی وجود دارد. صوری‌سازی علاوه بر تسهیل در بیان، خود سرآغاز بنای منطق شهودی شد. قبل از بیان بعضی اصول موضوع و قواعد استنتاج منطق شهودی به تعبیر برهانی اعمال یا اداتهای منطقی می‌پردازیم. این تعبیر برهانی که به تعبیر BHK، براؤر-هیتینگ-کولموگوروف معروف است، بیان می‌کند که چگونه براهین احکام مرکب به براهین اجزاء آنها تحویل می‌شود.

$(H1)$ برهان برای $A \wedge B$ عبارت است از ارائهٔ برهانی برای A و ارائهٔ برهانی برای B.

$(H2)$ برهان برای $A \vee B$ عبارت است از ارائهٔ برهانی برای A یا ارائهٔ برهانی برای B.

$(H3)$ برهان برای $A \to B$ عبارت است از ساختمانی که هر برهان برای A را به برهانی برای B تبدیل می‌کند.

$(H4)$ تناقض $\perp$ هیچ برهانی ندارد؛ هر برهان برای $\neg A$ ساختمانی است که هر برهان فرضی برای A را به برهانی برای یک تناقض تبدل می‌کند.

1. A. Heyting

($H5$) برهان برای $\forall x A(x)$ عبارت است از ساختمانی که هر برهان برای $d \in D$ (D یک دامنه برای متغیر x است) را به برهانی برای $A(d)$ تبدیل می‌کند.

($H6$) برهان برای $\exists x A(x)$ عبارت است از ساختن یک d در D و برهانی برای $A(d)$.

ذکر چند نکته در اینجا ضروری است.

۱. این توضیح دربارهٔ اعمال و ادات‌های منطقی، کاملاً غیرصوری و مبتنی بر شهود ما از مفاهیم «ساختمان» و «تبدیل» یا «نگاشت» است. کوششهای زیادی برای صوری‌سازی این مفاهیم از مدتها پیش آغاز شده و همچنان ادامه دارد. کرایزل در [۱۹] معتقد است که این تعبیر ناقص است و ضمن اضافه‌کردن شرایطی بر بندهای $H1-H6$، طرحی برای صوری‌سازی آن ارائه داده است. کلینی در [۱۷] و بعد در [۱۸] با محدود کردن قلمرو بحث به نظریهٔ اعداد، تعابیری قوی و بسیار سودمند برای مفاهیم «ساختمان» و «تبدیل» داده است. مارتین لاف رویکرد نظریهٔ انواع[1] [۲۱] را برای توضیح مفهوم «ساختمان» به کار برد که دریچهٔ جدیدی به دنیای علوم نظری کامپیوتر گشود. کوشش در صوری‌سازی و تبیین مفهوم «ساختمان» همچنان ادامه دارد و یکی از قسمتهای مهیّج شهودگرایی براوُر است.

۲. در بند ($H4$) «تناقض» باید یک مفهوم ابتدایی (تعریف‌نشده) تلقی شود.

۳. در بندهای ($H5$) و ($H5$) اگر دامنهٔ D به اندازهٔ کافی «ساده» باشد، مثلاً مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$، هر d در D خود نمایش‌دهندهٔ برهانی برای $d \in D$ است. بنابراین عبارت «برهانی برای $d \in D$» می‌تواند حذف شود و بندهای ($H5$) و ($H6$) به‌صورت زیر درآیند:

($H5'$) برهان برای $\forall x A(x)$ عبارت است از ساختمانی که هر $d \in D$ را به برهانی برای $A(d)$ تبدیل می‌کند.

($H6'$) برهانی برای $\exists x A(x)$ عبارت است از ارائهٔ یک d در D و برهانی برای $A(d)$.

علی‌رغم اینکه توضیح $H1-H6$ برای اعمال منطقی، سؤالات زیادی را بی‌جواب می‌گذارد، با این‌حال به قدر کافی قوی هست که بتواند اصول و قواعد منطقی را از نظرگاه ساختی در بوته آزمایش بگذارد.

به‌عنوان مثال اصل $A \to (B \to A)$ را در نظر بگیرید. برهان کلی برای این حکم به‌طریق زیر حاصل می‌شود. فرض کنید a یک برهان برای A باشد. آنگاه تبدیل ثابت $\lambda b \cdot a$ که به هر عضو دامنه، a را نسبت می‌دهد، هر برهان برای B را به یک برهان برای A تبدیل می‌کند. پس $\lambda b \cdot a$ یک برهان برای $B \to A$ است. بنابراین اگر a یک برهان برای A باشد، $\lambda b \cdot a$ یک برهان برای $B \to A$ است. در نتیجه، $\lambda a \cdot [\lambda b \cdot a]$، که به a، نگاشت ثابت $\lambda b \cdot a$ را نسبت می‌دهد، هر برهان برای A را به یک برهان برای $B \to A$ تبدیل می‌کند، پس $\lambda a \cdot [\lambda b \cdot a]$ یک برهان برای $A \to (B \to A)$ است.

از طرف دیگر می‌توان به‌راحتی دید که $A \vee \neg A$ از نظر ساختی معتبر نیست. ذکر این نکته حائز اهمیت است که گرچه اصل طرد شق ثابت (PEM[2])، معتبر نیست، اما این نتیجه به‌دست نمی‌آید که $\neg(A \vee \neg A)$ معتبر است.

«صورتهای» دیگری از اصل طرد شق ثالث، مثل $\neg\neg A \to A$ نیز در منطق شهودگرایی معتبر نیستند. بنابراین «برهان خلف» به‌معنی کلاسیک آن در منطق شهودگرایی معتبر نیست، زیرا در برهان خلف، استنتاج به این شکل است که وقتی می‌خواهیم حکم A را ثابت کنیم، فرض می‌کنیم چنین نباشد، یعنی $\neg A$. بعد به تناقض می‌رسیم. در منطق کلاسیک در این مرحله A را نتیجه می‌گیریم، اما آنچه که می‌توانیم بگوییم $\neg\neg A$ است. و چون $\neg\neg A \to A$ اصلی معتبر نیست، نمی‌توانیم A را نتیجه بگیریم. براوُر نشان داد که برای هر حکم A در منطق شهودگرایی $\neg A \longleftrightarrow \neg\neg\neg A$، بنابراین برهان خلف برای احکامی که به‌صورت نقیض هستند، یعنی می‌توان آنها را به شکل $\neg A$ نشان داد، معتبر است. یکی دیگر از نقاط افتراق منطق شهودگرایی و منطق کلاسیک در اصل $\neg\forall x A(x) \to \exists x \neg A(x)$ است. در منطق کلاسیک $\neg\forall x \neg$ با $\exists x$ هم‌ارز است، اما در منطق شهودگرایی فقط یک طرف این هم‌ارزی، یعنی $\exists x A(x) \to \neg\forall x \neg A(x)$ معتبر است.

اجازه دهید که منطق مرتبهٔ اول شهودگرایی را با IQC[1] و منطق مرتبهٔ اول کلاسیک را با CQC[2] نشان دهیم. در این‌صورت رابطهٔ $CQC = IQC + \{A \vee \neg A\}$ برقرار است. بدین ترتیب منطق شهودگرایی یک زیرمنطق سرهٔ منطق کلاسیک است.

از طرف دیگر می‌توان منطق شهودگرایی را در منطق کلاسیک «نشاند». این «نشاندن[3]» نتایج بسیار سودمندی خواهد داشت، مثلاً برای رده‌ای از فرمولهای A که از نظر «نحوی[4]» به شکل خاصی باشند، اگر $CQC \vdash A$ آنگاه $IQC \vdash A$.

ترجمهٔ منطق شهودگرایی به منطق کلاسیک را کولموگوروف (۱۹۲۵)، گنتسن[5] (۱۹۳۳) و گودل[6] (۱۹۳۳) مستقل از هم، با اختلافات بسیار کمی در نحوهٔ ترجمه احکام اتمی، ابداع کردند. آنچه که خواهد آمد ترجمهٔ منفی[7] (گودل-گنتسن) خوانده می‌شود:

۱.۳ تعریف. برای فرمولهای منطق محمولات، ترجمهٔ منفی g به‌صورت زیر تعریف می‌شود

(i) برای فرمول اتمی p $\quad p^g = \neg\neg p$

(ii) $(A \wedge B)^g = A^g \wedge B^g$

(iii) $(A \to B)^g = A^g \to B^g$

(iv) $(\forall x A)^g = \forall x A^g$

(v) $(A \vee B)^g = \neg(\neg A^g \wedge \neg B^g)$

(vi) $(\exists x A)^g = \neg\forall x \neg A^g$

برای «استنتاج» در منطق کلاسیک از علامت «$\vdash_c$» و در منطق شهودگرایی از علامت «$\vdash_i$» استفاده می‌کنیم. آنگاه داریم:

۲.۳ قضیه. (i) برای همهٔ Aها، $\vdash_c A \longleftrightarrow A^g$؛

(ii) $\Gamma \vdash_c A$ اگر و فقط اگر $\Gamma^g \vdash_i A^g$، که $\Gamma^g = \{B^g : B \in \Gamma\}$.

اثبات. (i) معادل بودن A و A^g در منطق کلاسیک با استفاده از اصول و قواعد منطق کلاسیک و استقراء روی فرمول A ثابت می‌شود.

1. theory of types 2. Principle of Excluded Middle (*tertium non datur*)

1. Intuitionistic Predicate Logic 2. Classical Predicate Logic
3. embedding 4. syntactic 5. G. Gentzen 6. K. Gödel
7. negative translation

(ii) قسمت «اگر» از (i) به دست می‌آید. برای «فقط اگر» استقراء را روی ارتفاع درخت استنتاج $\Gamma \vdash_c A$ در دستگاه استنتاج طبیعی[1] به‌کار برید. نگاه کنید، مثلاً به [۸]. □

۳.۳ تعریف. فرمول A را در زبان مرتبهٔ اول منفی[2] گویند اگر فرمولهای اتمی p که در A وجود دارند به‌صورت نفی باشند و A شامل $\vee$ یا $\exists$ نباشد.

۴.۳ نتیجه. برای فرمولهای منفی A، $CQC \vdash_c A$ اگر و فقط اگر $IQC \vdash_i A$.

اثبات. اگر $IQC \vdash_i A$ آنگاه بدیهی است که $CQC \vdash_c A$. برای طرف دیگر، از قضیهٔ ۳.۲ و اینکه برای هر فرمول A، $IQC \vdash_i \neg A \longleftrightarrow \neg\neg\neg A$ استفاده کنید. ■

این نتیجه نشان می‌دهد که CQC به یک معنی مشمول در IQC است، زیرا هر فرمول CQC را می‌توان معادل با یک، فرمول منفی نوشت.

از نظر معناشناسی[3] نیز بین منطق شهودگرایی و منطق کلاسیک افتراق اساسی وجود دارد. برخلاف منطق کلاسیک که معناشناسی آن مبتنی بر جهانی ثابت از اشیاء است، جهان معناشناسی منطق شهودگرایی «متغیّر» است. این تغییر هم در اشیاء و هم در امور واقع اتفاق می‌افتد. ریاضیدان ایده‌آلی را تصور کنید (به اصطلاح براؤر، ذهن خالق[4]) که هم معرفت خود را طی زمان توسعه می‌دهد و هم جهان خویش از اشیاء را. جهان او از اشیاء توسعه می‌یابد زیرا اشیاء ساخته شده به منصهٔ «وجود» در می‌آیند و احکامی که او ثابت می‌کند به جرگهٔ «حقایق»، یعنی معرفت می‌پیوندند. معناشناسی‌های مختلفی برای بیان این جهان متغیر از اشیاء و معارف صورتبندی شده است. از میان آنها معنی‌شناسی بث[5]، کریپکی[6]، جبر هیتینگ[7]، مجموعه‌های با مقادیر جبر هیتینگ[8] و بالاخره، به معنی دقیق کلمه، کلّیترین آنها، نظریهٔ توپوس[9] از بقیه معروفترند. از بین اینها، برای راحتی، فقط به شرح مختصر معناشناسی کریپکی می‌پردازیم.

معناشناسی کریپکی در سال ۱۹۶۵ به‌وسیله کریپکی ابداع شد. ریشه‌های این معناشناسی درکار قبلی کریپکی، «معناشناسی جهانهای ممکن» (۱۹۶۳) است که برای منطق موجهات[10] ارائه کرد. قبل از اینکه به تعریف صوری معناشناسی کریپکی بپردازیم، بحث غیرصوری دربارهٔ ذهن خالق را دنبال می‌کنیم. او در هر لحظهٔ k انبانی چون Σ_k از جملات دارد که به‌طریقی به صدق آنها پی برده و انبانی چون A_k از اشیاء که او ساخته (یا خلق کرده) است. چون در هر لحظهٔ k ریاضیدانِ ایده‌آل انتخابهای متنوعی برای فعالیتهای آیندهٔ خود دارد (توقف او در لحظهٔ k نیز یکی از این انتخابهاست)، مراحل فعالیّت او به‌طور جزئی مرتب است و ضرورتاً به‌طور خطی مرتب نیست. ریاضیدان ایده‌آل اداتهای منطقی را چگونه تعبیر می‌کند؟ واضح است که تعبیر یک حکم مرکب باید مبتنی بر تعبیر اجزاء آن باشد، مثلاً اگر او A را در لحظهٔ k به‌دست آورده یا (و) B را در لحظهٔ k به‌دست آورده، در این‌صورت $A \vee B$ (یا $A \wedge B$) را در لحظهٔ k به‌دست آورده است. حالت شرطی کمی مشکلتر است، زیرا ممکن است $A \to B$ در لحظهٔ k شناخته شده باشد بدون اینکه A یا B در لحظهٔ k شناخته شده باشند.

1. natural deduction 2. negative 3. semantics 4. creative subject 5. Beth 6. Kripke 7. Heyting algebra 8. complete heyting valued sets 9. topos theory 10. modal logic

واضح است که ریاضیدان ایده‌آل $A \to B$ را در لحظهٔ k می‌داند اگر در هر لحظهٔ آینده (شامل k) چنانچه A شناخته شده باشد، B نیز شناخته شده باشد. به‌طور مشابه او در لحظهٔ k، حکم $\forall x A(x)$ را می‌داند اگر در هر لحظهٔ آینده (شامل k) برای همهٔ اشیایی مثل a که در آن لحظه وجود دارند $A(\overline{a})$ را بداند. اینکه در حالت سور عمومی، باید آینده را نیز به‌حساب آورد بدین خاطر است که «برای همهٔ اعضاء» بیش از «برای همهٔ اعضایی که تاکنون ساخته‌ایم» را در برمی‌گیرد. از طرف دیگر، وجودْ به آینده ربط ندارد. ریاضیدان ایده‌آل در لحظهٔ k می‌داند که $\exists x A(x)$ اگر شئ a را ساخته باشد به‌طوری‌که در لحظهٔ k، $A(\overline{a})$ را ثابت کند.

حال به تعریف صوری مدلهای کریپکی می‌پردازیم. زبان مرتبهٔ اول $\mathcal{L}$ را فرض کنید.

۵.۳ تعریف. مدل کریپکی یک چهارتایی $\mathcal{K} = (K, \Sigma, C, D)$ است، که در آن K یک مجموعهٔ (غیر تهی) جزئی مرتب، C یک تابع که روی ثوابت $\mathcal{L}$ تعریف شده، D یک تابع با مقادیر مجموعه که روی K تعریف شده، و Σ یک تابع روی K است به‌طوری‌که:

۱. $C(c) \in D(k)$ به‌ازای همهٔ kها در K،

۲. $D(k) \neq \emptyset$ به‌ازای همهٔ kها در K،

۳. $\Sigma(k) \subseteq At_k$ به‌ازای همهٔ kها در K، که At_k مجموعهٔ همهٔ جملات اتمی $\mathcal{L}$ است با ثابتهایی برای اعضاء $D(k)$.

۴. D، Σ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

(i) اگر $k \leq l$ آنگاه $D(k) \subseteq D(l)$،

(ii) $\bot \notin \Sigma(k)$ به‌ازای همه kها در K،

(iii) اگر $k \leq l$ آنگاه $\Sigma(k) \subseteq \Sigma(l)$.

$D(k)$ را دامنهٔ $\mathcal{K}$ در k و اعضای K را گرههای $\mathcal{K}$ گویند.

در واقع Σ به هر گره «احکام پایه» را نسبت می‌دهد که در k برقرارند. شرایط (i)، (ii) و (iii) فقط بیان می‌کنند که مجموعهٔ اشیاء موجود در طی زمان کاهش نمی‌یابند، تناقض هرگز اثبات نمی‌شود و احکام پایه همین‌که ثابت شدند، در مراحل بعدی صادق می‌مانند. ثوابت در همهٔ جهانها با عناصر واحد تعبیر می‌شوند. آنها دالهای ثابت[1] هستند. این مفهومی است که کریپکی برای معناشناسی اسامی خاص ابداع کرده است.

توجه کنید که D و Σ، در هر گره k یک ساخت کلاسیک $\pi(k)$ را معین می‌کنند. جهان $\pi(k)$ عبارت است از $D(k)$ و روابط $\pi(k)$ به‌وسیلهٔ $\Sigma(k)$ به‌عنوان دیاگرام مثبت[2] داده می‌شود: $(\vec{a}) \in R^{\pi(k)}$ اگر و فقط اگر $R(\vec{a}) \in \Sigma(k)$ شرایط (i) و (iii) می‌گوید که جهانها افزایشی هستند؛ اگر $k \leq l$ آنگاه $|\pi(k)| \subseteq |\pi(l)|$ و روابط نیز افزایشی هستند؛ اگر $k \leq l$ آنگاه $R^{\pi(k)} \subseteq R^{\pi(l)}$. به‌علاوه به‌ازای همهٔ kها و lها در K، $c^{\pi(k)} = c^{\pi(l)}$، برای هر ثابت c.

تابع Σ می‌گوید که چه اتمهایی در k «راست‌اند». می‌توان Σ را به مجموعهٔ همهٔ جملات $\mathcal{L}$ توسعه داد:

۶.۳ لم. Σ یک توسیع منحصر به فرد به تابعی روی K دارد (با همان علامت Σ) به‌طوری که $\Sigma(k) \subseteq \mathrm{Sent}_k$، مجموعهٔ همه جملات با پارامتر در $D(k)$ که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

1. rigid designators 2. positive diagram

(i) $A \vee B \in \Sigma(k)$ اگر و فقط اگر $A \in \Sigma(k)$ یا $B \in \Sigma(k)$؛

(ii) $A \wedge B \in (k)$ اگر و فقط اگر $A \in \Sigma(k)$ و $B \in \Sigma(k)$،

(iii) $A \to B \in \Sigma(k)$ اگر و فقط اگر برای هر $k \leq l$ اگر $A \in \Sigma(l)$ آنگاه $B \in \Sigma(l)$،

(iv) $\exists x A(x) \in \Sigma(k)$ اگر و فقط اگر وجود داشته باشد a در $D(k)$ به‌طوری‌که $A(\bar{a}) \in \Sigma(k)$،

(v) $\forall x A(x) \in \Sigma(k)$ اگر و فقط اگر به‌ازای هر $k \leq l$ و هر a در $D(l)$، $A(\bar{a}) \in \Sigma(l)$.

اثبات. ساده است. ■

اگر $A \in \Sigma(k)$، می‌نویسیم $k \Vdash A$ و می‌خوانیم A در k راست است یا k، A را صادق می‌سازد[1].

۷.۳ تعریف. (i) $\mathcal{K} \Vdash A$ اگر برای هر k در K، $k \Vdash A$. (ii) $\Vdash A$ اگر برای هر $\mathcal{K}$، $\mathcal{K} \Vdash A$. (iii) $\mathcal{K} \Vdash \Gamma$، که Γ مجموعه‌ای از جملات $\mathcal{L}$ است، اگر $\mathcal{K} \Vdash A$ برای هر A در Γ. (iv) $\Gamma \Vdash A$ اگر برای هر $\mathcal{K}$، اگر $\mathcal{K} \Vdash \Gamma$ آنگاه $\mathcal{K} \Vdash A$.

۸.۳ قضیهٔ (درستی و تمامیت[2]) کریپکی. $\Gamma \vdash A$ اگر و فقط اگر $\Gamma \Vdash A$.

اثبات. رک مثلاً به [۸] یا [۳۰]. □

از قضیهٔ ۳.۷ علاوه بر کاربردهای معمول نظریهٔ مدلی، می‌توان در اثبات غیرمعتبر بودن بعضی اصول و قواعد استنتاج در منطق شهودگرایی استفاده کرد. مدل سمت راست نشان می‌دهد که PEM در منطق شهودگرایی معتبر نیست و مدل سمت چپ نشان می‌دهد که اصل کلاسیک $\neg\forall x A(x) \to \exists x \neg A(x)$ نیز در منطق شهودگرایی معتبر نیست. (توجه کنید که بنابر $\neg A \equiv A \to \bot$، $k \Vdash \neg A$ اگر و فقط اگر برای هر $k \leq l$، $l \Vdash A$)

$k_0 < k_1, D(k_0) = \{\circ\}, D(k_1) = \{\circ, 1\}$ $\qquad$ $k_0 < k_1$

با استفاده از قضیهٔ ۳.۷ ثابت می‌شود که منطق شهودگرایی دارای دو خاصیت اساسی منطق ساختی است. این دو خاصیت در تعریف زیر می‌آیند:

۹.۳ تعریف. مجموعهٔ Γ از جملات را در نظر بگیرید. می‌گوییم Γ

(i) خاصیت فصلی[3] (DP) دارد اگر $\Gamma \vdash A \vee B$ آنگاه $\Gamma \vdash A$ یا $\Gamma \vdash B$.

(ii) خاصیت وجودی[4] (EP) دارد اگر $\Gamma \vdash \exists x A(x)$ آنگاه $\Gamma \vdash A(t)$ برای ترم بسته‌ای مثل t در زمان $\mathcal{L}$.

دقت کنید که منطق کلاسیک خاصیت DP یا EP را ندارد. گرچه $\vdash_c P \vee \neg P$ اما $\nVdash_c P$ و $\nVdash_c \neg P$.

۱۰.۳ قضیه. منطق گزاره‌ای و منطق محمولات شهودگرایی، خاصیت DP را دارند.

1. k forces A 2. soundness and completeness 3. disjunction property 4. existence property

اثبات. فرض کنید $\vdash A \vee B$ و $\nVdash A$ و $\nVdash B$. بنابر قضیهٔ ۳.۸، مدلهای $\mathcal{K}_1$ و $\mathcal{K}_2$ با ریشه‌های k_1 و k_2 وجود دارند به‌طوری که $k_1 \nVdash A$ و $k_2 \nVdash B$. بدون کاستن از کلیّت، فرض کنید $\mathcal{K}_1$ و $\mathcal{K}_2$ مجزّا هستند. مدل جدید $\mathcal{K}$ را با $K = K_1 \cup K_2 \cup \{k_0\}$ که $k_0 \notin K_1 \cup K_2$ به‌صورت زیر می‌سازیم:

$$\pi(k) = \begin{cases} \pi_1(k) & \text{برای } k \text{ در } K_1 \\ \pi_2(k) & \text{برای } k \text{ در } K_2 \\ |\pi| & \text{برای } k_0 = k \end{cases}$$

که $|\pi|$ شامل همهٔ ثوابت در $\mathcal{L}$ است، اگر ثابتی موجود باشد؛ در غیر این‌صورت $|\pi|$ را فقط شامل یک عنصر اختیاری a بگیرید. با کمی کار اضافه به‌راحتی دیده می‌شود که $\mathcal{K}$ یک مدل کریپکی است، و داریم $k_0 \nVdash A \vee B$. این خلاف $\vdash A \vee B$ و قضیهٔ ۳.۸ است. ■

۱۱.۳ قضیه. فرض کنید زبان منطق شهودگرایی شامل حداقل یک ثابت باشد. در این صورت EP برقرار است.

اثبات. فرض کنید $\vdash \exists x A(x)$ و برای همهٔ ثوابت c، $\nVdash A(c)$. بنابر قضیهٔ ۳.۸، برای هر ثابت c، مدل کریپکی $\mathcal{K}_c$ با ریشهٔ k_c موجود است به‌طوری که $k_c \nVdash A(c)$. حال برهان قضیهٔ ۳.۹ را تکرار کنید. گره جدید k_0 را در انتهای همهٔ مدلهای $\mathcal{K}_c$ قرار دهید. در این صورت $k_0 \nVdash \exists x A(x)$ و این خلاف $\vdash \exists x A(x)$ است. ■

۴. حساب شهودگرایی

حساب شهودگرایی را هیتینگ در [۱۴] و [۱۵] پایه گذاشت. اصول موضوع غیرمنطقی حساب شهودگرایی همان اصول پئانو است. اختلاف حساب پئانو (که از این به بعد با PA نشان داده می‌شود) و حساب شهودگرایی (که از این به بعد با HA، اشاره به نام هیتینگ، نشان داده می‌شود) در این است که PA مبتنی بر منطق کلاسیک و HA مبتنی بر منطق شهودگرایی است. در این بخش به بعضی خواص HA اشاره می‌کنیم و به‌ویژه خواهیم دید علی‌رغم اینکه HA حسابی ضعیف‌تر از PA است، ردهٔ وسیعی از فرمولهای حساب که از صورت نحوی خاصی برخوردار باشند و در PA قابل اثبات باشند، در HA نیز قابل اثبات‌اند.

فرمول A را در زبان حساب، یعنی $\mathcal{L} = \{+, \cdot, <, \circ\}$، باز می‌گوییم اگر هیچ سوری در آن نباشد. حال قضیه مقدماتی زیر را داریم

۱.۴ قضیه. برای هر فرمول باز A، $\mathrm{HA} \vdash A \vee \neg A$ و $\mathrm{HA} \vdash \neg\neg A \to A$.

اثبات. ابتدا با به‌کار بردن اصل استقراء نشان دهید که $\mathrm{HA} \vdash x = y \vee x \neq y$، که در آن $x \neq y \equiv \neg x = y$. آنگاه با استقراء روی فرمول A حکم را ثابت کنید. ■

توافق PA و HA بیش از اینهاست:

۲.۴ قضیه. فرض کنید g ترجمهٔ گنتسن-گودل باشد که در ۱.۳ تعریف شد، با این تفاوت که برای جملات اتمی قرار دهید: $(t = s)^g \equiv t = s$. آنگاه

(i) $\mathrm{PA} \vdash A \leftrightarrow A^g$، $\mathrm{PA} \vdash A$ اگر و فقط اگر $\mathrm{HA} \vdash A^g$.

(ii) برای A که شامل $\vee$ یا $\exists$ نباشد، $\mathrm{PA} \vdash A$ اگر و فقط اگر $\mathrm{HA} \vdash A$.

اثبات. توجیه تغییر تعریف g برای جملات اتمی $t = s$ به این است که بنابر قضیهٔ ۱.۴، $\mathrm{HA} \vdash \neg\neg(t = s) \to t = s$. (i) از قضیهٔ ۲.۳ و این واقعیت که برای هر یک از اصول موضوع ریاضی PA، مثل A، A^g در HA برقرار است، به‌دست می‌آید. (ii) از تعریف g بلاواسطه نتیجه می‌شود. □

بخش دوم قضیهٔ فوق توضیح می‌دهد که چرا تعداد معتنابهی از قضایای قابل اثبات در PA، بدون هیچ‌گونه مشکلی در HA نیز قابل اثبات‌اند. اکثر قضایای معروف و مهم در نظریهٔ مقدماتی اعداد برحسب جملات فارغ از $\exists$ قابل بیان‌اند؛ در واقع می‌توان آنها را با سور عمومی نوشت.

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که HA ردهٔ بزرگتری از فرمولهایی را که در قضیهٔ ۲.۴ بیان شد اثبات می‌کند.

۳.۴ قضیه. اگر $\mathrm{PA} \vdash \forall x \exists y A(x,y)$ آنگاه $\mathrm{HA} \vdash \forall x \exists y A(x,y)$، برای فرمولهای باز $A(x,y)$.

اثبات. [۳۰] را ببینید. ■

اصل کوچکترین عدد[1] مثال جالب توجهی است از یک حکم که در PA برقرار است ولی در HA برقرار نیست. در PA می‌توان نشان داد که N، مجموعهٔ اعداد طبیعی، نسبت به محمولات حسابی خوش‌ترتیب است. این خاصیت را که اصل کوچکترینِ عدد نامیده می‌شود، می‌توان به‌صورت زیر فرمولبندی کرد:

$$LNP : \exists x A(x) \to \exists x[A(x) \wedge \forall y < x \neg A(y)]$$

از نظر ریاضیات کلاسیک این اصل معادل اصل استقراء ریاضی است. از نظر شهودگرایی، از LNP اصل طرد شق ثالث نتیجه می‌شود. بنابراین LNP در HA برقرار نیست. فرض کنید

$$A(x) \equiv (x = ۰ \wedge P) \vee (x = ۱ \wedge \neg P) \vee x = ۲$$

$\exists x A(x)$ بدیهی است. حال فرض کنید یک کوچکترین y موجود باشد به‌طوری که $A(y)$. آنگاه $y \in \{۰, ۱, ۲\}$. از $y = ۲$ نتیجه می‌شود که $\neg A(۰) \wedge \neg A(۱)$، پس $\neg(۱ = ۱ \wedge \neg P) \wedge \neg(۰ = ۰ \wedge P)$، یعنی $\neg P \wedge \neg\neg P$ که متناقض است. اگر $y = ۰$، آنگاه P و اگر $y = ۱$ آنگاه $\neg P$. بنابراین $P \vee \neg P$.

۵. آنالیز شهودگرایی

آنالیز شهودگرایی نسبت به بقیهٔ ریاضیاتِ ساختی توسعه‌یافته‌تر است. دلیل عمدهٔ آن، نقش براؤر بوده است. براؤر در وهلهٔ اول یک توپولوژیدان بود و دامشغولی همیشگی‌اش مسألهٔ پیوستار بود. توسعهٔ بیشتر آنالیز نسبت به بقیهٔ شاخه‌ها حتی در مکاتب دیگرِ ریاضیاتِ ساختی نیز مشهود است. در مکتب ریاضیات ساختی بیشاپ نیز به‌دلیل اینکه بیشاپ خودْ آنالیزدان بود، مدتها این برتری ادامه یافت. در ریاضیات ساختیِ بازگشتی نیز به‌دلیل علائق مارکوف و شاگردانش مثل کوشنر[2] و شانین[3]، آنالیز ریاضی توسعه یافته‌تر از مثلاً جبر ساختی بازگشتی است.

آنالیز شهودگرایی را می‌توان به دو مرحله تقسیم کرد. مرحله‌ای که در آن آنالیز مبتنی بر ساختمان اعداد حقیقی باشد که یک عدد حقیقی، وجود فردی دارد. این مفهوم، درکار بیشاپ متجلّی شده و درکارهای ابتدایی براؤر نیز به همین‌گونه بوده است. این مفهوم از پیوستار براؤر را راضی نکرده است و به‌همین دلیل در مرحلهٔ بعد اصول دیگری، که براؤر معتقد بود برای ساختمان پیوستار لازم‌اند، به آنالیز اضافه شد. وان دالن معتقد است که این اصول، به‌ویژه اصل دنباله‌های انتخاب، به‌صورت ضمنی درکارهای ابتدایی براؤر آمده است [۷].

ما ابتدا به ساختمان اعداد حقیقی و بعضی خواص ابتدایی توابع اشاره می‌کنیم و سپس به بیان اصول اساسی شهودگرایی و تأثیر آن بر آنالیز ریاضی می‌پردازیم.

۱.۵ اعداد حقیقی. روش معرفی اعداد حقیقی به‌وسیلهٔ دنباله‌های بنیادی[1] را برمی‌گزینیم. برای نشان دادن اعداد طبیعی از حروف m، n، e، ... و برای اعداد گویا از حروف r، s، t، ... و برای توابع از N به N از حروف α، β، γ، ... استفاده می‌کنیم.

۱.۱.۵ تعریف. دنبالهٔ بنیادی، دنبالهٔ $\langle r_n \rangle_n$ از اعداد گویا با مدول همگرایی[2] (یا کوشی[3]) β است به‌طوری‌که

$$(\forall k, m, m'(|r_{\beta(k+m)} - r_{\beta(k+m')}| < ۲^{-k})$$

دو دنبالهٔ بنیادی $\langle r_n \rangle_n$ و $\langle s_n \rangle_n$ را هم‌ارز گویند اگر $\forall k \exists n \forall m(|r_{n+m} - s_{n+m}| < ۲^{-k})$. مجموعهٔ اعداد حقیقی (کوشی) $\mathbb{R}$ عبارت است از رده‌های هم‌ارزی دنباله‌های بنیادی تحت رابطهٔ هم‌ارزی.

به‌طریق معمول می‌توانیم اعمال جمع، ضرب، ... و روابط بین اعداد حقیقی را تعریف کنیم. مثلاً

$$\langle s_n \rangle_n + \langle t_n \rangle_n \equiv \langle s_n + t_n \rangle_n$$

$$\langle s_n \rangle_n . \langle t_n \rangle_n \equiv \langle s_n . t_n \rangle_n$$

$$|\langle s_n \rangle_n| \equiv \langle |s_n| \rangle_n$$

$$\langle s_n >_n \ < \langle t_n \rangle_n \equiv \exists k \exists n \forall m(t_{n+m} - s_{n+m} > ۲^{-k})$$

به‌ازای x و y در $\mathbb{R}$، $x < y$ اگر و فقط اگر $\langle s_n \rangle_n \in x$ و $\langle t_n \rangle_n \in y$ موجود باشند به‌طوری‌که $\langle s_n \rangle_n \ < \langle t_n \rangle_n$.

در $\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم $x \# y \equiv (x < y) \vee (y < x)$ و $x \leq y \equiv \neg(y < x)$ (می‌خوانیم x از y جدا[4] است). توجه کنید که $x \leq y$ به معنای $x < y \vee x = y$ نیست؛ قبلاً اشاره شد (در ۱.۴.۲) که تساوی بین اعداد حقیقی تصمیم‌پذیر نیست، یعنی رابطه $\forall xy(x < y \ \vee x = y \ \vee y < x)$ در $\mathbb{R}$ برقرار نیست. درگزارهٔ زیر خواص مقدماتی $\mathbb{R}$ بیان می‌شود.

۲.۱.۵ گزاره. (۱) فرض کنید $\langle r_n \rangle_n \in x$ و $\langle s_n \rangle_n \in y$ و $x, y \in \mathbb{R}$. در این‌صورت

$$x \# y \leftrightarrow \exists kn \forall m(|s_{n+m} - r_{n+m}| > ۲^{-k}) \quad (۱)$$

$$\neg x \# y \leftrightarrow x = y \quad (۲)$$

$$x \# y \leftrightarrow y \# x \quad (۳)$$

$$x \# y \to \forall z(z \# x \vee z \# y) \quad (۴)$$

$$\neg\neg x = y \to x = y \quad (۵)$$

$$x < y \to x < z \vee z < y \quad (۶)$$

اثبات. ساده است. ■

1. Least Number Principle 2. B.A. Kushner 3. N.A. Shanin

1. fundamental sequences 2. modulus of convergence
3. Cauchy 4. apart

از بین خواص مطرح‌شده در گزارهٔ فوق، خواص (۵) و (۶) قابل توجه‌اند. خاصیت (۵) را خاصیت پایداری اعداد حقیقی گویند. خاصیت (۶) رویکرد ساختی رابطهٔ تثلیث است.

۳.۱.۵ تعریف. (۱) هر دنباله از اعداد حقیقی با دنبالهٔ دوگانه مولدهای اعداد حقیقی $\langle\langle s_{m,n}\rangle_n\rangle_m$ و یک تابع α مشخص می‌شود که به‌ازای هر m، $\alpha(m,-)$ یک مدول برای $\langle s_{m,n}\rangle_n$ است.

(۲) دنبالهٔ $\langle x_m\rangle_m$ از اعداد حقیقی را یک دنبالهٔ کوشی گویند اگر مدول β موجود باشد به‌طوری‌که $\forall km(|x_{\beta(k)} - x_{\beta(k+m)}| < ۲^{-k})$.

(۳) دنبالهٔ $\langle x_n\rangle_n$ دارای حد x است اگر مدول α موجود باشد به‌طوری‌که

$$\forall km(|x - x_{\alpha(k+m)}| < ۲^{-k})$$

۴.۱.۵ قضیه. (کامل بودن $\mathbb{R}$). هر دنبالهٔ کوشی از اعداد حقیقی دارای یک حد است.

اثبات. فرض کنید $\langle x_n\rangle_n$ یک دنبالهٔ کوشی از اعداد حقیقی باشد و به‌ازای هر n داشته باشیم $x_n = \langle s_{n,m}\rangle_m$. آنگاه $\alpha(n,-)$ یک مدول برای $\langle s_{n,m}\rangle_m$ است. فرض کنید β یک مدول برای $\langle x_n\rangle_n$ باشد. بنابراین

$$\forall k,n,m(|s_{n,\alpha(n,k)} - s_{n,\alpha(n,k)+m}| < ۲^{-k})$$

$$\forall k,m(|x_{\beta(k)} - x_{\beta(k+m)}| < ۲^{-k})$$

در نتیجه به‌راحتی نتیجه می‌شود که $\langle s_{\beta(n),\alpha(\beta(n),\beta(n+۱))}\rangle_n$ یک مولد عدد حقیقی است. حال فرض کنید x عدد حقیقی متناظر با آن باشد. در این صورت $\langle x_n\rangle_n$ با مدول $\beta(n+۱)$ به x میل می‌کند.■

یکی از خواص اعداد حقیقی در ریاضیات کلاسیک این است که هر دنبالهٔ کراندار یکنوا از اعداد حقیقی دارای حد است. این نتیجه‌ای از قضیه بولتسانو-وایراشتراس[1] است. از نظر ریاضیاتِ ساختی این حکم غلط است.

فرض کنید $\alpha : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ و دنبالهٔ $\langle r_n\rangle_n$ وابسته به α را در اعداد گویا به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$r_n = \begin{cases} ۱ - ۲^{-n} & \text{اگر } \neg\exists k \le n\ (\alpha(k) = ۰) \\ ۲ - ۲^{-n} & \text{اگر } \exists k \le n\ (\alpha(k) = ۰) \end{cases}$$

فرض کنید $\langle r_n\rangle_n$ دارای حد x در $\mathbb{R}$ باشد. آنگاه $x < ۲$ یا $x > ۱$. در نتیجه برای هر α، $\exists k(\alpha(k) = ۰) \vee \neg\exists k(\alpha < k) = ۰)$. بیشاپ این اصل را «اصل همه‌دانی محدود»[2]، PLO نامیده است. در واقع بخش وسیعی از قضایای ریاضیات کلاسیک مستلزم PEM، یا به اصطلاح بیشاپ، «اصل همه‌دانی»[3] نیست، بلکه اصل همه‌دانی محدود برای آنها کافی است.

قضیهٔ مقدار میانی نیز در ریاضیات ساختی برقرار نیست. به مثال زیر نگاه کنید.

فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد که نمی‌دانیم $a \ge ۰$ یا $a \le ۰$. تابع پیوستهٔ یکنواخت $f : [۰,۳] \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید: $f(x) = \min(x-۱, ۰) + \max(۰, x-۲)$ و فرض کنید $f^*(x) = f(x) + a$.

1. Bolzano-Weierstrass
2. Principle of Limited Omniscience
3. Principle of Omniscience

حال اگر به‌ازای xای در $[۳ \text{ و } ۰]$، $f^*(x) = ۰$ آنگاه می‌دانیم که $x > ۱$ یا $x < ۲$. بنابراین می‌دانیم که $a \ge ۰$ یا $a \le ۰$. پس نمی‌توانیم xی پیدا کنیم که $f^*(x) = ۰$.

اما صورت زیر از قضیهٔ مقدار میانی قابل اثبات است:

۵.۱.۵ قضیهٔ (مقدار میانی). فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد، $a < b$ و $f(a) \le c \le f(b)$. آنگاه $\forall k\exists x \in [a,b](|f(x) - c| < ۲^{-k})$.

اثبات. رک. [۳۰].■

در همین راستا می‌توان مشتق، انتگرال و دیگر مفاهیم آنالیز را تعریف کرد و خواصِ ساختی آنها را به‌دست آورد. در کتاب معروف بیشاپ [۱]، این برنامه کلاً تحقق یافته است.

۲.۵ اصول آنالیز شهودگرایی. صورت کلی اصل انتخاب از نظر ریاضیات ساختی پذیرفتنی نیست. اصل انتخاب عبارت است از:

> اگر S زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ باشد و به‌ازای هر x در A، yای در B موجود باشد که $(x,y) \in S$، آنگاه تابع $f : A \to B$ موجود است به‌طوری‌که به‌ازای هر x در A، $(x, f(x)) \in S$.

گودمن و می‌هیل در [۱۱] نشان دادند که اصل انتخاب، PEM را نتیجه می‌دهد، بنابراین حتی در ریاضیات ساختی بیشاپ نیز قابل قبول نیست. استدلال آنها برای اثبات $P \vee \neg P$ بسیار ساده است. فرض کنید $A = \{s,t\}$، که $s = t$ اگر و فقط اگر P و فرض کنید $B = \{۰,۱\}$ و $S = \{(s,۰),(t,۱)\} \subseteq A \times B$. اگر تابع $f : A \to B$ برای S موجود باشد، آنگاه یا

(i) $f(s) = ۱$ یا $f(t) = ۰$، در نتیجه $s = t$ و بنابراین P، یا

(ii) $f(s) = ۰$ و $f(t) = ۱$ و در نتیجه $\neg(s = t)$ و بنابراین $\neg P$.

صورتی از اصل انتخاب که بسیار مورد استفادهٔ ساختگرایان قرار می‌گیرد، اصل انتخاب شمارا خوانده می‌شود و آن حالتی است که $A = \mathbf{N}$:

$$AC - \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N}\exists b \in B A(n,b)$$

$$\to \exists f \in \mathbf{N} \to B\ \forall n\ A(n, f(n))$$

این صورت از اصل انتخاب را به‌صورت غیررسمی می‌توان این‌طور توجیه کرد که هر برهان برای مقدم، روشی را به‌دست می‌دهد که به‌ازای هر n در $\mathbf{N}$ یک b در B می‌توان یافت که $A(n,b)$. چنین روشی چیزی جز توصیف یک تابع نیست که b را به n نسبت می‌دهد.

تعبیر شهودگرایانهٔ «دنباله» منجر به اصولی شده است که اساساً ریاضیات شهودگرایی را از دیگر انواع ریاضیات ساختی جدا کرده است. دنباله در ریاضیات ساختی بیشاپ یا ریاضیات ساختی بازگشتی به‌وسیلهٔ قاعده‌ای داده می‌شود که از قبل، نحوهٔ تعیین هر جزء دنباله را به‌دست می‌دهد. چنین دنباله‌ای را شبه قانون[1] می‌گویند. براؤر این مفهوم از دنباله را به‌گونه‌ای تعمیم داد که شامل دنباله‌هایی می‌شود که اجزاء دنباله بتوانند آزادانه انتخاب شوند، یا فقط تحت محدودیتهای قبلی ساخته شوند. این دنباله‌ها را دنباله‌های انتخاب می‌گویند. بنابراین برای فرد شهودگرا، لازم نیست که عدد حقیقی $\langle x_n\rangle_n$ به‌وسیلهٔ قاعده‌ای داده شود، بلکه اجزاء آن $x_۱$، $x_۲$، ... اعداد گویا هستند که

1. lawlike

متوالیاً ساخته شده‌اند، و فقط محدودند به شرط $|x_m - x_n| \leq m^{-1} + n^{-1}$ (m و n اعداد طبیعی مثبت هستند).

حال فرض کنید که P زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ باشد و فرض کنید به‌ازای هر α در $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$، $n \in \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری‌که $(\alpha, n) \in P$. از نظر ساختی این بدان معناست که روشی موجود است که با اِعمال آن بر دنباله‌ها، به‌ازای هر αی داده شده، n محاسبه می‌شود. مطابق نظر براؤر، هر عضو $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ همیشه ناکامل است؛ یعنی دنبالهٔ α کاملاً مصداقی است، بدین معنا که در هر لحظه ما چیزی جز تعدادی متناهی از اجزاء آن نمی‌دانیم. بنابراین با روش ذکر شده در فوق، باید بتوان به‌ازای هر دنبالهٔ α، از تعداد متناهی اجزاء آن (با علامت $\overline{\alpha}(m)$ که $\overline{\alpha}(m) = \langle \alpha(0), \cdots, \alpha(m-1) \rangle$)، عدد طبیعی n را محاسبه کرد که $(\alpha, n) \in P$. حال فرض کنید β دنبالهٔ دیگری باشد که $\overline{\alpha}(m) = \overline{\beta}(m)$. پس روش ما همان مقدار n را برای β محاسبه می‌کند که برای α محاسبه کرد. بنابراین، با این روش یک تابع پیوسته $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ تعریف می‌شود به‌طوری‌که به‌ازای هر α در $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$، $(\alpha, f(\alpha)) \in P$. با این تحلیل به اصل انتخاب پیوسته می‌رسیم که آن را در دو بخش پیوستگی و انتخاب بیان می‌کنیم:

(۱) هر تابع از $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ به $\mathbb{N}$ پیوسته است. (CC)

(۲) اگر $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ و به‌ازای هر α در $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$، $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد که $(\alpha, n) \in P$، آنگاه تابع $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری که برای هر n در $\mathbb{N}$، $(\alpha, f(\alpha)) \in P$.

CC با PLO ناسازگار است، و همین‌طور با تز چرچ نیز ناسازگار است ([۲] را نگاه کنید).

از نتایج شگفت‌انگیز CC قضیه معروف براؤر است. برای اثبات قضیه، ابتدا با استفاده از مقدمات توپولوژی روی درختهایی که از دنباله‌های متناهی از اعداد طبیعی ساخته شده‌اند، گزارهٔ زیر را ثابت می‌کنیم:

۱.۲.۵ گزاره. فرض کنید $\{X_n : n \in I\}$ با $I \subseteq \mathbb{N}$، یک پوشش[1] برای $\mathbb{R}$ باشد. آنگاه $\{Int(X_n) : n \in I\}$ نیز یک پوشش برای $\mathbb{R}$ است (و به‌طور مشابه برای هر بازهٔ بسته در $\mathbb{R}$).

اثبات. رک. [۳۰]. ■

توجه داشته باشید که $Int(x)$ برای نمایش درون[2] x نسبت به توپولوژی یاد شده است.

۲.۲.۵ قضیهٔ (براؤر). همهٔ توابع $f : X \to \mathbb{R}$، X یک بازهٔ بسته، پیوسته‌اند.

اثبات. $k \in \mathbb{N}$ را ثابت بگیرید و فرض کنید $\langle r_n \rangle_n$ یک فهرست ثابت از اعضاء $\mathbb{Q}$، مجموعهٔ اعداد گویا، باشد. فرض کنید $X_n = \{x : |f(x) - r_n| < 2^{-k}\}$. در این صورت $\langle X_n \rangle_n$ یک پوشش X است. بنابر گزارهٔ ۱.۲.۵، $\langle Int(X_n) \rangle_n$ یک پوشش X است. یعنی $\forall x \in X \exists m \forall y \in U(2^{-m}, x) \cap X(|f(y) - r_n| < 2^{-k})$. بنابراین $\forall x \in X \exists m \forall y \in X(|x-y| < 2^{-m} \to |f(x) - f(y)| < 2^{-k+1})$. ■

می‌دانیم که در ریاضیات کلاسیک، با استفاده از فشردگی بازهٔ بسته در $\mathbb{R}$، می‌توان ثابت کرد که هر تابع پیوستهٔ $f : X \to \mathbb{R}$، X یک بازهٔ بسته، به‌طور یکنواخت نیز پیوسته است. در آنالیز شهودگرایی نیز این قضیه درست است، اما تأمین فشردگی هر بازهٔ بسته در $\mathbb{R}$ مستلزم قبول یکی از اصول مهم

1. cover 2. interior

آنالیز براؤری است. این اصل که به‌نام اصل بادبزن[1] معروف است صورت ساختی قضیهٔ کونیگ (مثال ۳.۲) تلقی می‌شود. در واقع اصل بادبزن و قضیهٔ کونیگ در ریاضیات کلاسیک معادل یکدیگرند. اصل نقیض قضیهٔ کونیگ، اصل بادبزن است. فرض کنید T یک درخت باشد (که گرههای آن از دنباله‌های متناهی از اعداد طبیعی ساخته شده‌اند) که از هر گره آن تعداد متناهی شاخه می‌گذرد. این نوع درختها را بادبزن می‌گویند. اصل بادبزن می‌گوید که اگر T یک بادبزن باشد، و برای هر شاخهٔ نامتناهی α در T، قطعهٔ ابتدایی $\overline{\alpha}(x)$ موجود باشد که در یک، خاصیت تصمیم‌پذیر A صدق کند، آنگاه یک کران بالای یکنواخت برای این xها موجود است. اصل بادبزن، برای یک بادبزن T، به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$FAN : \forall n(A(n) \vee \neg A(n)) \wedge \forall \alpha \exists x A(\overline{\alpha}(x)) \to \exists z \forall \alpha \exists y \leq z A(\overline{\alpha}(y))$$

از اصل بادبزن، به‌راحتی فشردگی بازهٔ بسته در $\mathbb{R}$ نتیجه می‌شود. بنابراین:

۳.۲.۵ قضیه ($CC + FAN$). هر تابع $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.

اثبات. قضیهٔ ۲.۲.۵ و اصل FAN را به‌کار ببرید. ■

در واقع براؤر اصل بادبزن را به‌صورت اصل بیان نکرد، بلکه سعی کرد تا آن‌را به‌طور ساختی اثبات کند. برهان ساختی او از «قضیهٔ» بادبزن مبتنی بر نوعی استقراء به نام استقراء مانع است.

درخت T از دنباله‌های متناهی اعداد طبیعی را به‌یاد آورید. می‌گوییم مجموعهٔ P از دنباله‌های متناهی یک مانع است اگر $\forall \alpha \exists x(\overline{\alpha}(x) \in P)$. به‌طورکلیتر می‌گوییم دنبالهٔ متناهی $\langle n_0, n_1, \cdots, n_i \rangle$ از اعداد طبیعی (که بنابر تناظر یک به یک بین اعداد طبیعی و دنباله‌های متناهی از اعداد طبیعی، می‌توانیم بگوییم عددِ n) به‌وسیلهٔ P مانع شده است اگر و فقط اگر برای هر شاخهٔ α که شامل n باشد، با علامت $n \in \alpha$، xای وجود داشته باشد که $\overline{\alpha}(x) \in P$. فرض کنید برای دنباله‌های متناهی n و m، که $n = \langle n_0, n_1, \cdots, n_i \rangle$ و $m = \langle m_0, m_1, \cdots, m_j \rangle$، الصاق[2] m و n، با علامت $m * n$ عبارت باشد از دنبالهٔ $\langle m_0, m_1, \cdots, m_j, n_0, n_1, \cdots, n_j \rangle$. آنگاه اصل استقراء مانع به‌صورت زیر است:

$$(BI)\ \forall \alpha \exists x P(\overline{\alpha}(x)) \wedge \forall nm(P(n) \to P(n * m)) \wedge \forall n(\forall y P(n * \langle y \rangle) \to P(n)) \to P(\langle\ \rangle)$$

آخرین اصل شهودگرایی براؤر که در این بخش به بررسی آن می‌پردازیم مربوط به مفهوم مناقشه‌انگیز ذهن خالق است: براؤر با تمسک به مفهوم ذهن خالق یک مثال ناقض برای اصل مارکوف ساخت. این اصل که مارکوف آن را در ۱۹۵۴ بیان کرد، یکی از اصول ساختگرایی بازگشتی است:

$$(MP) \quad \forall x(A(x) \vee \neg A(x)) \wedge \neg\neg \exists x A(x) \to \exists x A(x)$$

یا به‌صورت متغیرهای تابع $\neg\neg \exists x(\alpha(x) = 0) \to \exists x(\alpha(x) = 0)$، که α تابع الگوریتمی (بازگشتی) است و A نیز محمولی است که به‌طور

1. Fan axiom 2. concatenation

الگوریتمی تصمیم‌پذیر است. برای اینکه درک شهودی بهتری از اصل مارکوف داشته باشید، توجه به این گزاره سودمند است که اصل مارکوف معادل $\forall x \in \mathbb{R}(x \neq 0 \to x\#0)$ است که $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی (رک. ۱.۵) است.

براوِر معتقد بود که اصل مارکوف از نظر شهودگرایی درست نیست. به‌منظور ساختن مثال ناقض براوِر برای اصل مارکوف، ابتدا خواص ذهن خالق یا ریاضیدان ایده‌آل، IM، را بیان می‌کنیم. مراحل فعالیت IM در زمان گسسته است. علامت «$\Box_n A$» بدین معنی است که IM در مرحلهٔ nام از فعالیت ریاضی خویش شواهد کافی برای A دارد.

فرض شده است که IM در هر مرحله می‌داند که به‌قدر کافی شواهد برای A دارد یا نه؛ بنابراین

(IM_1) $\quad \Box_n A \vee \neg(\Box_n A)$

(IM_2) $\quad \Box_m A \wedge n > m \to \Box_n A$ شواهد افزایشی هستند، یعنی

(IM_3) $\quad A \longleftrightarrow \exists n(\Box_n A)$

سومین فرض این است که راست بودن فقط وقتی برای IM وجود دارد که در زمانی از فعالیت ریاضی خویش به کشف راستی آن دست یابد.

حال فرض کنید $X \subseteq \mathbf{N}$ و تابع $\alpha : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$\alpha(n,m) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{اگر } \Box_m(n \in X) \\ 1 & \text{اگر } \neg\Box_m(n \in X) \end{array} \right\}$$

آنگاه $n \in X \longleftrightarrow \exists m(\Box_m(n \in X)) \longleftrightarrow \exists m \alpha(n,m) = 0$.

در واقع α یک تابع مشخصه برای X است و هم‌ارزی فوق از نظر ریاضیات کلاسیک امری بدیهی است. حال نظریهٔ ذهن خالق را می‌توان به‌شکل زیر صورتبندی کرد که به اصل کریپکی[1] معروف است:

$$(KS) \quad \forall X \exists \alpha \forall n[n \in X \longleftrightarrow \exists m \alpha(n,m) = 0]$$

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که اصل مارکوف (صورت معادل آن $\forall x \in \mathbb{R}(x \neq 0 \to x\#0)$) در شهودگرایی براوِر پذیرفتنی نیست:

۴.۲.۵ قضیه. $KS + MP \Rightarrow PEM$

اثبات. فرض کنید A یک گزاره باشد. دنبالهٔ $\langle x_n \rangle_n$ از اعداد گویا را به‌صورت زیر می‌سازیم:

اگر در مرحلهٔ n، IM نه برهانی برای A دارد و نه برهانی برای $\neg A$، می‌گیریم $x_n = 0$، اگر از مرحلهٔ $n-1$ به مرحلهٔ n، IM برهانی برای A به‌دست آورد، به‌ازای هر m بزرگتر یا مساوی n، می‌گیریم $x_m = 2^{-n}$، و اگر از مرحلهٔ $n-1$ به مرحلهٔ n، IM برهانی برای $\neg A$ به‌دست آورد، به‌ازای هر m بزرگتر یا مساوی n می‌گیریم $x_m = -2^{-n}$.

$\langle x_n \rangle_n$ یک دنبالهٔ بنیادی است و به عدد حقیقی x میل می‌کند. اگر می‌توانستیم ثابت کنیم که $x = 0$ آنگاه نشان می‌دادیم که IM نمی‌تواند A را ثابت کند و نمی‌تواند $\neg A$ را ثابت کند. بنابراین $\neg A$ و $\neg\neg A$ را ثابت می‌کند، که غیرممکن است، پس $x \neq 0$. بنابر اصل مارکوف $x\#0$. این بدین معنی است که $A \vee \neg A$. ■

1. Kripke Schema

مفهوم ذهن خالق براوِر همان‌طور که قبلاً اشاره شد، از مفاهیم مناقشه‌برانگیز شهودگرایی اوست. بحث نسبتاً جامعی از این موضوع، به‌ویژه جنبه‌های فلسفی آن در [۳۰] آمده که خواندنی است. بررسی مدل ریاضی ذهن خالق در [۶] آمده است.

۶. جبر شهودگرایی

مطالعهٔ ساختارهای جبری در چارچوب شهودگرایی با کار هیتینگ در [۱۶] آغاز شد. او مفاهیم آشنا مثل گروهها، حلقه‌ها، حوزه‌های صحیح، میدانها [هیأتها]، حلقه‌های چندجمله‌ای و غیره را صورتبندی کرد. اختلاف اساسی جبر شهودگرایی با سنّت کرونکری در این است که ساختارهای جبری از دید کرونکر گسسته[1]اند، بدین معنا که تساوی اشیاء تصمیم‌پذیر است، در حالی‌که ساختارهای شهودگرایی مجهز به نوعی مفهوم جدایی[2] هستند و بنابراین ساختارهای پیوسته را نیز دربر می‌گیرند. بدین معنا می‌توان گفت که جبر شهودگرایی مبتنی بر ایده‌های براوِر از «رابطه»، «ترتیب»، ... استوار است. براوِر غیر از مفاهیم مقدماتی «ترتیب»، ... در قلمرو جبر، تا آنجا که نویسنده مقاله اطلاع دارد، اثبات ساختی قضیهٔ اساسی جبر را اولین‌بار در [۵] ارائه نمود. اسکات[3] در [۲۶] مفهوم پاد زیرساختارها[4] را که در کارهای هیتینگ به‌طور ضمنی وجود داشت، صریحاً بیان کرد. پیشنهاد مفهوم پادزیرساختارهای جبری از دیدگاه شهودگرایی تا حدودی طبیعی است، ولی رویتنرگ[5] در [۲۵] معتقد است که این مفهوم در مطالعه نظریهٔ گالوا ضروری نیز هست.

در این بخش به بعضی تعاریف پادزیرساختارها نگاه می‌کنیم و طبیعی بودن آنها را از نظرگاه شهودی ملاحظه می‌کنیم.

قبل از اینکه به مثالهای پادزیرساختارها بپردازیم، رابطهٔ جدایی را یادآوری می‌کنیم (بخش ۱.۵ را نگاه کنید). هر مجموعه با رابطهٔ تصمیم‌پذیر تساوی، مجهز به یک رابطهٔ جدایی است، مثل $x \neq y$. اما همان‌طور که در بخش ۱.۵ دیده‌ایم، رابطهٔ تساوی و جدایی همیشه بدین سادگی نیست. تعریف گروه، معمولی است:

۱.۶ تعریف. گروه، یک ساختار $(A, \cdot, ^{-1}, e)$ است که در اصول زیر صدق می‌کند:

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, e \cdot x = x \cdot e = x$$

یک گروه با رابطهٔ جدایی در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$x^{-1}\#y^{-1} \to x = y \qquad x.y\#x'.y' \to x\#x' \vee y\#y'$$

گروه جمعی $\mathbb{Z}^2$ را در نظر بگیرید. زیرگروه G عبارت است از $G = \{(a,b) : b = 0 \vee A\}$ که A یک حکم است که فعلاً معین نیست، مثلاً حدس گلدباخ. گرچه G یک زیرگروه «خوب» است اما نمی‌دانیم که $G \equiv \mathbb{Z}^2$ یا $G \cong \mathbb{Z}$. در واقع G، حتی به‌عنوان یک زیرمجموعه $\mathbb{Z}^2$، جداشدنی[6] نیست، یعنی چنین نیست که $\forall x \in \mathbb{Z}^2(x \in G \vee x \notin G)$.

مفهوم پاد زیرگروه که در زیر خواهد آمد به نوعی، دوگان مفهوم زیرگروه است، شبیه دوگان بودن مفاهیم تساوی و جدایی.

1. discrete 2. apartness 3. D. Scott 4. antisubstructures
5. W. Ruitenburg 6. detachable

۲.۶ تعریف. یک پاد زیرگروه A از گروه G زیرمجموعه‌ای از G است که در شرایط زیر صدق کند: $\neg e \in A$، $x^{-1} \in A \to x \in A$، $xy \in A \to x \in A \vee y \in A$. پادزیرگروه A نرمال خوانده می‌شود اگر $xy \in A \to yx \in A$. پادزیرگروه A با رابطهٔ جدایی در G همخوان است اگر $a \in A \to a\#e$.

مثال. زیرمجموعهٔ گروه ماتریسهای ۲ × ۲، $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ با ضابطهٔ $c\#0 \vee b\#0 \vee a\#d$، یک پادزیرگروه نرمال $GL_2(\mathbb{R})$ است.

گزارهٔ زیر ما را به مفهوم زیرگروه نزدیک می‌کند:

۳.۶ گزاره. فرض کنید A یک پادزیرگروه G باشد. A^c (مکمل A نسبت به G) در شرایط زیر صدق می‌کند:

(i) $e \in A^c$ (ii) $x \in A^c \wedge y \in A^c \to xy \in A^c$

(iii) $x \in A^c \to x^{-1} \in A^c$ (iv) $\neg\neg x \in A^c \to x \in A^c$

اثبات. ساده است. ■

توجه کنید که (i) و (ii) و (iii) دقیقاً تعریف زیرگروه است و (v) می‌گوید که عضو زیرگروه بودن پایدار است. A^c را در گزارهٔ ۳.۶ زیرگروه معین‌شده به‌وسیلهٔ A می‌گویند. به‌راحتی دیده می‌شود که اگر A یک پاد زیرگروه نرمال باشد آنگاه A^c یک زیرگروه نرمال است، یعنی اگر $x \in A^c$ آنگاه $yxy^{-1} \in A^c$.

حال تعریف گروههای خارج قسمت ساده است. فرض کنید A یک پاد زیرگروه نرمال G باشد و $D = A^c$. آنگاه G/D یک گروه است که مجهز به یک رابطهٔ جدایی متعارف است یعنی $aD\#bD$ اگر و فقط اگر $ab^{-1} \in A$.

تعریف پاد زیرساختارها در مورد حلقه‌ها و میدانها نیز به‌همین نحو است. تعریف حلقه به‌طور معمول انجام می‌شود. اما مثل گروهها، حلقه‌های با رابطهٔ جدایی، اصول مبتنی بر حفظ رابطهٔ جدایی (در مورد جمع و ضرب) را دربر دارند. تعاریف حوزه صحیح و میدان به‌صورت زیر است:

حلقهٔ R را یک حوزهٔ صحیح گویند اگر $x\#0$ و $y\#0$ آنگاه $xy\#0$.

حلقهٔ R را یک میدان گویند اگر $x\#0$ آنگاه y در $\mathbb{R}$ وجود دارد که $xy = 1$.

در جبر کلاسیک، اگر R یک حلقهٔ جابه‌جایی یکدار باشد و I ایده‌آلی اول در R باشد، R/I یک حوزه صحیح است و اگر I ایده‌آل ماکسیمال در R باشد، R/I یک میدان است. مفهوم اول بودن ایده‌آل یک مفهوم اساسی در جبر کلاسیک است که تعریف معمولی آن در جبر شهودگرایی کارساز نیست. مثلاً حلقهٔ چندجمله‌ایهای $R[x]$ را در نظر بگیرید. با تعریف معمولی ایده‌آل اول، حتی نمی‌توانیم ثابت کنیم که ایده‌آل (x) اول است. برای دیدن این مطالب فرض کنید a و b اعضای R باشند که $ab = 0$ ولی نمی‌دانیم که $a = 0$ یا $b = 0$. حال چندجمله‌ای $(x+a)(x+b)$ را در نظر بگیرید. گرچه $(x+a)(x+b)$ در ایده‌آل (x) است ولی اینکه $x+a$ در (x) است یا $x+b$ در (x) است نامعین است. برای غلبه بر این مشکل و مشکلی که در مفهوم معمولی ایده‌آل ماکسیمال نیز وجود دارد، تعاریف زیر را در جبر شهودگرایی ارائه کرده‌اند:

۴.۶ تعریف. یک پاد ایده‌آل در حلقهٔ R زیرمجموعهٔ A از R است که در شرایط زیر صدق کند:

(i) $0 \notin A$، (ii) $x + y \in A \to x \in A \vee y \in A$،

(iii) $xy \in A \to x \in A \wedge y \in A$.

یک ایده‌آل I در حلقهٔ R زیرمجموعه‌ای از R است که در شرایط زیر صدق کند:

(i) $0 \in I$، (ii) $x, y \in I \to x - y \in I$،

(iii) $x \in R, y \in I \to xy \in I$.

زیرمجموعهٔ A از R را یک پاد ایده‌آل اول گویند اگر $1 \in A$ و $x \in A \wedge y \in A \to xy \in A$. زیرمجموعهٔ A از R را یک پاد ایده‌آل مینیمال گویند اگر $1 \in A$ و $\forall x \in A \exists y \in R(1 - xy \notin A)$.

به‌راحتی دیده می‌شود که اگر A یک پاد ایده‌آل باشد، A^c یک ایده‌آل است. گزارهٔ زیر را داریم:

۵.۶ گزاره. (i) A پاد ایده‌آل اول است اگر و فقط اگر R/A^c یک حوزه صحیح باشد.

(ii) A پاد ایده‌آل مینیمال است اگر و فقط اگر R/A^c یک میدان باشد.

(iii) یک پاد ایده‌آل مینیمال، اول است.

(iv) اگر A یک پاد ایده‌آل مینیمال و B یک پاد ایده‌آل عضودار[1] باشد به‌طوری که $B \subset A$، آنگاه $B = A$.

اثبات. ساده است. ■

فایق آمدن بر مشکلات مفاهیم دیگر، مثل مفهوم درجهٔ چندجمله‌ایها در حلقه‌های چندجمله‌ایها مستلزم کار بیشتری است. خواننده می‌تواند به مراجع [۲۲]، [۲۵] یا [۳۰] رجوع کند.

این قسمت را با تذکر این نکته خاتمه می‌دهیم که جبر ساختی در سنت بیشاپ (وارث کرونکر در گسسته فرض کردن ساختارهای جبری) به‌وسیلهٔ شاگردش سایدنبرگ در [۲۷] توسعه یافت و بعداً در [۲۲] قسمتهای عمده جبر مقدماتی ساخته شد.

۷. مبانی فلسفی شهودگرایی

در این بخش پایانی به اتهامات مبانی فلسفی شهودگرایی براوْر نظری موجز می‌افکنیم. نقد و بررسی همهٔ جانبه نظرات براوْر از حوصله مقالهٔ حاضر خارج است. بنابراین این نوشته بر اطلاع‌رسانی اهم موضوعات فلسفی براوْر در زمینه ریاضیات متمرکز است.

از نظر تکوینی، فلسفه براوْر شامل دو بخش است. بخش فلسفی آن ترکیبی از ذهن‌گرایی[2] کانتی و خودآیینی[3] فیخته[4] می‌باشد. علاوه‌بر حضور مستمرّ این دو نگرش در آثار فلسفی براوْر، بدبینی[5] شوپنهاور[6] و شهودگرایی برگسون[7] در آثار اولیهٔ او به‌ویژه در [۳] کاملاً مشهود است. بخش دوم فلسفهٔ براوْر به عناصری مربوط می‌شود که مستقیماً فلسفه ریاضی او را تشکیل می‌دهند. شاخصترین اینها، مفهوم «وجود» از بورل و لبگ، مفهوم «ساختمان» از کرونکر و مفهوم «شهود» از پوانکاره است. براوْر هیچ‌یک از این مفاهیم را به همان شکل اصلی به‌کار نبرده است. (مثلاً نگاه کنید به [۲۹]).

1. inhabited 2. subjectivism 3. soliptsistic 4. H. Fichté
5. pessimism 6. A. Schopenhauer 7. H. Bergson

نظر براؤر درباره ریاضیات برای فهم شهودگرایی اساسی است. نظرات او دربارهٔ «وجود» «اشیاء ریاضی»، «منطق» و «زبان» همه نتایج این توصیف او از ریاضیات است:

«ریاضیات آفرینش آزاد[1] ذهن است. این آفرینش آزاد، ساختن دستگاههای ریاضی براساس شهود است». بنابراین اشیاء ریاضی، ساختمانهای ذهنی هستند.

۱. اشیاء ریاضی، ساختمانهای ذهنی هستند.

۱.۱. اشیاء ریاضی در عالم خارج، مستقل از ذهن، وجود عینی ندارند.

۲.۱. چنین نیست که اشیاء ریاضی، مستقل از ذهن، در خارج موجود باشند و ریاضیات در پی کشف آنها باشد.

۱.۲.۱. یک شئ ریاضی وقتی به عرصهٔ وجود پا می‌گذارد که ساخته شود.

۲.۲.۱. دامنهٔ «وجود» برای اشیاء ریاضی ثابت نیست. در یک ساختمان ریاضی، اشیاء جدید به «وجود» می‌آیند.

۱.۲.۲.۱. صدق یک حکم ریاضی که در قالب سور عمومی[2] بیان می‌شود، نه تنها بر اشیاء موجود (یعنی ساخته‌شده) بلکه به اشیائی که در آینده نیز به وجود خواهند آمد (ساخته خواهند شد) مبتنی است.

۲.۲.۲.۱. احکامی که در قالب سور وجودی[3] بیان می‌شوند، یک ارتباط ناکامل[4] برقرار می‌کنند.

۱.۲.۲.۲.۱ ساختن یک شئ که در یک حکم وجودی به آن ادعا شده، ارتباط را کامل می‌کند.

۳.۱. از پیشینی‌های کانتی، فقط «شهود زمان» باقی می‌ماند.

۴.۱. پیشینی بودن «مکان» کانتی، با ساختمان پیوستار از بین می‌رود.

۲. مفهوم «ساختمان»، ابتدائی است.

۱.۲ اینکه یک برهانْ ساختی است، وقتی که آن‌را «می‌بینیم» تأیید می‌شود یا رد می‌شود.

۲.۲ مفهوم «ساختمان» خود امری ثابت نیست. در آینده روشهایی برای برهان ممکن است یافت شود که ساختی تلقی شوند.

۳.۲ مفهوم ساختمان تعبیر ناشدنی[5] است.

۱.۳.۲ تعابیر تحقق پذیری[6] کلینی، جهانهای ممکن[7] کریپکی، نظریهٔ انواع مارتین لاف، حساب ساختمانها[8]ی کوکاند و اوت[9]، [ ]، و ... جزئی هستند. این تعابیر «وجوهی» از مفهوم ساختمان را توضیح می‌دهند.

۳. ریاضیات فاقد زبان است.

۱.۳ کلماتی که در یک اثبات ریاضی به‌کار می‌روند تنها یک همراه برای ساختمان ریاضی‌اند.

۲.۳ حتی در منطق و ریاضیات نیز نمی‌توان دو شخص یافت که در مفاهیم اساسی یکسان فکر کنند.

۳.۳ مسئله کلیدی ریاضیات در ارتباط با زبان، دقت است.

۱.۳.۳ دقت به معنای حذف اشتباه و سوء فهم به هیچ شکل زبانی تضمین شدنی نیست.

۲.۳.۳ ساختمانهای بی‌زبان[1] (فاقد زبان) که از خود بازشکفتگی[2] شهود بسیط نشأت می‌گیرند فقط به‌خاطر حضور در حافظه دقیق و درست‌اند.

۳.۳.۳ دقت ناشی از خود شکفتگی شهود بسیط در تبادل بین انسانها، بخاطر اینکه در یک زبان به‌عنوان ابزار ارتباط بیان می‌شوند، از بین می‌رود.

۴. ریاضیات مستقل از منطق است و منطق یکی از کاربردهای ریاضیات است.

۱.۴ مفهوم اصلی منطق ریاضی، مفهوم برهان است. مفهوم حقیقت (یا صدق) به مفهوم برهان احاله می‌شود.

۲.۴ منطق ریاضی عبارت است از مدل ریاضی ساختمانهای ریاضی.

۱.۲.۴ معیار اعتبار قواعد منطق ریاضی در ساختمانهای ریاضی است که با آنها همراه باشد.

1. free creation 2. universal quantifier 3. existential quantifier

۴. این اصطلاح از کلینی است. Incomplete communication

5. uninterpreted 6. realizability 7. possible worlds

8. calculus of constructions 9. Coquand and Heut

1. languageless 2. self-unfolding

مراجع

1. E. Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, New York (1967).
2. D. Bridges and F. Richman, *Varieties of Constructive Mathematics*, Cambridge University Press, (1987).
3. L. E. J. Brouwer, "Life, art and mysticism", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, (3) **37** (1996) 381-432.
4. _____, *Collected Works I*, ed. A. Heyting, North-Holland (1975).
5. L. E. J. Brouwer and B. de Loor, "Intuitionistischer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra", *Nederl. Akad. proc.* **27** (1924), 186-188.
6. D. van Dalen, "An interpretation of intuitionistic analysis", *Annals of pure and Applied Logic*, **13** (1978) 1-43.
7. _____, "Why Constructive Mathematics", in: W. Depauli-Schimanovich et al. (eds.), *The Foundational Debate*, Kluwer (1995) 141-157.
8. _____, *Logic and Structure*, Third printing, Springer (1997).
9. M. Franchella, "L. E. J. Brouwer: toward intuitionistic logic", *Historia Mathematica* **22** (1995) 304-322.
10. A. O. Gelfond, *Transcendental and Algebraic Numbers*, Dover, New York (1960).
11. N. D. Goodman and J. Myhill, "Choice implies excluded middle", *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* **23** (1978) 461.
12. R. L. Goodstein, *Recursive Analysis*, North-Holland (1961).
13. _____, *Recursive Number Theory*, North-Holland (1957).
14. A. Heyting, "Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik, II", *Physikalisch-mathematische Klasse*, (1930) 57-71.

15. ———, "Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik, III", *Physikalisch-mathematische* Klasse (1930) 158-169.

16. ———, "Untersuchungen über intuitionistische Algebra", *Nederl. Akad. wetensch. Veh. Tweede Afd.* (1941).

17. S. C. Kleene, "On the interpretation of intuitionistic number theory", *JSL*, **10** (1945) 109-124.

18. ———, *Introduction to Metamathematics*, North-Holland (1952).

19. G. Kreisel, "Foundations of intuitionistic Logic", in: E. Nagel, P. Suppes and A. Tarski, eds. *Logic, Methodology and Philosophy of Science* (1962) 198-210.

20. L. Kronecker, "Über den Zahlbegriff", *J. Reine Angew, math.* **101** (1887) 337-355.

21. P. Martin-Löf, *Intuitionistic Type Theory*, Bibliopolis, Napoli (1984).

22. R. F. Mines, F. Richman and W. Ruitenburg, *A Course in Constructive Algebra*, Springer (1988).

23. J. Molk, "Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie de l'élimination", *Acta Mathematica*, **6** (1-166) 1885.

24. H. Poincaré, *Science et Méthode*, Flammarion, Paris (1908).

25. W. Ruitenburg, *Intuitionistic Algebra, Theory and Sheaf Models*, PhD thesis, Utrecht, The Netherdands (1982).

26. D. Scott, "Identity and existence in intuitionistic Logic", in: M. P. Fourman, C. J. Mulvey and D. Scott, eds. *Application of Sheaves*, Springer (1979).

27. A. Sidenberg, "Constructions in Algebra", *Trans. Amer. Math. Soc.* **197** (1974) 273-313.

28. T. Skolem, "Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer verän derlichen mit unendlichen Ausdehnungsbéreich", *videnskaps selskapet i kristiana. skrifler Utigit* (I), **6** (1923) 1-38.

29. W. van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, North-Holland (1995).

30. A. S. Troelstra and D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics*, vols. I, II, North-Holland, (1988).

31. H. Weyl, "Das Kantinuum", in *Das Kantinuum und andere Monographien*, Chelsea, New York (1966).

* * * * * *

* محمد اردشیر، دانشگاه صنعتی شریف و پژوهشگاه دانشهای بنیادی

ardeshir@math.sharif.ac.ir

براؤر و توپولوژی•

دیرک وان دالن*
ترجمهٔ ابوالقاسم لاله

پیش از ورود براؤر به عرصهٔ ریاضیات، هلند چند ریاضیدان برجسته پرورانده بود که شاخصترین آنها کریستیان هویگنس، سیمون استوین و توماس یان استیلتیس بودند. فقط ریاضیدان اخیر به قرن نوزدهم تعلق داشت، اما وی در هلند به ریاضیات نپرداخت. درواقع، سطح ریاضیات هلند طی قرنهای هجدهم و نوزدهم بسیار پایینتر از کشورهای همسایهٔ آن بود؛ در مورد علوم دقیق دیگر نیز وضع به همین منوال بود، اما در انتهای قرن نوزدهم آن شاخه‌های علم با تحقیقات بین‌المللی همگام شدند. افرادی چون واندر وال[1]، کامرلینگ اونز[2]، لورنتس[3]، فان هوف[4]، هوگو دوریس[5] و دیگران در رشتهٔ خودشان در بالاترین سطح بودند.

براؤر در ۲۷ فوریهٔ ۱۸۸۱ در اورسخی[6] (که اکنون بخشی از روتردام است) به دنیا آمد، پدرش که مدیر مدرسه بود شش ماه بعد شغلی در مدمبلیک[7] پذیرفت و خانوادهٔ براؤر یازده سال بعد را در آنجا گذراندند و سپس راهی هارلم شدند که پدر در آنجا مدیر یک مدرسه متوسط شد. دو برادر دیگر براؤر، لکس و آلدرت در مدمبلیک متولد شدند.

دوران دبیرستان براؤر بدون هیچ مشکلی سپری شد. وی در سال ۱۸۹۰ در سن نه سالگی وارد دبیرستان (مدرسهٔ هوخره برگر[8]) شد که این امر تا آن زمان سابقه نداشت.

در هارلم دوباره به مدرسهٔ هوخره برگر رفت؛ در سال ۱۸۹۴ وارد گیمنازیوم (جانشین مدرسهٔ قدیم لاتین) شد و در عین حال خود را برای امتحانات نهایی مدرسهٔ هوخره برگر آماده می‌ساخت. در سال ۱۸۹۵ موفق به دریافت مدرک مدرسهٔ هوخره برگر شد و دو سال بعد (دوران سه سالهٔ مدرسه را در دو سال گذراند) از گیمنازیوم با دو نوع دیپلم فارغ‌التحصیل

1. Van der Waals 2. Kamerlingh Onnes 3. Lorentz
4. van't Hoff 5. Hugo de Vries 6. Overschie 7. Medemblik
8. Hogere Burger School

شد. وی در تمام مدت تحصیل شاگرد اول بود، و تنها نقطهٔ ضعفش درس هنر بود.

مدرک گیمنازیوم حق ادامهٔ تحصیل در دانشگاه را به وی داد. دانشگاه منتخب او دانشگاه شهری آمستردام بود، که فیزیک آن زیر نظر واندر وال بود. در ریاضیات دو استاد تدریس می‌کردند: دیدریک یوهانس کورتوخ[1] و وان پش[2] که فرد دوم کارهای علمی مهمی نکرده است؛ اما کورتوخ ریاضیدان کاربردی بسیار برجسته‌ای بود. او اولین دکتر دانشگاه جوان آمستردام بود، و درجهٔ دکتریش را از واندر وال دریافت کرده بود. سه سال بعد از دریافت دکتری، استاد دانشگاه آمستردام شد. امروزه عمدتاً شهرت وی به‌خاطر معادلهٔ کورتوخ-دوریس است، اما درواقع وی در بخشهای بسیار متفاوتی از ریاضیات، از ترمودینامیک، تا فلسفهٔ ریاضیات، فعال بود. مبنای ریاضی نظریه‌های فیزیکی واندر وال تا حد زیادی کار کورتوخ بود (مثلاً بررسی رویهٔ واندر وال، تا زدن رویه‌ها)، و به‌علاوه چاپ مجموعهٔ آثار هویگنس نیز عمدتاً کار او بوده است.

اساساً براؤر ریاضیات را از کورتوخ آموخت؛ اما دومین شخصیتی که در همان سالهای اول روی وی تأثیری عمیق گذاشت، یک ریاضیدان کم و بیش خود ساخته به اسم خریت مانوری[3] بود.

براؤر دورهٔ دانشکده را چندان سریع طی نکرد؛ سه سال و نیم طول کشید تا امتحان میان‌دوره‌ای[4] را بگذارند، که می‌شد بعد از دو سال گذارند. در ۱۶ ژوئن ۱۹۰۴ امتحان نهایی، یعنی امتحان دکتری را گذارند. جمعاً هفت سال طول کشید تا به درجهٔ دکتری نائل شد (که با دورهٔ کارشناسی ارشد فعلی قابل مقایسه است) و این مسلماً برای چنان دانشجوی درخشانی افتخارآمیز نبود، براؤر واقعاً درخشان بود و هر دو امتحان را با درجهٔ عالی گذارند. باید

1. Diederik Johannes Korteweg 2. A. J. Van Pesch 3. Gerrit Mannoury 4. candidaatesexamen

متذکر شد که وی قبل از امتحان نهایی سه مقالهٔ تحقیقاتی به‌چاپ رسانده بود: [Br 04a]، [Br 04b]، [Br 04c].

مقاله‌های وی در ارتباط با تجزیهٔ دورانهای فضای اقلیدسی چهار بعدی است. به زبان امروزی براؤر نشان داد که $SO_4 \cong SU_2 \times SU_2/\pm(1,1)$. اثبات وی کاملاً هندسی بود؛ در مقالهٔ سوم یک استنتاج جبری اضافه کرد. مقاله تا حدی موجب شناخته شدن وی شد، اما در ضمن او را گرفتار اولین منازعهٔ خود بر سر تقدم کرد. یانکه[1] استاد برلینی ادعا کرد که وی زودتر به نتیجهٔ اصلی مقاله رسیده بوده است. براؤر که از مقالهٔ یانکه مطلع نبود، نتیجه او را تحلیل کرد و نشان داد که به‌غیر از مشابهتهایی در صورتبندی، زمینه‌ای برای ادعای یانکه وجود ندارد.

دلیل اصلی طول کشیدن دوران تحصیل براؤر ضعف جسمانی وی بود. در دوران دانشجویی و طی چند سال بعد، دچار حملات عصبی می‌شد و از ضعف عمومی در رنج بود.

شرح دوران تحصیل براؤر را در مکاتبات وی با شاعر معاصرش کارل آداما وان اسخلتما می‌توان خواند؛ مراجعه کنید به [Da 84].

خدمت سربازی موجب وقفه در نیمهٔ دوم تحصیل وی شد. هرچند براؤر با تمرینهای بدنی بیگانه نبود ــ وی به پیاده‌روی، فوتبال و شنا بسیار علاقه داشت و در سال ۱۸۹۹ پیاده سفری به ایتالیا کرد ــ اما نمی‌توانست خود را با محیط نظامی تطبیق دهد. سربازان دیگر آزارش می‌دادند و مافوقهایش او را مسخره می‌کردند، او شدیدترین حملات عصبی را در این دوره متحمل شد.

براؤر هم به ریاضیات و هم به فلسفه علاقه‌مند بود؛ فلسفه برای او تا حدی جنبهٔ سرگرمی داشت و مطالعهٔ رسمی دربارهٔ آن نداشت. عشق واقعی به ریاضیات را مانوری که فردی همه‌فن حریف بود، به‌شدت در او برانگیخت. خربت مانوری، که پدرش ناخدای کشتی بازرگانی بود، از طریق شغل معلمی به ریاضیات روی آورده بود. وی دبیرستان را در سال ۱۸۸۵ تمام کرده و سه ماه بعد گواهینامهٔ معلمی را دریافت کرده بود. در بسیاری از مدرسه‌ها تدریس کرد، تا اینکه در سال ۱۹۱۸ در دانشگاه به مرتبهٔ استادی رسید. هر چند هرگز به دریافت درجهٔ دانشگاهی نایل نشد، اما چند مقالهٔ ارزشمند ریاضی قبل از شروع فعالیت ریاضی براؤر به‌چاپ رساند. در سال ۱۸۹۸ مقاله‌ای[2] نوشت، که اولین مقاله به‌زبان هلندی در مبحث جدید توپولوژی بود.

همچنین مانوری اولین کسی بود که منطق نمادی پئانو را در هلند معرفی کرد. علی‌رغم تلاشهای کورتوخ، که برای مانوری تدریس خصوصی در روزهای یکشنبه گذاشته بود و به او اجازهٔ استفادهٔ از کتابخانهٔ شخصیش را داده بود (تا آن زمان هیچ کتابخانهٔ ریاضی در دانشگاه آمستردام وجود نداشت)، مانوری مجال تحصیل برای دریافت درجهٔ رسمی دانشگاهی نیافت. اما استعداد ریاضی وی به‌خوبی شناخته شده بود، به‌نحوی که در سال ۱۹۰۳ دانشگاه آمستردام وی را به عنوان privaate docent[3] پذیرفت. روش اصیل و پر نشاط مانوری در ریاضیات شدیداً براؤر را تحت تأثیر قرار داد. متن درسهای مانوری سرانجام چاپ شد [Ma 09].

1. E. Jahnke

۲. [Ma 98]

۳. معادل Privatdozent آلمانی، شغلی در دانشگاه با حقوقی نسبتاً کم، با امکان تدریس و اقامت در اطراف دانشگاه، تا زمانی که امکان بهتری در جای دیگر فراهم شود.

در سنّت دانشگاهی هلند، فردی که در دانشگاه تحصیل می‌کرد نخست به دریافت گواهینامهٔ دکتری با عنوان doctorandus نائل می‌شد، و سپس یا باید شغلی انتخاب می‌کرد و یا برای دریافت درجهٔ Ph.D ادامهٔ تحصیل می‌داد. در ریاضیات شغلی غیر از «تدریس» وجود نداشت، اما حتی مدرک دکتری تضمینی برای به‌دست آوردن یک سمت دانشگاهی نبود. دانشگاهها تعداد کمی استاد ریاضیات، و به ندرت سمتهای پایینتر از استاد، داشتند. اگر یک دکتر ریاضی شانس می‌آورد، استادی فوت می‌کرد و دانشکده جایش را به او می‌داد؛ و تا آن موقع چاره‌ای نبود جز تدریس در دبیرستان و ادامهٔ کارِ مقاله چاپ کردن به این امید که روزی بخت به انسان روی آورد.

خُلق و خوی براؤر مناسب شغل تدریس نبود، از این رو تصمیم وی برای ادامهٔ تحصیل منطقی به‌نظر می‌رسید. حتی بعد از پایان تحصیلات دانشگاهی او هنوز مردد بود که ریاضیدان شود یا فیلسوف. بالاخره ریاضیات را برگزید، اما بعد از سیری کوتاه در قلمرو فلسفه.

براؤر در سال ۱۹۰۵ یک رشته سخنرانی تحت عنوان «فلسفهٔ اخلاق» ایراد کرد، که با عنوان «زندگی، هنر و عرفان» به چاپ رسید. وی در این سخنرانیها به تشریح یک نگرش عرفانی به جهان، پرداخت. چند موضوع که در کارهای علمی و بنیادی بعدی وی اهمیت دارند، در اینجا مطرح شده است، از آن جمله نظر منفی وی دربارهٔ نقش زبان و این عقیده که سلطهٔ طبیعت یا همنوعان گناه است.

براؤر قبل از اینکه پایان‌نامه‌اش را بنویسد، مقالاتی در زمینهٔ آنالیز برداری به چاپ رساند: «میدان نیروی فضاهای نااقلیدسی با خمیدگی منفی» [Br 06b]، «میدان نیروی فضاهای نااقلیدسی با خمیدگی مثبت» [Br 06c]، «توزیعهای برداری چند بعدی» [Br 06a]. براؤر در مقالهٔ اول ابزارهای هندسهٔ دیفرانسیل معاصر را به‌کار برد، اما مفهوم جدید «جابه‌جایی موازی» را افزود، لذا وی اولین ریاضیدانی بود که این مفهوم را، هرچند در یک حالت خاص، به‌کار برد. مقالهٔ سوم حاوی اثباتی از قضیهٔ استوکس در بُعد بالاتر است. ظاهراً وی نمی‌دانست که پوانکاره در سالهای ۱۸۸۷ و ۱۸۹۹ این قضیه را بیان کرده است. بعداً [Br 19c] وی صریحاً به تقدم پوانکاره در بیان قضیه اذعان کرد، اما افزود «ولی بدون ارائهٔ اثبات».[1]

پایان‌نامه‌اش که در ۱۹ فوریهٔ ۱۹۰۷ از آن دفاع کرد، آمیزه‌ای از چند مبحث بود. از مکاتبه‌های وی با استاد راهنمایش، کورتوخ، چنین برمی‌آید که اصولاً براؤر تمایل داشته یک بخش فلسفی مفصل در رسالهٔ خود بیاورد اما کورتوخ چنین اجازه‌ای را به وی نداده و براؤر را ملزم کرده بحث را به مباحث ریاضی محدود کند.

در نامه‌ای که براؤر به کورتوخ نوشت ادعا کرد بخش ریاضی رسالهٔ وی به‌قدر کافی پرمحتواست، و او توانسته است سه تا از مسائل هیلبرت را حل کند ـ مسألهٔ شمارهٔ ۱، مسألهٔ پیوستار، مسألهٔ شمارهٔ ۲، سازگاری حساب، و مسألهٔ شمارهٔ ۵، حذف شرایط مشتق‌پذیری از نظریهٔ گروههای لی[2].

ادعای وی ممکن است خوانندهٔ امروزی را شگفت‌زده کند، اما باید توجه داشت که براؤر دو مسألهٔ اول را در چارچوب روش ساختی[3] و نه در چارچوب

۱. اسخوتن [Schouten] در کتاب خود *Ricci-kalkül* تقدم براؤر را تصدیق می‌کند، اما ظاهراً مؤلفان بعدی وی را فراموش کرده‌اند.

۲. نامهٔ براؤر به کورتوخ، ۵ نوامبر ۱۹۰۶؛ نگاه کنید به [Da 81].

3. constructive

روش اصل موضوعی یا فراریاضی در نظر گرفته بود. بنابراین راه حل او در چارچوب دیگر مفهوم خود را از دست می‌دهد. اما حل مسألهٔ پنجم، کاملاً ریاضی بود، هرچند که کامل نبود. براؤر در فصل اول شرایط مشتقپذیری را در حالت خاص یک پارامتری با روش ساخت ظریفی حذف کرد.

از این‌رو پایان‌نامهٔ وی شامل اولین پژوهش براؤر در توپولوژی است. وی بعداً صورت جدیدی از آن را به گردهمایی بین‌المللی ریاضی در رُم ارائه داد [Br 09c] که متعاقباً نتایج آن در ماتماتیشه آنالن [Br 09d] به چاپ رسید. وی به تحقیقات خود در [Br 09c] و [Br 09b] ادامه داد؛ مقالهٔ دوم به‌حالت دو بعدی می‌پردازد. براؤر در نامه‌ای به اوریسون (۱۹۲۴/۴/۹) اظهار کرد که مطالبی برای یک مقالهٔ دیگر دارد، که متأسفانه هیچ وقت چاپ نشد و حتی دستنوشتهٔ آن نیز پیدا نشد. احتمالاً این مطالب در یکی از آتش‌سوزیهای خانهٔ براؤر از بین رفته است. شاید گردهمایی رُم منبع الهام یکی از کارهای تحقیقاتی براؤر در سالهای بعد بوده است. متن سخنرانی پوانکاره دربارهٔ آیندهٔ ریاضیات (که به‌وسیلهٔ خود پوانکاره ایراد نشد)، حاوی بخشی دربارهٔ «معادلات دیفرانسیل» بود، که در آن پوانکاره یک «بحث کیفی دربارهٔ خمهای تعریف شده به‌وسیلهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل» را مطرح کرده بود. براؤر این موضوع را طی یک سلسله مقاله با عنوان «دربارهٔ توزیعهای برداری پیوسته روی رویه‌ها» بررسی کرد: [Br 09f]، [Br 10a]، [Br 10b] وی با قضیهٔ وجودی پئانو شروع کرد و تنها از ویژگیهای پیوستگی استفاده کرد، برخلاف پوانکاره که درکارهای منتشر شدهٔ خود از دیدگاه جبری و تحلیلی به این موضوع پرداخته بود. علی‌رغم آنکه متن سخنرانی پوانکاره یک منبع الهام براؤر در این زمینه بود، چنین به‌نظر می‌رسد که براؤر اطلاعی از نوشته‌های پوانکاره دربارهٔ این موضوع نداشته است (رک. [Br 79]، ص ۴۲۳). هر چند این امر عجیب به‌نظر می‌رسد، اما می‌توانیم آن را به‌حساب محدودیت خاصی در آموزش ریاضی وی بگذاریم. مثلاً توجه کنید که ارجاع او به پوانکاره دربارهٔ قضیهٔ استوکس مربوط به ۱۹۱۹ است نه ۱۹۰۶.

در میان نتایج مقالهٔ اول، قضیهٔ مشهور مربوط به وجود نقاط تکین دیده می‌شود: «برداری که به‌طور پیوسته روی یک رویهٔ ساده‌ـهمبند، دوطرفه و بسته تغییر می‌کند باید دست‌کم در یک نقطه نامعین باشد».

در مقالهٔ دوم قضیه‌هایی ساختاری برای نقاط تکین و برای رفتار میدان (برداری) در همسایگی نقاط تکین اثبات می‌شوند. این مقاله حاوی یک تعریفِ کاملاً توپولوژیک از «عدد چرخشی[1]»، و مفهوم تغییر هوموتوپیک میدانهای برداری است. روشهای «توزیع برداری» که در مقاله‌ها به‌کار رفته از نظر توپولوژیک کاملاً مقدماتی‌اند.

هنگامی که براؤر مشغول تهیهٔ مقاله‌های خود دربارهٔ گروه لی برای ماتماتیشه آنالن بود، کشف کرد که برخی از نتایج توپولوژیکِ برگرفته از اثر شوئنفلیس[2] به‌نحو مطلوبی اثبات نشده‌اند، و یا حتی نادرست‌اند (نامه به هیلبرت، ۱۹۰۹/۵/۱۴). کتاب شوئنفلیش جلد دوم از یک بررسی جامع دربارهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها بود که نظریهٔ مجموعه‌های نقاط را نیز دربر می‌گرفت. این کتاب به سفارش انجمن ریاضی آلمان تألیف شده بود و انتخاب شوئنفلیس احتمالاً به این جهت بوده است که وی از سال ۱۸۹۹ به تحقیق در رشتهٔ جدید توپولوژی مجموعهٔ نقاط پرداخته بود. شهرت وی به‌سبب ارائهٔ عکس قضیهٔ خم ژوردان بود. ترکیب این دو حکم امروزه به قضیهٔ ژوردان‌ـشوئنفلیس

1. winding number 2. Schoenflies

مشهور است. براؤر با تأسف دریافت که استدلالهای شوئنفلیس کامل نیستند. وی مفاهیم و اثباتهای شوئنفلیس را دقیقاً بررسی کرد و گزارشی از بررسیهای خود را برای چاپ در ماتماتیشه آنالن برای هیلبرت فرستاد. بعد از چند مکاتبه که خالی از لحظات دردناک نیز نبود، مقالهٔ انتقادی براؤر و پاسخ شوئنفلیس در یک شماره از آن نشریه به‌چاپ رسید.

مقالهٔ «دربارهٔ تحلیل جا[1]»ی براؤر حاوی نکاتی دربارهٔ توپولوژی شوئنفلیس بود. نظریهٔ خمها در این تحقیق آماج شدیدترین حمله قرارگرفت. براؤر چند مثال ناقض ارائه داد که از میان آنها خمی که مربع را به سه ناحیه تقسیم می‌کند شهرت یافت. این خم اولین مثال از پیوستار تجزیه‌ناپذیر را به‌دست داد. وادا[2] طرحی جالب توجه برای ساختن آن عرضه کرد: جزیره‌ای را در یک دریای آب‌شور در نظر بگیرید، که دریاچهٔ آب شیرینی در آن واقع است. با حفاریهای مناسب متوالی کانالهایی از دریا و آب شیرین دریاچه حفر شده‌اند به‌طوری که همه‌جای جزیره را بجز یک خم که آبهای شور و شیرین را از هم جدا می‌کند فرا می‌گیرند. طرح مشابهی با دو دریاچه (مثلاً با آبهای سرخ و سیاه) خمی به‌دست خواهد داد که جزیره را به سه ناحیه تقسیم می‌کند.

مقالهٔ «دربارهٔ تحلیل جا» توپولوژی نظریهٔ مجموعه‌ها را به سطح جدیدی از دقت ارتقاء داد. این مقاله به‌صورت یکی از خواندنیهای ضروری برای توپولوژیدانهای نسل جدید درآمد.

حدوداً در همان زمان براؤر شروع به انتشار یک سلسله مقاله با عنوان «تبدیلهای پیوستهٔ یک به یک رویه به خود آن» کرد: ([Br 10a]، [Br 09b]، [Br 10d]، [Br 09f]، [Br 11e]، [Br 11k]، [Br 12c]). نقطهٔ شروع، این سؤال بود که «آیا یک نگاشت پیوستهٔ یک به یک از یک کره به خودش وجود دارد به‌طوری که حتی یک نقطه در جای خود باقی نماند»؟

ظاهراً این سؤال آغازکار براؤر در مورد نقاط ثابت است. در مقالات اول، هنوز روشها مقدماتی‌اند. تعداد کل مقاله‌ها ۸ تاست که آخرین آنها در سال ۱۹۲۰ انتشار یافت.

مقالهٔ دوم حاوی اولین فرمولبندی و اثبات، هرچند ناقص، از قضیهٔ انتقال صفحه‌ای است. صورت دقیق قضیه به شرح زیر است:

> فرض کنیم f یک همسانریختی جهت‌نگهدار از $\mathbb{R}^2$ بدون نقطهٔ ثابت باشد؛ آنگاه هر نقطهٔ p متعلق به دامنهٔ انتقالش برای f است. در اینجا دامنهٔ انتقال برای f یک زیرمجموعهٔ باز همبند از $\mathbb{R}^2$ با مرز $L \cup f(L)$ است، که L تصویر یک نشانندهٔ سره از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}^2$ است و L، $f(L)$ و $f^{-1}(L)$ را از هم جدا می‌سازد.

براؤر این قضیه را در مقالهٔ «اثبات قضایای انتقال در صفحه» خود به دقت اثبات کرد [Br 12b]. وی در مقالهٔ پنجم خود قبول کرد که اثبات قبلی او متکی بر استدلالهای ناقص در «گزارش[3]» شوئنفلیس [از سری گزارش‌های انجمن ریاضی آلمان] بوده است. همچنین [Fr 92] را ببینید.

خلاصه‌ای از بخش اول این رشته مقالات در ماتماتیشه آنالن چاپ شده است [Br 19e]. مسیر تحقیقاتی دیگری که براؤر در پیش گرفت، و فروید نتال آن را توپولوژیِ (به سبک) کانتورـشوئنفلیس می‌نامید، اساساً توپولوژی مجموعه نقاط بود. وی دو مقاله با عنوان «دربارهٔ ساختار مجموعه‌های بیکاست از

1. Zur Analysis Situs 2. Wada 3. Bericht

نقاط» منتشر کرد که در آن توسیع قضیهٔ کانتور-بندیکس را اثبات نمود ([Br 10c]، ص ۷۹۰)، و اولین گروه توپولوژیکی را که گروه لی نبود معرفی کرد؛ همان مرجع را ببینید.

مقالهٔ دوم وی حاوی تعمیم دیگری از قضیه بود؛ به‌علاوه براؤر قضیهٔ تحویلپذیری خود را صورتبندی و اثبات کرد ([Br 11f] ص ۱۳۸. رک. [AH 37] ص ۱۲۳).

همچنین براؤر اثباتی جدید اما با ابزارهای توپولوژی مقدماتی از قضیهٔ خم ژوردان ارائه داد؛ این اثبات یکی از زیباترین اثباتهای مقدماتی است که بسیار مورد تحسین هیلبرت قرار گرفت.

چند مقالهٔ دیگر در زمینهٔ توپولوژی به سبک کانتور-شوئنفلیس در مجموعهٔ آثار براؤر وجود دارند: «ملاحظاتی درباره چسبندگی نوع η» [Br 13a]، که حاوی تعمیمهای ابعاد بالاتر قضیهٔ کانتور است (همهٔ مجموعه‌های خطی مرتب شمارای چگال بدون نقاط انتهایی یکریخت هستند) و دو مقاله دربارهٔ مجموعه‌های G_δ.

می‌توان گفت که براؤر دچار نوعی دوگانگی بود. او قلباً یک ساختگرای جدی بود اما تمایلات ریاضیش بسیار هندسی و بالاخص توپولوژیک بود. در واقع استخدام وی به‌عنوان "Privaat docent" در درجهٔ اول به‌منظور تقویت هندسه در دانشگاه آمستردام صورت گرفت. عنوان سخنرانی آغاز کار وی در ۱۹۰۹/۱۰/۱۲، «ماهیت هندسه» بود (به زبان هلندی، [Br 75] صص ۱۱۲-۱۲۰)؛ در این سخنرانی مروری بر هندسهٔ آن زمان کرد و برخی ایده‌های هندسی دربارهٔ نظریهٔ نسبیت را مطرح کرد. براؤر نتیجه‌گیری کرد که با اتکاء بر هیچ‌گونه استدلال پیشینی نمی‌توان بخشهایی از هندسه را ممتاز قلمداد کرد. تعریف وی از هندسه بسیار آسانگیرانه بود: «هندسه به بررسی خواص فضاهای یک، یا چند بعدی می‌پردازد؛ به‌خصوص با رده‌بندی مجموعه‌های نقاط، تبدیلها و گروههای تبدیلهایی که در آن فضاها امکان‌پذیرند سر و کار دارد» ([Br 09e] ص ۱۵).

درهمان سخنرانی چند مسألهٔ حل نشده را مطرح کرد، مثلاً:

—«فضاهای با ابعاد متمایز تا چه میزان گروه [همسانریختیهای] متفاوتی دارند». وی افزود «بسیار محتمل است که این تفاوت همیشه وجود داشته باشد، اما اثبات آن ظاهراً بسیار مشکل است، و احتمالاً این مسأله تا مدتهای طولانی به‌صورت مسأله‌ای حل نشده باقی خواهد ماند».

— ... کسی مطمئن نیست که فضای سه‌بعدی دکارتی به‌وسیلهٔ یک رویهٔ بستهٔ ژوردان، یعنی تصویر پیوستهٔ یک به یک کره به دو ناحیه تجزیه شود.

براؤر سخنرانی خود را با این پیشنهاد خاتمه داد که تحلیل جا [توپولوژی] مبنای نظریه‌های ریاضی قرارگیرد و به‌عنوان نمونهٔ بارز، از بررسی توپولوژیک هندسه (به‌صورتی که هیلبرت در «دربارهٔ مبانی هندسه» [Hi 02] آورده است)، نام برد. همچنین به مبانی هندسه [اثر هیلبرت] ضمیمهٔ IV مراجعه کنید. در مورد هندسه، مختصات را بعداً با استفاده از روشهای وان اشتات[1] می‌توان معرفی کرد. «و بنابراین» براؤر نتیجه می‌گیرد که «اگر بتوان مختصات را بر مبنای توپولوژی بنا نهاد، لازم نیست در سایر رشته‌ها ممنوع شوند». اما روش «هندسی» بدون فرمول، نقطهٔ شروع جدیدی خواهد بود و روش تحلیلی به ابزاری غیرضروری مبدل خواهد شد.

1. Van Staudt

این امکان، و همین برتری روش هندسی است (حتی در بخشهایی از ریاضیات که هنوز این روش در آنها به‌کار نرفته) که من اصولاً خواسته‌ام در مطالب بالا به آن اشاره کنم.

این بیان روشنی از مرام هندسی براؤر است که او در ریاضیات خودش نسبت به آن وفادار ماند.

در واقع، براؤر سرگرم مسائل بنیادی توپولوژی بود. در اواخر سال ۱۹۰۹ به پیشرفت مهمی دست یافت. ظاهراً هنگامی که تعطیلات کریسمس را با برادرش در پاریس می‌گذراند، ایدهٔ «درجهٔ نگاشت» به ذهنش خطور کرد. در نامه‌ای به هیلبرت (۱۹۱۰/۱/۱) به مفهوم «درجه» اشاره کرد[1] (رک. [Br 76] ص ۴۲۱). در این نامه رهیافت او به مفهوم درجه هنوز جبری است، اما روشن است که براؤر به اهمیت و نتایج آن واقف بوده است. همچنین وی تعمیم قضایای نقطهٔ ثابت خود روی کره‌ها را به ابعاد بالاتر، و نه لزوماً به نگاشتهای پیوستهٔ دوسویی، صورتبندی کرد.

براؤر در مارس ۱۹۱۰ طی نامه‌ای به هیلبرت اظهار کرد که به حل قسمتی از مسألهٔ بُعد دست یافته است: فضاهای با بعد زوج و فضاهای با بعد فرد همسانریخت نیستند (نامه به هیلبرت، ۱۹۱۰/۳/۱۸)

براؤر ظاهراً باید در بهار یا در اوایل تابستان بر مشکلات غلبه کرده باشد و اثباتی رضایتبخش از ناوردایی بعد یافته باشد. وی مقاله‌ای ۵ صفحه‌ای در این زمینه به ماتماتیشه آنالن تسلیم کرد [Br 11a].

اساساً این مقاله حاوی روشهای درجهٔ نگاشت و تقریب سادکی، ناوردایی درجهٔ نگاشت تحت تغییر هوموتوپیک، نگاشت سادکی، و غیره است ... امروزه این اثباتْ متعارف است، اما در آن زمان اثباتی زیرکانه اما پیچیده تلقی می‌شد. وقتی بلومنتال ویراستار مجری (که ماتماتیشه آنالن را برای هیلبرت اداره می‌کرد) در سفری به پاریس در تعطیلات تابستان، با لبگ در بارهٔ مقالهٔ صحبت کرد، لبگ گفت که چند اثبات از این مطلب در دست دارد. یکی از آنها که جزئی از یک نامه به سردبیر بود در همان شمارهٔ ماتماتیشه آنالن، بلافاصله بعد از اثبات براؤر چاپ شد. براؤر شگفت‌زده شد، وی تقریباً بلافاصله دریافت که لبگ به اصل زیبایی اشاره کرده است که ناوردایی به‌طور سرراست از آن نتیجه می‌شود، اما همچنین مشاهده کرد که اثبات لبگ کاملاً نادرست است. اصلی که لبگ بیان کرده بود بدون اینکه واقعاً آن را اثبات کند، اصل مشهور و ظریفِ سنگفرش بود.

مکاتباتی طولانی و پیچیده بین براؤر، بلومنتال، لبگ، بر و احتمالاً دیگران انجام شد. در مقابل ایرادات، لبگ قول داد اثبات درستی ارائه دهد، اما علی‌رغم پافشاریهای براؤر و بلومنتال هیچ اثباتی تا سال ۱۹۲۱ ارائه نشد [Le 21]، و حتی در آن زمان نیز به گفتهٔ براؤر، اثبات وی اساساً همان اثبات سال ۱۹۱۳ براؤر بود.

در این ضمن لبگ اثباتهای دیگری از ناوردایی بعد به کونت راندو[2] ارائه کرده بود [Le 11a].

براؤر در [Br 09f] اظهارنظر کرد که: «اثبات اول، [Br 11e]، ناقص است. اثبات دوم، [Le 11b]، از لحاظ محتوا با اثبات من یکی است: اختلاف آن با اثبات من تنها در پیچیده‌تر کردن مسیر فکری است.»

۱. فروید‌نتال تاریخچهٔ کشف درجهٔ نگاشت و کاربردهای آن را در جلد مربوط به توپولوژی از مجموعه آثار براؤر شرح می‌دهد.

2. Comptes Rendus

براؤر در نامه‌ای به بر (۱۹۱۱/۱۱/۵) می‌نویسد که «من قضیهٔ آنالن لبگ را چند روز بعد از انتشار آن اثبات کرده بودم، اما اثبات را منتشر نکردم زیرا خواستم فرصت این کار را به لبگ بدهم» ([Br 76] ص ۴۴۱).

برخورد لبگ و براؤر تنها نتایج منفی دربرنداشت، بلکه هر دو طرف را به تلاش بیشتر و هوشمندانه‌تر واداشت. لبگ مفاهیم جدیدی مانند اصل سنگفرش و چندگوناهای پیوندی را مطرح کرد و براؤر روشهای خود را به نهایتِ منطقی‌شان رساند. وی اثباتهای گوناگونی از احکام پایه‌ای ارائه داد، و پایه‌ای برای توپولوژیِ سالهای بعد (و حتی دهه‌های بعد) بنا نهاد. فرویدنتال در ملاحظات خود راجع به مقالهٔ براؤر در «مجموعهٔ آثار» جریان این نزاع را تحلیل و توصیف کرده است. اطلاعات بیشتر را می‌توانید در [Jo 81] و نیز در زندگینامهٔ در دست تهیهٔ براؤر بیابید. براؤر در اکتبر سال ۱۹۱۰ اثبات ناوردایی بعد را درگردهمایی انجمن ریاضی هلند ارائه داد. اثبات مزبور همان اثبات مقالهٔ آنالن است، اما نحوهٔ ارائهٔ آن در آن گردهمایی از لحاظ آموزشی بسیار جالب بود. در سال ۱۹۱۱ یک سلسله مقالهٔ پی‌درپی توپولوژی در آنالن انتشار یافت: [Br 11g]، [Br 11b]، [Br 11c]، [Br 11h].

به‌خصوص مقالهٔ اول از این سلسله مقالات اهمیت بسیار زیادی در توسعه و تکامل توپولوژی داشته است، این مقاله حاوی همهٔ ابزارهایی است که در مقالهٔ ناوردایی بعد به‌طور ضمنی به‌کار رفته‌اند، از آن جمله، ستارهٔ سادکی، خمینهٔ سادکی (اولین تعریف وی از خمینه در [Br 09b] آمده است)، سادک، نشانه‌گر[1]، تجزیهٔ سادکی، تقریب سادکی، درجهٔ نگاشت، هوموتوپی برای نگاشتها، ناوردایی درجهٔ نگاشت تحت تغییرات هوموتوپیک، شاخص تکینی.

علاوه بر آن، این مقاله حاوی تعمیم نقطهٔ تکین یک نگاشت روی کره به کره‌های با بُعد زوج است، و مقاله با بخشی در بارهٔ نقاط ثابت نگاشتهای پیوستهٔ گویها، که نقطهٔ اوج آن قضیهٔ مشهور نقطهٔ ثابت است خاتمه می‌یابد.

مقالهٔ دوم دربرگیرندهٔ اثباتی از قضیهٔ ناوردایی دامنه است: تصویر همسانریخت یک دامنه، یک دامنه است. در [Br 12c] اثبات دیگری از ناوردایی دامنه ارائه می‌شود، که این بار بر پایهٔ مفهوم درجهٔ نگاشت است.

براؤر مقالهٔ ناوردایی دامنهٔ خود را بسیار مهمتر از مقالهٔ ناوردایی بُعد می‌دانست. در واقع این قضیه نقش مهمی در آنالیز دارد، و همان حلقهٔ مفقوده در اثبات قضیهٔ اصلی توابع خودریخت (یا یکنواخت‌سازی) بود. براؤر به‌محض حل کردن مسألهٔ ناوردایی دامنه، به‌جستجوی کاربردی قانع‌کننده پرداخت. اندکی بعد به کاربرد آن در مسأله‌ای دست یافت که آن مسأله موجب سردرگمی نخبگان آنالیز شده بود. بعد از قدری تأمل و احتمالاً مشورت، نظریهٔ توابع خودریخت و یکنواخت‌سازی را زمینهٔ کار قرار داد.

مسألهٔ یکنواخت‌سازی ذهن برخی از ریاضیدانان شاخص قرن نوزدهم، از جمله کلاین و پوانکاره را به خود مشغول کرده بود. کلاین روشی موسوم به «روش پیوستگی» را برای حل مسأله مطرح کرده بود. اما این روش مستلزم یک حکم عمیق دربارهٔ همسانریختی بود.

بخت با براؤر یار بود که فهمید قضیهٔ ناوردایی دامنه دقیقاً همان حلقهٔ مفقوده را به‌دست می‌دهد. مکاتباتی بین براؤر و بلومنتال و پوانکاره انجام شده است، اما شکی نیست که براؤر این کاربرد را خود یافته بود. بی‌درنگ از وی دعوت شد تا در سمینار تخصصی دربارهٔ توابع خودریخت که در حاشیهٔ گردهمایی سالیانهٔ انجمن ریاضی آلمان از ۲۷ تا ۲۹ سپتامبر ۱۹۱۱ در کارلسروهه برگزار می‌شد، کار خود را ارائه دهد.

تکمیل موفقیت‌آمیز روش پیوستگی، متخصص برجستهٔ این رشته، یعنی پاول کوبه[1] راکه در سال ۱۹۰۶ به‌طور همزمان با پوانکاره مسألهٔ یکنواخت‌سازی را با استفاده از ابزارهای دیگر حل کرده بود تا اندازه‌ای عصبانی کرد. این ماجرا دورهٔ ناخوشایندی درپی داشت که در آن کوبه می‌کوشید براؤر را در قلمرو تخصصی خود شکست دهد. نامه‌های بسیاری بین آنها مبادله شد؛ کوبه از براؤر خواست تا دستنوشته‌هایشان را ردوبدل کنند، و بعد خود چنین نکرد. داستانهای ناگواری پیش آمد که از آن جمله، دست بردن در نمونهٔ چاپخانه‌ای مقالهٔ براؤر است. سرانجام براؤر از اینکه به موضوع یکنواخت‌سازی پرداخته است پشیمان شد.

سال ۱۹۱۲ نتایج بیشتری را برای توپولوژی جدید در برداشت: ناوردایی خم بسته (که شوئنفلیس آن را ادعا کرد اما اثبات نکرد [Sc 13])؛ معرفی ردهٔ هوموتوپی (تحت نام «رده») در مقالهٔ «تبدیلهای پیوستهٔ یک به یک رویه به خود، V» [Br 12c] به‌انضمام این قضیه که نگاشتهای با درجهٔ برابر به یک رده تعلق دارند. قضیهٔ اخیر موضوع سخنرانی براؤر در گردهمایی بین‌المللی ریاضیات در سال ۱۹۱۲ در کیمبریج بود [Br 12 d].

براؤر اولین کسی بود که به عرضه و بررسی تعدادی از مفاهیم توپولوژی پرداخت. اغلب آنها در بالا معرفی شده‌اند. وی اصطلاحات جدید اندکی ابداع کرد. او کاملاً قانع بود به اینکه توصیفهای مفاهیم را به‌جای اسامی کوتاهی که بر آنها دلالت کنند به‌کار برد. مثلاً از رده‌های هوموتوپی تنها به عنوان «رده‌ها» نام می‌برد، و نام «هوموتوپی» را فرد دیگری ابداع کرد. وی همچنین اصطلاح «Zyklosis» را که احتمالاً از لیستینگ اقتباس شده، به‌کار برده است؛ براؤر آن را برای تعریف اولیهٔ گروه بنیادی به‌کار می‌برد؛ رک. [Br 12a]، [Br 19e]. ویتوریس این اصطلاح را در چارچوب نظریهٔ هومولوژی به‌کار برد. استفاده از اصطلاح «نگاشت توپولوژیک» در معنای جدید آن را براؤر در سال ۱۹۱۹ باب کرد [Br 19b].

مقاله‌های شهودگرایانهٔ براؤر نیز همین نقص را دارند. مثلاً، تقریباً سی سال طول کشید تا قضیهٔ بادبزن را به این اسم نامگذاری کند (در تمام این مدت نام بی‌مسمای «قضیهٔ پهنه‌های متناهی» بر آن بوده است)

آخرین مقالهٔ وی در زمینهٔ روشهای جدید، «دربارهٔ مفاهیم طبیعی بعد» [Br 24] بود. براؤر در این مقاله یک تعریف ذاتاً توپولوژیک از مفهوم بعد ارائه داد. پوانکاره قبلاً در مقالهٔ «چرا فضا سه بعد دارد؟» [Po 12]، صورت اولیهٔ چنین تعریفیِ را ارائه داده بود، اما آن تعریف نارساییهایی داشت.

براؤر ایده را از پوانکاره گرفت و تعریف دقیقی به‌دست داد که در آن از مفهوم جداسازی استفاده شده بود. این تعریف به شرح زیر است: «عبارت π بُعد کلی درجهٔ n دارد»، که در آن n یک عدد طبیعی دلخواه است، یعنی برای هر انتخاب ρ و ρ' [زیرمجموعه‌های بستهٔ مجزا از π] یک مجموعهٔ جداساز π_1 وجود دارد که بُعد کلی درجهٔ $n-1$ دارد، اما برای هر انتخاب ρ و ρ' یک مجموعهٔ جداساز π_1 وجود ندارد که درجهٔ بعد آن کمتر از $n-1$ باشد.»

براؤر برپایهٔ این تعریف نشان داد که درجهٔ بعد $\mathbb{R}^n$ برابر با n است، و در نتیجه یک‌بار دیگر ناوردایی بُعد را اثبات کرد. در اثبات از اصل سنگفرش

1. indicatrix

1. Paul Koebe

استفاده شد که براؤر برهان کوتاهی برای آن با استفاده درجهٔ نگاشت به‌دست داد. این مقالهٔ خاص در دههٔ ۲۰ اسباب دردسر او شد، و منازعهٔ او با منگر بر سر همین مقاله بود. قبل از اینکه به ماجرای بعدی زندگی براؤر بپردازیم، تذکری راجع‌به روشهای توپولوژیک وی ضروری است. بسیاری از معاصران براؤر معتقد بودند که خواندن آثار وی مشکل است، و تا حدی حق با آنها بود. براؤر سرسختانه به روش هندسی خود چسبیده بود، وی یا از توان مفهوم هومولوژی که پوانکاره آن را ابداع کرده بود اطلاعی نداشت، و یا صرفاً ترجیح می‌داد که با روش مستقیم هندسی به‌موضوع بپردازد؛ مراجعه کنید به [Di 89] چون کسی این سؤال را از وی نپرسیده است، در این مورد فقط می‌شود حدس زد.

اما اکنون کاملاً مشخص شده است که محرک براؤر در به‌دست آوردن نتایج ریاضی هیچ‌گونه فشاری نبوده است. معمولاً کار ریاضی را مثل یک هنرمند در کار هنری، فارغ از فشارهای اقتصادی انجام می‌داد: وی به ریاضیات به‌دلیل زیبایی و ارضا کنندگیش عشق می‌ورزید، اما وقتی یک رگهٔ طلا کشف می‌کرد، تعقیب آن باب میل وی نبود. بعد از اثبات احکام پایه‌ای خوشحال می‌شد که ادامهٔ کار را به‌عهدهٔ افراد جاه‌طلب‌تر بگذارد. از این بابت باید سپاسگزار لبگ باشیم که بیش از یک مشاور خوش‌نیت او را به‌کار واداشت!

سال ۱۹۱۳ پایان اولین و پرحاصل‌ترین دورهٔ فعالیت توپولوژیک براؤر بود. مثل این است که اشتیاق براؤر به توپولوژی فروکش کرد.

جنگ جهانی اول براؤر را کم و بیش از وطن علمی دوم او یعنی گوتینگن دور ساخت و در نتیجه وی در سالهای جنگ به مبانی فلسفهٔ ریاضی که عشق نخستینش بود، بازگشت.

پیشرفتهای براؤر در مبانی با تدریس او ارتباط تنگاتنگ داشت. در سالهای ۱۹۱۲ـ۱۹۱۳ و مجدداً ۱۹۱۵ـ۱۹۱۶، ۱۹۱۶ـ۱۹۱۷ (علاوه بر درسهای دیگر) درسی در نظریهٔ مجموعه‌ها ارائه داد. با عنایت به یادداشتهای درسی وی می‌توان کم و بیش به سیر پیشرفت وی پی‌برد. درسهای اول او اصولاً دربارهٔ نظریهٔ مجموعهٔ نقاط بودند، که امروزه به «نظریهٔ توابع حقیقی» موسوم است. این درسها به سبک ساختگرایانهٔ سال ۱۹۰۷ وی تنظیم شده بودند، و بخشهای غیرساختی نظریه به این طریق مشخص شدند.

در ۱۹۱۶ـ۱۹۱۷ وی درس ۱۹۱۵ـ۱۹۱۶ را تکرار کرد، اما این بار ایدهٔ جدیدی را ابداع کرد: معرفی دنباله‌های انتخاب. وی در حاشیهٔ یادداشتهای ۱۹۱۵ـ۱۹۱۶ نظرگاه جدید خود دربارهٔ دنباله‌های انتخاب را اضافه کرد. ساده‌ترین حالت برای یک دنبالهٔ انتخاب، یک دنبالهٔ نامتناهی از اعداد طبیعی مشخص شده به‌طریق کم و بیش دلخواه است. با توجه به اینکه دنباله‌های انتخاب اشیایی کاملاً غیرقابل پیش‌بینی بودند، براؤر مشاهده کرد که ضعف آنها در عین حال نقطهٔ قوت آنهاست: اگر بدانیم که به هر دنبالهٔ انتخاب یک عدد طبیعی نسبت داده می‌شود آنگاه همان نامعین بودن آنها یک ویژگی پیوستگی را ایجاب می‌کند. به زبان ریاضی، وی براساس یک تحلیل مفهومی از دنباله‌های انتخاب خود اصل پیوستگی زیر را پذیرفت: همهٔ توابع از مجموعهٔ دنباله‌های انتخاب به اعداد طبیعی، پیوسته‌اند [Br 18].

به‌علاوه در خلال جنگ به یک انجمن فلسفی پیوست، که بعداً به «حلقهٔ سیگنیفیک[1]» شهرت یافت. در سال ۱۹۱۵ یکی از بزرگترین افتخاراتی که یک ریاضیدان ممکن بود از سوی همکارش به آن نائل شود نصیب براؤر شد: وی به عضویت هیأت ویراستاران ماتماتیشه آنالن منصوب شد.

براؤر بعد از جنگ تحقیقات توپولوژیک خود را از سر گرفت، اما با شدت کمتر، و نیز بدون دیدگاههای انقلابی. دلش واقعاً در هوای مبانی ریاضیات بود. در یک رشته مقاله شروع به تجدید بنای ریاضیات در مسیر شهودگرایی جدید خود کرد، یعنی شهودگرایی با اصول انتخاب: [Br 18]، [Br 19a]، [Br 19d]، [Br 21]، [Br 23]. در همان ایام حدوداً بیش از پانزده مقاله دربارهٔ توپولوژی رویه‌ها منتشر کرد. حاصل آنها تعدادی روش محاسباتی و نیز مقاله‌ای است که نتایج نیلسن دربارهٔ نقطهٔ ثابت روی چنبره را توسعه داده است ([Ni 20]، [Br 20]).

براؤر به یک شهودگرای تمام عیار مبدل شده و برنامهٔ جدید همهٔ حواس او را به خود مشغول کرده بود. در سال ۱۹۱۹ پس از آنکه براؤر در خلال یکی از تعطیلات در انگادین سویس با هرمان وایل دربارهٔ شهودگرایی جدید صحبت کرد، از پشتیبانی پرشور او برخوردار شد. وایل شهودگرایی را در مقالهٔ جنجال‌برانگیز خود «بحران جدید در مبانی ریاضیات» [We 21] به‌شدت تبلیغ کرد. یک سال بعد براؤر اولین سخنرانی عمومی خود در «جامعهٔ طبیعیدانان» در بادناوهایم (سپتامبر ۱۹۲۰) را ارائه داد. عنوان تعجب‌برانگیز سخنرانی وی «آیا هر عدد حقیقی یک بسط اعشاری دارد؟» بود.

مقالهٔ وایل بود که شعارهایی مانند «براؤر انقلاب است»، «وجود محض، پول بی‌ارزش است» را سر زبانها انداخت.

این مقاله تخیل خوانندگان را برانگیخت، و اغراق نیست اگر بگوییم که اولین شلیک در «جنگ بر سر مبانی» [Grundlagenstreit] بود. (رک. [Da 90].)

در سال ۱۹۲۳ براؤر بدون قصد قبلی دوباره به توپولوژی روی آورد. سخنرانی توپولوژیدان جوان روسی پاول اوریسون درگردهمایی سالیانهٔ انجمن ریاضی آلمان در ماربورگ دلیل این رویکرد بود. براؤر در همان گردهمایی به‌منظور سخنرانی دربارهٔ شهودگرایی حضور یافته بود. اوریسون توفیقاتی در جهت حل چند مسألهٔ توپولوژی از جمله، تعریفها و نظریه‌هایی دربارهٔ خم و بُعد، به‌دست آورده بود.

اوریسون که همراه آلکساندروف برای ملاقات همکارانش آمده بود، هنگام دیدار از گوتینگن مطالبی دربارهٔ مقالهٔ سال ۱۹۱۳ براؤر شنیده بود. وی در سخنرانی خود در ماربورگ به یک اشتباه براؤر در تعریف بعد اشاره کرد. اصطلاح «بسته» در تعریف جداسازی، بُعد نادرستی را به دست می‌داد. اوریسون یک مثال ناقض ساده ارائه کرد؛ در این مورد مراجعه کنید به [Br 24] ص. ۶۷۳. ظاهراً براؤر شرط «بسته» را سهواً گذاشته بود.

تحلیل دقیق و قانع‌کنندهٔ فروید‌نتال نشان می‌دهد که براؤر بلافاصله بعد از انتشار مقاله متوجه این اشتباه، به گفتهٔ وی تحریری، شده است. وی تذکری به این مضمون به نمونهٔ چاپی گزارش [Sc 13] خود منضم کرده بود که شوئنفلیس آن را بی‌ربط انگاشته و حذف کرده بود. حال سؤال (این سؤال در جنجال مربوط به منگر اهمیت اساسی پیدا کرد) این است که آیا براؤر

۱. Significs عبارت بود از مطالعهٔ رابطهٔ گوینده و شنونده در چارچوب عوامل روانشناختی و جامعه‌شناختی. مانوری معروفترین فرد در این زمینه بود ــ نشر ریاضی.

مفهوم درست (یعنی مفهوم جدید) همبندی را می‌دانسته است؟ انس تعریف جدید را در سال ۱۹۱۱ عرضه کرد، و خود براؤر نیز در همان سال (احتمالاً به‌طور مستقل) تعریف مشابهی ارائه کرد ([Le 11]، [Br 11e]). به‌علاوه، براؤر داور مقالهٔ دوم انس بود و لذا امکان ندارد متوجه نشده باشد که او و انس یک تعریف (جدید) ارائه کرده‌اند.

بنابراین، شواهد حاکی از جواب «مثبت»، قاطع به‌نظر می‌رسد. (رک. [Br 79] ص ۵۴۸). این موضوع قدری مهم است زیرا اگر تعریف درست براؤر از بُعد را اوریسون و بعد از او منگر می‌دانستند، ابهامی در مورد فضل تقدم در تعریف بعد پیش نمی‌آمد.

در سال ۱۹۲۴ اوریسون و آلکساندروف دوباره سفری به اروپای غربی کردند. این بار دیداری با براؤر داشتند که در وی احساس بسیار تحسین‌آمیزی نسبت به دو ریاضیدان روس پدید آورد. خصوصاً شیفتهٔ اوریسون شد و او را به دیدهٔ پسری بازیافته می‌نگریست. وی اوریسون را وارث به حق توپولوژی خود تلقی می‌کرد. اوریسون و الکساندروف بعد از بازدید از هلند به فرانسه سفر کردند و کلبه‌ای در بریتانی اجاره کردند. در آنجا اوریسون متأسفانه در یک حادثهٔ شنا غرق شد.[1]

براؤر از این واقعه سخت دلشکسته شد و تصمیم گرفت به‌جستجوی میراث علمی اوریسون بپردازد تا از نابغهٔ فقید قدردانی کرده باشد؛ وی به‌همراه الکساندروف به‌خوبی از عهدهٔ این کار برآمدند.

در سالهای بعد توپولوژیدانهای بسیاری با براؤر دیدار کردند: الکساندروف، ویتوریس، منگر و بعداً فرویدنتال، هورویچ و ویلسن.

منگر نزد هانس هان در وین تحصیل کرده، و در آنجا تحقیقات توپولوژیک خود را در سمینار هان آغاز کرده بود. او در سال ۱۹۱۲ مستقل از اوریسون (و براؤر) مفهوم خم و بُعد را مورد بررسی قرار داده بود. منگر پس از قدری مکاتبه در مارس ۱۹۲۵ به‌عنوان دستیار کارش را با براؤر شروع کرد، و در ماه مه همان سال الکساندروف نیز به آنها پیوست. در پاییز ویتوریس آمد و نیومن به‌مدت کوتاهی به آنجا سر زد. ویلسن، دانشجوی دکتری براؤر نیز در بحثهای توپولوژی شرکت می‌کرد. اعضای این گروه در لارن و بلاریکوم (در نزدیکی آمستردام) زندگی می‌کردند و جلسات آنها در خانهٔ براؤر در بلاریکوم تشکیل می‌شد.[2]

امی‌نوتر همراه با بارتل وان در وردن تعطیلات کریسمس را با براؤر گذراندند، نوتر به‌طور غیررسمی دربارهٔ تعریف گروههای بتی مجتمعها و مباحث مربوط صحبت کرد.

سرانجام اختلاف براؤر و منگر بالا گرفت؛ اختلاف نظر آنها عمدتاً بر سر میزان مشارکت ایشان در نظریهٔ بُعد بود. این مطلب باعث برخوردی شدید بین آنها از طریق نامه‌نگاری و وارد کردن اتهام شد. حتی میانجیگری هانس هان (که معلم منگر و دوست خوب براؤر بود) فایده‌ای نکرد. در سال ۱۹۲۷ منگر یک کرسی در وین پذیرفت و در آنجا به چهره‌ای شاخص در جامعهٔ ریاضی مبدل شد. خواننده برای کسب اطلاعات بیشتری می‌تواند به [Me 19]، [Jo 81]، و نظریات فرویدنتال در [Br 76] مراجعه کند.

در این ضمن براؤر طرح شهودگرایی خود را با توفیق چشمگیری دنبال می‌کرد. وی ابزارهایی برای استفادهٔ مناسب از ویژگیهای دنباله‌های انتخاب یافته بود. در این زمان هیلبرت مشغول پروراندن نظریهٔ برهان خود به‌عنوان پاسخی به دعاوی شهودگرایانه بود. بحث و جدل بر سر مبانی به تدریج جنبهٔ خارج از نزاکت به خود می‌گرفت. در حالی که براؤر سعی می‌کرد اقدام تحریک‌آمیزی نکند (در مقاله‌های او از اشخاص نام برده نمی‌شد)، هیلبرت به هر وسیلهٔ ممکن به مخالفان خود حمله می‌کرد. بعد از مشاجرات زیاد، جنبهٔ علمی «مجادله بر سر مبانی» با برکناری براؤر از ویراستاری ماتماتیشه آنالن از سوی هیلبرت به پایان رسید (رک. [Da 90]). براؤر از مباحثه کنار کشید و در طی ده سال بعد، چندان چیزی انتشار نداد. در نتیجهٔ فعالیت شهودگرایانهٔ دههٔ ۱۹۲۰ چند مقالهٔ توپولوژیک حاصل شد، که هدف آنها عمدتاً نشان دادن این مطلب بود که قبول دیدگاه شهودگرایانه آن‌طور که بعضی ادعا کرده‌اند به فاجعهٔ «قطع عضو» [کنار گذاشتن بخشهای ضروری و اساسی] منجر نمی‌شود. از جمله نتایج این مقاله‌ها عبارت‌اند از (صورتهای شهودگرایانهٔ) قضیهٔ هاینه بورل، تعریف بُعد، قضیهٔ «درستی» (ناوردایی بُعد)، قضیهٔ ژوردان.

تحقیقات توپولوژیک در آمستردام به‌وسیلهٔ فرویدنتال و هورویچ انجام می‌گرفت که دستیاران براؤر شدند؛ پیدایش نظریهٔ هوموتوپی نتیجهٔ تحقیقات هورویچ و فرویدنتال بود. هوپف در زوریخ با ادامه دادن روشهای براؤر آنها را به فراتر از حدود شناخته شده‌شان برد.

در اواخر دههٔ ۱۹۲۵ براؤر با سخنرانیهای خود در برلین (۱۹۲۷، [Br 92]) و وین (۱۹۲۸، [Br 29]، [Br 30]) جنجال زیادی را برانگیخت، اما اینها درواقع «وداعیه» وی بود.

براؤر در دههٔ ۱۹۳۰ عمدتاً در انزوا کار می‌کرد و به‌ندرت مقاله‌ای انتشار می‌داد. البته یک استثناء وجود دارد: وی در [Br 39] قضیهٔ مثلث‌بندی خمینه‌های مشتقپذیر را انتشار داد. سپس فرویدنتال اثبات دیگری ارائه کرد. هیچ یک از آنها اطلاع نداشتند که کرنز قبلاً قضیه را اثبات کرده است [Ca 34] و [Ca 35] و نیز [K 79] را ببینید.

در خلال جنگ جهانی دوم براؤر چند مقالهٔ شهودگرایانه انتشار داد. بعد از جنگ کار خود را ادامه داد و یک سلسله مقاله منتشر کرد که نشان می‌دادند آنالیز شهودگرایانه به نحو خاصی از آنالیز کلاسیک دور می‌شود.

ابداعات بعد از جنگ براؤر (که در سخنرانیهای قبلی او در برلین مستتر بود) سرانجام به‌عنوان «روش ذهن خالق» شناخته شدند. این روش جوابهای قاطع منفی) را جایگزین نتایج ضعیف به‌صورت «عجالتاً نمی‌توانیم تأئید کنیم که ... » (به اصطلاح مثالهای ناقض براؤری) کرد. براؤر در مقاله‌ای در «گزارشهای» انجمن سلطنتی بریتانیا [Br 52] یک صورت شهودگرایانه از قضیهٔ نقطهٔ ثابت ارائه داد. (به‌ازای هر $\epsilon > 0$، xای وجود دارد که $|f(x) - x| < \epsilon$، و f در اینجا یک تابع پیوسته است).

جریانات پس از جنگ براؤر را دچار افسردگی کرد. خدمت او در دانشگاه چند ماهی به دلائل جزئی به حال تعلیق درآمد و سرانجام با توبیخ وزیر به‌سر کار برگشت. نظرات وی در دانشکده دیگر مورد توجه قرار نمی‌گرفت و از آن بدتر، در آمستردام یک مرکز ریاضی تشکیل شد که همهٔ امکانات، حتی

---

۱. رک. [Al 79]، [Al 80]

۲. براؤر به اکثر بازدیدکنندگان حقوق می‌پرداخت. فهرست مختصری از دستیاران براؤر از این قرار است: ۱۹۲۵/۲۶ـ بلین فانته، منگر، الکساندروف، ویتوریس؛ ۱۹۲۶/۲۷ـمنگر، هورویچ؛ ۱۹۲۷/۲۸ـمنگر، هورویچ، گاون؛ ۱۹۲۸/۲۹ـهورویچ، گاون؛ ۱۹۲۰/۳۰ـ هورویچ، گاون؛ ۱۹۳۰/۳۱ـ هورویچ، گاون، فرویدنتال، ۱۹۳۱/۳۲ـ هورویچ، فرویدنتال.

بیش از آنچه در سال ۱۹۲۰ به براؤر در مقابل رد پیشنهاد کرسی براین وعده داده شده بود، در اختیار آن مرکز قرار گرفت. به‌علاوه نقش خودش در مجلهٔ کومپوزیتیو ماتماتیکا به ریاستی صوری کاهش یافته بود.

وی در خارج از هلند به افتخاراتی دست یافت که در آن کشور به آنها نرسیده بود. به‌عنوان عضو خارجی انجمن سلطنتی بریتانیا برگزیده شد؛ کیمبریج (انگلستان) به وی دکتری افتخاری اعطا کرد؛ و چندین دعوت از وی به‌عمل آمد. در سال ۱۹۵۳ طی مسافرتهایی به امریکا و کانادا یک سلسله سخنرانی کرد. به‌علاوه سخنرانیهایی در فنلاند، انگلستان، فرانسه، بلژیک، افریقای جنوبی انجام داد. وی هفت سال پس‌از ازدست دادن همسرش ایزه دهُل[1] زنده ماند و در دوم دسامبر ۱۹۶۶ در تصادم با اتوموبیل کشته شد.

کتابشناسی

[AH 35] Alexandroff, P. and Hopf, H. *Topologie I.* Springer Verlag, Berlin, 1935.

[Al 69] P. S. Alexandrov. Die Topologie in und um Holland in den Jahren 1920-1930. *Nieuw Arch Wiskunde*, 17: 109-127, 1969.

[Al 79] P. S. Alexandrov. Pages from an autobiography. *Russian Math. Surveys*, 34: 267-302, 1979.

[Al 80] P. S. Alexandrov. Pages from an autobiography. *Russian Math. Surveys*, 35: 315-358, 1980.

[Br 04a] L. E. J. Brouwer. Algebraic deduction of the decomposability of the continuous motion about a fixed point of S_4 into those of two S_3's. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 6: 832-838, 1904a.

[Br 04b] L. E. J. Brouwer. On a decomposition of a continuous motion about a fixed point O of S_4 into two continuous motions about O of S_3's. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 6: 716-735, 1904b.

[Br 04c] L. E. J. Brouwer. On symmetric transformation of S_4 in connection with S_r and S_l. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 6: 785-787, 1904c.

[Br 06a] L. E. J. Brouwer. Polydimensional vectordistributions. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 9: 66-78, 1906a.

[Br 06b] L. E. J. Brouwer. The force field of the non-Euclidean spaces with negative curvature. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 9: 116-133, 1906b.

[Br 06c] L. E. J. Brouwer. The force field of the non-Euclidean spaces with positive curvature. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 9: 250-266, 1906c. Corr. in 1909H2.

[Br 09a] L. E. J. Brouwer. Continuous one-one transformations of surfaces in themselves. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 11: 788-798, 1909a.

[Br 09b] L. E. J. Brouwer. Continuous one-one transformations of surfaces in themselves, II. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 12: 286-297, 1909b. Corr. in 1911H2.

1. Lize de Holl

[Br 09c] L. E. J. Brouwer. Die Theorie der endlichen continuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie. *Atti IV Congr. Intern. Mat. Roma*, volume 2, pages 296-303, 1909c.

[Br 09d] L. E. J. Brouwer. Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie, I. *Math Ann*, 67: 246-267, 1909d.

[Br 09e] L. E. J. Brouwer. *Het wezen der meetkunde*, 1909e. Openbare Les privaat docent 12.10.1909. (inaugural address). Also in 1919B.

[Br 09f] L. E. J. Brouwer. On continuous vector distributions on surfaces. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 11: 850-858, 1909f. Corr. in 1910D2.

[Br 10a] L. E. J. Brouwer. On continuous vectordistributions on surfaces, II. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 12: 716-734, 1910a.

[Br 10b] L. E. J. Brouwer. On continuous vectordistributions on surfaces, III. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 12: 171-186, 1910b.

[Br 10c] L. E. J. Brouwer. On the structure of perfect sets of points. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 12: 785-794, 1910c.

[Br 10d] L. E. J. Brouwer. Über eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich. *Math Ann*, 69: 176-180, 1910d.

[Br 11a] L. E. J. Brouwer. Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. *Math Ann*, 70: 161-165, 1911a.

[Br 11b] L. E. J. Brouwer. Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets. *Math Ann*, 71: 305-313, 1911b.

[Br 11c] L. E. J. Brouwer. Beweis des Jordanschen Satzes für den n-dimensionalen Raum. *Math Ann*, 71: 314-319, 1911c.

[Br 11d] L. E. J. Brouwer. Continuous one-one transformations of surfaces in themselves, III. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 13: 767-777, 1911d. Corr. in 1911J2.

[Br 11e] L. E. J. Brouwer. Continuous one-one transformations of surfaces in themselves, IV. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 14: 300-310, 1911e.

[Br 11f] L. E. J. Brouwer. On the structure of perfect sets of points, II. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 14: 137-147, 1911f.

[Br 11g] L. E. J. Brouwer. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Math Ann*, 71: 97-115., 1911g. Corr. in 1911M, 1921E.

[Br 11h] L. E. J. Brouwer. Über Jordansche Mannigfaltigkeiten. *Math Ann*, 71: 320-327, 1911h. Corr. in 1911N.

[Br 12a] L. E. J. Brouwer. Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve. *Math Ann*, 72: 422-425, 1912a.

[Br 12b] L. E. J. Brouwer. Beweis des ebenen Translationssatzes. *Math Ann*, 72: 37-54., 1912b.

[Br 30] L. E. J. Brouwer. *Die Struktur des Kontinuums* [Sonderabdruck], 1930.

[Br 39] L. E. J. Brouwer. Zum Triangulationsproblem. *Ind Math*, 1: 248-253, 1939.

[Br 52] L. E. J. Brouwer. An intuitionist correction of the fixed-point theorem on the sphere. *Proceedings of the Royal Society London*, 213: 1-2, 1952.

[Br 75] L. E. J. Brouwer. *Collected works I. Philosophy and Foundations of Mathematics (ed. A. Heyting).* North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1975.

[Br 76] L. E. J. Brouwer. *Collected works 2. Geometry, Analysis Topology and Mechanics. (ed. H. Freudenthal).* North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1976.

[Br 92] L. E. J. Brouwer. *Intuitionismus.* Bibliographisches Institut, Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992.

[Ca 34] S. S. Cairns. On the triangulation of regular loci. *Ann Math*, 35: 579-587, 1934.

[Ca 35] S. S. Cairns. Triangulation of the manifold of class one. *Bull Am Math Soc*, 41: 549-552, 1935.

[Da 90] D. van Dalen. The War of the Frogs and the Mice, or the Crisis of the Mathematische Annalen. *Math. Intelligencer*, 12: 17-31, 1990.

[Da 95] D. van Dalen. Hermann Weyl's intuitionistic mathematics. *Bull. Symb. Logic*, 1: 145-169, 1995.

[Da 81] D. van (ed.) Dalen. *L.E.J. BROUWER. Over de Grondslagen van de Wiskunde.* Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1981. ¸Brouwer's dissertation + correspondence and related papers.

[Da 84] D. van Dalen (ed.). *L.E.J. Brouwer, C.S. Adama van Scheltema. Droeve snaar, vriend van mij.* Arbeiderspers, Amsterdam, 1984.

[Da 57] D. van Dantzig. Gerrit Mannoury's significance for Mathematics and its Foundations. *Nieuw Arch Wiskunde*, 5: 1-18, 1957.

[Di 89] J. Dieudonné. *A History of Algebraic Differential Toplogy, 1900-1960.* Birkhäuser, Basel, 1989.

[Fr 92] J. Franks. A new proof of the Brouwer plane translation theorem. *Ergod. Th. and Dynamic Systems*, 12: 217-226, 1992.

[Fr 78] H. Freudenthal. Topologie in den Niederlanden: das erste Halbjahrhundert. *Nieuw Arch Wiskunde*, 26: 22-40, 1978.

[Hi 02] D. Hilbert. Ueber die Grundlagen der Geometrie. *Math Ann*, 56: 381-422, 1902.

[Br 12c] L. E. J. Brouwer. Continuous one-one transformations of surfaces in themselves, V. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 15: 352-360, 1912c.

[Br 12d] L. E. J. Brouwer.Sur la notion de 'classe' de transformations d'unemultiplicité.*Proc. V Int.Congr.Math.Cambridge 1912, II*, volume 2, pages9-10, 1912d.

[Br 12e] L. E. J. Brouwer. Zur Invarianz des n-dimensionalen Gebiets. *Math Ann*, 72: 55-56, 1912e.

[Br 13a] L. E. J. Brouwer. Some remarks on the coherence type η. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 15: 1256-1263, 1913a.

[Br 13b] L. E. J. Brouwer. Über den natürlichen Dimensionsbegriff. *J Reine Angew Math*, 142: 146-152, 1913b. Corr. in 1924M.

[Br 18] L. E. J. Brouwer. Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Erster Teil, Allgemeine Mengenlehre. *Kon Ned Ak Wet Verhandelingen*, 5: 1-43, 1918.

[Br 19a] L. E. J. Brouwer. Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Zweiter Teil, Theorie der Punktmengen. *Kon Ned Ak Wet Verhandelingen*, 7: 1-33, 1919a.

[Br 19b] L. E. J. Brouwer. Énumération des groupes finis de transformations topologiques du tore. *Comptes Rendus*, 168: 845-848, 1168, 1919b.

[Br 19c] L. E. J. Brouwer. Énumération des surfaces de Riemann regulières de genre un. *Comptes Rendus*, 168: 677-678, 832, 1919c.

[Br 19d] L. E. J. Brouwer. Intuitionistische Mengenlehre. *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.*, 28: 203-208, 1919d.

[Br 19e] L. E. J. Brouwer. Über die periodischen Transformationen der Kugel. *Math Ann*, 80: 39-41, 1919e.

[Br 20] L. E. J. Brouwer. Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Klassen von eindeutigen stetigen Transformationen der Ringflächen. *Math Ann*, 82: 94-96, 1920.

[Br 21] L. E. J. Brouwer. Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruch-Entwickelung?. *Math Ann*, 83: 201-210, 1921.

[Br 23] L. E. J. Brouwer. Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Erster Teil, Stetigkeit, Messbarkeit, Derivierbarkeit. *Kon Ned Ak Wet Verhandelingen*, 2: 1-24, 1923.

[Br 24] L. E. J. Brouwer. Bemerkungen zum natürlichen Dimensionsbegriff. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 27: 635-638, 1924.

[Br 29] L. E. J. Brouwer. Mathematik, Wissenschaft und Sprache. *Monats Math-Phys*, 36: 153-164, 1929.

[Ma 09] G. Mannoury. *Methodologisches und Philosophisches zur Elmentarmathematik.* Visser & Zn., Haarlem, 1909.

[Me 79] K Menger. *Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, Economics.* Reidel, Dordrecht, 1979.

[Ni 20] J. Nielsen. Über fixpunktfreie topologische Abbildungen geschlossener Flächen. *Math Ann*, 81: 94-96, 1920.

[Po 12] H. Poincaré. Pourquoi l+espace a trois dimensions. *Rev Metaph Morale*, 20: 484-504, 1912.

[Sc 13] A. Schoenflies. *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen, I, 1. Hälfte.* Teubner, Leipzig, Berlin, 1913.

[St 79] W. P. van Stigt. The rejected parts of Brouwer's dissertation on the Foundations of Mathematics. *Historia Mathematica*, 6: 385-404, 1979.

[St 96] W. P. van Stigt. L.E.J. Brouwer. Life, Art and Mysticism. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37: 381-429, 1996. Translation of [Brouwer05].

[We 21] H. Weyl. Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. *Math. Zeitschr*, 10: 39-79, 1921.

******

• این مقاله ترجمهٔ مقاله‌ای است که در کتاب *Handbook of Topology* به ویراستاری I. James چاپ خواهد شد.

* دیرک وان دالن، بخش ریاضیات و بخش فلسفهٔ دانشگاه اوترخت، هلند

[Jo 79] Dale M. Johnson. The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology, Part I. *Archive for History of Exact Sciences*, 20: 97-188, 1979.

[Jo 81] Dale M. Johnson. The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology, Part II. *Archive for History of Exact Sciences*, 25: 85-267, 1981.

[Ku 79] N. H. Kuiper. A short history of triangulation and related matters. *Proceedings Bicentennial Congress Wiskundig Genootschap (eds. P.C. Baayen, D. van Dulst, J. Oosterhoff)*, volume 1, pages 61-79, Amsterdam, 1979. Mathematisch centrum.

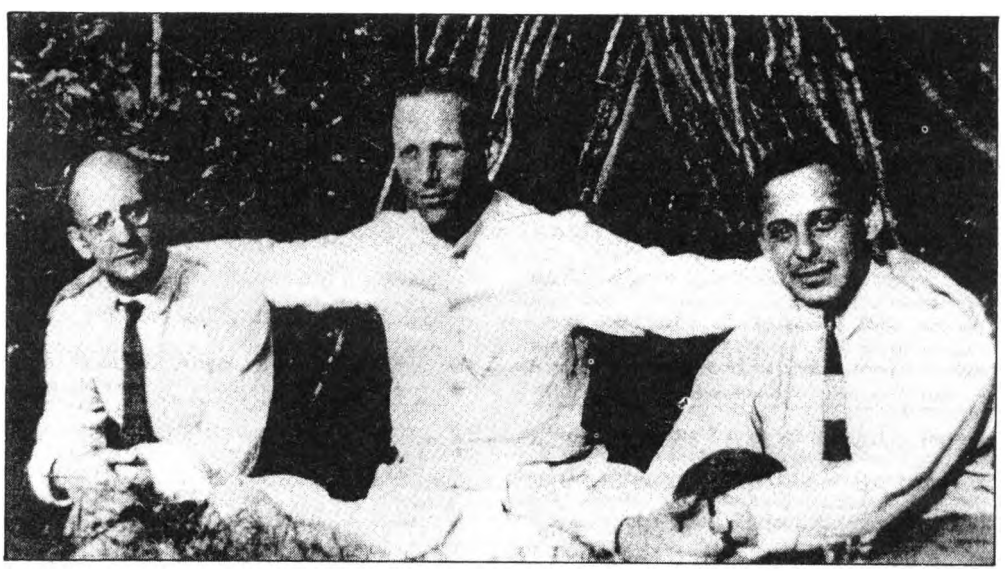
[Le 11a] H. Lebesgue. Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant respectivement des espaces à n et $n+p$ dimensions (Extrait d'une lettre à M.O.Blumenthal). *Math Ann*, 70:166–168, 1911a.

[Le 11b] H. Lebesgue. Sur l'invariance du nombre de dimensions d'un espace et sur le théorème de M. Jordan relatif aux variété fermées. *Comptes Rendus*, 152: 841-843, 1911b.

[Le 21] H. Lebesgue. Sur les correspondances entre les points de deux espaces. *Fund. Math.*, 2: 256-285, 1921.

[Le 11] N. J. Lennes. Curves in non-metrical analysis situs with an application in the calculus of variations. *American Journal of Mathematics*, 33: 287-326, 1911.

[Ma 98] G. Mannoury. Lois cyclomatiques. *Nieuw Arch Wiskunde*, 2: 126-152, 1898.



سه توپولوژیدان بزرگ (از چپ به راست) الکساندروف، براؤر، اوریسون

شهودگرایی و صورتگرایی*

لوئیتزن اِخبِرتوس یان براؤر
ترجمهٔ محمد اردشیر

موضوعی که می‌خواهم نظرتان را به آن جلب کنم مربوط به مبانی ریاضیات است. برای درک نظریه‌های مختلفی که در این حوزه وجود دارند ابتدا باید فهم روشنی از مفهوم «علم» به‌دست آورد؛ زیرا به‌عنوان بخشی از علم است که ریاضیات جایگاه خود را در تفکر بشری پیدا کرده است.

منظور ما از علم، فهرست‌بندیِ نظام‌مندِ توالیهایِ علّیِ پدیده‌ها به‌وسیلهٔ قوانین طبیعت است، توالیهایی از پدیده‌ها که برای مقاصد فردی یا اجتماعی مناسب‌تر است آنها را به‌گونه‌ای لحاظ کنیم که گویی عیناً تکرار می‌شوند. ــ به‌خصوص آن توالیهای علّی که از نظر روابط اجتماعی حائز اهمیت‌اند.

اینکه علم چنین قدرت عظیمی به انسان می‌دهد تا بر طبیعت فایق آید، بدین دلیل است که توسعهٔ مستمر فهرست‌بندیِ توالیهای بیشتری از پدیده‌ها، امکان بیشتر و بیشتری را برای ایجاد پدیده‌های مطلوب فراهم می‌کند، این کار که مستقیماً مشکل یا غیرممکن است، با در نظر گرفتن پدیده‌هایی که از طریق توالی علّی با پدیدهٔ اول مرتبط‌اند، آسان می‌شود. و همچنین، اینکه انسان همیشه و همه جا در طبیعت نظم را خلق می‌کند حاصل این واقعیت است که او نه تنها توالیهای علّی پدیده‌ها را مجزا می‌کند (یعنی، سعی می‌کند که آنها را از پدیده‌های ثانوی مزاحم جدا کند) بلکه آنها را با پدیده‌هایی که معلول فعالیت خودش است می‌آمیزد، و بدین ترتیب آنها را از قابلیت کاربرد وسیعتری برخوردار می‌کند. در بین این پدیده‌ها نتایج شمارش و اندازه‌گیری چنان جایگاه مهمی را اشغال می‌کنند که تعداد زیادی از قوانین طبیعت که به‌وسیلهٔ علم معرفی شده‌اند، فقط ارتباط متقابل نتایج شمارش و اندازه‌گیری را بیان می‌کنند. در این زمینه توجه به این نکته خوب است که یک قانون طبیعت که در بیان آن مقادیر قابل اندازه‌گیری وجود دارند، تا حد معینی از تقریب در طبیعت برقرار است؛ درواقع قوانین طبیعت، با تظریف ابزارهای اندازه‌گیری ممکن است آسیب ببینند.

استثناهای این قاعده از زمانهای قدیم، حساب عملی و هندسه از یک طرف و دینامیک اجسام صُلب و مکانیک سماوی از طرف دیگر بوده‌اند. تاکنون هیچ‌گونه بهبود در ابزار مشاهده تأثیری در این دو دسته مباحث نداشته است. ولی در حالی که این واقعیت برای دستهٔ دوم امری اتفاقی و عَرَضی قلمداد شده و همیشه این آمادگی وجود داشته که این علوم را تا حد نظریه‌های تقریبی تنزل دهند، تا همین اواخر این اعتماد مطلق وجود داشته که هیچ تجربه‌ای قادر نیست در دقت قوانینِ حساب و هندسه خِلَلی وارد کند؛ این اعتماد در این حکم بیان شده است که ریاضیات «خودِ» علم دقیق است.

زمینه‌های اعتقاد به خلل‌ناپذیری دقت قوانین ریاضی، در طی قرنها، موضوع تحقیق فلسفی بوده است، و در اینجا دو دیدگاه باید از هم متمایز شود: شهودگرایی (عمدتاً در فرانسه) و صورتگرایی (عمدتاً در آلمان). از بعضی لحاظ این دو دیدگاه [در طی زمان] تقابل بیشتر و بیشتری پیدا کرده‌اند؛ اما در سالهای اخیر به این توافق رسیده‌اند که اعتبار دقیق قوانین ریاضی به‌عنوان قوانین طبیعت قابل شک نیست. این دو جناح به این سؤال که دقت ریاضی در کجا وجود دارد، جوابهای مختلفی می‌دهند، شهودگرا می‌گوید در عقل انسان، و صورتگرا می‌گوید روی کاغذ.

در تفکر کانت یک شکل کهنهٔ شهودگرایی می‌یابیم که اکنون تقریباً به‌کلی فراموش شده است، و در آن زمان و مکان صور فهم ذاتی در خِرَد انسان هستند. از نظر کانت اصول موضوع حساب و هندسه احکام ترکیبی پیشینی هستند، یعنی احکامی که مستقل از تجربه‌اند و قابل اثبات تحلیلی نیستند: این توصیفْ دقت مطلق آنها را چه در جهان تجربه و چه به‌طور مجرد توضیح می‌دهد. بنابراین در نظر کانت، امکان ردِ تجربی قوانین هندسی و حسابی نه تنها بر اساس یک اعتقاد استوار نفی شده است، بلکه به‌طور کلی غیرقابل تصور است.

در مقابل آن، دیدگاه صورتگرایی است، که بر این اعتقاد است که خود انسان چه از یک خط مستقیم و چه از اعداد، مثلاً اعداد بزرگتر از ده، هیچ تصویر دقیقی در اختیار ندارد، و بنابراین، وجود این هویّات ریاضی در فهم ما از طبیعت بیشتر از وجودشان در خود طبیعت نیست. این درست است که از روابط معینی بین هویّات ریاضی، که ما آنها را اصول موضوع فرض می‌کنیم، روابط دیگری را مطابق قوانین ثابتی استنتاج می‌کنیم، با این اعتقاد که به این طریق حقایق را با استدلال منطقی از حقایق نتیجه می‌گیریم، اما این اعتقادِ غیرریاضی به حقیقت یا حقانیت این عمل، هیچ دقتی ندارد، بلکه فقط ناشی از احساس خوشایند مبهمی است که کاراییِ انتساب این روابط و قوانین استدلال به طبیعت، در ما القا می‌کند. بنابراین برای فردِ صورتگرا دقت ریاضی فقط عبارت است از روش توسعهٔ این رشته از روابط، و این کار مستقل از اهمیتی است که ممکن است به این روابط یا هویاتی که این روابط آنها را به‌هم ربط می‌دهد داده شود. برای صورتگرایِ راسخ و استوار، این رشته از روابط بی‌معنا که ریاضیات به آنها تقلیل می‌یابد، فقط وقتی وجود ریاضی دارند که به زبان مکتوب یا شفاهی توأم با قوانین ریاضی-منطقی، که بنای آن روابط بر این قوانین مبتنی است، نمایش داده شوند. این زبان را منطق نمادی می‌خوانند.

چون زبان مکتوب یا شفاهیِ معمولیْ شرط سازگاری را که برای منطق نمادی لازم است ندارد، فردِ صورتگرا سعی می‌کند که از به‌کاربردن زبان معمولی در ریاضیات اجتناب کند. نمونهٔ افراطی این گرایش را مکتب صورتگرایی جدید ایتالیاییِ از خود نشان داده است که رهبر آن، پئانو، یکی از مهمترین اکتشافات خود را در مورد وجود انتگرالهای معادلات دیفرانسیل حقیقی در مجلهٔ ماتماتیشه آنالن به زبان منطق نمادی به چاپ رساند؛ نتیجه این بود که این مقاله را تنها عدهٔ اندکی از خبرگان خواندند و فقط وقتی در دسترس عموم قرار گرفت که یکی از اعضای همین مکتب مقاله را به آلمانی ترجمه کرد.

دیدگاه صورتگرایی به این اعتقاد منجر می‌شود که اگر فرمولهای نمادی دیگری به جای آنهایی که اکنون روابط اساسی ریاضی و قوانین ریاضی-منطقی را نمایش می‌دهند، بنشینند، عدم احساس رضایت، که «آگاهی به حقانیت» خوانده می‌شود و باید نتیجهٔ چنین جانشینی باشد، اعتبار دقت ریاضی آن را اصلاً از بین نمی‌برد. تحقیق در اینکه چرا بعضی دستگاههای منطق نمادی بهتر از دستگاههای دیگر با طبیعت انطباق دارند وظیفهٔ فیلسوف یا مردم‌شناس است، نه ریاضیدان. توضیح دربارهٔ اینکه چرا ما به دستگاههای معینی از منطق نمادی باور داریم و به دستگاههای دیگر نداریم، مثلاً، چرا از دستگاههای متناقض ــ که در آنها هم صورت منفی و هم صورت مثبت بعضی گزاره‌ها معتبر هستند ــ متنفریم ([Mannoury] ص ۱۴۹-۱۵۴) وظیفه روانشناس است نه ریاضیدان.

تا زمانی‌که شهودگرایان از نظریهٔ کانت هواداری می‌کردند ظاهراً روند ریاضیات در قرن نوزدهم آنها را روز به روز در موضع ضعیفتری از صورتگرایان قرار می‌داد. اولاً، این روند به‌طور مکرر نشان داد که چگونه نظریه‌های کاملی از یک شاخه از ریاضیات به شاخه‌ای دیگر انتقال می‌یابند: برای مثال، هندسهٔ تصویری با وجود تعویض نقشهای نقطه و خط مستقیم بدون تغییر باقی ماند، بخش مهمی از حساب اعداد حقیقی برای میدانهای مختلف اعداد مختلط معتبر باقی ماند و تقریباً همهٔ قضایای هندسهٔ مقدماتی برای هندسهٔ غیرارشمیدسی، که در آن به ازای هر قطعه خط مستقیم، قطعه خط دیگری وجود دارد که نسبت به اولی بینهایت کوچک است، نیز صادق باقی ماندند. این اکتشافات ظاهراً نشان می‌داد که در یک نظریهٔ ریاضی، فقط صورت منطقی آن اهمیت دارد و اشیاء همانقدر فاقد اهمیت‌اند که پایهٔ عددنویسی برای محاسبات در حساب.

اما جدیترین ضربه به نظریهٔ کانت اکتشاف هندسهٔ غیراقلیدسی بود، نظریه‌ای سازگار، پدید آمده از مجموعه‌ای از اصول موضوع که در آن فقط اصل موضوع توازی در هندسهٔ مقدماتی با نقیض آن عوض شده است. این نشان داد که پدیده‌ای که معمولاً به زبان هندسهٔ مقدماتی توصیف می‌شده است، می‌تواند با همان دقت، البته با ایجاز کمتر، به زبان هندسهٔ غیراقلیدسی، توصیف گردد، بنابراین نظر نه تنها ممکن است فضای تجربه ما خواص هندسهٔ مقدماتی را نداشته باشد بلکه جستجوی هندسه‌ای منحصر به فرد که برای فضای تجربه ما صادق باشد اهمیتی ندارد. درست است که هندسهٔ مقدماتی از هر هندسهٔ دیگری برای توصیف قوانین سینماتیک اجسام صُلب و بنابراین تعداد زیادی از پدیده‌های طبیعت مناسبتر است، اما با کمی تأمل ممکن است اشیایی را یافت که برای آنها سینماتیک برحسب هندسهٔ غیراقلیدسی آسانتر از هندسهٔ اقلیدسی تعبیر شود ([Poincaré]، ص ۱۰۴).

موضع شهودگرایی که بعد از این دوره از توسعهٔ ریاضیاتْ ضعیف به‌نظر می‌رسید، با رها کردن نظر کانت دربارهٔ پیشینی‌بودن فضا و هواداری قویتر از پیشینی‌بودن زمان تقویت شده است. این شهودگرایی نو، تغییر حالت لحظات حیات را به قسمتهایی که به‌طورکیفی مختلف‌اند، و در حالی که به‌وسیله زمان از هم جدا شده‌اند، دوباره وحدت می‌یابند، به‌عنوان اساسیترین پدیدهٔ عقل انسان در نظر می‌گیرد، گذار از محتوای احساسی به پدیدهٔ تفکر ریاضی، شهود دو-یکی بودن[1] محض. این شهودِ دو-یکی بودن، شهود بنیادی ریاضیات، نه فقط اعداد یک و دو را خلق می‌کند بلکه همهٔ اعداد ترتیبی متناهی را به‌وجود می‌آورد، زیرا یکی از اعضای دو-یکی بودن را می‌توان به‌عنوان یک دو-یکی بودن جدید در نظر گرفت، فرایندی که می‌تواند به‌طور نامتناهی تکرار شود؛ این فرایند منجر به کوچکترین عدد ترتیبی نامتناهی ω می‌شود. بالاخره، این شهود بنیادی ریاضی، که در آن متصل و منفصل، پیوسته و مجزا، متحد شده‌اند، بلاواسطه به شهود پیوستار خطی، یعنی «بین» منجر می‌شود، مفهومی که با در بین گذاشتن واحدهای جدید کاملاً بیان نمی‌شود و بنابراین هرگز با مجموعه‌ای از واحدها یکسان نیست.

بدین طریق پیشینی بودن زمان نه تنها خواص حساب را به‌عنوان احکام پیشینی ترکیبی تأیید می‌کند بلکه همین کار را برای هندسه نیز انجام می‌دهد، و نه فقط برای هندسهٔ مقدماتی دوبعدی و سه‌بعدی، بلکه برای هندسه‌های غیراقلیدسی و nبعدی؛ زیرا از دکارت آموخته‌ایم که همهٔ این هندسه‌ها به‌وسیلهٔ حساب مختصات به حساب تحویل می‌شوند.

بنابراین از دیدگاه فعلیِ شهودگرایی همهٔ مجموعه‌های آحاد ریاضی می‌توانند از شهود بنیادی برآیند، و این کار فقط با ترکیب دو عمل زیر در تعداد متناهی دفعه انجام می‌پذیرد: «خلق یک عدد ترتیبی متناهی» و «خلق عدد ترتیبی نامتناهی ω»؛ در اینجا باید دانست که برای مقصود دوم، هر مجموعه‌ای که قبلاً ساخته شده یا هر ساختنی که قبلاً انجام شده باید به‌عنوان یک واحد در نظر گرفته شود. در نتیجه، فرد شهودگرا فقط وجود مجموعه‌های

1. two-oneness

شمارش‌پذیر را به رسمیت می‌شناسد؛ مجموعه‌هایی که اعضای آنها را می‌توان در تناظر یک به یک با اعضای یک عدد ترتیبی متناهی یا با اعضای عدد ترتیبی نامتناهی ω قرار داد. و در ساختن این مجموعه‌ها، نه زبان معمولی و نه هیچ زبان نمادی، نقشی غیر از اینکه یک ابزار کمکی غیرریاضی باشد که به حافظهٔ ریاضی کمک می‌کند یا افراد مختلف را قادر می‌کند تا مجموعهٔ یکسانی را بسازند، ندارد.

به این دلیل است که فرد شهودگرا با ضمانتهایی از قبیل متناقض نبودن یک نظریهٔ ریاضی، امکان تعریف مفاهیم آن به‌وسیلهٔ تعداد متناهی از کلمات ([Poincaré]، ص ۶) یا یقین عملی به اینکه ریاضیات هرگز به سوءتفاهم در روابط انسانی منجر نمی‌شود ([Borel]، ص ۲۲۱) نسبت به درستی آن نظریه احساس اطمینان پیدا نمی‌کند.

همانطور که در بالا گفته شد، فرد صورتگرا می‌خواهد وظیفهٔ انتخاب زبان «ریاضی راستین» را از بین بسیاری زبانهای نمادی که می‌توان آنها را به‌طور سازگار به کار گرفت به روانشناس محول کند. مادام که روانشناس به این تکلیف عمل نکرده است، صورتگرا مجبور است، حداقل موقتاً، دامنه‌ای را که می‌خواهد به‌عنوان «ریاضیات راستین» در نظر بگیرد محدود کند و برای این هدف دستگاه معینی از اصول موضوع و قوانین استدلال ارائه کند، زیرا در غیر این‌صورت کارش بی‌نتیجه است. روشهای مختلفی که در این راه به‌کار گرفته شده‌اند، همه از یک ایدهٔ اساسی برمی‌آیند، یعنی پیشفرض وجود جهانی از اشیاء ریاضی، جهانی مستقل از افراد اندیشنده، که از قوانین منطق کلاسیک تبعیت می‌کند و اشیاء آن نسبت به یکدیگر ممکن است «رابطهٔ یک مجموعه با اعضایش» را داشته باشند. با ارجاع به این رابطه است که اصول موضوع مختلفی صورتبندی شده‌اند که از کار با مجموعه‌های متناهی طبیعی الهام گرفته شده‌اند: «یک مجموعه با اعضایش مشخص می‌شود»؛ «در مورد هر دو شیء ریاضی می‌توان تعیین کرد که آیا یکی از آنها به‌عنوان عضو مشمول در دیگری است یا نه»؛ «برای هر مجموعه، مجموعهٔ دیگری وجود دارد که اعضای آن چیزی جز زیرمجموعه‌های مجموعهٔ مفروض نیستند»؛ اصل انتخاب: «مجموعه‌ای که به چند زیرمجموعه تقسیم شده، شامل حداقل یک زیرمجموعه است که از هر زیرمجموعهٔ دیگر یک و فقط یک عضو در آن است»؛ اصل شمول: «اگر در مورد هر شیء ریاضی بتوان تصمیم گرفت که خاصیت معینی را دارد یا نه، آنگاه مجموعه‌ای وجود دارد که فقط شامل اشیایی است که خاصیت مذکور را دارند»، اصل ترکیب: «اعضای همهٔ مجموعه‌هایی که به یک مجموعه از مجموعه‌ها تعلق دارند، یک مجموعهٔ جدید را تشکیل می‌دهند».

بر اساس چنین مجموعه‌ای از اصول موضوع، صورتگرا ابتدا نظریهٔ «مجموعه‌های متناهی» را بنا می‌کند. یک مجموعه را متناهی می‌نامند اگر اعضای آن را توان در تناظر یک به یک با اعضای زیرمجموعه‌ای از خودش قرار داد؛ با استدلال نسبتاً پیچیده‌ای ثابت می‌شود که اصل استقرای کامل یک خاصیت اساسیِ همهٔ این مجموعه‌هاست ([Zermelo] ص ۱۸۵ـ۱۹۳). این اصل می‌گوید که یک خاصیت برای همهٔ مجموعه‌های متناهی برقرار است اگر اولاً، برای همهٔ مجموعه‌هایی که فقط یک عضو دارند برقرار باشد و ثانیاً اعتبارِ آن برای یک مجموعهٔ متناهی دلخواه، از اعتبارش برای مجموعه‌ای که فقط یک عضو کمتر دارد، نتیجه شود. اینکه صورتگرا باید برهان صریحی برای این اصل ارائه کند، که در مورد اعداد متناهیِ شهودگرا بنا بر ساختشان بدیهی است، نشان می‌دهد که صورتگرا به هیچ وجه نمی‌تواند برای توجیه انتخاب خود از اصول موضوع، به جای توسل به شهود، که به نظرش نادقیق است، به نامتناقض بودن نظریه‌اش توسل جوید. ولی برای اثبات اینکه هرگز از بین تعدادی نامتناهی نتیجه که از اصول موضوع او استنتاج می‌شوند، تناقضی برنمی‌آید، ابتدا باید نشان دهد که اگر تناقضی تا nامین نتیجه به‌دست نیاید، تا $(n+1)$امین نتیجه نیز تناقضی به‌دست نمی‌آید، و ثانیاً باید اصل استقرای کامل را به‌طور شهودی به‌کار بندد. اما این قدم دوم را صورتگرا برنمی‌دارد، هر چند که او اصل استقرای کامل را ثابت کرده است؛ زیرا این کار مستلزم حصول یقین ریاضی در این مورد است که مجموعهٔ خواص حاصل بعد از نتیجهٔ nام، به‌ازای یک n دلخواه، در تعریف او برای مجموعه‌های متناهی صدق می‌کند [۸]، و برای به‌دست آوردن این یقین، او باید نه تنها به استعمال غیرمجاز یک معیار نمادی در یک مثال مشخص روی آورد بلکه همچنین باید اصل استقرای کامل را به‌طوری شهودی به‌کار برد؛ و این‌کار او را به استدلال دُوری می‌کشاند.

در قلمرو مجموعه‌های متناهی که اصول موضوع صورتگرایان تعبیر کاملاً روشنی برای شهودگرایان دارد، و در واقع این گروه بدون قید و شرط با آن توافق دارند، اختلاف دو جناح فقط در روش است نه در نتایج؛ ولی در قلمرو مجموعه‌های نامتناهی یا ترامتناهی وضع به‌کلی متفاوت است، چه در آنجا صورتگرا عمدتاً با استعمال اصل موضوع شمول، مفاهیم مختلفی تعریف می‌کند که به‌کلی از نظر شهودگرا بی‌معناست، برای مثال، «مجموعه‌ای که اعضای آن نقاط فضا هستند»، «مجموعه‌ای که اعضای آن توابع پیوستهٔ یک متغیره هستند»، «مجموعه‌ای که اعضای آن توابع ناپیوستهٔ یک‌متغیره هستند»، و غیره. در این تحولات صورتگرایانه معلوم شده است که کاربرد سازگار اصل موضوع شمول، ناگزیر به تناقضات منجر می‌شود. نمونهٔ روشنی از این امر، تنازع معروف به تنازع بورالی‌ـفورتی[1] است. برای نشان دادن این موضوع باید چند تعریف جدید ارائه کنیم.

مجموعه را مرتب گویند اگر بین هر دو عضو آن رابطهٔ «بزرگتر بودن» یا «کوچکتر بودن» وجود داشته باشد، با این خاصیت که اگر عضو a بزرگتر از عضو b باشد آنگاه عضو b کوچکتر از عضو a است، و اگر عضو b بزرگتر از عضو a باشد و عضو c بزرگتر از عضو b باشد، آنگاه عضو c بزرگتر از عضو a است.

مجموعهٔ خوشترتیب (به‌معنای صورتگرایانه) یک مجموعهٔ مرتب است به‌طوری که هر زیرمجموعهٔ آن عضوی دارد که از همهٔ اعضای دیگر کوچکتر است.

دو مجموعهٔ خوشترتیب را که در تناظر یک به یک قرار بگیرند به‌طوری که روابط «بزرگتر بودن» و «کوچکتر بودن» تحت این تناظر حفظ شود، دارای عدد ترتیبیِ یکسان خوانند.

اگر دو عدد ترتیبی A و B مساوی نباشند، آنگاه یکی بزرگتر از دیگری است، مثلاً اینکه A بزرگتر از B است، بدین معناست که B با یک قطعهٔ آغازی A در تناظر یک به یکی است که روابط «بزرگتر بودن» و «کوچکتر بودن» را حفظ می‌کند. از دیدگاه شهودگرا، قبلاً کوچکترین عدد ترتیبی نامتناهی، ω، را معرفی کردیم، یعنی عدد ترتیبی مجموعهٔ همهٔ اعداد ترتیبی متناهی به ترتیب بزرگی[2]. به مجموعه‌های خوشترتیبی که عدد ترتیبی ω داشته باشند سری مقدماتی می‌گویند.

1. Burali-Forti

۲. اعداد ترتیبی کلیتر از نظر شهودگرا اعدادی هستند که به‌وسیلهٔ دو اصل کانتور به‌نام اصول تولید ساخته شده‌اند ([Cantor]، ج ۴۹، ص ۲۲۶).

صورتگرایان به‌سادگی ثابت می‌کنند که زیرمجموعه‌ای دلخواه از یک مجموعهٔ خوشترتیب نیز یک مجموعهٔ خوشترتیب است، که عدد ترتیبی آن نابیشتر از مجموعهٔ اول است؛ همچنین اگر به یک مجموعهٔ خوشترتیب که شامل همه اشیاء ریاضی نیست عضو جدیدی اضافه شود که بزرگتر از همه اعضای مجموعه اول تعریف گردد، مجموعهٔ خوشترتیب جدیدی به‌دست می‌آید که عدد ترتیبی آن بزرگتر از مجموعه اول است.

حال بر اساس اصل موضوع شمول مجموعهٔ s را می‌سازیم که شامل همه اعداد ترتیبی باشد که به ترتیب بزرگی مرتب شده‌اند؛ آنگاه به سادگی می‌توانیم ثابت کنیم که از یک طرف، s یک مجموعهٔ خوشترتیب است که هیچ عدد ترتیبی بزرگتر از عدد ترتیبی s نیست، از طرف دیگر چون همه اشیاء ریاضی اعداد ترتیبی نیستند، می‌توان عددی ترتیبی خلق کرد که با اضافه کردن عضو جدیدی به s، از عدد ترتیبی s بزرگتر باشد ــ و این یک تناقض است.[1]

اگر صورتگرایان بخواهند سازگاری را رعایت کنند باید نتایج متناقض را به‌عنوان نتایج ریاضی بپذیرند، اما در تنازعی مثل تنازع بورالی-فورتی چیز ناخوشایندی وجود دارد، زیرا در عین حال، پیشرفت مراحل استدلال آنها به‌وسیلهٔ اصل عدم تناقض هدایت می‌شود، یعنی نفی اعتبار همزمان دو خاصیت متناقض. به این دلیل است که اصل موضوع شمول به‌صورت زیر اصلاح شده است: «اگر برای همهٔ اعضای یک مجموعه بتوان تعیین کرد که یک خاصیت معین معتبر است یا نه، آنگاه این مجموعه شامل زیرمجموعه‌ای است که اعضای آن فقط آنهایی هستند که خاصیت مذکور را دارند» ([Zermelo]، ص ۲۶۳).

این صورتِ اصل انتخاب، فقط معرفی مجموعه‌هایی را مجاز می‌شمرد که زیرمجموعهٔ مجموعه‌ای باشند که قبلاً معرفی شده است؛ اگر کسی بخواهد با مجموعهٔ دیگری کار کند، وجود آن باید به‌طور صریح فرض شود. تنها دلیلی که می‌توان علیه معرفی یک مجموعه اقامه کرد این است که فرض وجود آن منجر به تناقض می‌گردد. در واقع تنها اصلاحی که کشف تنازعها در صورتگرایی باعث شده است، حذف مجموعه‌هایی است که منشأ این‌گونه تناقضها بودند. بنابراین می‌توان کار را بدون هیچ‌گونه نگرانی با مجموعه‌های دیگری که بر اساس صورت قبلی اصل شمول معرفی شده‌اند، ادامه داد؛ نتیجهٔ این عمل حوزهٔ وسیع تحقیقاتی است که هنوز برای صورتگرایان جالب توجه است، ولی برای شهودگرایان هیچ اهمیتی ندارد. مثالی از این موضوع در نظریهٔ توانها یافت می‌شود، که من ویژگیهای اصلی آن‌را به‌طور خلاصه بیان می‌کنم، زیرا به‌وضوح شکاف پرنشدنی بین این دو جناح را نشان می‌دهد.

دو مجموعه را همتوان گویند اگر اعضای آنها را بتوان در تناظر یک به یک قرار داد. توان مجموعهٔ A را بزرگتر از توان مجموعهٔ B گویند، و توان مجموعهٔ B را کوچکتر از توان مجموعهٔ A گویند اگر بتوان تناظر یک به یکی بین B و بخشی از A برقرار کرد، اما برقراری تناظری بین A و بخشی از B ممکن نباشد. توان مجموعه‌ای را که به اندازهٔ توان زیرمجموعه‌ای از خود مجموعه است، نامتناهی گویند؛ توانهای دیگر را متناهی گویند. مجموعه‌هایی را که توان آنها با توان اعداد طبیعی ω یکسان باشد، نامتناهی شمارا و توان چنین مجموعه‌هایی را الفْ صفر گویند: می‌توان ثابت کرد که این کوچکترین توانِ نامتناهی است. همان‌طور که قبلاً گفته شد، این توان الفْ صفر تنها توان نامتناهی است که شهودگرایان وجود آن را می‌پذیرند.

حال اجازه دهید مفهوم «عدد ترتیبی نامتناهی شمارا» را بررسی کنیم. از آنجایی که این مفهوم هم برای صورتگرا و هم برای شهودگرا یک معنای روشن و خوش‌تعریف دارد، صورتگرا خود را محق می‌داند که «مجموعه‌ای از همهٔ اعداد ترتیبی نامتناهی شمارا» خلق کند که توان آن را الفْ یک می‌نامند، کاری که شهودگرا آن را درست نمی‌داند. چون این دلیل هم برای صورتگرا و هم برای شهودگرا موجه است که اولاً، مجموعه‌های نامتناهی شمارا مرکب از اعداد ترتیبی نامتناهی شمارا می‌توان به شیوه‌های مختلف ساخت، و ثانیاً به هر یک از چنین مجموعه‌هایی می‌توان یک عدد ترتیبی نامتناهی شمارا نسبت داد که به این مجموعه تعلق ندارد، صورتگرا نتیجه می‌گیرد که: «الفْ یک از الفْ صفر بزرگتر است»، گزاره‌ای که برای شهودگرا هیچ معنایی ندارد. چون این دلیل هم برای صورتگرا و هم برای شهودگرا موجه است که غیرممکن است مجموعه‌ای از اعداد ترتیبی نامتناهی شمارا ساخت[1] که بتوان ثابت نمود توان آن کوچکتر از الفْ یک، ولی بزرگتر از الفْ صفر است، صورتگرا نتیجه می‌گیرد: «الفْ یک دومین کوچکترین عدد نامتناهی است»، گزاره‌ای که برای شهودگرا هیچ معنایی ندارد.

حال مفهومِ «عدد حقیقی بین ۰ و ۱» را بررسی می‌کنیم. این مفهوم برای صورتگرا معادل «سریهای مقدماتی ارقام بعد از ممیز» است[2]، و برای شهودگرا به معنای «قانونی برای ساختن یک سری مقدماتی از ارقام بعد از ممیز است، که با تعدادی متناهی از اعمال ساخته می‌شود». و وقتی که صورتگرا «مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی بین ۰ و ۱» را خلق می‌کند، این کلمات برای شهودگرا هیچ معنایی ندارد، خواه اعداد حقیقیِ صورتگرا مد نظر باشد، که با سریهای مقدماتی ارقامِ آزادانهٔ انتخاب‌شده معین می‌شود، خواه اعداد حقیقیِ شهودگرا که به‌وسیلهٔ قوانین متناهیِ ساخت معین می‌شود. چون می‌توان برای احکام زیر براهینی آورد که هم برای صورتگرا و هم برای شهودگرا موجه باشد: اولاً، مجموعه‌های نامتناهی شمارا از اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ به شیوه‌های مختلف قابل ساختن هستند، و ثانیاً به هر چنین مجموعه‌ای می‌توان یک عدد حقیقی بین ۰ و ۱ نسبت داد که به مجموعه متعلق نباشد، صورتگرا نتیجه می‌گیرد که: «توان پیوستار، یعنی توان مجموعهٔ اعداد حقیقی بین ۰ و ۱، بزرگتر از الفْ صفر است»؛ این گزاره برای شهودگرا هیچ معنایی ندارد؛ حتی صورتگرا این سؤال را مطرح می‌کند که «آیا توان پیوستار، دومین

---

۱. اینکه تنازع بورالی-فورتی را بعضی وقتها با تنازع ریچارد از یک نوع می‌دانند منصفانه نیست. صورت ساده شدهٔ تنازع ریچارد به صورت زیر است: «آیا کوچکترین عدد صحیحی که نتواند به‌وسیلهٔ جمله‌ای با حداکثر بیست کلمه تعریف شود وجود دارد؟» از یک طرف، آری، زیرا تعداد جملات با حداکثر بیست کلمه متناهی است؛ از طرف دیگر نه، زیرا اگر وجود داشته باشد، به‌وسیلهٔ جمله‌ای با سیزده کلمه تعریف شده است که با حروف ایرانیک آمده‌اند.

منشأ این تنازع در اصل موضوع شمول نیست بلکه در کلمهٔ «تعریف شود» است که معنای متغیر دارد، و این باعث می‌شود که بتوان با این جمله تعداد نامتناهی از اعداد صحیح را به توالی تعریف نمود.

۱. اگر به‌جای «ساختن»، «تعریف کردن» (به مفهوم صورتگرایانه) را بگذاریم، برهان مذکور برای شهودگرا راضی‌کننده نیست. زیرا در برهان کانتور جایگزینی کلمات «können wir bestimmen» ([Cantor]، ج ۴۹، ص ۲۴۱ ـ سطر ۱۷ از بالا) با کلمات «muss es geben» مجاز نیست.

۲. در اینجا مثل هر جای دیگرِ این مقاله، به‌طور ضمنی فرض شده است که تعدادی نامتناهی رقم متمایز با ۹ وجود دارد.

کوچکترین توان نامتناهی است؟»؛ و او این سؤال را که همچنان منتظر پاسخ است، یکی از مشکلترین و اساسیترین مسائل ریاضی می‌داند.

ولی از نظر شهودگرا، سؤال به نحوی که مطرح شده است فاقد معناست: به مجرد اینکه به‌گونه‌ای تعبیر شود که معنادار باشد، به‌راحتی می‌توان به آن پاسخ داد.

اگر سؤال را به این صورت مطرح کنیم: «آیا غیرممکن است که مجموعه‌هایی نامتناهی از اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ ساخته شود[1] که توان آنها از توان پیوستار کوچکتر باشد، ولی از الفْ صفر بزرگتر باشد؟ «آنگاه پاسخ باید مثبت باشد؛ زیر شهودگرا فقط می‌تواند مجموعه‌های شمارایی از اشیای ریاضی بسازد و اگر بر اساس شهود پیوستار خطی، سریهای مقدماتی از انتخابهای آزاد را به‌عنوان عناصر ساختمان بپذیرد، آنگاه هر مجموعهٔ ناشمارا که به‌وسیلهٔ آن ساخته شده است، شامل زیرمجموعه‌ای با توان پیوستار است.

اگر سؤال را بدین صورت مطرح کنیم: «آیا می‌توان تناظری یک به یک بین اعضای مجموعه‌ای شمارا از اعداد ترتیبی نامتناهی از یک طرف، و مجموعه‌ای از اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ از طرف دیگر برقرار کرد به گونه‌ای که هر دو مجموعه با ساختن اعضای جدید به‌طور نامتناهی قابل توسعه باشند و این تناظر با ادامهٔ این ساختمان در هر دو مجموعه مختل نشود؟» آنگاه جواب باید مثبت باشد، زیرا توسعهٔ هر دو مجموعه می‌تواند به مرحله‌هایی تقسیم شود به‌طوری که در هر مرحله تعداد نامتناهی شمارا از اعضا اضافه گردد[2].

ولی اگر سؤال را به این صورت طرح کنیم: «آیا ممکن است قانونی ساخت که به هر سری مقدماتی از ارقام، یک عدد ترتیبی نامتناهی شمارا نسبت دهد و به‌طور پیشینی بدانیم که دو سری مقدماتی مختلف هرگز یک عدد ترتیبی نامتناهی شمارا نخواهند داشت؟» آنگاه جواب باید منفی باشد؛ زیرا این قانونِ تناظر باید به‌گونه‌ای باشد که در هر مرحله از مراحل متوالی سری مقدماتی، یک عدد ترتیبی نامتناهی شمارا بسازد؛ بنابراین برای هر مکان c_ν، یک بزرگترین عدد خوش‌تعریفِ نامتناهیِ شمارا چون α_ν وجود دارد که ساختمان آن مبتنی بر آن مکان خاص است، پس یک عدد ترتیبی خوش‌تعریف نامتناهی شمارا چون α_ω وجود دارد که از همهٔ α_νها بزرگتر است و بنابراین همهٔ اعداد ترتیبی که مشمول قانون تناظر هستند از آن بزرگتر نیستند؛ پس توان مجموعهٔ اعداد ترتیبی از الفْ صفر بیشتر نیست.

یک روشِ صورتگرایان برای به‌دست آوردن توانهای بزرگتر، این است، که به‌ازای هر توان μ «مجموعهٔ همه راههای مختلف ممکن برای انتخابهای توان μ» را تعریف می‌کنند، و ثابت می‌کنند که توان این مجموعه بزرگتر از μ است. به‌طور خاص، با استدلالی که هم صورتگرایان و هم شهودگرایان از آن رضایت دارند ثابت شده است که می‌توان به طُرُق مختلف قوانینی ساخت که مطابق آنها توابع یک‌متغیرهٔ حقیقی متناظر با همهٔ سریهای مقدماتیِ ارقام شوند، اما غیرممکن است قانونی ساخته شود که مطابق آن هر سری مقدماتی از ارقام متناظر با یک تابع یک‌متغیرهٔ حقیقی شود و در آن به‌طور پیشینی این قطعیت وجود دارد که دو تابع مختلف هرگز با یک سری مقدماتی واحد متناظر نمی‌شوند. صورتگرا از این احکام نتیجه می‌گیرد که: «c'، توان مجموعهٔ همه توابع یک‌متغیرهٔ حقیقی، از c، توان پیوستار، بزرگتر است»، گزاره‌ای که برای شهودگرا فاقد معناست، و صورتگرا به همین شیوهٔ گذار از c به c'، از c' به توانهای بزرگتر c'' می‌رسد.

روش دومی که صورتگرایان به‌وسیلهٔ آن توانهای بزرگتر را به‌دست می‌آورند این است که برای هر توان μ، مجموعهٔ همه اعداد ترتیبی با توان μ را تعریف می‌کنند، و بعد ثابت می‌کنند که توان این مجموعه بزرگتر از μ است. به‌طور خاص، آنها توان مجموعهٔ همهٔ اعداد ترتیبی با توان الفْ یک را با الفْ دو نشان می‌دهند و ثابت می‌کنند که الفْ دو بزرگتر از الفْ یک است و از نظر مقدار بلافاصله بعد از الفْ یک است. اگر تعبیر این نتیجه به گونه‌ای که برای شهودگرایان معنایی داشته باشد، ممکن می‌بود چنین تعبیری به‌سادگی حالات قبل نبود.

آنچه تاکنون مورد بررسی قرار گرفت جنبهٔ منفی نظریهٔ توانها بود؛ برای صورتگرایان جنبه‌ای مثبت نیز وجود دارد که مبتنی بر قضیه برنشتاین است: «اگر مجموعهٔ A همتوان با زیرمجموعه‌ای از B، و مجموعهٔ B نیز همتوان با زیرمجموعه‌ای از A باشد، آنگاه A و B همتوان هستند»، یا به‌صورت معادل: «اگر مجموعهٔ $A = A_1 + B_1 + C_1$ با مجموعهٔ A_1 همتوان باشد، با $A_1 + B_1$ نیز همتوان است.

این قضیه برای مجموعه‌های شمارا بدیهی است. اگر بخواهیم برای مجموعه‌هایی با توانهای بالاتر برای شهودگرا معنایی داشته باشد، باید به‌صورت زیر تعبیر شود: «اگر بتوان اولاً قانونی ساخت که تناظری یک به یک بین هویّات ریاضی نوع A و هویّات ریاضی نوع A_1 برقرار کند، و ثانیاً قانونی ساخت که تناظری یک به یک بین هویّات ریاضی نوع A و هویّات ریاضی نوع A_1، B_1 و C_1 برقرار کرد، آنگاه می‌توان قانون سومی از این دو قانون به‌وسیلهٔ تعدادی عمل متناهی ساخت که تناظری یک به یک بین هویّات ریاضی نوع A و هویّات ریاضی انواع A_1 و B_1 برقرار کند».

برای تحقیق در اعتبار این تعبیر، برهان را نقل می‌کنیم:

«از تقسیم A به $A_1 + B_1 + C_1$، با استفاده از تناظر γ_1 بین A و A_1، تقسیم A_1 به $A_2 + B_2 + C_2$ را به‌دست می‌آوریم، به‌علاوه تناظر یک به یک γ_2 بین A_1 و A_2 نیز به‌دست می‌آید. از تقسیم A_1 به $A_2 + B_2 + C_2$، به‌وسیلهٔ تناظر یک به یک بین A_1 و A_2، تقسیم A_2 به $A_3 + B_3 + C_3$ و تناظر یک به یک γ_3 بین A_2 و A_3 را به‌دست می‌آوریم. تکرار نامتناهی این جریانْ مجموعهٔ A را به یک سری مقدماتی از زیرمجموعه‌های C_1، C_2، C_3 ...، یک سری مقدماتی از زیرمجموعه‌های B_1، B_2، B_3، ... و مجموعهٔ باقیماندهٔ D تقسیم می‌کند. تناظر مطلوب γ_C بین A و $A_1 + B_1$ با نسبت دادن هر عضو C_γ به عضو متناظر $C_{\gamma+1}$ و هر عضو دیگر به خودش به‌دست می‌آید».

۱. اگر در اینجا «تعریف کردن» (به‌معنای صورتگرایانه) به‌جای «ساختن» گذاشته شود و اگر فرض کنیم که مسئلهٔ جفتهای ارقام در بسط اعشاری π، که در صفحهٔ بعد بحث می‌شود، نمی‌تواند حل شود، آنگاه سؤال مطرح شده در متن جواب منفی دارد. زیرا فرض کنید Z مجموعهٔ بسطهای دوتایی نامتناهی باشد که رقم nام آن ۱ باشد اگر nامین جفت ارقام در بسط اعشاری π از ارقام نابرابر تشکیل شده باشد؛ به‌علاوه فرض کنید X مجموعه همه بسطهای دوتایی متناهی باشد. آنگاه توان $Z + X$ بزرگتر از الفْ صفر، اما کوچکتر از توان پیوستار است.

۲. هر مجموعه‌ای را که اعضای آن می‌توانند به‌طور انفرادی محقق شوند و در آن برای هر زیرمجموعهٔ نامتناهی شمارا عضوی وجود دارد که به آن زیرمجموعه تعلق ندارد، ناتمام شمارا می‌نامیم. مطابق تعاریف متن، می‌توان به‌طور کلی گفت: «همه مجموعه‌های ناتمام شمارا یک توان دارند.»

برای آزمودن این برهان در یک مثال مشخص، فرض کنید A مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ باشد، که با بینهایت ارقام در بسط اعشاری نمایش داده شده‌اند. برای A_1 مجموعهٔ آن اعدادی را در نظر می‌گیریم که رقم $(2n-1)$ام آنها با رقم $(2n)$ام برابرند؛ به‌علاوه اگر عددی به A_1 متعلق نباشد، به B_1 تعلق دارد. اگر تساوی فوق بینهایت بار تکرار شود و به C_1 تعلق دارد اگر تساوی فوق به تعداد متناهی دفعه تکرار شود. با جایگزینی متوالی هر رقم یک عضو دلخواه A با دو رقم برابر با آن، قانونی به‌دست می‌آید که تناظری یک به یک چون γ_1 بین A و A_1 برقرار می‌کند. برای اینکه عضوی از A_1 متناظر با عضو خوش‌تعریفی از A، مثل $\pi - 3$ شود، می‌توانیم به‌طور متوالی تا آنجا که بخواهیم ارقام را معین کنیم؛ بنابراین باید خوش‌تعریف محسوب شود.

برای تعیین عضوی متناظر با $\pi - 3$ مطابق تناظر γ_c، لازم است تعیین کنیم که آیا در بسط اعشاری آن، یک رقم در مکان فرد به تعداد نامتناهی بار با همان رقم در مکانِ زوج بلافاصله بعد از آن مساوی است یا به تعداد متناهی بار؛ برای این هدف، یا باید فرایندی برای ساختن یک سری مقدماتی از چنین جفتهایِ ارقام مساوی خلق کنیم یا از فرض وجود چنین سری مقدماتی، تناقضی استنتاج کنیم. اما هیچ زمینه‌ای برای اعتقاد به قابل حل بودن این مسائل وجود ندارد[1].

بنابراین روشن شده است که قضیهٔ برنشتاین و با آن، جنبهٔ مثبت نظریهٔ توانها نیز هیچ تعبیر شهودگرایانه را نمی‌پذیرد.

این بود توصیف من از موضوعی اساسی که در جهان ریاضی اختلاف ایجاد کرده است. در هر دو جناح عالمان مشهور حضور دارند و احتمال توافق در کوتاه مدت عملاً منتفی است. به قول پوانکاره: «انسانها یکدیگر را نمی‌فهمند، زیرا زبان واحدی ندارند و زبانهایی وجود دارند که کسی آنها را نمی‌فهمد».

مراجع

[Borel] Borel, E. 1912. "La philosophie mathématique et L'infiniti", *Revue du mois*, vol. 14.

[Brouwer] Brouwer, L. E. J. 1908. "Die onbetrouwbaarheid der Logische principes." *Tijdschrift voor wijsbegeerte*, vol. 2.

[Burali-Forti] Burali-Forti, C. 1897. "Una questione sue i numeri Transfiniti". *Rendiconti del circolo Metematico di palermo*, vol. 11.

[Cantor] Cantor, G. 1895-7. "Beitrüge Zur Begründung der Transfiniten Mengenlehre". parts 1 and 2. *Mathematische Annalen*, vols. 46 and 49. Translated as cantor 1915.

[Cantor] _____, 1915. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. A Translation of cantor 1895-15 by P. E. B. Jourdain. chicago and London: open Court; reprinted, NewYork: Dover, 1952.

۱. چنین اعتقادی را فقط بر اساس اصل طرد شق ثالث می‌توان داشت، یعنی اصل موضوع وجود «مجموعهٔ همه خواص ریاضی»، اصلی وسیعتر از اصل موضوع شمول، که قبلاً ذکر شد. در این مورد به ([Brouwer]، ص ۱۵۲، ۱۵۸) رجوع کنید.

[Mannoury] Mannoury, G. 1909. *Methodo logischesund philosophische zur Elementar-Mathematik*, Haarlem: Visser; Assen: Van Gorcum.

[Poincaré] Poincaré, H. 1903. *La Science et L' Hypothèse*, paris: Flammarian.

[Poincaré] _____, 1905. "*Les Mathématiques et la Logique*." Revae de métaphysique et de morale, vol. B.

[Poincaré] _____, 1908a. "L'avenir des mathematiques," *scientia: Revista di scienza*, vol. 4.

[Zermelo] Zermelo, E. 1908. "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehte I. "*Mathematische Annalen*, vol. 65.

[Zermelo] _____, 1909. "Sur les ensembles finis et le principe de L'induction complète." *Acta Mathematica*, vol. 32.

* * * * * *

• این مقالهٔ ترجمهٔ متن سخنرانی براؤر به مناسبت آغاز کار او در دانشگاه آمستردام در ۱۴ اکتبر ۱۹۱۲ است. ترجمهٔ آن به انگلیسی به وسیلهٔ پروفسور آرنولد درسدن (Arnold Dresden) انجام شده و در *Bulletin of the American Mathematical Society* **20** (1913), 81-96 به چاپ رسیده است.

جدال موش و قورباغه: بحران ماتماتیشه آنالن•

دیرک وان دالن

آیا کسی نیست که مرا از شرّ این کشیش آشوبگر خلاص کند؟ هنری دوم

در ۲۷ اکتبر ۱۹۲۸ تلگرام عجیبی به‌دست براؤر رسید. این تلگرام او را درگیر منازعه‌ای کرد که جامعهٔ ریاضی آلمان را چندین ماه در معرض دودستگی قرار داد و منجر به رشته‌ای از حوادث شد که سرانجامِ آن، کناره‌گیریِ براؤر از امور ریاضیدانان آلمانی و، به‌طور غیرمستقیم، پایان گرفتن «مجادله بر سر مبانی» [Grundlagenstreit] بود.

داستان این کشمکش که دنیای ریاضی را منقلب کرد، داستان دلپذیری نیست؛ قصهٔ حماقت مردان بزرگ، وفاداری، و تراژدی است. قاعدتاً باید نامه‌ها و اسناد زیادی در بارهٔ این موضوع وجود داشته باشد که فقط بخشی از آنها در دسترس من بوده است. ولی گمان می‌کنم با مراجعه به همین مقدار از مدارکِ مهم می‌توان تصویر نسبتاً دقیقی از ماجرا ترسیم کرد.

متن این تلگرام، که از برلین فرستاده شده بود، چنین بود[1]:

> پروفسور براؤر، لارن[2]، هلند. لطفاً قبل از گفتگو با کاراتئودوری اقدامی نکنید. او شما را از مسأله‌ای آگاه می‌کند که پیامد بسیار مهمی خواهد داشت. موضوع با تصوری که ممکن است با خواندن نامه‌هایِ دریافت‌شده پیدا کنید کاملاً فرق می‌کند. کاراتئودوری روز دوشنبه به آمستردام می‌آید.
>
> ارهارت اشمیت

چنین پیامی نمی‌توانست چندان اطمینان‌بخش باشد. براؤر سرموقع دو نامهٔ سفارشی از گوتینگن دریافت کرد و در انتظارِ رسیدن کاراتئودوری ماند. هنگامی که کاراتئودوری در سی‌ام اکتبر وارد لارن شد نامه‌ها هنوز باز نشده بودند.

قاصدِ خبرهای بد

دیدار کاراتئودوری نقش مهمی در این ماجرا دارد.

برای پی بردن به جنبهٔ غمناک ماجرا باید دانست که براؤر با همهٔ بازیگران این نمایش کوچک، به استثنای داوید هیلبرت، روابط دوستانه‌ای داشت؛ حتی بعضی از آنها، از قبیل کاراتئودوری و اوتو بلومنتال، دوستان نزدیک او بودند.

کاراتئودوری خویشتن را در موقعیت ناراحت‌کننده‌ای یافت زیرا آورندهٔ پیغامهای ناگوار و حتی توهین‌آمیزی بود که خودش با آنها موافق نبود. او از نوشته‌شدن این نامه‌ها که هنوز باز نشده بودند اظهار تأسف کرد. نامهٔ اول شامل مطلبی بود که باید امضاهای بیشتری می‌داشت، یا دست‌کم بلومنتال آن را امضا می‌کرد. نام کاراتئودوری به نحوی آمده بود که با حقیقت تطبیق نداشت، ولی او ارتباط خودش را با نامه انکار نمی‌کرد. و دست آخر اینکه به گفتهٔ او فرستندهٔ نامه احتمالاً پس از چند هفته از کار خودش به شدت متأسف می‌شد. نامهٔ دوم را خود کاراتئودوری نوشته بود هر چند نام بلومنتال روی پاکت بود. کاراتئودوری از مضمون این نامه ابراز تأسف کرد.

براؤر نامهٔ دوم را به کاراتئودوری برگرداند و وی به توضیح دادن در بارهٔ محتوای نامه‌ها پرداخت. مضمون نامهٔ دوم را فقط می‌شود حدس زد ولی نامهٔ اول را می‌توان کلمه به کلمه نقل کرد. نویسندهٔ آن هیلبرت بود و نسخه‌هایی از آن برای سایر بازیگران این تراژدی که مقدر بود تقریباً شش ماه در صحنه باشد، فرستاده شده بود.

نامهٔ هیلبرت درواقع یادداشت کوتاهی بود:

> همکار عزیز
>
> چون به دلیلِ ناسازگاریِ دیدگاههایمان در موضوعات اساسی همکاری من با شما ممکن نیست، من از ویراستاران اجرائی ماتماتیشه آنالن اجازه خواستم، و بلومنتال و کاراتئودوری این اجازه را دادند، که به شما اطلاع دهم از این پس از همکاری شما در ویراستاری آنالن صرفنظر می‌کنیم و بنابراین نام شما از صفحهٔ

---

۱. همهٔ مکاتبات مربوط به قضیهٔ آنالن به زبان آلمانی است؛ در برگرداندن آنها به انگلیسی، هرگاه ترجمهٔ لفظ به لفظ خیلی زمخت از آب درمی‌آمده، به ترجمهٔ آزاد رو آورده‌ام.

۲. براؤر در شهر کوچکی به نام لارن (Laren) در نزدیکی آمستردام زندگی می‌کرد. خانه‌ای نیز در بلاریکوم (Blaricum) داشت.

عنوان حذف می‌شود؛ و در عین حال، من از طرف ویراستاران آنالن از فعالیتهای گذشتهٔ شما در مجله‌مان سپاسگزاری می‌کنم.

با احترام

داوید هیلبرت

ملاقات دو دوست قدیمی دردناک و مشاجره‌آمیز بود و با سردرگمی پایان یافت. کاراتئودوری با نومیدی از آنجا رفت و براؤر با یکی از بدترین مصیبتهای زندگیش روبه‌رو شد.

آنالِن

ماتماتیشه آنالن معتبرترین مجلهٔ ریاضیِ آن زمان بود. این مجله را کلبش[1] و نویمن[2] در سال ۱۸۶۸ بنا نهاده بودند. در سال ۱۹۲۰ انتشارات اشپرینگر این مجله را از ناشر قبلی، توبنر[3]، تحویل گرفت.

نام فلیکس کلاین برای مدتی مدید از ماتماتیشه آنالن تفکیک‌ناپذیر بود. اعتبار مجله عمدتاً، اگر نه کاملاً، مبتنی بر شهرت ریاضی کلاین و تواناییش در مدیریت بود. موفقیت کلاین در کسب شهرت برای آنالن تا حد زیادی مرهون انتخابِ درستِ ویراستاران بود. مجله به تشویق کلاین به شیوه‌ای نسبتاً غیرعادی اداره می‌شد؛ ویراستاران یک جمع کوچک و خصوصی تشکیل می‌دادند که شیوهٔ عملشان بسیار دموکراتیک بود. هیأت ویراستاران به‌طور منظم تشکیل می‌شد تا به بحث در امور مجله و گفتگو در بارهٔ ریاضیات بپردازد. کلاین از موقعیت شامخ خود برای دستور دادن استفاده نمی‌کرد، ولی ویراستاران به‌طور ضمنی نظر او را حجت می‌دانستند.

عضویت در هیأت ویراستاران ماتماتیشه آنالن مایهٔ شهرت و افتخار بود. به دلیل ارتباط نزدیک کلاین ــ و بعد از استعفای او، هیلبرت ــ با مجلهٔ آنالن، گاهی با نیت دوستانه و گاه با نیت نه چندان دوستانه گفته می‌شد که ریاضیدانان گوتینگن، این مجله را «قبضه کرده‌اند».

ارتباط براؤر با آنالن قبل از ۱۹۱۵ آغاز شد و مبتنی بود بر تبحر او در هندسه و توپولوژی. در سال ۱۹۱۵ نام او زیرعنوان «با همکاریِ» در مجله ظاهر شد. براؤر ویراستار فعالی بود و وقت زیادی صرف می‌کرد تا مقاله‌ها را با بیشترین دقت داوری کند.

وضعیت هیأت ویراستاران از لحاظ آیین‌نامه و مقرراتْ مبهم بود. در صفحهٔ رویی آنالن فهرست اسامی دو گروه ویراستار می‌آمد، یکی زیرعنوان «با همکاریِ» و دیگری با عنوانِ «فعلاً منتشر می‌شود به‌وسیلهٔ».

من اعضای این دو گروه را به ترتیب ویراستاران همکار و ویراستاران ارشد خواهم نامید. در قراردادی که بین ناشر، اشپرینگر، از یک طرف و ویراستاران ارشد، فلیکس کلاین، داوید هیلبرت، آلبرت اینشتین، و اوتو بلومنتال از طرف دیگر (در ۲۵ فوریه ۱۹۲۰) بسته شد، از «ویراستاران» سخن به میان آمده اما جزئیات موضوع به هیچ وجه مشخص نشده جز اینکه بلومنتال به‌عنوان ویراستار مجری در نظر گرفته شده است. بعدها دقیق نبودن این قرارداد، مانعی شد در برابر فیصله‌دادن به اختلافی که با نامهٔ هیلبرت آغاز گردید.

در زمانی که نامهٔ هیلبرت نوشته شد، مجله را داوید هیلبرت، آلبرت اینشتین، اوتو بلومنتال، و کنستانتین کاراتئودوری با همکاری ییبرباخ، بور، براؤر، کورانت، دایک، هولدر، فون کارمان، و زومرفلد منتشر می‌کردند. امور روزانهٔ آنالن را بلومنتال اداره می‌کرد ولی بدون شک، هیلبرت بود که بیشترین نفوذ و اقتدار را داشت.

1. A. Clebsch 2. C. Neumann 3. Teubner

براؤر و هیلبرت

امروز نامه‌های براؤر و هیلبرت خودبه‌خود یادآور دو حریف اصلی در مهمترین منازعهٔ درونی ریاضیات در قرن بیستم، یعنی «مجادله بر سر مبانی» [Grundlagenstreit]، است. ولی مناسبات این دو نفر همواره چنین نبوده است. حدود بیست سال قبل از شروع اختلاف، براؤر در استراحتگاه ساحلی اشونینگن[1] با هیلبرت که نوزده سال از او بزرگتر بود ملاقات کرد و بلافاصله زبان به تمجید از «ریاضیدان اول جهان»[2] گشود. هیلبرت نبوغ مرد جوان را به وضوح تشخیص می‌داد و روی‌هم‌رفته به او ارج می‌نهاد و احترام می‌گذاشت. در طی یک دورهٔ طولانی نامه‌های براؤر به هیلبرت لحن گرم و دوستانه داشت.

براؤر در سال ۱۹۰۷ در پایان‌نامهٔ خود به‌وضوح از صورتگرایی هیلبرت انتقاد کرده بود ولی این کار هیچ اختلاف محسوسی بین آنها به وجود نیاورد، شاید به این دلیل که پایان‌نامه به زبان هلندی نوشته شده و بنابراین از نظر هیلبرت دور مانده بود. رابطهٔ آنها تا مدتها دوستانه باقی ماند؛ گوتینگن وطن علمی دوم براؤر بود و زمانی که در سال ۱۹۱۲ دانشگاه آمستردام او را برای تصدی یک کرسی در نظر گرفت، هیلبرت توصیه‌نامهٔ پرحرارتی برایش نوشت. در ۱۹۱۹ هیلبرت تا آنجا پیش رفت که تصدی یک کرسی را در گوتینگن به او پیشنهاد کرد، ولی براؤر این پیشنهاد را نپذیرفت.

در دههٔ بیست که براؤر شروع به مبارزه برای به کرسی نشاندن دیدگاههای خود در مورد مبانی کرد، روابط گرم اولیه‌اش با هیلبرت به سردی گرایید. هیلبرت هم تن به مبارزه داد ــ او خطر یک انقلاب شهودگرایانه را جدی گرفت. براؤر سخنرانیهای موفقیت‌آمیزی در همایشهای انجمن ریاضی آلمان ایراد کرد. رشته سخنرانیهایِ او در برلین در ۱۹۲۷ هیجان زیادی ایجاد کرد. حتی در میان عامه سخن از «کودتا» در ریاضیات به میان آمد. در ماه مارس ۱۹۲۸، براؤر سخنرانیهایی در وین ایراد کرد که بیشتر جنبهٔ فلسفی داشت (گفته می‌شود که این سخنرانیها در بازگشت ویتگنشتاین به فلسفه نقش اساسی داشته است). روی هم رفته، آیندهٔ شهودگرایی درخشان به نظر می‌رسید.

اختلاف نظر علمی بین دو حریف رفته رفته به دشمنیِ شخصی تبدیل شد. «مجادله بر سر مبانی» تا اندازه‌ای تصادم و برخورد بین دو شخصیت قوی بود که هر دو اعتقاد داشتند رسالتِ نجات ریاضیات را از نابودی بر عهده دارند.

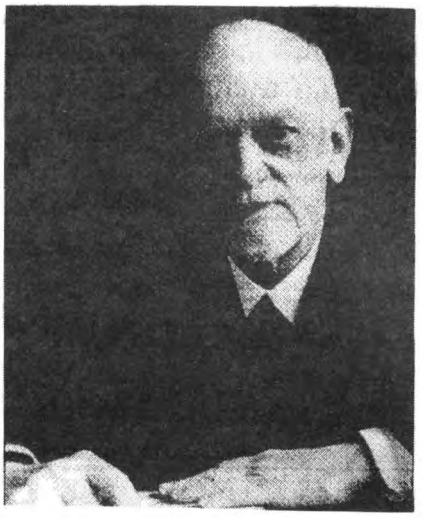
درگیری براؤر در مسائل ملی ریاضیات آلمان نیز در این مورد تأثیر داشت. اگر بشود گفت براؤر عقیدهٔ سیاسی داشته است، این عقیده پیچیده نبوده است. از خاتمهٔ جنگ جهانی اول براؤر جانبِ ریاضیدانان آلمانی را که تحت مقررات سخت و تحریم بین‌المللی بودند گرفته بود[3]. مثلاً او به شدت با مشارکت بعضی از ریاضیدانان فرانسوی در تهیهٔ شمارهٔ ویژهٔ ماتماتیشه آنالن

1. Scheveningen

۲. درنامه‌ای از براؤر به شاعر هلندی آداما وان اسخلتما (C. S. Adama van Scheltema) به تاریخ ۹ نوامبر ۱۹۰۹ آمده است: «در این تابستان، ریاضیدان اول جهان در اشونینگن بود. من قبلاً از طریق کارم با او آشنا شده بودم؛ در این تابستان بارها با او قدم زدم و همچون مریدی جوان که با مراد خود، حرف می‌زند، با او صحبت کردم. او ۴۶ ساله است ولی قلباً و جسماً جوان است؛ در آنجا با قوت شنا می‌کرد و از بالا رفتن از دیوارها و حصارهایی که از سیم خاردار بود، لذت می‌برد.»

۳. عقاید و اعمال براؤر در این زمینه کاملاً ممکن است سوء تعبیر شود (و شده است). بنابراین شایستهٔ بررسی مفصلتری است. این مطالب در زندگینامه‌ای از براؤر که در دست تألیف است مورد بحث قرار خواهد گرفت.

کاراتئودوری



هیلبرت

براؤر

به بادبود ریمان مخالفت ورزید و باعث رنجش هیلبرت شد. آخرین اقدام او در این زمینه، مبارزه‌اش علیه شرکت ریاضیدانان آلمانی در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در بولونیا در ماه اوت ۱۹۲۸ بود. هیلبرت از تمام نفوذ و اعتبار خود برای تأثیرگذاری بر این مسأله استفاده کرد و نتیجه‌اش این بود که عدهٔ نسبتاً زیادی از ریاضیدانان آلمانی با هیلبرت به بولونیا رفتند [۴، ص ۱۸۸][۱].

تصمیم هیلبرت

صحنه برای پردهٔ نهایی نمایش آماده بود و نامهٔ اخراج علامت بالارفتن پرده بود. تصور اینکه هیلبرت چه انتظاری از این کار داشته، دشوار است؛ او نمی‌توانست از براؤر احساساتی و بسیار عصبی انتظار داشته باشد که بردبارانه و به‌آرامی تسلیم شود. در نظر براؤر (و همچنین در نظر بسیاری از همکارانش)، اخراج از هیأت تحریریهٔ آنالن توهینی آشکار بود.

کاراتئودوری باید بخشی از انگیزهٔ واقعی را برای براؤر فاش ساخته باشد زیرا براؤر در نامه‌ای خطاب به بلومنتال به تاریخ ۲ نوامبر نوشت:

> به علاوه کاراتئودوری به من اطلاع داد که ویراستاران ارشد ماتماتیشه آنالن تصمیم گرفته‌اند (و احساس کرده‌اند قانوناً صلاحیت دارند) که مرا از هیأت تحریریه کنار بگذارند فقط به این دلیل که هیلبرت چنین خواسته است، و وضع مزاجی او ایجاب می‌کند که تسلیم نظرش شوند. کاراتئودوری التماس کرد که از روی دلسوزی برای هیلبرت، که در چنان وضعی است که نمی‌توان او را مسؤول رفتارش دانست، این بی‌حرمتی را با تسلیم و رضا و بدون مقاومت پذیرا شوم.

هیلبرت خودش در این مورد صریح بود. در نامه‌ای به تاریخ ۱۵ اکتبر از اینشتین (به‌عنوان ویراستار ارشد) اجازه خواست که نامهٔ اخراج را بفرستد (نامه به ویراستاران همکار حاوی هیچ توضیحی نبود) و ادامه داد

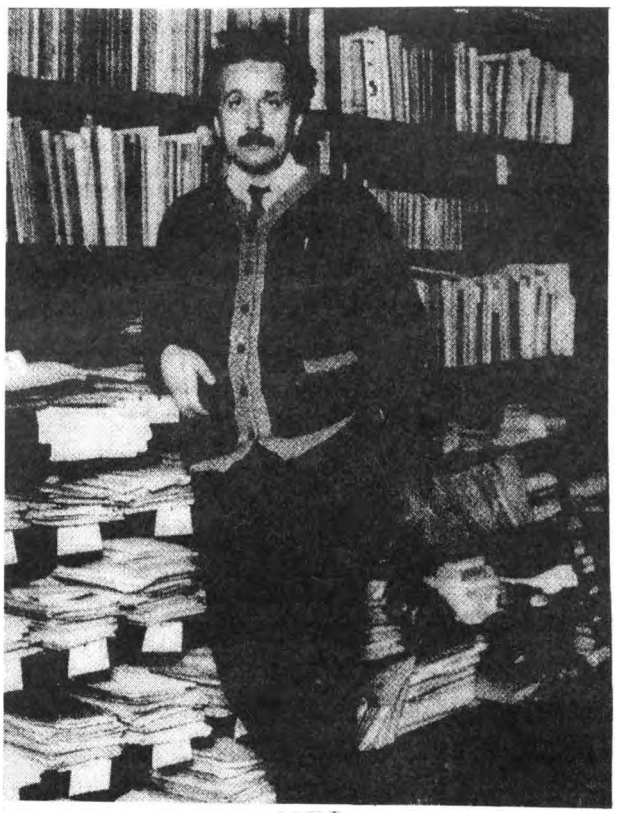
> فقط برای جلوگیری از سوء تفاهمات و جار و جنجال بیشتر، که در شرایط فعلی زائد و زحمت‌افزاست، مایلم خاطرنشان کنم که تصمیم من ــ مبنی بر اینکه تحت هیچ شرایطی با براؤر در یک هیأت ویراستاران نباشم ــ قاطع و تغییرناپذیر است. در توضیح درخواست خود مایلم به‌اختصار به نکاتی اشاره کنم:
>
> ۱. براؤر به‌خصوص با اطلاعیهٔ اخیرش خطاب به ریاضیدانان آلمانی پیش از کنفرانس بولونیا به من، و به گمان من به اکثریت ریاضیدانان آلمانی، توهین کرده است.
>
> ۲. به‌خصوص به دلیل موضع خصمانهٔ آشکارش در مقابل دوستان ریاضیدان خارجی، به‌ویژه در حال حاضر، برای عضویت هیأت ویراستاران ماتماتیشه آنالن نامناسب است.
>
> ۳. من دوست دارم، مطابق خواست بنیانگذاران این نشریه، گوتینگن تکیه‌گاه اصلی ماتماتیشه آنالن باشد. کلاین هم که قبل از همهٔ ما به جنبهٔ زیان‌بار فعالیت براؤر پی برده بود، [اگر اکنون زنده می‌بود] با نظر من موافقت می‌کرد.

در پی‌نوشت اضافه کرد: «خود من سه سال است به بیماری وخیمی (کم‌خونی حاد) مبتلا هستم. هر چند نیش این بیماری با یک ابداع آمریکایی کشیده شده است، در این مدت سخت از آن در رنج بوده‌ام.»

موضع هیلبرت به وضوح این بود که ویراستاران ارشد می‌توانند ویراستاران همکار را منصوب کنند یا برکنار سازند. بنابراین به نظر موافق بلومنتال، کاراتئودوری، و اینشتین نیاز داشت. بلومنتال با خواست هیلبرت موافقت کرده بود ولی جلب موافقت کاراتئودوری مشکلاتی داشت؛ او ظاهراً دوست نداشت که با مخالفت با هیلبرت او را نارحت کند، و در عین حال نمی‌خواست با اخراج براؤر موافقت کند. کاملاً ممکن است که هیلبرت متوجه روش طفره‌آمیز کاراتئودوری که فقط موافقتی ضمنی کرده بود، نشده باشد. کاراتئودوری در میانهٔ کشاکشی ناگوار بین وفاداری و انصاف گیر افتاده بود. وی به وضوح سعی کرد سازشی برقرار کند ولی با توجه به موضع ثابت و استوار هیلبرت، به این نتیجهٔ ناگزیر رسید که براؤر باید برود، ولی دست کم با احترام.

---

۱. بعضی از آلمانیها، و نیز براؤر، احساس می‌کردند که در کنفرانس بولونیا آلمانیها را شرکت‌کنندگان درجهٔ دوم به حساب می‌آورند. آنها از این فکر جانبداری می‌کردند که به جای تحمل این اهانت، کنفرانس تحریم شود. این موضع سوء شهرتی پیدا کرده است و نیازمند بررسی منصفانه‌تری است. من در زندگینامه‌ای از براؤر که در آینده چاپ خواهد شد به این موضوع خواهم پرداخت.



اینشتین

بیطرفی اینشتین

کاراتئودوری که در میانهٔ میدان گیر افتاده بود، جویای نظر اینشتین شد. وی در ۱۶ اکتبر در نامه‌ای نوشت: «نظر من این است که شاید بهتر باشد نامه‌ای که مورد نظر هیلبرت است فرستاده نشود.» و به جای آن پیشنهاد کرد نامه‌ای برای براؤر ارسال گردد که در آن وضعیت توضیح داده شود و به او پیشنهاد شود که داوطلبانه استعفا دهد. به این ترتیب از برخورد اجتناب می‌شد و امکان رفتار منصفانه با براؤر فراهم می‌گشت. «براؤر یکی از برجسته‌ترین ریاضیدانان زمان ماست و بیش از همهٔ ویراستاران ماتماتیشه آنالن برای این مجله کار کرده است.»

نامهٔ دومی که در بالا به آن اشاره شد باید نتیجهٔ ملموس نقشهٔ کاراتئودوری بوده باشد. اینشتین پاسخ داد: «بهتر است من در قضیهٔ براؤر دخالت نکنم. باورم نمی‌شد که هیلبرت این‌گونه دچار غلیان احساسات شود» (۱۹ اکتبر ۱۹۲۸).

ویراستار مجری، بلومنتال، احتمالاً بیش از کاراتئودوری گرفتار احساسات متضاد بود زیرا هم با براؤر دوستیِ نزدیک داشت و هم اولین دانشجوی دکتری (۱۸۹۸) هیلبرت بود و حرمت زیادی برای او قائل بود.

اینشتین تسلیمِ درخواست هیلبرت نشد. در پاسخش به هیلبرت (۱۹ اکتبر ۱۹۲۸) نوشت:

> من او [براؤر] را، علی‌رغم احترامی که برای قدرت ذهنش قائلم، یک بیمارِ جامعه‌ستیز می‌دانم و به نظر من اقدام علیه او نه توجیه منصفانه‌ای دارد و نه مناسب است. من می‌گویم: «آقا، به او آزادیِ یک داقک را بدهید!» اگر نمی‌توانید خودتان را به این کار قانع کنید چون رفتار او اعصاب شما را بیش از حد ناراحت کرده است، هر کاری می‌خواهید، خودتان بکنید. ولی من، به دلایل بالا، نمی‌توانم چنین نامه‌ای را امضا کنم.

ولی کاراتئودوری جداً نگران بود و نمی‌توانست آرام بگیرد. پس دوباره به اینشتین رو آورد (۲۰ اکتبر ۱۹۲۸):

> عقیدهٔ شما بسیار معقول می‌بود اگر وضع تا این حد آشفته نبود. مبارزه علیه کنفرانس بولونیا ... به نظر من بهانه‌ای برای اقدام هیلبرت است. دلایل واقعی عمیقتر است و بخشی از آنها تقریباً ده سال سابقه دارد. هیلبرت عقیده دارد که پس از او مرگ او، براؤر خطری برای آنالن خواهد بود. بدترین چیز این است که در حالی که هیلبرت تصور می‌کند مدت زیادی زنده نخواهد بود، تمام توان خود را روی این موضوع متمرکز کرده است ... این یکدندگی که با بیماری او ارتباط دارد، مواجه با رفتار پیش‌بینی ناپذیر براؤر است ... اگر هیلبرت از سلامت برخوردار بود، می‌شد راهها و وسایلی [برای حل مشکل] یافت، ولی حال که می‌دانیم هر هیجانی برای او زیان‌آور و خطرناک است چه باید کرد؟ تاکنون با براؤر به خوبی کنار آمده‌ام؛ تصویری که شما از او رسم می‌کنید به نظر من قدری مخدوش است ولی بحث در این باره خیلی به درازا می‌کشد.

این نامه باعث شد اینشتین که در همهٔ مسائل اجتماعی معیارهای اخلاقی را به شدت رعایت می‌کرد، پی ببرد که وضعیتْ بغرنج است (۲۳ اکتبر ۱۹۲۸):

> من گمان می‌کردم این ماجرا یک برخورد ناگهانی است نه یک عملِ برنامه‌ریزی شده. اکنون می‌ترسم به این دلیل که نام من ــ آن هم بدون اینکه توجیهی داشته باشد ــ در صفحهٔ عنوان آنالن آمده، شریکِ کاری شده باشم که نمی‌توانم آن را تأیید یا توجیه کنم. اینکه عقیده دارم براؤر نقطه ضعفی دارد، که کاملاً یادآور مرافعات دهقانی [Prozessbauern] است[1]، مبتنی بر چندین واقعهٔ جداگانه است. اما از اینکه بگذریم من او را نه تنها فردی فوق‌العاده روشن‌بین بلکه صادق و پایبند به اصول اخلاقی می‌دانم و از این لحاظ به او احترام می‌گذارم.

از این نامه‌ها، حتی پیش از آنکه جنگ واقعی آغاز شود، به وضوح پیداست که اینشتین با قاطعیت تصمیم گرفته بود بیطرفی خود را حفظ کند. او براؤر را «مصداقِ نظریهٔ لومبروسو[2] مبنی بر ارتباط نزدیک نبوغ و جنون» می‌دانست ولی از اهمیت براؤر به‌خوبی آگاه بود و دوست نداشت که او مورد تعدی واقع شود. روشن نیست که عقیدهٔ اینشتین در بارهٔ براؤر مبتنی بر مشاهدات شخصی بوده یا شنیده‌ها و شایعات؛ اطلاعی از ارتباط شخصی بین براؤر و اینشتین در دست نیست ولی می‌توان حدس زد که آنها در یکی از همایشهایِ متعدد «جامعهٔ طبیعیدانان» [Naturforscherverein]، یا در هلند در جریان یکی از دیدارهای اینشتین با لورنتس، ملاقات کرده باشند.

۱. احتمالاً در اینجا به اغتشاشاتی اشاره می‌کند که در اشلسویگ‌ـهولشتاین، تقریباً در همین دوره، روی داده بود و علت آن مقاومت کشاورزان در برابر سیاستهای مالیاتی دولت بود.

2. Lombroso

فردیناند اشپرینگر. این عکس در جشن شصت سالگی هیلبرت، ۲۳ ژانویهٔ ۱۹۲۲، گرفته شده است.

عقل ناسالم

طولی نکشید که براؤر واکنش نشان داد. او بسیار حساس بود و وقتی هیجان‌زده می‌شد اغلب دچار حملات عصبی می‌گشت. طبق یک گزارش (نامهٔ دکتر ایرمگارت گاون به فون میزس) براؤر بعد از ملاقات با کاراتئودوری چند روز بیمار و تبدار بود.

در دوم نوامبر، نامه‌هایی برای بلومنتال و کاراتئودوری فرستاد که از بین آن دو فقط نسخه‌ای از نامهٔ اول در آرشیو براؤر موجود است و شامل گزارشی از دیدار کاراتئودوری است. در نامه گفته شده: «پس از غور و تأملی که در آرامش صورت گرفت، تصمیمی در مورد درخواست کاراتئودوری گرفته شد.» پاسخ او به کاراتئودوری، چنانکه در نامه به بلومنتال بازگو شده، کوتاه بود:

همکار عزیز

پس از بررسی دقیق و مشورتهای مفصل، موضع من این است که درخواست شما از من، مبنی بر اینکه با هیلبرت به دلیلِ ناسالم بودن عقلش به احترام رفتار کنم، در صورتی قابل قبول است که خانم هیلبرت و پزشک معالج او کتباً این موضوع را از من بخواهند.

دوستدار شما

ل. ا. ی. براؤر

البته این راه‌حل، هر چند شاید حرکت زیرکانه‌ای در یک بازی شطرنج سیاسی باشد، کاملاً غیرقابل قبول بود و بدتر از آن، قضاوت نادرستی در بارهٔ قضیه بود. بلومنتال در اتهام‌نامه‌ای کم‌وبیش رسمی در بارهٔ این «نامهٔ وحشتناک و مشمئزکننده» اظهار می‌دارد که براؤر ظاهراً از بیانات و خواهشهای کاراتئودوری بدترین تعبیر را کرده است. «باید اعتراف کنم، و کارا نیز همین را به من نوشته است، که من کاملاً در مورد شخصیت براؤر اشتباه می‌کردم و هیلبرت بهتر از ما او را می‌شناخته و بهتر در باره‌اش قضاوت کرده است.»

پس نخستین اقدام براؤر فقط باعث شد زمینهٔ بالقوهٔ حمایت از او از میان برود.

این منازعه برای براؤر چنان ناگهانی و روی‌هم‌رفته چندان غیرمنتظره بود که تشخیص نداد هیلبرت تا چه حد او را خطر مهلکی برای ریاضیات و منشأ بدبختی برای ماتماتیشه آنالن می‌داند. اعتقاد او به اینکه اخراجش از آنالن در نتیجهٔ هوس مردی است بیمار و فعلاً پریشان فکر، از نامه‌ای که سه روز بعد به خانم هیلبرت نوشت، هویداست:

از شما تمنا دارم از نفوذ خودتان روی شوهرتان استفاده کنید و نگذارید اقداماتش را علیه من ادامه دهد، نه به خاطر اینکه این اقدامات به او و من آسیب می‌رساند، بلکه در وهلهٔ اول به دلیل اینکه این کارها غلط است، و به دلیل اینکه او قلباً مهربانتر از آن است که این کارها را انجام دهد. من البته فعلاً از خودم دفاع کرده‌ام، ولی امیدوارم این جریان محدود به هیأت ویراستاران آنالن باشد و توجه دنیای بیرون به آن جلب نشود.

نسخه‌ای از این نامه همراه با یادداشت دوستانه‌ای برای کورانت فرستاده شد که در آن (علاوه بر سایر مطالب) از او خواسته شد به دقت مراقب اوضاع باشد: «درواقع من به خصوص از شما انتظار دارم که هیلبرت را سر عقل بیاورید تا اطمینان حاصل شود که از یک افتضاح جلوگیری خواهد شد» (۶ نوامبر ۱۹۲۸).

کورانت پس از دیدار با خانم هیلبرت به براؤر پاسخ داد (۱۰ نوامبر ۱۹۲۸) که هیلبرت در این مسأله تحت نفوذ هیچ‌کس نیست و اعمال نفوذ بر او غیرممکن است.

صرفنظر از اینشتین که بیطرفی کامل را رعایت می‌کرد، همهٔ ویراستاران (بیشترشان با اکراه) موضع گرفتند ــ اکثراً به طرفداری از هیلبرت ــ اما خود هیلبرت دیگر در منازعه شرکت نداشت. موضع او یک بار برای همیشه مشخص شده بود و با توجه به بیماریش، تحولات ماجرا تا حد ممکن از او مخفی نگاه داشته می‌شد (مثلاً بلومنتال در ۴ نوامبر ۱۹۲۸ به کورانت می‌نویسد: «هیلبرت نباید از دیدار کارا با براؤر باخبر شود»).

می‌توان این پرسش را مطرح کرد که آیا شخصِ تقریباً بیگانه‌ای چون براؤر (یکی از سه فرد غیرآلمانی در میان ویراستاران) ممکن بود از اول شانسی در این قضیه داشته باشد؛ ولی [اگر هم‌چنین شانسی می‌داشت] به هر حال نامهٔ دوم نوامبرش به کاراتئودوری حس همدردی نسبت به او را تا حد زیادی از میان برد و سلاحی به‌دست حریفانش داد.

گسترش غائله

در پنجم نوامبر ۱۹۲۸ براؤر در نامه‌ای مستقیماً به ناشر و ویراستاران آنالن متوسل شد و به این ترتیب، حلقهٔ افراد درگیر در ماجرا را گسترده‌تر کرد:

به ناشر و ویراستاران ماتماتیشه آنالن

از اطلاعاتی که یکی از ویراستاران ارشد ماتماتیشه آنالن در ملاقاتی در تاریخ ۱۹۲۸/۱۰/۳۰ به من داد چنین استنباط کرده‌ام که

۱. در طی ده سال گذشته، در نتیجهٔ اختلاف دیدگاههای من و هیلبرت، که هیچ ربطی به کار ویراستاری ماتماتیشه آنالن ندارد (اینکه پیشنهاد تصدی یک کرسی در گوتینگن را رد کردم، رویارویی صورتگرایی و شهودگرایی، اختلاف عقیده بر سر موضعگیری اخلاقی در بارهٔ کنگرهٔ بولونیا)، هیلبرت خشم و عصبانیت روزافزونی نسبت به من پیدا کرده است.

۲. در این اواخر، هیلبرت مکرراً قصد خود را به کنارگذاشتن من از هیأت ویراستاران ماتماتیشه آنالن اعلام کرده است، با این استدلال که دیگر نمی‌تواند با من «همکاری» کند.

۳. این دلیلْ بهانه‌ای بیش نیست زیرا هرگز همکاریی بین هیلبرت و من در هیأت ویراستاران ماتماتیشه آنالن وجود نداشته است (همان‌طور که با چندین ویراستار دیگر نیز هیچ همکاری نداشته‌ام). حتی در طول سالهایِ بسیار نامه‌ای هم مبادله نکرده‌ایم و گفتگوهای من با او نیز جنبهٔ ظاهرسازی داشته است (آخرین بار در ژوئیهٔ ۱۹۲۶).

۴. علت واقعی، تمایل به آزاردادن و لطمه‌زدن به من است که این تمایل از خشم هیلبرت ناشی شده است.

۵. با توجه به برابریِ حقوق ویراستاران (که بارها هیأت ویراستاران در درون و بیرون هیأت بر آن تأکید کرده است[۱]) اجرای خواست هیلبرت فقط در صورتی میسر است که اکثریت اعضای هیأت ویراستاران به اخراج من رأی بدهند. چنین اکثریتی اصلاً قابل تصور نیست زیرا من جزو فعالترین اعضای هیأت ویراستاران ماتماتیشه آنالن بوده‌ام، هرگز هیچ یک از ویراستاران کوچکترین ایرادی به روش من در اجرای وظایف ویراستاریم نگرفته است، و خروج من از هیأت، هم از لحاظ محتوای آتی و هم از لحاظ اعتبار آنالن در آینده، قطعاً زیان‌آور است.

۶. ولی این برابریِ حقوق که بارها اعلام شده، از نظر ویراستاران ارشد، فقط نقابی بوده و اکنون از چهره برداشته شده است. درواقع ویراستاران ارشد خواستند (و خود را قانوناً واجد صلاحیت دانستند) که مسؤولیت اخراج مرا از هیأت ویراستاران بر عهده بگیرند.

۷. کاراتئودوری و بلومنتال همکاری خود را در این امر چنین توجیه می‌کنند که مزایای آن برای سلامتی هیلبرت مهمتر از حق و آبرو و آزادی عمل من و نیز مهمتر از اعتبار معنوی و محتوای علمی ماتماتیشه آنالن است که باید در این راه قربانی شوند.

اکنون به حس جوانمردی شما و بیش از همه به احترام شما به خاطرهٔ فلیکس کلاین متوسل می‌شوم و خواهش می‌کنم به نحوی عمل کنید که یا ویراستاران ارشد از این امر صرفنظر کنند و یا بقیهٔ ویراستاران حساب خود را [از ویراستاران ارشد ـ وان‌دالن] جدا سازند و سنت کلاین را در ادارهٔ مجله به وسیلهٔ خودشان رعایت کنند.

لارن، ۵ نوامبر ۱۹۲۸

ل. ا. ی. براؤر

این نامه در همان روزی فرستاده شد که متن تقاضای براؤر از خانم هیلبرت. دو نامه آشکارا متضاد هم بودند. یکی از آنها لحنی آشتی‌جویانه داشت و دیگری شامل دفاعی قاطعانه بود و با تحریک آشکار به ستیزه‌جویی پایان می‌یافت.

بلومنتال ابتکار عمل را در دست گرفت و نامه‌ای به ناشر و ویراستاران (به تاریخ ۱۶ نوامبر) نوشت که نامه براؤر را تا زمانی که جوابیه‌ای برایش تهیه نکرده، نادیده بگیرند. پیش‌نویس این جوابیه در ۱۲ نوامبر برای کورانت فرستاده شد، همراه با این توصیه که صبر کند تا کاراتئودوری آن را تصویب کند و سپس نسخه‌هایی از آن را برای بیبرباخ، هولدر، فون دایک، اینشتین، و اشپرینگر بفرستد. از نامهٔ ضمیمه معلوم می‌شود که کاراتئودوری قبلاً استعفای خود را تسلیم کرده ولی به بلومنتال اجازه داده بود که اعلام آن را به تأخیر اندازد تا به این شایعه که کاراتئودوری علیه هیلبرت تغییر موضع داده، دامن نزند.

در این ضمن براؤر به برلین سفر کرده بود تا با ارهارت اشمیت در بارهٔ این موضوع صحبت کند و موضع خویش را برای ناشر، فردیناند اشپرینگر، توضیح دهد. براؤر به همراه بیبرباخ به دفتر اشپرینگر در برلین رفتند. اشپرینگر گزارش این مذاکره را در یک «یادداشت مستند» با عنوان «دیدار اعلام نشده و غیرمنتظرهٔ پروفسور بیبرباخ و پروفسور براؤر» (۱۳ نوامبر ۱۹۲۸) آورد. چنانکه اشپرینگر نوشت، نخستین فکرش این بود که این آقایان محترم را نپذیرد، ولی بعد فکر کرد که چنین کاری برای جناح مخالف خوراک تبلیغاتی فراهم خواهد کرد.

اشپرینگر گفتگو را با این تذکر آغاز کرد که قطعاً تصمیم گرفته وارد این کشمکش نشود و گفت که آنالن را (برخلاف مجلات دیگر) مایملک انحصاری مؤسسه نمی‌داند بلکه ویراستاران ارشد شایسته، کلاین و هیلبرت، به مفهومی در آن سهیم بوده‌اند. به علاوه اگر مجبور به موضعگیری شود، به دلیلِ دوستی و احساس تحسین نسبت به هیلبرت، جانبِ او را خواهد گرفت.

سپس میهمانان ناخواسته به پرس‌وجو در بارهٔ موضع هیلبرت از لحاظ قانونی پرداختند، ولی اشپرینگر علاقه‌ای نداشت که قبل از مشورت با دوستانش به بحث در این باره بپردازد و ضمناً بدون مراجعه به متن قرارداد نمی‌توانست چنین کاری بکند. آنگاه دو مرد محترم شروع کردند به «هشدار دادن در مورد لطماتی که به آنالن و کسب و کار من وارد خواهد شد. [گفتند] ممکن است مؤسسهٔ انتشاراتی اشپرینگر در میان ریاضیدانان آلمانی به نداشتنِ احساسات ملی مشهور شود و حملاتی به آن صورت گیرد.»

---

۱. از آگهی هیأت ویراستاران به مناسبت درگذشت فلیکس کلاین که کاراتئودوری آن را نوشته بود: «او (کلاین) مراقب بوده است که نمایندگانی از مکتبهای گوناگون ریاضی در هیأت ویراستاران باشند، و ویراستاران اختیاراتی برابر با خود او داشته باشند ــ او هرگز توجهی به شخصِ خود نداشته و توجهش همواره معطوف به هدف نشریه بوده است.»

از نامهٔ بلومنتال به من، به تاریخ ۱۹۲۷/۹/۱۳: به نظر من شما در معنایِ تمایز بین ویراستارانی که نامشان با حروف بزرگ چاپ می‌شود و آنهایی که با حروف کوچک چاپ می‌شود، مبالغه کرده‌اید. در نظر من، ما همه حقوقِ برابر داریم. به خصوص وقتی می‌توانیم به نام هیأت تحریریهٔ آنالن سخن بگوییم که از موافقت ویراستارانی که به موضوع مورد بحث علاقه‌مندند مطمئن شده باشیم. هر چند من تمایز بین این دو دسته ویراستار را بیشتر یک امر صوری می‌دانم تا واقعی (به استثنای خودم در مقام ویراستار مجری)، علاقهٔ شما را به فرم بهتری برای ذکر نام ویراستاران، خیلی خوب درک می‌کنم. من شخصاً از این نظر صمیمانه حمایت می‌کنم. ولی در حال حاضر، تا زمانی که وضع مزاجی هیلبرت این قدر نامساعد است، بهتر است هیچ تغییری ندهیم. صمیمانه از شما تقاضا می‌کنم از این خواست خود [فعلاً] صرفنظر کنید. در زمان مناسب، من آن را با خرسندی مطرح خواهم کرد.

این تهدید مسلماً ناخوشایند بود، به خصوص که خانوادهٔ اشپرینگر تبار یهودی داشت. عقاید سیاسی بعدی بیبرباخ بدنامیِ بسیاری برایش به ارمغان آورد (رک. [۳])؛ این نکته مسلماً واقعیت دارد که او قبل از ظهور رایش سوم عقاید ناسیونالیستی افراطی داشته است. موضع براوُر در این قضیهٔ احساسات ملی [Nationalgefühl] نسبتاً پیچیده بود و از یک ایدئولوژی سیاسی نشأت نمی‌گرفت بلکه ناشی از رنجش و عصبانیت او از تحریم علم آلمان بود.

به هر حال این روش خاص نمی‌توانست موضع اشپرینگر را نرم کند. او به آرامی پاسخ داد که از خسارات این دعوا متأسف می‌شود ولی در شرایط حاضر بدون شکوه آن را تحمل می‌کند.

بیبرباخ و براوُر که به این ترتیب جواب منفی گرفته بودند از او پرسیدند که آیا می‌تواند یک میانجی برای این دعوا پیشنهاد کند. اشپرینگر پاسخ داد که به اندازهٔ کافی با شخصیتهایِ درگیر ماجرا آشنا نیست ولی دو فرد خارجیِ آلمانْ‌دوست، هرالد بور و گادفری هرالد هاردی، ممکن است بتوانند میانجیگری کنند.[۱]

قبل از ترک دفتر اشپرینگر، براوُر تهدید کرد که مجلهٔ جدیدی با کمک دگرویتر[۲] تأسیس خواهد کرد، و بیبرباخ اظهار داشت که اگر کار قطعاً به اخراج براوُر بینجامد، از عضویت هیأت ویراستاران استعفا خواهد کرد.

اشپرینگر در نامه‌ای به کورانت (۱۳ نوامبر ۱۹۲۸) با خونسردی توصیه کرد: «روی‌هم‌رفته تأسیس یک مجلهٔ جدید که کاملاً تحت نظارت براوُر باشد، با وجود همهٔ مشکلات آن بهترین راه‌حل خواهد بود[۳].» او همچنین احساس خود را از این ملاقات بیان کرد: «مایلم اضافه کنم که، راستش را بخواهید، براوُر تأثیر چندان مطبوعی در آدم نمی‌گذارد. از آن گذشته، او ظاهراً جنگ را تا به آخر ادامه خواهد داد.»

کیفرخواست

بلومنتال در آخن مشغول تهیهٔ متنی در دفاع از اخراج براوُر بود و به پیروی از یک سنت قدیمی نظامی، دست به حمله زد. وی پس از مشورت با کورانت، کاراتئودوری، و بور نوعی اتهام‌نامه علیه براوُر تهیه کرد. من پیش‌نویس این متن را که در تاریخ ۱۲ نوامبر تهیه شده ندیده‌ام ولی از نامهٔ بور و کورانت به بلومنتال (۱۴ نوامبر ۱۹۲۸) می‌توان استنباط کرد که مفصلتر و لحن آن خشنتر از متن نهایی بوده است. در این نامه به انتقاد مشروح از فعالیت ویراستاری براوُر و نکات مربوط به تدوین [اتهام‌نامه] اشاره شده است (مثلاً بور و کورانت توصیه می‌کنند لفظ «بدجنسی» حذف شود) علاوه بر آن، بور و کورانت به بلومنتال هشدار داده‌اند:

> از متن پیوست که اشپرینگر برای ما فرستاده [«یادداشت مستند» پیشگفته] پیداست که براوُر تا چه حدی از هر امتیاز مصلحتی که به او داده می‌شود سوءاستفاده می‌کند و تأثیر و نفوذ شخصی او تا چه حد خطرناک است (بیبرباخ).

مکاتبات بلومنتال، بور، و کورانت نشان‌دهندهٔ وفاداری بی‌پایان به هیلبرت است که منصفانه نیست اگر آن را فقط به [رعایت] حال مزاجی او نسبت دهیم. شک نیست که هیلبرت به‌عنوان یک انسان و یک دانشمند، حس علاقه و وفاداری زیادی در دیگران برمی‌انگیخت، چه برسد به شاگردانش. جمله‌هایی از این قبیل که «لازم نیست تأکید کنیم که ما، مانند شما، کاملاً جانبدار هیلبرت هستیم و نیز، هرگاه ضروری باشد، آمادهٔ عملیم» نشان‌دهندهٔ احساس شاگردان هیلبرت است.

متن تجدیدنظرشدهٔ نامهٔ بلومنتال، تاریخ ۱۶ نوامبر را دارد و همین متن است که در اختیار براوُر قرار گرفت. نظرهای بور و کورانت در این نامه ملحوظ شده ولی پیشنهادهای کاراتئودوری (یا دست کم همهٔ آنها) مورد نظر قرار نگرفته است. نامه شامل خلاصه‌ای از ماجرا تا آن زمان است و به ایرادهای براوُر (که در نامهٔ ۵ نوامبر ۱۹۲۸ مطرح شده بود) پاسخ می‌گوید.

چنانکه بلومنتال می‌گوید، در بررسی این قضیه تا حدی متکی به نامه‌های هیلبرت، کاراتئودوری، و براوُر و تا اندازه‌ای نیز متکی به گفتگوی مفصلی با هیلبرت در بولونیا بوده است. محتوای این گفتگو به‌طور قطعی معلوم نیست اما می‌شود حدس زد که در ماه اوت در کنفرانس، هیلبرت اعتراضات خود به براوُر را ــ به‌خصوص پس از مخالفت براوُر با شرکت ریاضیدانان آلمانی در کنفرانس ــ روشن ساخته است.

ویراستاران، و همچنین خود براوُر، از طریق نامهٔ بلومنتال از محتوای نامهٔ ۲۵ اکتبر هیلبرت آگاه شدند. بلومنتال در پاسخ ایرادات براوُر به‌درستی بر این نکته انگشت گذارد که براوُر تعبیر محدودی از کلمهٔ «همکاری» در نظر گرفته است. به گفتهٔ او، برای هیلبرت مشارکت در مسؤولیتهای هیأت ویراستاران در صورتی که براوُر هم جزء آن باشد، توجیه‌ناپذیر بوده است. در مورد نکتهٔ چهارم نامهٔ براوُر نوشت: «حرفِ قبیحی است و نیاز به پاسخ ندارد». به نظر بلومنتال، مخالفت و مباحثهٔ علمی بر سر مبانی نقشی در این جریان نداشته است و حتی اطلاعیهٔ براوُر در بارهٔ کنگرهٔ بولونیا «که هیلبرت از جملات آن احساس کرد مورد اهانت قرار گرفته است» فقط تصمیم‌گیری هیلبرت را تسریع کرده است: «انگیزه‌ها خیلی عمیق‌ترند.»

بلومنتال در بارهٔ موقعیت کلاین در آنالن خاطرنشان کرد که کلاین همیشه همچون مرجعی عالی عمل می‌کرد که افراد می‌توانستند برای داوری به او رجوع کنند. پس از مرگ کلاین، هیلبرت احساس کرد که باید نقش او را به عهده بگیرد. «هیلبرت، براوُر را آدمی اجوج و خودرأی، پیش‌بینی‌ناپذیر، و جاه‌طلب تشخیص داده است. او از آن بیم داشته که وقتی خودش بالاخره از هیأت ویراستاران کناره بگیرد، براوُر این هیأت را وادار به پیروی از خواستهایش کند، و هیلبرت این امر را چنان خطری برای آنالن می‌دانسته که خواسته است تا زمانی که هنوز می‌تواند، با او مقابله کند.»

اینکه بلومنتال و کاراتئودوری، در عین پیروی از تصمیم و ارادهٔ هیلبرت، تا چه حد به رعایتِ حال براوُر علاقه داشته‌اند، از عبارات زیر معلوم می‌شود

> کارا و من که دوستیِ درازمدتی با براوُر داشتیم، با یک قضاوت منصفانه ناچار شدیم ایرادهای هیلبرت را در مورد فعالیت ویراستاری براوُر تأیید کنیم.
>
> بله، براوُر ویراستاری بسیار جدّی و فعال بود ولی در رفتارش با ویراستار مجری خیلی بدقلق بود و برای مؤلفان مقاله‌ها هم مشکلاتی پیش می‌آورد که تحمل آنها دشوار بود.

---

۱. این پیشنهاد ناشر، این تصور را تقویت می‌کند که منازعهٔ منشأ سیاسی داشته است. بلومنتال به کورانت شکوه کرد (نامهٔ ۱۸ نوامبر ۱۹۲۸): « . . . یک کارِ ناپسند این است که براوُر همه چیز را به سیاست می‌کشاند، یعنی همان چیزی که کاراتئودوری گمان می‌کرد از آن جلوگیری کرده است.» فکر میانجیگری پیگیری نشد.

2. De Gruyter

۳. براوُر واقعاً مجلهٔ جدیدی به‌نام *Compositio Mathematica* به کمک ناشر هلندی Noordhoff به راه انداخت.

مثلاً مقاله‌هایی که برای داوری به او تسلیم می‌شد، ماهها معطل می‌ماند، حال آنکه او معمولاً یک کپی از هر مقاله تهیه می‌کرد (من در این اواخر یکبار دیدم که این کار را انجام داد). مهمتر اینکه، دلیل استعفای زودهنگام کلاین را از هیأت ویراستاران باید در رفتار خالی از ظرافت و بی‌ادبانهٔ براؤر جستجو کرد (هر چند از لحاظ رسمی و صوری حق با او بود). رویدادهای بعدی نشان داد که هیلبرت حتی بیش از حدی که ما در آن زمان فکر می‌کردیم حق داشته است.

چون نمی‌توانستیم دیدگاه هیلبرت را که توجیه منصفانه داشت رد کنیم، و خواستِ او هم قابل تغییر نبود، به او اختیار دادیم براؤر را از هیأت ویراستاران اخراج کند [در اینجا باید روشن کرد که طبق نوشتهٔ کاراتئودوری در نامه‌اش به کورانت (۱۴ نوامبر) که شامل تصحیحاتی در پیش‌نویس نامه است، او چنین اجازه‌ای نداده بوده است]. ما فقط تمایل داشتیم — تمایلی که اکنون به نظرم توجیه‌ناپذیر می‌رسد — که این کار به شیوهٔ ملایمی انجام شود، یعنی براؤر ترغیب به استعفا شود. هیلبرت را نمی‌شد در این امر دخالت داد، و از این رو بالاخره، هر چند با اکراه، تصمیم گرفتیم تسلیم نظر او شویم. اینشتین از این نظر پیروی نکرد، با این استدلال که کارها و خصوصیات عجیب و غریب براؤر را نباید جدی گرفت.

نامهٔ بلومنتال اطلاع زیر را به آنچه خواننده در بارهٔ دیدار کاراتئودوری با براؤر می‌داند، می‌افزاید: بلومنتال و کاراتئودوری در ۲۶ و ۲۷ اکتبر در گوتینگن در بارهٔ وضعیت بحث کردند. در آخرین تلاش برای اینکه از طریق تعدیلِ لحن قاطع نامه، ماجرا را به سرانجامِ خوبی برسانند، کاراتئودوری به براین سفر کرد و در بارهٔ موضوع، ظاهراً با ارهارت اشمیت، صحبت کرد. نتیجه، همچنانکه می‌دانیم، تقاضا از براؤر بود که قبل از ورود کاراتئودوری کاری نکند.

و بالاخره، بلومنتال متن نامهٔ براؤر به کاراتئودوری در ۲ نوامبر را با عبارت «عقل ناسالم» بازگویی می‌کند و نتیجه می‌گیرد: «نظر من در بارهٔ شخصیت براؤر کاملاً اشتباه بوده و هیلبرت بهتر از ما او را می‌شناخته و بهتر در باره‌اش قضاوت کرده است. نامه با درخواست از ویراستاران برای صدور اجازهٔ حذف نام براؤر از صفحهٔ عنوان آنالن پایان می‌یابد.

دفاع از طرف ضعیف

معدودی از ویراستاران به نامهٔ بلومنتال کتباً جواب دادند، اما بیشتر آنها ساکت ماندند. فقط فون دایک، هولدر، و بیبرباخ نظراتشان را فرستادند. فون دایک نوشت که «نه دیدگاههای براؤر را می‌توانم توجیه کنم و نه اقدام هیلبرت را» و امیدوار بود راه‌حل آشتی‌جویانه‌ای پیدا شود. هولدر اطلاع داد که نمی‌تواند با اخراج اجباری براؤر موافقت کند (۲۷ نوامبر).

نامهٔ بیبرباخ نشان‌دهندهٔ فهم دقیق موقعیت بود، و او دست کم علاقه‌مند بود دفاع از طرفِ ضعیف را در این دعوا به عهده بگیرد. با توجه به مواضع افراطیِ بعدیِ او در سیاست، ممکن است آدم در خلوص انگیزه‌هایش شک کند، ولی در نامهٔ مورد بحث دلیلی وجود ندارد که استدلالهایش را صادقانه ندانیم. بیبرباخ مانند براؤر و شاید اکثریتِ ویراستاران، اگر نه همهٔ آنان، به حقِ ویراستاران ارشد در تصمیم‌گیری راجع به مسائل بدون کسب حمایت اکثریت ویراستاران، معترض بود چه برسد به اینکه با آنها مشورت هم نکنند. در واقع این نکته یکی از نقاط ضعف [طرفِ هیلبرت] در تمام این ماجرا بود.

واقعیت این است که قرارداد بین اشپرینگر و ویراستاران ارشد (۲۵ فوریه ۱۹۲۰) در این مورد خاص چندان واضح و مشخص نیست. در قرارداد گفته شده: «تغییرات در اعضای هیأت ویراستاران مستلزم موافقت ناشر است.» از مکاتبات انجام شده برنمی‌آید که هیلبرت توجهی به این قاعده داشته باشد.

بیبرباخ تذکر داد که تأخیر در بررسی مقاله‌های نشریه نمی‌تواند دلیل جدّی برای اخراج ویراستار باشد: این‌گونه مسائل را می‌توان در اجلاس سالانهٔ هیأت ویراستاران مورد بحث قرار داد. [ولی] نظر بلومنتال در بارهٔ رنجش هیلبرت از براؤر در قضیهٔ کنفرانس بولونیا، نوعی لفاظی سست و ناموجه بود: [به نظر او] گفته‌های قابل اعتراض براؤر در بارهٔ آلمانیهایی بود که می‌خواستند در بولونیا در «کنگرهٔ وحدت» شرکت کنند، و چون هیلبرت قبول نداشت که همایش بولونیا یک «کنگرهٔ وحدت» است، حرفهای براؤر به او مربوط نمی‌شود.

بیبرباخ به درستی در این ادعای بلومنتال که نامهٔ براؤر «وحشتناک و مشمئزکننده» است، اشکال جدی یافت:

> و بالاخره، به نظر من سر هم کردن مطالبی علیه براؤر بر اساس نامه‌هایی که او پس از اطلاع از اقدام هیلبرت نوشته، کاملاً غیرقابل توجیه است زیرا اخلاقاً نمی‌توان به اقدامات شخص پس از آگاهی از بی‌عدالتی در حق خودش و بر اثر عصبانیت ناشی از آن — عصبانیتی که کاملاً قابل درک است — برای توجیه خودِ آن بی‌عدالتی استناد کرد.

اُب مطلب به‌خوبی بیان شده است. این استدلال، براؤر را از اقدامات غیرمنصفانه‌اش تبرئه نمی‌کند ولی دست کم روشن می‌سازد که استناد به این اقدامات بر علیه براؤر ناپسند است. بیبرباخ صریحاً نوشت که از برکناری براؤر حمایت نمی‌کند؛ برعکس، به شدت از او جانبداری کرد، البته بدون حمله به هیلبرت.

واکنش ناشر محتاطانه بود. اشپرینگر فکر می‌کرد براؤر «حریفی تلخ‌کام و خبیث» است و نباید بدون اجازهٔ مشاور حقوقی مؤسسه، این نامه را برایش فرستاد. وی همچنین به این نتیجه رسید که ناشر نباید رسماً و کتباً موافقت خود را با اخراج براؤر اعلام دارد زیرا این کار از لحاظ حقوقی به معنیِ به رسمیت شناختن عضویت براؤر در هیأت ویراستاران است. خلاصه اینکه، اشپرینگر از رأی دادن به پیشنهاد بلومنتال سر باز زد.

جدال موش و قورباغه

حال اقدامات علیه براؤر به اوج خود رسیده بود. می‌توان حدس زد که در این هنگام در اردوی طرفداران هیلبرت، که گوتینگنی‌ها نامیده می‌شدند، چه فعالیت شدیدی در جریان بوده است.

همه می‌دانستند که قدری خصومت بین ریاضیدانان گوتینگن و براین وجود دارد. در قضیهٔ تحریم کنگرهٔ بولونیا، جناح براین ناکام مانده و هیلبرت پیروزیِ بی‌چون و چرایی کسب کرده بود. بورن در نامه‌اش (۲۰ نوامبر) از فون میزس (یکی از برلینی‌ها) نقل قول می‌کند که «گوتینگنی‌ها فقط گوش به فرمان

کورانت

بلومنتال (چپ) و براؤر (راست) در ایام خوش (۱۹۲۰؟)

هیلبرت هستند که خودش هم کاملاً مسؤول اعمالش نیست.» اختلافات بین براین و گوتینگن دلیل مهمی برای حل و فصلِ سریع و بی سر و صدایِ مسألهٔ آنالن بود. اگر این مسأله حل نمی‌شد شاید خطر انشقاقْ جامعهٔ ریاضی آلمان را تهدید می‌کرد.

در این ماجرا آلبرت اینشتین به خاطر اعتبار علمی و معنویِ عظیمش چهرهٔ بسیار مهمی بود. اگر می‌شد او را به طرفداری از هیلبرت برانگیخت، نیمی از راه پیروزی در جدال طی شده بود. ولی علی‌رغم کوشش بورن برای وادار کردن او به جانبداری از هیلبرت، وی مصممانه بیطرف ماند. در نامه‌هایش به بورن و به براؤر و بلومنتال می‌توان بیزاری از این عمل را که در پس طنز و کنایه پنهان است تشخیص داد.

در نامه به بورن (۲۷ نوامبر) این قضیه را به «جدال موش و قورباغه» (Frosch-Mäusekrieg) تشبیه کرد[1] که تشبیه مناسبی بود. پس از اعلام بیطرفیِ اکیدش نوشت:

> اگر بیماری هیلبرت جنبهٔ اندوهباری به این ماجرا نداده بود، این جدال قلمی در نظر من یکی از خنده‌آورترین و موفقترین نمایشهای کمدی می‌بود که بازیگرانش خودشان را خیلی جدی می‌گیرند.
>
> بدون هیچ‌گونه حب و بغض شخصی به اختصار خاطر نشان می‌کنم که به عقیدهٔ من برای مقابله با تأثیر بسیار عظیم براؤرِ تقریباً دیوانه در ادارهٔ آنالن راههایی کم‌دردسرتر از اخراج او از هیأت ویراستاران وجود داشته است. ولی این مطلب را به‌طور خصوصی می‌گویم و قصد ندارم با سلاح قلمیِ دیگری همچون یک قهرمان واردِ این جنگ موش و قورباغه بشوم.

نامهٔ اینشتین به براؤر و بلومنتال (۲۵ نوامبر) از این هم گزنده‌تر و سرزنش آمیزتر بوده.

> من متأسفم که مانند برهای معصوم وارد این گلهٔ گرگان ریاضی شده‌ام. زیرکی و پیچیدگی این افراد در کارهای علمیشان چنان مرا تحت تأثیر قرار داده است که نمی‌توانم در این قضیهٔ غیرعلمی به قضاوت نسبتاً درستی برسم. پس لطفاً بگذارید در موضع «نه تمجید، نه تقبیح» خودم بمانم و نقش ناظری شگفت‌زده را ایفا کنم.
>
> با بهترین آرزوها برای تداومِ هر چه بیشترِ این مبارزهٔ شرافتمندانه و مهم.
>
> ارادتمند شما
>
> آلبرت اینشتین

بن‌بست

قضیه به‌سرعت به بن‌بست رسید. یک هفته قبل، اشپرینگر که به اصرار بلومنتال خواهان مشاورهٔ حقوقی شده بود خوشبینانه به کورانت (در ۱۷ نوامبر ۱۹۲۸) نوشت که کاالیشر، مشاور حقوقی مؤسسه، عقیده دارد که کافی است چهار ویراستاری که نمی‌خواهند از اخراج براؤر جانبداری کنند، از رأی دادن خودداری ورزند تا دست بقیه باز بماند. ظاهراً اشپرینگر متوجه نبود که چون دو ویراستار بسیار معتبر و مشهور قبلاً تصمیم گرفته بودند از هیلبرت حمایت نکنند، این راه‌حل حتی اگر از لحاظ حقوقی معتبر می‌بود، وجاهت و اعتبار معنوی نداشت.

اگر معلوم می‌شد که این راه‌حلْ مشکلاتی در درون هیأت ویراستاران به‌بار می‌آورد، ناشر می‌توانست همهٔ ویراستاران را اخراج کند و هیلبرت و هوادارانش را دوباره منصوب سازد. بنابراین، پیشنهاد مشاور حقوقی [از نظر خودش] قابل اجرا بود. به عقیدهٔ او، مؤسسهٔ انتشاراتی طبق قرارداد فقط در برابر ویراستاران ارشد متعهد بود و قراردادی با بقیهٔ ویراستاران نداشت.

---

۱. «جدال موش و قورباغه» نمایشنامه‌ای یونانی است که نویسندهٔ آن ناشناس است. در اواخر قرون وسطا، رولنهاگن (Rollenhagen) آن را با عنوان *Froschmeuseler* به آلمانی درآورده است (وان‌دالن).

این نمایشنامه [با عنوان یونانی Batrachomyomachie] عنوان یک شعر قهرمانی کمدی است که به نادرست به هومر نسبت داده شده ولی بعید است پیش از قرن سوم قبل از میلاد سروده شده باشد. تقلیدی هزل‌آمیز از ایلیاد است و به صورت حماسه‌ای پرنشاط، جنگ جانوران را توصیف می‌کند.ـنشر ریاضی به نقل از دایرةالمعارف بروکهاوس.

نامهٔ بیبرباخ، که در بالا از آن یاد شد، ظاهراً به قدری کاراتئودوری را ناراحت کرد که تصمیم گرفت از یک همکار در دانشکدهٔ حقوق نظر بخواهد. نظر این همکار، مولر-ارتسباخ[1]، به وضوح مغایر با نظر حقوقدان اشپرینگر بود. او روشن ساخت که

۱. براوِر و اشپرینگر-فرلاگ طبق قرارداد نسبت به هم متعهدند زیرا براوِر از این مؤسسه حقوق دریافت کرده است.
۲. نامهٔ هیلبرت از نظر قانونی الزام‌آور نیست.

مولر-ارتسباخ سه راه حل برای مسأله پیشنهاد کرد.

۱. اشپرینگر، براوِر را اخراج کند؛ ولی حکم اخراج باید شامل دلایل مناسب باشد.
۲. چهار ویراستار ارشد و ناشر همراه با هم براوِر را اخراج کنند.
۳. ویراستاران همکار ممکن است از لحاظ حقوقی ویراستار به حساب آیند. در این صورت، تنها راه چاره، انحلالِ کامل هیأت ویراستاران و تشکیل یک هیأت جدید است.

کاراتئودوری دو پیشنهاد اول را مناسب ندید زیرا منصفانه نبود که بارِ مسائل داخلی ویراستاران بر دوش اشپرینگر گذاشته شود. بنابراین، راه‌حل سوم را توصیه کرد (در نامه به بلومنتال، ۲۷ نوامبر). در اینجا برای اولین بار پیشنهادی مطرح شد که بعداً مبنای حل و فصل نهایی این منازعه قرار گرفت.

هیلبرت، طرف اصلی دعوا در قضیهٔ آنالن، آشکارا از صحنه بیرون رفته بود. اگر او در جریان وقایع قرار می‌گرفت، مسلماً برای وضع مزاجیش که هنوز هم خطرناک بود، زیان داشت. در یادداشت کوتاهی به هرالد بور و ریچارد کورانت اختیار داده بود که نمایندگان قانونی او در مسائل مربوط به ماتماتیشه آنالن باشند. بنابراین، کل ماجرا بیش از پیش به نوعی «جنگ اشباح» تبدیل شد که یک طرف آن از صحنه غایب بود.

منازعه در اینجا به بن‌بست رسیده بود. اگر چه اشپرینگر در نامه‌ای به بیبرباخ تأیید کرده بود که ویراستاران ارشد می‌توانند هر یک از ویراستاران دیگر را برکنار کنند، ظاهراً انگیزهٔ حمله به براوِر کاهش یافته بود. ملاقاتی که قرار بود بین کاراتئودوری، کورانت، بلومنتال، و اشپرینگر صورت گیرد بارها به تعویق افتاده و سرانجام لغو شده بود.

کورانت با کاراتئودوری هم‌عقیده بود که انحلالِ کامل هیأتْ راه‌حل خوبی است (۳۰ نوامبر ۱۹۲۸)؛ به هر حال، این کار مستلزم اقدام داوطلبانهٔ ویراستاران بود و ساختار نهایی هیأت ویراستاران نمی‌بایستی نتیجهٔ یک شگرد حقوقی باشد که تنها هدفش، بی‌اساس جلوه دادن مخالفت براوِر باشد.

کاراتئودوری بر اساس نظر مولر-ارتسباخ به این نتیجه رسیده بود که طرح اولیهٔ هیلبرت، حتی در صورت تعدیل و اصلاح، ارزش حقوقی ندارد، و اشتیاق خود را به کمک به حل موضوع «به خاطر علاقه به هیلبرت» بیان داشت ولی احتمال شرکت خود را در ساختار آتی آنالن با قاطعیت رد کرد.

انحلال

اکراه کاراتئودوری از درگیری گسترده در ماجرا و قناعت کردن او به حداقلِ اقدامات برای راضی ساختن هیلبرت و کمک به (دوستش) براوِر کاملاً قابل درک است. تا جایی که از روی نامه‌های مبادله شده می‌توان قضاوت کرد، فقط بلومنتال بود که سرسختانه اهل مبارزه‌جویی بود. ولی او دریافت که نامه‌اش (نامه به کورانت و بور در ۴ دسامبر) موجب راه‌حل قابل قبولی نشده است، و به راههای دیگر روی آورد. به خصوص، نوشت که اوضاع برای طرح کاراتئودوری مناسب است. آنالن صدمین جلدِ خود را به پایان می‌رسانید و موقعیت خوبی بود که در آغاز جلد صدویکم، یک «سری جدید» یا «سری دوم» با تغییر هیأت ویراستاران آغاز گردد. ولی در حال حاضر بر سر یک دو راهی قرار داشت. چون نامهٔ هیلبرت آشکارا فاقد ارزش حقوقی بود، براوِر «ویراستار همکار» به حساب می‌آمد و نام او بایستی در روی جلد شمارهٔ در دست چاپ ذکر می‌شد، اما این مغایر با تمایلات هیلبرت بود. آیا بور و کورانت، به عنوان وکلای هیلبرت، می‌توانستند به او اجازه بدهند نام براوِر را روی جلد چاپ کند؟ در غیر این صورت باید انتشار نشریه به تأخیر می‌افتاد. اجازهٔ مورد نظر احتمالاً داده می‌شد.

بور نیز ظاهراً راه‌حلی برای این قضیه پیشنهاد کرده بود. از روی مکاتبات کاراتئودوری و بور با بلومنتال، چنین برداشت می‌کنیم که پیشنهاد او همان راه‌حل بلومنتال بوده است با مختصری تفاوت. اختلاف اصلی در آن بود که بور از تغییر سازمان کلی هیأت ویراستاران طرفداری می‌کرد، به این صورت که فقط ویراستاران ارشد بمانند و ویراستار همکار وجود نداشته باشد. بنابراین، راه‌حل او همچون تغییر اساسی در سیاست نشریه به نظر می‌رسید و دیگر عملی بر علیه براوِر محسوب نمی‌شد.

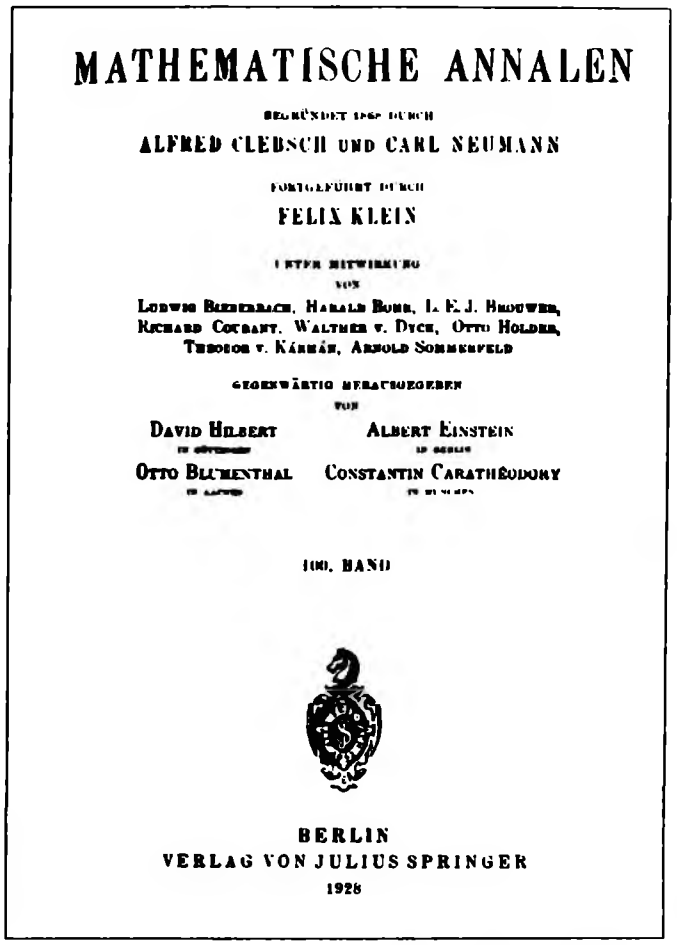
بور ظاهراً هیلبرت، بلومنتال، هکه، و وایل را به‌عنوان اعضای جدید در نظر گرفته بود. اگر وایل دعوت را نمی‌پذیرفت، می‌شد از توپلیتس دعوت کرد. بلومنتال ابراز تردید کرد که ابقای خودش در ویراستاری کار درستی باشد. زیرا خیلی امکان داشت هیأت جدید همان هیأت قبلیِ ویراستاران ارشد به نظر رسد که چهره عوض کرده است (نامه به بور، ۵ دسامبر). او روز بعد در نامه‌اش به کورانت انحلال هیأت ویراستاران را به‌طور کلی ضروری دانست و کاملاً موافق بود که ویراستاران جدید را هیلبرت باید انتخاب کند.

پس از آن، جریان به آرامی پیش رفت. اشپرینگر انحلال هیأت ویراستاران را پذیرفت و موافقت کرد که قراردادی در مورد آنالنِ تجدید سازمان یافته با هیلبرت ببندد. تقریباً بجز بعضی ترتیبات و نکات حقوقی مسأله‌ای نمانده بود که حل شود.

ممکن است بپرسید که نقش براوِر در این جریان چه بود؛ در واقع او را کاملاً نادیده گرفته بودند. وی در نامه‌ای به تاریخ ۳۰ نوامبر خطاب به ویراستاران و ناشر، وصول ادعانامهٔ بلومنتال را که همان موقع به دستش رسیده اعلام می‌کند. در واکنشی که به طرز عجیبی ملایم است، از ویراستاران فقط می‌خواهد قضاوتشان را مسکوت نگهدارند — در این توهم لذت‌بخش به سر می‌برده که قرار است بر سر موضوع رأی‌گیری شود — زیرا تهیهٔ دفاعیه چند روزی طول می‌کشد.

چون انحلال هیأت ویراستاران بایستی داوطلبانه می‌بود، جلبِ موافقت اینشتین اهمیت داشت. در قرارداد سال ۱۹۲۰ مفرّ ظریفی وجود داشت که هر یک از دو طرف می‌توانست بدون زیر پا گذاشتن مقررات، به قرارداد فیصله بخشد. در فصل ۵، مواد مربوط به خاتمهٔ قرارداد آمده بود و در یکی از آنها تصریح شده بود که اگر ویراستاران از [ادامهٔ] قرارداد سر باز زدند بدون آنکه ناشر آن را نقض کرده باشد، ناشر می‌تواند انتشار ماتماتیشه آنالن را بنا به میل خود ادامه دهد.

1. Müller-Erzbach


MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

UNTER MITWIRKUNG

VON

LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, L. E. J. BROUWER, RICHARD COURANT, WALTHER v. DYCK, OTTO HÖLDER, THEODOR v. KÁRMÁN, ARNOLD SOMMERFELD

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DAVID HILBERT — ALBERT EINSTEIN

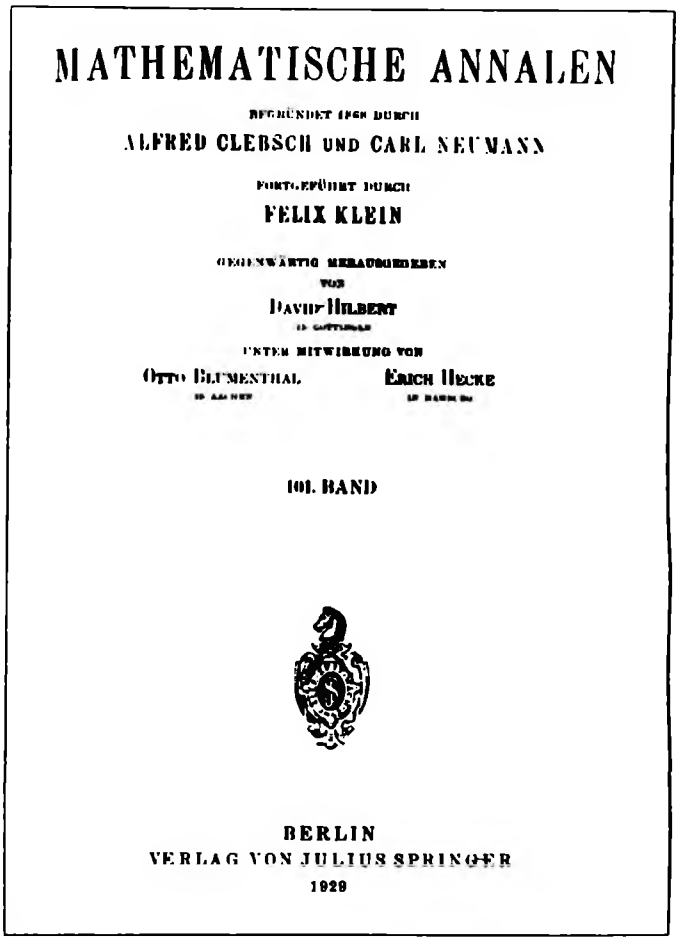
OTTO BLUMENTHAL — CONSTANTIN CARATHÉODORY

100. BAND

BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1928


MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DAVID HILBERT

UNTER MITWIRKUNG VON

OTTO BLUMENTHAL — ERICH HECKE

101. BAND

BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1929

ماتماتیشه آنالن، جلد ۱۰۰ (۱۹۲۸) و جلد ۱۰۱ (۱۹۲۹). به تغییرات فهرست ویراستاران توجه کنید.

شاید از موافقت اینشتین می‌شد صرفنظر کرد، ولی احتمالاً نادیده گرفتن رأی او تأثیر بدی در افکار عمومی می‌گذاشت؛ از آن گذشته، عقل حکم می‌کرد شیوهٔ غیرقابل ایرادی در پیش گرفته شود که براؤر به فکر نیفتد موضوع را به دادگاه بکشاند.

بنابراین اینشتین تحت فشار قرار گرفت. فیزیکدانی به‌نام جیمز فرانک، از دوستان بورن، از وی تقاضا کرد به طرح جدید توجه کند. فرانک بر جنبهٔ سیاسی قضیه تأکید کرد: «در این زمان ... اینکه ریاضیدانان دچار تفرقه شوند و یا مرافعه به آرامی حل و فصل شود، به تصمیم شما بستگی دارد. شوخیِ ناجوری خواهد بود که ادعا شود شما در این قضیه، موضعِ ناسیونالیستی گرفته‌اید» (بی‌تاریخ).

فرانک تنها کسی نبود که جنبه‌ای سیاسی (واقعی یا موهومی) در منازعهٔ مورد بحث کشف کرده بود. قبلاً بلومنتال به کورانت شکایت برده بود (۱۸ نوامبر) که براؤر جنبهٔ سیاسی به این قضیه داده است. بورن هم در نامه‌اش به اینشتین در ۱۱ نوامبر، این کشمکش را به مسألهٔ سیاسی ناسیونالیستهای آلمانی و به خصومت بین برلین و گوتینگن ربط داده بود.

نتیجهٔ موفقیت‌آمیز کار را کورانت به اشپرینگر اطلاع داد. وی در نامه‌ای به تاریخ ۱۵ دسامبر همکاری اینشتین، کاراتئودوری، بلومنتال، و هیلبرت را اعلام کرد. وی در همین زمان پیشنهاد کرد قرارداد جدیدی بین هیلبرت و ناشر بسته شود و هیلبرت در سازماندهی هیأت ویراستاران اختیار تام داشته باشد. و نیز از بلومنتال دعوت شود همچنان در سمت ویراستار مجری باقی بماند. به عقیدهٔ کورانت، وی این دعوت را احتمالاً می‌پذیرفت. همچنین ــ و این خطای فاحشی در شناخت خلق و خوی اینشتین بود ــ کورانت گمان می‌کرد که پنجاه درصد احتمال دارد که اینشتین به هیأت بپیوندد. در مورد خودش، کورانت فکر می‌کرد عاقلانه‌تر است که معرفی او به عنوان ویراستار تا زمانی که آبها از آسیاب بیفتد، به تعویق افکنده شود (ظاهراً در بارهٔ این موضوع قبلاً بحث شده بود).

و بالاخره کورانت پیشنهاد کرد که ناشر موضوع استعفای دسته‌جمعی را به تنهایی به همهٔ ویراستاران اطلاع دهد. در مورد براؤر، به اشپرینگر اندرز داد که نامه‌ای شخصی به او بنویسد و این راه‌حل را که برای ختم غائله اندیشیده شده برایش توضیح دهد، و تأکید کند که او [اشپرینگر] متأسف خواهد شد اگر براؤر احساس کند که این قضیه، آزادی عملش را محدود خواهد کرد و خاطر نشان کند که مؤسسهٔ انتشاراتی او در خدمت براؤر خواهد بود تا اگر بخواهد، عقایدش را در بارهٔ مبانی نشر دهد. معلوم نیست که این نامه نوشته شد یا نه، ولی مسلماً طرز برخورد کورانت سیاستمدارانه و آشتی‌جویانه بود.

«انگیزهٔ شخصی در کار نیست»

وقتی تصمیم را گرفتند، اقدامات بدون فوت وقت آغاز شد؛ ناشر پس از مشورتهای حقوقیِ معمول شروع به تجدید سازمان نشریه کرد و نتیجهٔ کار (در ۲۷ دسامبر) به ویراستاران اطلاع داده شد. علی‌رغم ملاحظات کورانت که در بالا گفته شد، نامه را هیلبرت و اشپرینگر امضا کردند. از براؤر هم، مانند دیگران، به خاطر خدماتش سپاسگزاری شد و این امتیاز را به او دادند که شماره‌های آیندهٔ آنالن را رایگان دریافت کند. اگر غرغر بعضی از ویراستاران سابق و واکنش مذبوحانه و بی‌نتیجهٔ براؤر نبود، قضیه به‌خوبی فیصله می‌یافت.

کاراتئودوری در سراسر این جریان، سخت اندوهگین و افسرده بود؛ از آغاز در چنگال دو احساس گرفتار آمده بود: وفاداری نسبت به هیلبرت و اکراه از اخراج غیرمنصفانهٔ براؤر. تلاشهای او برای میانجیگری هم فقط اوضاع را بدتر کرده بود و راه‌حل نهایی، آرامش خاطر عمیقی به او بخشید. در حالتی که نومیدی بر او غلبه کرده بود به کورانت (در ۱۲ دسامبر) نوشت: «نمی‌توانید تصور کنید که در چند هفتهٔ گذشته چقدر ناراحت بوده‌ام. پس از جدا شدن از براؤر، پیش‌بینی می‌کردم که همین موضوع ممکن است بین من و همهٔ دوستان دیگرم پیش بیاید.» او حتی امکان پذیرش یک کرسی در دانشگاه استنفرد را که به او پیشنهاد شده بود، مدنظر قرار داد.

کورانت در پاسخش (در ۱۵ دسامبر) سعی کرد خیال کاراتئودوری را آسوده سازد: او گمان می‌کرد توانسته است هیلبرت را قانع کند که کاراتئودوری، در موضعی که قرار دارد، نمی‌توانسته طور دیگری عمل کند؛ اکنون موضوع «بدون نگرانی از رنجش هیلبرت» حل و فصل شده است.

دو روز بعد، کورانت نوشت که شب قبل در بارهٔ کل موضوع با هیلبرت بحث کرده و هیلبرت از او خواسته است به کاراتئودوری بگوید «من فکر می‌کنم شما همهٔ کارهای ممکن را برای من کرده‌اید.» هیلبرت کاملاً از نتیجهٔ کار راضی بود و به عقیدهٔ او آنالن با این تدبیر بهتر از روشی که او در اخراج براؤر در پیش گرفته بود حفظ می‌شد. « ... کم‌کم برای من کاملاً روشن شده است که اقدام اولیهٔ هیلبرت تحت تأثیر هیچ انگیزهٔ شخصی نبوده است ... »

کاراتئودوری خرسندی خود را از این برخورد هیلبرت (در ۹ دسامبر) بیان داشت اما با نظر کورانت در بارهٔ انگیزه‌های اقدام هیلبرت کاملاً موافق نبود: «او خودش [قبلاً] تصدیق کرده است که تنها انگیزهٔ تصمیمش، این احساس بوده که براؤر به او اهانت کرده است؛ من دور از شأن او می‌دانم که اکنون دست به تعبیر و تفسیر بزند و فقط انگیزه‌های غیرشخصی را محرک اقدام خود بداند.»

نکتهٔ اخیر را کورانت نمی‌توانست بی‌جواب بگذارد. او خیلی تلاش کرده بود که طرفهای دعوا را آشتی دهد و حالا یکی از ویراستاران ارشد پیشین به این شایعه دامن می‌زد که هیلبرت عاری از بعضی احساسات کینه‌جویانهٔ شخصی نبوده است. او و بور برای از میان بردن این منبع اختلاف به نصیحت کردن کاراتئودوری پرداختند. کورانت با لحن آرامی نظرش را تکرار کرد (۲۳ دسامبر) و به بیانات خود هیلبرت استناد کرد که او «تحت تأثیر هیچ‌گونه احساسات شخصی از قبیل نفرت، عصبانیت، یا بی‌احترامی نسبت به براؤر نبوده است.» حتی به نحو ظریفی کاراتئودوری را تحت فشار قرار داد: «مسؤولیت ما در قبال هیلبرت در این مرحله حتی بیشتر است زیرا او هنوز در جریان تحولات این منازعه نیست و به‌خصوص نمی‌تواند سفر شما به لارن و گزارش ناراحت‌کنندهٔ براؤر در بارهٔ آن را حدس بزند.»

برخورد بور ظرافت کمتری داشت؛ [به نظر او] اگر کاراتئودوری قانع نشده بود که انگیزه‌های هیلبرت جنبهٔ غیرشخصی دارد، بایستی از خود هیلبرت می‌پرسید. «زیرا، اینکه هیلبرت ــ بدون آنکه خودش آگاه باشد و بدون آنکه بتواند از خودش دفاع کند ــ نخست «دارای عقل ناسالم» و سپس «از مرحله پرت» به حساب آید، مسأله‌ای است که من به عنوان یکی از نمایندگان هیلبرت نمی‌توانم مدت زیادی شاهد آن باشم و واکنشی نشان ندهم.»

علی‌رغم شمشیرکشی بور، کاراتئودوری موضع خودش را حفظ کرد: «قضاوت در بارهٔ انگیزه‌های هیلبرت خیلی پیچیده است؛ من گمان می‌کنم این انگیزه‌ها را خوب تشخیص می‌دهم زیرا ۲۵ سال است که با نحوهٔ تفکر او آشنا هستم. بله، انگیزه‌هایی که شما ذکر می‌کنید و هیلبرت هم در بولونیا در بحث با بلومنتال آنها را تشریح کرده، وجود داشته‌اند. ولی مجموعهٔ اندیشه‌هایی که به غلیان احساسات او در ۱۵ اکتبر انجامید [اشاره به نامهٔ هیلبرت به اینشتین، ۱۵ اکتبر] بسیار پیچیده‌تر از اینها بوده است.

حق با کیست، کورانت و بور یا کاراتئودوری؟ این موضوع شاید هرگز کاملاً معلوم نشود. شک نیست که مسألهٔ «نحوهٔ حفاظت از آنالن در برابر تأثیرات منفیِ (حقیقی یا خیالی) براؤر» در ذهن هیلبرت اهمیت داشته است. اما چه کسی می‌گوید که هیچ انگیزهٔ شخصی در کار او نبوده است؟ اظهارات خود هیلبرت (مثلاً در نامه‌هایش به بلومنتال و کورانت) مبنی بر اینکه غرض شخصی محرکِ اقدام او نبوده، در دست است. ولی چقدر می‌توان اعتبار برای این اظهارات قائل شد؟ به هر حال نامهٔ ۱۵ اکتبر او مغایر با آنهاست.

اقدام مذبوحانه

کل مسأله ظاهراً به نحو رضایت‌بخشی حل شده بود. هیلبرت که فقط تا حدی از وقایع خبر داشت (چنانکه بلومنتال در نامهٔ ۳۱ دسامبرش به کورانت می‌گوید) «نامه‌ای پیروزمندانه، حاکی از اینکه همه چیز بر وفق مراد است» به بلومنتال نوشت. کورانت نامه‌ای آشتی‌جویانه (در ۲۳ دسامبر) به براؤر نوشته و در آن ابراز امیدواری کرده بود که راه‌حل قضیهٔ براؤر را راضی کرده باشد. همچنین خواسته بود براؤر را قانع کند که انگیزه‌های شخصی نقشی در اقدام هیلبرت نداشته است، و مسلماً هیچ انگیزه‌ای که «وجود آن مغایر با احترام به شخصیت علمی و معنوی شما باشد» در کار نبوده است. [معلوم می‌شود] براؤر را چندان نمی‌شناخته است!

براؤر هنوز نامهٔ اشپرینگر و هیلبرت را دریافت نکرده بود، بنابراین خبر نداشت که قضیه فیصله یافته است (مگر اینکه یکی دیگر از ویراستاران به او اطلاع داده باشد).

در واقع براؤر در همان روزی که کورانت به او اندرزِ «بگذار و بگذر» می‌داد بار دیگر به ناشر و ویراستاران متوسل شد. وی اصرار داشت که به خاطر مصلحت ریاضیات، همهٔ اعضای هیأت ویراستاران ماتماتیشه آنالن باید سر کار خود بمانند؛ چون می‌دانست که مطرح کردن دفاعیهٔ مکتوبی به قلم او، وحدت ویراستاران را از میان می‌برد، علاقه‌مند بود ارسال چنین نامه‌ای را به تأخیر بیندازد. از آن گذشته، کاراتئودوری در نامه‌ای به تاریخ ۳ دسامبر به او قول داده بود حداکثر تلاش را بکند تا راه‌حل قابل قبولی پیدا شود، و تقاضا کرده بود چند هفته صبر کند: زومرفلد هم از او خواسته بود منتظر مداخلهٔ کاراتئودوری باشد.

راه‌حل نهایی، به صورتی که هیلبرت و اشپرینگر تنظیم کرده بودند، براؤر را راضی نکرد. او می‌دانست که تجدید سازمان آنالن عمدتاً، اگر نه کاملاً، برای خلاص شدن از شرّ او طراحی شده است. همچنین براؤر نظارت صریحی در بارهٔ سازماندهی ایده‌آلِ آنالن داشت.

او در نامه‌ای (در ۲۳ ژانویهٔ ۱۹۲۹) خطاب به تمام ویراستاران به استثنای بلومنتال و هیلبرت این راه‌حل نهایی را رد کرد. به نظر او ماتماتیشه آنالن یک میراث معنوی و مایملکِ اشتراکی تمام هیأت ویراستاران بود. ویراستاران ارشد، به اصطلاح، با انتخاب آزادانه برگزیده شده بودند و صرفاً نمایندگانی بودند در برابر دنیای ریاضی. براؤر استدلال کرد که بنابراین، اختیارات قراردادی ویراستاران ارشد یک مایملک شخصی نیست بلکه اعطا شده از طرف جمع است. به نظر او هیلبرت و بلومنتال این مایملک را از صاحبانش ربوده بودند و بنابراین مرتکب اختلاس شده بودند، هر چند این کارْ تصادفیِ صرف باشد و از راه قانونی قابل پیگیری نباشد (در اینجا خواننده می‌تواند انعکاس ضعیفی از ایرادهای براؤر به اصل طرد شق ثالث را بشنود [۱]).

سپس براؤر به انتقاد از نقش بلومنتال در آنالن پرداخت. وی دیدگاههای اولیهٔ بلومنتال را در مورد برابریِ اختیاراتِ همهٔ ویراستاران بازگو کرد و به بی‌نظمیهایی در ادارهٔ آنالن اشاره کرد که در ۱۹۲۵ در نتیجهٔ وعدهٔ بلومنتال به کناره‌گیری پس از چاپ جلد ۱۰۰، پیش آمده بود.

کاراتئودوری هم از پایان یافتن نظام قدیم متأسف بود. وقتی با نظرات هکه در بارهٔ عملکرد گذشته مواجه شد (نامهٔ کورانت به کاراتئودوری، ۱۷ دسامبر): « ... که هکه، وقتی از سازمان هیأت ویراستاران و صلاحیت ویراستاران مشاور اطلاع یافت، سرش را در دست گرفت و نظر داد که تجدیدنظر و سازماندهیِ دقیقتر مطلقاً ضروری است»، از صمیم قلب به مخالفت برخاست (نامه به کورانت، ۱۹ دسامبر ۱۹۲۸):

> زیرا کلاین هیأت ویراستاران ماتماتیشه آنالن را طوری سازماندهی کرده بود که واقعاً نوعی آکادمی تشکیل می‌داد که هر عضو آن دارای حقوق برابر با دیگران بود. به عقیدهٔ من، دلیل اصلی اینکه آنالن می‌توانست ادعا کند مهمترین مجلهٔ ریاضی جهان است، همین بود. حالا به مجله‌ای مانند مجله‌های دیگر تبدیل می‌شود.

بعضیها تردید داشتند که کاهش شدید تعداد ویراستاران کار عاقلانه‌ای باشد. در دوم فوریهٔ ۱۹۲۹ بلومنتال یادداشتی در بارهٔ سازمان آتی آنالن توزیع کرد که در آن به [امکان] افت این مجله در مقایسه با مجله‌های دیگر اشاره کرده بود. چون سمت ویراستار همکار حذف شده بود، به گروه بزرگتری از ویراستاران احتیاج بود: «ضرورت فزایندهٔ مشاوران علمی نتیجهٔ ناگزیر رشد تخصص‌گرایی است.» به‌طور خلاصه، بلومنتال پیشنهاد می‌کرد چیزی شبیه گروه سابق ویراستاران همکار با عنوان دیگری تشکیل شود. وی در همین نامه، مسألهٔ جانشینی هیلبرت را پس از کناره‌گیری او مطرح کرد. بین مضمون این نامه و استدلالهایی که به نفع راه‌حل مورد بحث می‌شد، سازگاریِ چندانی نمی‌توان یافت.

تیر آخر

نظام جدید بر آنالن حاکم شد. جنجال و هیاهو با ظرافت مهار شد و هیجان در آلمان ــ حتی چنانکه کورانت به هکه نوشت، در میان همکاران در براین ــ فروکش کرد؛ به براؤر هم کسی توجهی نداشت. او پس از چند ماه صبر کردن و احتمالاً پس از اینکه دید دعوا خاتمه یافته و همه به سر کار و زندگی خود برگشته‌اند، تیر آخر را از کمان رها کرد و نامه‌ای در دفاع از خود بر علیه اتهام‌نامهٔ بلومنتال در ۱۶ نوامبر ۱۹۲۸، نوشت. این نامه در سه و نیم ورق نوشته شده بود و شامل رویدادهای پیشگفته از دیدگاه براؤر بود.

بلومنتال ادعا کرده بود که براؤر تعبیر خودش را جانشین روایتِ کاراتئودوری از تحولاتِ منتهی به اقدام هیلبرت و خود این اقدام، کرده است. براؤر در این نامه نخست به رد این ادعا پرداخت و نوشت که این نظرات از آنِ من نبوده بلکه «نظراتی بوده که در خلال دیدارِ یادشده، من و کاراتئودوری بر سر آنها به توافق رسیدیم، یعنی هر یک را یکی از ما به زبان آورده و دیگری پذیرفته است.» وی همچنین دلایل تن ندادن به اخراج را تشریح کرد. او به کاراتئودوری گفته بود

> من اخراجِ احتمالی از هیأت ویراستاران را نه تنها یک بی‌عدالتیِ نفرت‌انگیز بلکه همچنین ضربه‌ای جدی به آزادی عمل خود و، در برابر افکار عمومی، اهانتی ناراحت‌کننده می‌دانم؛ اگر این رویداد باورنکردنی واقعاً به وقوع پیوندد، آبرو و آزادی عملم را تنها در صورتی باز خواهم یافت که به گسترده‌ترین مبارزه در برابر افکار عمومی دست بزنم.

[به نوشتهٔ براؤر] دیدار ۳۰ اکتبر تا اواخر آن دوستانه بود، ولی کاراتئودوری در پایان دیدار دوباره به موضوع برگشت و در برابر ابراز تعجب کاراتئودوری فقط توانست پاسخ دهد: «چه می‌شود کرد؟» و «من نمی‌خواهم کسی را بکشم». خداحافظی با تلخ زبانیِ براؤر همراه شد: «دیگر تفاهمی با شما ندارم»، «این دیدار را آخرین دیدار به شمار می‌آورم» و «برایتان متأسفم.»

براؤر پس از انتقاد از بلومنتال به خاطر تمایلش به اخراج او از هیأت ویراستاران، به اتهامهای بلومنتال پاسخ داد. بدون اینکه استدلال او را کلمه به کلمه تکرار کنیم، بعضی نکته‌های آن را نقل می‌کنیم تا موضع براؤر را در این بحث نشان دهیم. بلومنتال براؤر را به بی‌ادبی و رفتار خالی از ظرافت متهم کرده بود. براؤر در این نامه پاسخ می‌دهد که اگر منظور بلومنتال از بی‌ادبی، تمایل به درستی و صداقت (وظیفهٔ هر فرد انسانی) به اضافهٔ علاقه‌مندی به وضوح و روشنی (که تقدیر ریاضیدان است) باشد، مواردی از این نوع بی‌ادبی وجود داشته است که در آنها ــ به گفتهٔ براؤر ــ نه کبر و غرور مؤلفان مقاله‌ها و نه علاقهٔ بلومنتال به اینکه آدم مطبوعی جلوه کند، هیچ‌یک قابل بخشش نیست. به علاوه، در این موارد خود بلومنتال بررسی مقاله را به براؤر، به عنوان حلال مشکلات، واگذار کرده بوده و بنابراین اگر هم زبان به شکوه می‌گشوده از حمایت و تأیید همکاران ویراستارش برخوردار نمی‌شده است.

به نظر براؤر، تصویر غلطی از مسألهٔ کناره‌گیری کلاین عرضه شده است؛ مؤلفی پس از آنکه مقاله‌اش را براؤر رد کرده بود به کلاین متوسل شده و آن را برای او قابل قبول جلوه داده بود. پس از آن وقتی براؤر به کلاین نشان داد که مؤلف («نه از لحاظ صوری بلکه از نظر محتوایی») در اشتباه است، کلاین دید که نمی‌تواند وعده‌اش به مؤلف را عملی سازد. بعداً در بحث با

براوِر گفت که فهرستهای نام ویراستاران در روی جلد مجله گمراه‌کننده است و خود او دیگر توانایی قبول این مسؤولیت را ندارد. وی مدت کوتاهی پس از آن از کار کناره گرفت.

براوِر سرزنش بلومنتال را در مورد تأخیر طولانی در بررسی مقاله‌ها بی‌معنی خواند و نوشت که بررسی مقالاتِ مملو از اشتباه زمان زیادی می‌خواهد، و او برخلاف هیلبرت هرگز مقاله‌ای را گم نکرده است. به هر صورت، سرزنشهای بلومنتال قبلاً هرگز مطرح نشده بوده است.

براوِر که جنگ را باخته بود، دیگر سعی نکرد از تجدید سازمان آنالن جلوگیری کند. او از بلومنتال دعوت کرد آرشیو آنالن را بگشایند و ادعا کرد که بررسی مکاتبات موجود کاملاً حق را به جانب او خواهد داد.

جنگی نه چون جنگهای دیگر

داستان منازعهٔ ماتماتیشه آنالن به تدریج جزء فرهنگ شفاهی ریاضیات اروپایی شد. در بارهٔ وقایعِ پس از آن اطلاع چندانی در دست نیست. گوتینگنی‌ها در نبرد پیروز شده بودند، و ممکن است وسوسه شده باشند که با یکی دو تن از بازیگران فرعی وارد مجادله شوند. مثلاً هرالد بور در پیش‌نویس نامه‌ای نوشت «اشمیت این بار درک می‌کند که او حساس است و حتی تلفن زدن به براوِر کار خطرناکی است» (نامه به کورانت، ۳۱ دسامبر ۱۹۲۸). پس از قدری تأمل، از فرستادن نامه به اشمیت صرفنظر شد.

از میان شایعاتی که حول و حوش مسألهٔ آنالن به راه افتاد، معدودی به صورت مکتوب درآمد. فقط در یک مورد می‌توان قرائنی حاکی از صحت شایعه پیدا کرد و آن هم در مورد این ادعا که انگیزهٔ اخراج براوِر تا حدی این بوده است که وی حق بررسی همهٔ مقالاتِ ریاضیدانان هلندی را برای خود محفوظ نگه داشته بوده است [۴، ص ۱۸۷]. پروفسور فرویدنتال به من گفت که در زمان منازعه، این نظر را عموماً قبول داشته‌اند. تصادفاً این شایعهٔ خاص در پیش‌نویس نامه‌ای از فلیکس کلاین به اسخوتن ریاضیدان هلندی (۱۳ مارس ۱۹۲۰) تأیید شده است. کلاین در این نامه نوشت: «پروفسور براوِر ... که در بدو ورودش به هیأت ویراستاران آنالن حق تصمیم‌گیری، به‌خصوص در بارهٔ مقاله‌های هلندی، را برای خود محفوظ داشته ... » به‌طور کلی اطلاعات چندانی در بارهٔ اینکه براوِر از این امتیاز واقعاً چگونه استفاده می‌کرده در دست نیست؛ نامهٔ کلاین به مقاله‌ای از اسخوتن مربوط می‌شد که براوِر در بارهٔ آن نظر منفی داده بود.

اکنون که، فارغ از احساسات و هیجانات معاصران واقعه، به گذشته می‌نگریم، فقط می‌توانیم بگوییم تمام این ماجرا، تراژدیی ناشی از خطاهای پیاپی بوده است. ناراحتی هیلبرت از براوِر قابل درک است. موارد زیادی از برخورد و اختلاف بین آنها پیش آمده بود: مجادله بر سر میانی، رد پیشنهاد تصدی کرسی گوتینگن، قضیهٔ ویژه‌نامهٔ آنالن در بارهٔ ریمان، و بالاخره ماجرای بولونیا. به مفهومی، منازعه‌ای درازمدت بین آنها جریان داشته بود و هر یک از دو حریف اعتقاد راسخی داشت که بقای ریاضیات به او وابسته است. بیماری هیلبرت که خطر واقعیِ مرگ را دربرداشت احتمالاً در قدرت تشخیص و قضاوت او اثر گذاشته بود. من نمی‌دانم که براوِر چگونه می‌توانسته آنالن را به نابودی بکشاند. باید با اینشتین هم‌عقیده بود که: اگر براوِر خطری [برای آنالن] باشد، راههای دیگری برای حفاظت آنالن از این خطر وجود دارد. مسألهٔ انگیزه‌های واقعی هیلبرت در اقدامش، در محدودهٔ حدس و گمان باقی خواهد ماند. به هر حال، نامه به اینشتین به احتمال زیاد نشان‌دهندهٔ این است که هیلبرت انگیزه‌های شخصی داشته است.

به عقیدهٔ من این ماجرا برای براوِر پیامدهای بسیار جدیتری داشته است. وضع روانیش کاملاً ممکن بود تحت فشارهای روحی شدید به مرز اختلال برسد. حملهٔ هیلبرت، حمایت نکردن دوستان قدیم از او، شرمساری (حقیقی یا خیالی) از اخراجش، نادیده گرفته شدن خدمات انکارناپذیرش به آنالن، همهٔ این عوامل، براوِر را به انزوایی خود خواسته کشاند.

اگرچه بعید می‌نماید که شهودگرایی به صورت دیدگاه غالب در ریاضیات درمی‌آمد، ولی حقیقتاً امکان داشت که به رشته‌ای مقبول و تثبیت‌شده، هر چند محدود، تبدیل شود. اما عملاً سرنوشت دیگری پیدا کرد؛ توسعه و تکامل ریاضیات شهودگرایانه (یا ساختی) دچار چنان وقفه‌ای شد که تقریباً چهل سال به طول انجامید.

پس از قضیهٔ آنالن، براوِر اشتیاق چندانی به اشاعهٔ شهودگرایی نداشت؛ وی به کار در این زمینه ادامه داد ولی در مقیاسی محدود و با پیروانی اندک. در واقع، کل فعالیت ریاضی او طی مدتهای مدید [نسبت به سایر فعالیتهایش] حالت فرعی و حاشیه‌ای داشت. در طی دههٔ ۱۹۳۰ براوِر به ندرت مطلبی منتشر می‌کرد (فقط دو مقالهٔ کوتاه در بارهٔ توپولوژی)؛ به برنامه‌ها و فعالیتهای مختلفی پرداخت که هیچ ربطی به ریاضیات یا مبانی نداشت. سال ۱۹۲۸ عملاً پایان «مجادله بر سر مبانی» بود.

ترجمهٔ سیامک کاظمی

مراجع

1. L. E. J. Brouwer, Über die Bedeutung des Satzes vomausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie. *Journal für reine und angewandte Mathematik* 154 (1924), 1-7, Also in *Collected Works*, Vol. 1 (A. Heyting, ed.), Amsterdam: North-Holland Publ. Co. (1975), 268-274.

2. D. van Dalen (ed.), *L. E. J. Brouwer, C. S. Adama van Scheltema. Droeve snaar, vriend van mij.* Amsterdam: Arbeiderspers (1984).

3. H. Mehrtens, Ludwig Bieberbach and "Deutsche Mathematik," *Studies in History of Mathematics* (E. R. Philips, ed.). The Mathematical Association of America (1987), 195-241.

4. C. Reid, *Hilbert-Courant.* Berlin: Springer-Verlag (1986). (Originally two separate vols. 1970, 1976).

******

• D. van Dalen, "The war of the frogs and the mice, or the crisis of the *Mathematische Annalen*", *The Mathematical Intelligencer.* (4) **12** (1990) 17-31.

مقاله کلاسیک

یکتایی تجزیه•

پیر ساموئل

ترجمهٔ روشن تجرد، روزبه حضرت

۱. مقدمه

می‌دانیم که هر عدد طبیعی را تنها به یک روش می‌توان به‌صورت حاصلضرب اعداد اول نوشت. به‌منظور تعمیم این مطلب بهتر است خاصیت یکتایی تجزیه را در حلقهٔ $\mathbb{Z}$ از اعداد صحیح بیان کنیم. بنابراین اگر مجموعهٔ اعداد اول را با P نشان دهیم، هر عدد غیرصفر $x \in \mathbb{Z}$ را می‌توانیم به‌طور یکتا به‌صورت زیر بنویسیم

$$x = \pm 1 \prod_{p \in P} p^{\nu_p(x)} \qquad (1)$$

برای اینکه فرمول (۱) از لحاظ ریاضی با معنا باشد، فرض می‌کنیم نمای $\nu_p(x)$ نمایشگر اعداد صحیح مثبتی است که تقریباً همه صفرند (یعنی بجز تعدادی متناهی از آنها، بقیه ۰اند). فرمول نسبتاً انتزاعی (۱) که حاصلضرب موجود در آن ظاهراً نامتناهی است این مزیت بزرگ را دارد که نحوهٔ وابستگی نماهای $\nu_p(x)$ به x را نشان می‌دهد: در صورت منظور کردن نماهای منفی، فرمول (۱) برای تمام اعداد گویای غیرصفر برقرار است. همچنین می‌توان دید که به‌ازای هر جفت (x, y) از اعداد گویای ناصفر داریم

$$\nu_p(xy) = \nu_p(x) + \nu_p(y), \ \nu_p(x+y) \geq \inf(\nu_p(x), \nu_p(y)) \qquad (2)$$

جبردانان فرمول (۲) را به این صورت بیان می‌کنند که نگاشت $\nu_p : Q^* \to \mathbb{Z}$ یک ارزهٔ گسسته از میدان [هیأت] اعداد گویاست.

به‌طور کلی، حلقهٔ تجزیه‌ای (یا «دامنهٔ تجزیهٔ یکتا»، U.F.D) را به‌عنوان دامنهٔ صحیح Aای تعریف می‌کنیم که دارای زیرمجموعه‌ای چون P است چنانکه هر عنصر غیرصفر x از A را بتوان به‌طور یکتا به‌صورت

$$x = u \prod_{p \in P} p^{\nu_p(x)} \qquad (1')$$

نوشت که در آن u یک عنصر وارونپذیر در A است و نماهای $\nu_p(x)$ اعداد صحیح مثبت و تقریباً همه صفرند. به آسانی می‌توان ثابت کرد که زیرمجموعهٔ P به‌صورت یکتا (صرف‌نظر از ضریبهای وارونپذیر) مشخص می‌شود. به‌بیان دقیقتر، مجموعهٔ $(Ap)_{p \in P}$ از ایده‌آلهای اصلی به‌طور یکتا مشخص می‌شود و با مجموعهٔ همه ایده‌آلهای اصلی ماکسیمالِ متمایز از A یکی است. توجه کنید که ایده‌آل اصلی Ab از یک دامنهٔ A ماکسیمال است (در میان ایده‌آلهای اصلیِ متمایز از A) اگر و تنها اگر هر مقسوم‌علیه b مانند d یا وارونپذیر و یا چنان باشد که db^{-1} وارونپذیر باشد؛ در این‌صورت b را عضو تحویل‌ناپذیر A می‌نامیم.

برای یک حلقهٔ A، تجزیه‌ای بودن خاصیت بسیار مفیدی است. دست‌کم برای مسائلی که به ساختمان ضربی حلقه مربوط می‌شود، حساب در هر حلقهٔ تجزیه‌ای A به‌زیبایی حساب در حلقهٔ $\mathbb{Z}$ از اعداد صحیح معمولی است. یادآور می‌شویم که در قرن نوزدهم، ریاضیدانانی مانند کومر و ددکیند متوجه شدند که برخی از حلقه‌های اعداد صحیح جبری، تجزیه‌ای نیستند. روابط

$$۲ \times ۳ = (۱ + \sqrt{-۵})(۱ - \sqrt{-۵}) \ , \ ۳ \times ۳ = (\sqrt{۱۰} + ۱)(\sqrt{۱۰} - ۱)$$

پیر ساموئل (Pierre Samuel) (متولد ۱۹۲۱) ریاضیدان فرانسوی معاصر و استاد بازنشستهٔ دانشگاه پاریس است. آثار تحقیقاتی او عمدتاً در زمینهٔ نظریهٔ جبری اعداد و هندسهٔ جبری است. ساموئل نویسندهٔ چند کتاب مشهور است که از آن میان کتابهای زیر شهرت دارند: کتاب دو جلدی جبر جابه‌جایی (با همکاری ریاضیدان فقید اسکار زاریسکی، ۱۹۵۸، ۱۹۶۰)، نظریهٔ جبری اعداد (۱۹۶۷)، و هندسهٔ افکنشی [تصویری] (۱۹۸۶). مقالهٔ حاضر برندهٔ جایزهٔ شوونه (Chauvenet) در زمینهٔ تألیف مقالات توصیفی شده است.

نشان می‌دهند که حلقه‌های $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ و $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ تجزیه‌ای نیستند. این امر، کومر و ددکیند را به معرفی مفهوم مهم ایده‌آل و تجزیهٔ یکتایی ایده‌آلها به جای تجزیهٔ یکتایی عناصر هدایت کرد و به‌این ترتیب، نظریهٔ مربوط به حلقه‌هایی که امروز آنها را «حلقه‌های ددکیند» می‌نامیم پایه‌گذاری شد. کمبود وقت مرا از بحث بیشتر در بارهٔ این نظریهٔ مهم و زیبا باز می‌دارد.

اهمیت حلقه‌های تجزیه‌ای تنها به دلیل جنبه‌های حسابی آنها نیست. تجزیه‌ای‌بودن یک تعبیر خیلی سادهٔ هندسی نیز دارد. در هندسه، و به‌طور دقیقتر در مطالعهٔ واریته [چندگونا]های جبری، تحلیلی، یا صوری، یک حلقهٔ A به‌عنوان حلقه‌ای از توابع (جبری یا تحلیلی، برحسب مورد) روی واریته‌ای مانند V یا در همسایگی نقطه‌ای از V مطرح می‌شود. در اینجا، دامنه بودن A به معنیِ تحویل‌ناپذیری V است. اگر بعد V را به n نشان دهیم، تجزیه‌ای‌بودن A، قطع نظر از جزئیات، بدین معنی است که هر زیرواریتهٔ W با بعد $n-1$ از V را می‌توان با یک معادلهٔ تنها تعریف کرد. به‌بیان دقیقتر، توابع $f \in A$ که روی W صفر می‌شوند، ایده‌آلی مانند $p(W)$ در A تشکیل می‌دهند و تجزیه‌ای‌بودن حلقه معادل این است که این ایده‌آلهای $p(W)$ (برای Wهای با بعد $n-1$) ایده‌آل اصلی باشند.

۲. چگونگی اثباتِ تجزیه‌ای‌بودن

دیدیم که تجزیه‌ای‌بودن خاصیت مطلوبی برای یک حلقه است. ولی اثبات اینکه حلقه‌ای این خاصیت را دارد، اغلب بدیهی نیست. پس شناختن مشخصات هر چه بیشتری از حلقه‌های تجزیه‌ای مفید واقع خواهد شد.

همان‌طورکه در بخش یک دیدیم، تجزیه‌ای‌بودن A به این معنی است که هر عضو غیرصفر A را بتوان به حاصلضرب اعضای تحویل‌ناپذیر تجزیه کرد، و چنین تجزیه‌ای صرف‌نظر از ضرایب وارونپذیر، یکتا باشد. وجود یا عدم وجود چنین تجزیه‌ای معمولاً به‌آسانی معلوم می‌شود و می‌توان آن را از «شرط زنجیره» برای ایده‌آلهای اصلی نتیجه گرفت (که در هر حلقهٔ تجزیه‌ای برقرار است):

(۳) هر دنبالهٔ اکیداً صعودی از ایده‌آلهای اصلی A متناهی است، که این با «شرط ماکسیمال» معادل است:

($3'$) هر خانوادهٔ غیرتهی از ایده‌آلهای اصلی A یک عضو ماکسیمال دارد.

به‌عنوان مثال، (۳) یا ($3'$) هنگامی که حلقهٔ A نوتری باشد، برقرار است و بیشتر حلقه‌هایی که در حساب [نظریهٔ جبری اعداد] و هندسه با آنها سروکار داریم نوتری هستند. به‌علاوه، با احتیاط کامل [در نظر گرفتن کلیهٔ شرایط] خاصیت (۳) می‌تواند در حد مستقیم هم درست باشد. بنابراین، از این پس فرض می‌کنیم که شرط (۳) برقرار باشد.

اما در مورد یکتایی تجزیه، موضوع چندان ساده نیست. یکتایی تجزیه در یک حلقهٔ A بدین معناست که هر عضو تحویل‌ناپذیر p از A این خاصیت قویتر را دارد که:

(۴) اگر p حاصلضرب ab را عاد کند، آنگاه p، a یا b را عاد می‌کند.

برعکس، با فرض (۳) و با به‌کار بردن اثباتی از نظریهٔ مقدماتی اعداد، می‌توان دید که (۴)، یکتایی تجزیه به عوامل تحویل‌ناپذیر را نتیجه می‌دهد. عضوی چون p که خاصیت (۴) را داراست، یک عضو اول A نامیده می‌شود. این بدان معنی است که ایده‌آل اصلی Ap، ایده‌آلی اول است. ($ab \in Ap \Rightarrow a \in Ap$ یا $b \in Ap$) و معادلش این است که حلقهٔ خارج قسمتی A/Ap یک دامنه است. همچنان که در نظریهٔ مقدماتی اعداد نشان داده می‌شود، خاصیت (۴) معادل است با

($4'$) هر دو عضو A، دارای بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک‌اند.

و نیز با

($4''$) هر دو عضو A دارای کوچکترین مضرب مشترک‌اند.

صورت مفیدی از ($4''$) چنین است

($4'''$) اشتراک هر دو ایده‌آل اصلی A، یک ایده‌آل اصلی است.

اگر با یک دامنهٔ نوتری A سروکار داشته باشیم، می‌توانیم ثابت کنیم که هر عضو غیروارونپذیر در A متعلق به یک ایده‌آل اول به ارتفاع ۱ است (ایده‌آل اول غیرصفری که مینیمال باشد). از این به‌سادگی نتیجه می‌شود که دامنهٔ نوتری A، تجزیه‌ای است اگر و تنها اگر

(۵) هر ایده‌آل اول به ارتفاع ۱، ایده‌آلی اصلی از A باشد.

این شرط را پیش از این در آخر بخش (۱)، هنگامی‌که تعبیر هندسی تجزیه‌ای‌بودن را مورد بحث قرار دادیم، دیده‌ایم.

مشخصات فنی‌تر حلقه‌های تجزیه‌ای در چارچوب نظریهٔ حلقه‌های کرول[1] ارائه می‌شود. برای این منظور خواننده را به جبر جابه‌جایی، فصل هفتم، نوشتهٔ بورباکی [۴] ارجاع می‌دهیم. در اینجا فقط اشاره می‌کنیم که ردهٔ حلقه‌های کرول، شامل ردهٔ حلقه‌های تجزیه‌ای است و این ردهٔ گسترده‌تر (کرول) تحت عملهای نظریهٔ حلقه‌ها پایدارتر است. به‌علاوه، به‌طور کلی مشخص‌کردن اینکه حلقه‌ای کرول است یا نه، کار ساده‌ای است. بنابراین مسأله این است که امتحان کنیم آیا حلقهٔ کرول داده شده، تجزیه‌ای است و اگر نیست، میزان «تجزیه‌ای‌نبودن» آن چقدر است.

۳. خواصی قویتر از تجزیه‌ای بودن

برای اثبات اینکه $\mathbb{Z}$، تجزیه‌ای است، معمولاً در ابتدا نشان می‌دهند که $\mathbb{Z}$ اصلی است (یعنی هر ایده‌آل $\mathbb{Z}$ اصلی است). در این‌صورت برقراری شرط زنجیره (۳) و شرط ($4'''$) واضح است. مثال حلقهٔ چندجمله‌ای با چندین متغیر روی یک میدان، نشان می‌دهد که اصلی‌بودن خاصیتی قویتر از تجزیه‌ای‌بودن است؛ بنابراین ممکن است تمرکز روی این خاصیتِ قویتر برای اثبات تجزیه‌ای‌بودن، خطرناک به‌نظر رسد. لیکن معیار قابل اعتمادی در دست داریم که به ما می‌گوید آیا خطری وجود دارد یا نه. در حقیقت متخصصان جبر جابه‌جایی نظریهٔ جامعی در بارهٔ بُعد یک حلقه به‌وجود آورده‌اند و روشهای بسیاری نیز برای محاسبهٔ این بُعد به‌دست آورده‌اند. به‌علاوه حلقه‌های اصلی به‌عنوان حلقه‌های تجزیه‌ای با بُعد ۰ یا ۱ مشخص شده‌اند. بنابراین، بُعد حلقهٔ مورد نظر A نشان می‌دهد که آیا کوشش برای اثبات اصلی بودن این حلقه معقول خواهد بود یا خیر.

در بیشتر مواردِ هندسی، برای اثبات اصلی‌بودن، تجزیه‌ای‌بودن و یک‌بعدی بودن به‌طور جداگانه ثابت می‌شود. اما در نظریهٔ جبری اعداد، روشهایی

1. Krull rings

برای اثبات مستقیم اصلی‌بودن یک حلقه وجود دارد. برای نمونه، فرض کنیم K یک میدان اعداد با درجهٔ متناهی n روی اعداد گویا باشد. فرض کنیم A حلقهٔ اعداد صحیح جبری K و d مبین مطلق A، و r_2 تعداد مزدوجهای غیرحقیقی K در $\dot{C}$ باشد. در این‌صورت می‌توان با استفاده از نظریهٔ مینکوفسکی در بارهٔ نقاط شبکه‌ای در مجموعه‌های محدب ثابت کرد که هر ایده‌آل غیرصفر $\mathfrak{A}$ از A را می‌توان به‌صورت $\mathfrak{A} = xb$ نوشت که در آن x عضوی از K^* است و b ایده‌آلی در A است که برای آن داریم

$$\operatorname{card}(A/b) < \left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \frac{n!}{n^n}(|d|^{\frac{1}{2}}) \qquad (6)$$

حال، سمت راست نابرابری (۶) را می‌توان با روشهای متعارف محاسبه کرد، و در سمت چپ هم تعداد ایده‌آلهایی مانند b که برای آنها A/b کاردینال مفروض c را داشته باشند، متناهی است و در صورتی که c خیلی بزرگ نباشد، به‌راحتی می‌توان آنها را مشخص کرد. اگر تمام ایده‌آلهای b که در (۶) صدق می‌کنند، اصلی باشند، آنگاه حلقهٔ A نیز اصلی خواهد بود. خواننده می‌تواند این روش را برای حلقهٔ $A = \mathbb{Z}[i]$ از اعداد صحیح گاوسی به‌کار برد (در اینجا $r = 2$ و $r_2 = 1$، $|d| = 4$، پس سمت راست نابرابری (۶)، کوچکتر از ۲ خواهد بود و از این نابرابری نتیجه می‌شود که $b = A$). ممکن است به‌نظر بیاید که این، روش بسیار پیچیده‌ای برای اثبات اصلی‌بودن حلقهٔ $\mathbb{Z}[i]$ است! در حقیقت، در اثبات معمول برای حلقه‌های $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Z}[i]$ و همچنین حلقهٔ چندجمله‌ای $k[X]$ روی میدان k، از این مطلب که این حلقه‌ها اقلیدسی هستند استفاده می‌شود. یادآوری می‌کنیم که دامنهٔ صحیح A را اقلیدسی گویند اگر نگاشتی مانند $\phi : A \to N$ (N مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت) وجود داشته باشد چنانکه به‌ازای هر عضو غیرصفر b در A، هر ردهٔ به‌پیمانهٔ Ab نماینده‌ای چون r با ضابطهٔ $\phi(r) < \phi(b)$ داشته باشد (یعنی هر عضو a از A را بتوان به‌صورت $a = bq + r$ نوشت چنانکه $\phi(r) < \phi(b)$). هر حلقهٔ اقلیدسی A اصلی است زیرا برای هر ایده‌آل غیرصفر b در A، می‌توان عضو غیرصفری مانند x از b انتخاب کرد به‌طوری که مقدار $\phi(x)$ مینیمم باشد، و ملاحظه کرد که عضو x ایده‌آل b را تولید می‌کند. برای این اثبات لازم نیست فرض کنیم که مقادیر ϕ در N هستند؛ به‌جای مجموعهٔ N در برد ϕ هر مجموعهٔ خوشترتیب W را می‌توان به‌کار برد. نگاشت $\phi : A \to W$ را که در بالا تعریف شد یک الگوریتم روی A می‌نامند. اگر حلقهٔ مفروض A و یک مجموعهٔ خوشترتیب W را که به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد در نظر بگیریم (مثلاً به‌طوری که $\operatorname{card}(W) > \operatorname{card}(A)$)، نظریهٔ مجموعه‌های خوشترتیب نشان می‌دهد که هر الگوریتم روی A با الگوریتمی که مقادیرش در W است یکریخت (به مفهوم واضح) است. به‌علاوه اگر $\phi_\alpha : A \to W$ خانواده‌ای از الگوریتمها روی A باشد، $\phi = \inf_\alpha \phi_\alpha$ نیز یک الگوریتم خواهد بود، بنابراین A (اگر اقلیدسی باشد) دارای کوچکترین الگوریتم است. اگر میدانهای مانده‌ای A متناهی باشند، در حقیقت این کوچکترین الگوریتم ϕ_0 مقادیر خود را از مجموعهٔ اعداد صحیح N خواهد گرفت. (حالت کلی هنوز حل نشده است). ولی این الگوریتم لزوماً الگوریتم معمولی نیست: در حالت $\mathbb{Z}$، $\phi_0(n)$ تعداد رقمهای دودویی عدد صحیح $|n|$ $(n \in \mathbb{Z})$ است. ولی برای چندجمله‌ایهای برحسب X روی یک میدان k، $\phi_0(P(X))$ درجهٔ چندجمله‌ای $P(X)$ است.

ریاضیدانان تلاشهای زیادی برای مشخص کردن میدانهای اعداد جبری که حلقهٔ اعداد جبری آنها اقلیدسی است، انجام داده‌اند. بیشتر آنان به بررسی این مسألهٔ محدودتر پرداخته‌اند که آیا «تابع نُرم» معمولی (یعنی $\phi(x) = \operatorname{card}(A/Ax)$ به‌ازای $x \neq 0$) الگوریتم است یا نه. برای میدانهای درجه دوم موهومی، پنج میدان $Q(\sqrt{-d})$ به‌ازای $d = 1, 2, 3, 7, 11$، تنها میدانهایی هستند که نرم برای آنها الگوریتم است و همچنین تنها میدانهایی هستند که حلقهٔ اعداد جبری آنها اقلیدسی است. اما چهار حلقهٔ اصلی غیراقلیدسی برای میدانهای درجه دوم موهومی، به‌ازای $d = 19, 47, 67, 163$، وجود دارد. (وجود پنجمین حلقه که مسأله‌ای پیچیده بود، به‌تازگی نفی شده ست) در مورد میدانهای درجه دوم حقیقی $Q(\sqrt{m})$ که $m > 0$، فهرست آنهایی که با نرم معمولیشان اقلیدسی‌اند، معلوم شده است:

$$m = 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 56, 73$$

و اصلی‌بودن بسیاری دیگر نیز معلوم شده است، اما نمی‌دانیم که آیا تعداد آنها متناهی است یا نه. همچنین در حال حاضر نمی‌دانیم که آیا ممکن است بعضی از آنها برای الگوریتم دیگری غیر از نُرم، اقلیدسی نباشند. شواهدی نویسنده را قانع می‌کند که میدان $Q(\sqrt{14})$ شایسته است از این لحاظ مطالعه شود. (رک. [۵] و [۶]). نتیجه اینکه، می‌توان گفت نظریهٔ حلقه‌های اقلیدسی دارای سرشتی متفاوت با تجزیه‌ای‌بودن است.

۴. قضیهٔ ناگاتا

ماسایوشی ناگاتا قضیه‌ای ثابت کرد که برای مشخص کردن حلقه‌های تجزیه‌ای بسیار مفید است. یادآور می‌شویم که اگر A یک دامنهٔ صحیح با میدان خارج‌قسمتی K باشد و S یک زیرمجموعهٔ ضربی-بسته از A ($0 \notin S$)، آنگاه کسرهای a/s که در آن $a \in A$ و $s \in S$، زیرحلقه‌ای از K را تشکیل می‌دهند که با $S^{-1}A$ نشان داده و حلقهٔ خارج‌قسمتهای A نسبت به S نامیده می‌شود. اکنون فرض کنیم که A در شرط متناهی‌بودن (۳) (رک. بخش ۲) صدق کند و S به‌وسیلهٔ عناصر اول تولید شود و همچنین $S^{-1}A$ یک حلقهٔ تجزیه‌ای باشد؛ در این صورت قضیهٔ ناگاتا حاکی است که حلقهٔ A نیز تجزیه‌ای است. اگر S به‌وسیلهٔ تعداد متناهی عناصر اول تولید شود می‌توان از شرط (۳) صرف‌نظر کرد. صورت بسیار ساده‌ای از عکس قضیهٔ ناگاتا چنین است که هر حلقهٔ خارج‌قسمتهای یک حلقهٔ تجزیه‌ای، خودش تجزیه‌ای است.

یک نتیجهٔ سادهٔ قضیهٔ ناگاتا، لم گاوس در مورد حلقه‌های چندجمله‌ای است. فرض کنیم R حلقه‌ای تجزیه‌ای و L میدان خارج‌قسمتی آن و $S = R - \{0\}$ باشد. چون هر عضو اول p از R در حلقهٔ چندجمله‌ای $A = R[X]$ نیز اول خواهد ماند (زیرا $A/pA = (R/pR)[X]$ یک دامنه است)، بنابراین S به‌وسیلهٔ اعضای اول A تولید می‌شود. اما $S^{-1}A = L[X]$ یک حلقهٔ چندجمله‌ای یک متغیره روی یک میدان است، بنابراین اقلیدسی و تجزیه‌ای است. پس طبق قضیهٔ ناگاتا، $A = R[X]$ نیز تجزیه‌ای است. همین نتیجه با استقرا برای حلقه‌های چندجمله‌ای چندمتغیره روی یک حلقهٔ تجزیه‌ای نیز به‌دست می‌آید.

در اینجا سه مثال دیگر از کاربرد قضیهٔ ناگاتا را به‌اجمال بیان می‌کنیم (اثبات کامل آنها را به خواننده واگذار می‌کنیم).

(الف) فرض کنیم k میدانی جبری-بسته با مشخصهٔ مخالف ۲ و $F(X_1, \ldots, X_n)$ یک فرم درجه دوم ناتبهگون روی k باشد ($n \geq 5$). در این صورت $A = \frac{k[X_1, \ldots, X_n]}{(F)}$، تجزیه‌ای است. (با تعویض متغیر قرار

می‌دهیم $F = X_1X_2 + G(X_3, \dots, X_n)$؛ اکنون تصویر X_j در A را به x_j نشان می‌دهیم؛ در این صورت چون G تحویل‌ناپذیر است $(n \geq 5)$، x_1 اول می‌باشد. اکنون قرار می‌دهیم $S = \{1, x_1, \dots, x_1^j, \dots\}$. خواهیم دید $S^{-1}A = k[x_1, x_3, \dots, x_n][1/x_1]$ به‌عنوان حلقهٔ خارج‌قسمتهای یک حلقهٔ چندجمله‌ای، تجزیه‌ای است.)

(ب) فرض کنیم k میدانی باشد که در آن $\sqrt{-1} \notin k$، و قرار می‌دهیم $A = k[X, Y, Z]/(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)$ («حلقهٔ کرهٔ دوبعدی»). در این‌صورت A تجزیه‌ای است. تصاویر X، Y، Z در A را به x، y، z نشان می‌دهیم؛ خواهیم داشت $x^2 + y^2 = (1+z)(1-z)$؛ S را مجموعه‌ای تولید شده به‌وسیلهٔ $1 - z$ که اول است در نظر می‌گیریم. اکنون بنابر آنچه در (الف) دیده‌ایم، $S^{-1}A$ یک حلقهٔ تجزیه‌ای است.

(پ) فرض کنیم k یک میدان باشد و $A = k[X, Y, Z]/(x^r + Y^s + Z^t)$ که r، s، t دو به دو نسبت به هم اول‌اند. در این‌صورت A تجزیه‌ای است. (تصاویر X، Y، Z در A را به x، y، z نشان می‌دهیم. بنابراین $z^t = -(x^r + y^s)$. ابتدا فرض می‌کنیم که $t \equiv 1 \pmod{rs}$، یعنی $t = 1 + drs$. S را مجموعهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ z (که اول است) می‌گیریم و قرار می‌دهیم $x' = \frac{x}{z^{dr}}$ و $y' = \frac{y}{z^{ds}}$. در این‌صورت $z = -(x'^r + y'^s)$، و $S^{-1}A = k[x', y'][1/z]$، تجزیه‌ای است. به‌طور کلی می‌توان عدد صحیحی مانند j چنان انتخاب کرد که $jt \equiv 1 \pmod{rs}$ و jامین ریشهٔ w را جانشین z کرد.

۵. نتایج دیگر

امروزه نظریهٔ حلقه‌های تجزیه‌ای بسیار گسترده‌تر از حدی است که در بالا به اجمال شرح داده شد. به‌عنوان مثال در [۲] در حدود ۸۰ صفحه یادداشت درسی که کاملاً به حلقه‌های تجزیه‌ای اختصاص دارد آمده است که برای مطالعهٔ آن، آشنایی به مطالب زیادی در زمینهٔ جبر جابه‌جایی و هومولوژیک لازم است. به‌علاوه این یادداشت درسی شامل تمام مطالب این مبحث در زمان نوشته شدن یادداشت (۱۹۶۳) نمی‌شود و از آن زمان به بعد هم نظریه پیشرفت کرده است. بنابراین ما فقط نکات مهم این نظریه را به اجمال و بدون ذکر بعضی از تعریفها شرح می‌دهیم؛ خواننده برای ملاحظهٔ جزئیات تعریفها، اثباتها، و نتایج وابسته می‌تواند به مراجع انتهای مقاله رجوع کند.

۱. سریهای توانی. در بخش ۴، لم گاوس در بارهٔ چندجمله‌ایها بیان شد. این لم، نمونه خاصی است از «انتقال» خواص حلقهٔ A به حلقه چندجمله‌ای $A[X]$. انتقالهای مشابه بسیاری تاکنون شناخته شده‌اند، و همچنین انتقالهایی که خواص حلقهٔ A را به حلقه سریهای توانی صوری $A[[X]]$ منتقل می‌سازند. بنابراین معقول می‌نمود که حدس بزنیم اگر A یک حلقهٔ تجزیه‌ای باشد، $A[[X]]$ نیز چنین خواهد بود. ولیکن این حدس رد شده است (رک. [۷]). در اولین مثال ناقضِ ارائه شده، حلقهٔ A حلقه‌ای موضعی و غیرکامل بود و در نظر گرفتن سری توانی صوری روی یک حلقهٔ غیرکامل و موضعی A از دید برخی از ریاضیدانان غیرطبیعی (و حتی قبیح) جلوه می‌کرد. اخیراً سایمن [۱۳] حلقهٔ Aای ساخت که کامل، موضعی و تجزیه‌ای است ولی $A[[X]]$ تجزیه‌ای نیست، و به این ترتیب هرگونه شک و شبهه برطرف شد.

۲. حلقه‌های منظم. حلقهٔ منظم در جبر جابه‌جایی تعریف می‌شود. در حالت هندسی، این حلقه متناظر با یک واریتهٔ ناتکین است. در ۱۹۵۷، اوسلندر[1] و بوخسباوم[2] با استفاده از روشهای هومولوژیک ثابت کردند هر حلقهٔ منظم و موضعی، تجزیه‌ای است. صورت کارامدتری از اثبات آنها را کاپلانسکی در [۱] و [۲] و بورباکی در [۴] آورده‌اند.

از طرف دیگر اگر A حلقه‌ای منظم و تجزیه‌ای (نه لزوماً موضعی) باشد آنگاه $A[X]$ و $A[[X]]$ هر دو تجزیه‌ای هستند.

۳. پایین‌برِ گالوایی[3]. فرض کنیم A حلقه‌ای تجزیه‌ای باشد و G زیرگروهی متناهی از خودریختیهای A؛ اعضایی از A که تحت G ناوردا می‌مانند تشکیل زیرحلقه‌ای از A می‌دهند که معمولاً به‌صورت A^G نشان داده می‌شود. فرض کنیم A^* گروه ضربیِ اعضایِ وارون‌پذیر A باشد، در این‌صورت اگر گروه کوهومولوژی $H^1(G, A^*)$ صفر شود، حلقهٔ A^G تجزیه‌ای است ([۲] و [۳] و [۱۷]).

مثال جالبی در دست است که نویسنده نمی‌تواند از بیان آن خودداری کند. حلقهٔ A را به‌صورت حلقهٔ چندجمله‌ای $A = k[X_1, \dots, X_n]$ (k یک میدان و $n \geq 5$) و G را گروه متناوب A_n در نظر بگیرید که روی A به‌وسیلهٔ جایگشتهای متغیرها عمل می‌کند. در اینجا حلقهٔ A^G روی k به‌وسیلهٔ توابع متقارن مقدماتی s_1، ...، s_n و «مبین» $d = \prod_{i<j}(X_i - X_j)$ تولید می‌شود. می‌دانیم $d^2 = P(s_1, \dots, s_n)$، که P یک چندجمله‌ای روی k است. به‌علاوه G روی $A^* = k^*$ به‌صورت بدیهی عمل می‌کند. بنابراین $H^1(G, A^*) = \mathrm{Hom}(G, k^*)$ (فرمول کلاسیک در کوهومولوژی گروهها). چون $G = A_n$ یک گروه ساده است $(r \geq 5)$ و چون k^* جابه‌جایی است، خواهیم داشت $\mathrm{Hom}(G, k^*) = 0$ و لذا A^G تجزیه‌ای است.

با همین روش مثالی از یک حلقهٔ تجزیه‌ای به‌دست می‌آید که یک حلقهٔ مکولی[4] [۱۸] نیست. توجه کنید که مورتی[5] ثابت کرده است که هر حلقهٔ مکولی و تجزیه‌ای لزوماً یک حلقهٔ گورنشتاین است.

در مشخصهٔ $p \neq 0$، نظریهٔ مشابهی موجود است که در آن، مشتقها به‌جای خودریختیها قرار می‌گیرند. ([۲]، [۹]، [۱۶]). مانند بالا، در اینجا نیز اثباتهای تجزیه‌ای تا حدی محاسباتی هستند و گاه (مخصوصاً در مشخصه ۲) اجرای کامل این محاسبات در مقایسه با حالت خودریختیها آسانتر است.

۴. مقاطع کامل. یک حلقهٔ موضعی A «مقطع کامل» نامیده می‌شود اگر یکریخت با یک R/I باشد که R حلقهٔ منظم و موضعی و I ایده‌آلی تولید شده توسط Rـ دنباله‌ای منظم باشد (بدین معنا که I بتواند به‌وسیلهٔ عناصر $\dim(R) - \dim(R/I)$ تولید شود). گروتندیک با به‌کار بردن روشهای قدرتمند نظریهٔ اسکیمها[6] ثابت کرد که اگر A مقطع کامل باشد به‌طوری‌که A_p تجزیه‌ای باشد هرگاه $\dim(A_p) \leq 3$، آنگاه A تجزیه‌ای خواهد بود ([۱۹]). این تعمیمی از قضیهٔ هندسی سوری[7]، لفشتز، و آندره‌اوتی[8] است. تاکنون هیچ اثباتی از قضیهٔ گروتندیک که صرفاً مبتنی بر نظریهٔ حلقه‌ها باشد ارائه نشده است.

۵. حلقه‌های تجزیه‌ای دوبعدی. قبلاً گفتیم که حلقه‌های تجزیه‌ای یک‌بعدی، اصلی‌اند. در میان آنها حلقه‌های موضعی همان حلقه‌های ارزهٔ گسسته هستند که فرض کرده‌ایم خواننده با آنها آشناست. در بُعد ۲، مثالهای زیادی از حلقه‌های تجزیه‌ای را دیده‌ایم، مثلاً حلقه‌های رویه‌های $x^i + y^j + z^k = 0$

1. M. Auslander 2. D. Buchsbaum 3. Goloision going-down
4. Macaulay 5. P. Murthy 6. Schemes 7. F. Severi
8. A. Andreotti

(که i، j، و k دو به دو نسبت به هم اول‌اند) و همچنین حلقه‌های کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. با موضعی‌سازیِ اولین گروه از این حلقه‌ها در مبدأ، تعداد زیادی حلقهٔ موضعی غیرمنظم تجزیه‌ای دوبعدی به‌دست می‌آوریم. این حلقه‌های موضعی کامل نیستند و به‌علاوه، تجزیه‌ای‌بودن حلقهٔ کامل‌شده[1]های آنها، یعنی، $C = K[[x, y, z]]$ مورد شک بود. ابتدا شجا[2] و مامفورد نشان دادند که حلقهٔ کامل C از رویهٔ $x^2 + y^3 + z^5 = 0$، تجزیه‌ای است. سپس سالمن، برای ارائهٔ مثال ناقض خود که در (۱) به آن اشاره کردیم، همین مطلب را برای رویهٔ $x^2 + y^2 + tz^6 = 0$ روی میدان K، که $K = k(t)$ و در آن t روی k غیرجبری است، ثابت کرد.

در مثال آخر، میدان K جبری-بسته نیست. بریسکورن[3] با استفاده از روشهای هندسهٔ جبری نشان داده است که در میان تمام حلقه‌های موضعی کامل دوبعدی روی یک میدان جبری-بسته، تنها ۲ نوع از آنها تجزیه‌ای است: حلقهٔ منظم $K[[X, Y]]$ (سری توانی صوری) و حلقهٔ $K[[x, y, z]]$ با $x^2 + y^3 + z^5 = 0$. (رک. [۱۳]). شایان ذکر است که حلقهٔ دوم حلقهٔ ناورداهای یک گروه بیست وجهی است که بر حلقهٔ اول عمل می‌کند [۱].

کتابشناسی حلقه‌های تجزیه‌ای

شرحی مقدماتی از موضوع در مرجع زیر آمده است:

1. P. Samuel, Anneaux Factoriels (red. A. Micali), Bol. Soc. Mat., São Paulo, 1964.

بحث کاملتر در مرجع زیر آمده است:

2. P. Samuel, Lectures on unique factorization domains, (notes by Pavman Murthy) Tata Institute for Fundamental Research lectures, No 30, Bombay, 1964.

3. ———, Lectures in commutative algebra (notes by M. Bridger), mimeographed by Brandeis University, Waltham, Mass., 1964-65.

برای مطالعهٔ بحث حلقه‌های تجزیه‌ای در چارچوب حلقه‌های کرول، رک:

4. N. Bourbaki, Algèbre Commutative, Chap. VII "Diviseurs," Hermann, Paris, 1966.

برای حالت میدانهای اعداد، رک:

5. Hardy-Wright, An introduction to the theory of numbers, Clarendon, Oxford, 1960.

و نیز جدولهای موجود در

6. Borovič-Safarevič, Théorie des nombres, Gauthier-Villars, Paris, 1966. (German and English translations also available.)

بیشتر نتایج به‌دست آمده دربارهٔ حلقه‌های تجزیه‌ای تا سال ۱۹۶۴ در مراجع [۱]، [۲]، [۳] آمده‌اند. ولی برای راحتی خواننده، مراجع دیگری نیز ذکر می‌کنیم:

7. P. Samuel, On unique factorization domains, Ill. J. Math., 5 (1961) 1-17.

1. completion 2. G. Scheja 3. E. Brieskorn

8. ———, Sur les anneaux factoriels, Bull. SMF, 89 (1961) 155-173.

9. ———, Classes de diviseurs et dérivées logarithmiques, Topology, 3, Supp. 1 (1964) 81-96.

10. ———, Modules réflexifs et anneaux factoriels, In Colloque International de Clermont-Ferrand, ed. CNRS, Paris, 1965.

11. P. Samuel, Sur les séries formelles restreintes, C.R. Acad. Sci., Paris, 1962.

حلقهٔ رویهٔ $x^2 + y^3 + z^5 = 0$ در منبع زیر بررسی شده است:

12. F. Klein, Lectures on the icosahedron, Dover, NewYork, 1956, Chap. 2, Sections 12 and 13.

13. E. Brieskorn, Local rings which are UFD's, (preprint, MIT, Oct. 1966).

و نیز در مقالات G. Scheja (Math. Ann., 1965) و D. Mumford (Publ. I. H. E. S., 9, 1961).

نخستین مثال از یک حلقهٔ موضعی کامل A که به‌ازای آن $A[[t]]$ تجزیه‌ای نیست در مرجع زیر آمده است:

14. P. Salmon, Sulla non-factorialita..., Rend. Lincei, June 1966.

برای مطالعهٔ بحث کاملتری دربارهٔ این مثال، رک:

15. N. Zinn-Justin, Dérivations des corps et anneaux de caractéristique p, (Thèse Paris 1967); in print in Mémoires Soc. Math. France, 1967.

برای «پایین‌برِ کاملاً تفکیک‌ناپذیر»، رک:

16. N. Hallier, Utilisation des groupes de cohomologie dans la théorie de la descente p radicielle, C.R. Acad. Sci. Paris, 261 (1965) 3922-3924.

و نیز در [۱۵]. (Hallier نام دو دوشیزگی خانم Zinn-Justin است).

برای دیدن مثالهایی از «پایین‌برِ گالوایی» رک:

17. M. J. Dumas, Sous anneaux d'invariants d'anneaux de polynômes, C.R. Acad. Sci. Paris, 260 (1965) 5655-5658.

18. M. J. Bertin, Sous groupes cycliques d'ordre p^n ..., C.R. Acad. Sci. Paris, April 1967.

(Dumas نام دوشیزگی خانم Bertin است).

اثباتی از قضیهٔ گروتندیک در بارهٔ تجزیه‌ای بودنِ بعضی مقطعهای کامل در مرجع زیر آمده است:

19. A. Grothendieck, Séminaire de Géometrie Algébrique 1961-1962, exposé XI, mimeographed by the Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 35 route de Chartres, 92-Bures sur Yvette. France.

* * * * * *

• Pierre Samuel, "Unique factorization", Amer. Math. Monthly, (9) **75** (1968) 945-952.

در ساعاتی که این شمارهٔ مجله زیر چاپ بود، با دریغ و درد باخبر شدیم که دوست جوانمان آرمان بهرامیان، مترجم این مقاله، با عده‌ای دیگر از دانشجویان ریاضی در سانحهٔ تصادف درگذشته‌اند. خود را در غم خانواده‌اش شریک می‌دانیم.

اشتباهات

والتر رودین

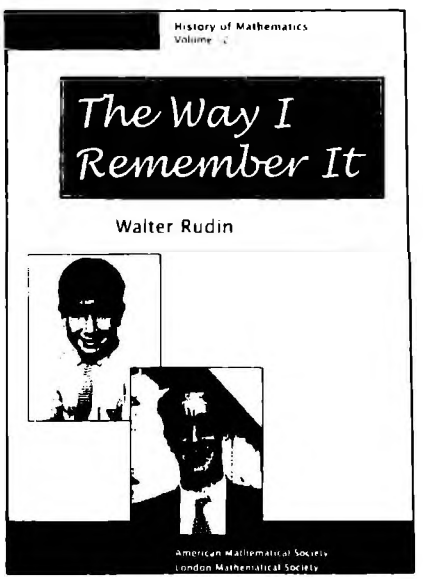
ترجمهٔ آرمان بهرامیان

این مقالهٔ ترجمهٔ فصل ۲۳ (با عنوان **misteaks**) از کتاب خاطرات والتر رودین ریاضیدان معروف است. مشخصات کتاب چنین است:

Walter Rudin, *The Way I Remember It*, Am. Math. Soc. (1997).

بخش نخست کتاب به تاریخچهٔ خانوادگی و شرح زندگی و خاطرات رودین اختصاص دارد و بخش دوم به نمونه‌هایی از کارهای او، که ضمن آن از منشأ مسائل مورد نظر و اینکه جواب آنها به چه مطالبی منجر می‌شود و کسان دیگری که درگیر آن مسائل بوده‌اند یاد شده است.

والتر رودین که اخیراً از دانشگاه ویسکانسین آمریکا بازنشسته شده، در طول دورهٔ فعالیتش در بخشهای گوناگون آنالیز تحقیق کرده و صاحب آثار متعدد، از جمله چند کتاب درسی معروف، است.



ریاضیدانها آدمیزادند. آدمیزاد اشتباه می‌کند. پس . . . .

اما جای نگرانی نیست. من آماری در تأیید این نظر در دست ندارم، ولی در مقایسه با انبوه مقالات چاپ‌شده، تعداد اشتباهات جدی در کل آثار ریاضی باید ناچیز باشد. بیشتر خطاها احتمالاً از چشم داوران مقالات دور نمی‌ماند، و اگر مقاله‌ای که اشتباهی جدّی در آن رخ داده آنقدر اهمیت داشته باشد که عدّهٔ قابل توجهی از ریاضیدانان آن را مطالعه کنند، اشتباه حتماً کشف خواهد شد. و از آن بهتر این است که نویسندهٔ خطاکار نمی‌تواند با بحث و جدل حرفش را به کرسی بنشاند.

مقالهٔ جالبی از پالام[1] در شماره‌ای از مجلهٔ زبان طبیعی و نظریهٔ زبانشناسی [۱] هست که این جنبه از ریاضیات را با آنچه در زبانشناسی پیش می‌آید مقایسه می‌کند. این مقاله ماجرای ادّعای رورک[2] را مبنی بر اثبات حدس پوآنکاره شرح می‌دهد. (مقاله را کاترین، دختر زبانشناسم برایم فرستاد.)

نخستین مواجههٔ من با این‌گونه قضایا با نامهٔ صفحهٔ بعد آغاز شد.

نیازی به گفتن نیست که خیلی تعجب کردم. طرف من کسی نبود جز دیودونه، ریاضیدانی در سطح جهانی و از پایه‌گذاران بورباکی، که به جای اینکه به من ــ یک جوان تازه‌کار ــ بگوید: «اشتباه می‌کنی، چون این چیزی است که من چند سال پیش ثابت کردم.»، از من می‌خواست تا اشتباهش را به او بگویم! درواقع مدتی وقت صرف کردم تا خطا را یافتم، و اگر قبلاً

1. K. Pullum 2. Rourke

پاریس، ۱۷ دسامبر

پروفسور رودین عزیز

در آخرین شمارهٔ بولتن AMS دیدم که در چکیدهٔ ۷۳۱t در صفحهٔ ۳۸۲، اعلام داشته‌اید که در جبر $L^1(R^n)$، هر عضو، پیچشِ دو عضو از آن جبر است. از این حکم قدری شگفت‌زده شدم، زیرا چند سال پیش نکتهٔ ساده‌ای را دریافته بودم که به نظرم قضیهٔ شما را نفی می‌کند [۲]. این اثبات را برای شما بازگویی می‌کنم:

فرض کنید f و g در L^1 هستند و هر دو نامنفی‌اند. همچنین به‌ازای هر n، تابعهای «بریده» معمولی $f_n = \inf(f, n)$ و $g_n = \inf(g, n)$ را در نظر بگیرید. f (و g) حدّ دنبالهٔ صعودی (f_n) (و (g_n)) است. پس، طبق قضیهٔ عادی همگرایی لبگ، تابع $h = f * g$ تقریباً همه جا حدّ تابع $h_n = f_n * g_n$ است که به روشنی دنباله‌ای است صعودی. علاوه بر این، f_n و g_n هر دو در L^2 هستند. پس، همانطور که می‌دانیم، h_n را می‌توان پیوسته و کراندار گرفت. از این نتیجه می‌شود که h تقریباً همه جا با تابعی از ردهٔ نخست بئر برابر است. ولی، می‌دانیم توابع انتگرال‌پذیری وجود دارند که این ویژگی را ندارند ، و در نتیجه ممکن نیست پیچش دو تابع باشند. من نمی‌توانم نقصی در این استدلال بیابم، و اگر شما می‌توانید، بسیار سپاسگزار خواهم بود که در صورت امکان مرا از اشتباهم آگاه کنید.

ارادتمند شما

ژ. دیودونه

ثابت نکرده بودم که تجزیهٔ پیچش همواره در L^1 ممکن است، استنتاج او را بی‌هیچ تردیدی پذیرفته بودم؛ نه به دلیل شهرت او، بلکه به این دلیل که بحث او در حد خودش ساده و روشن و کاملاً درست بود.

او ثابت کرد، و درست هم ثابت کرد، که هر دو پیچشِ توابع نامنفی تقریباً همه جا برابر با یک تابع پایین‌ـنیم‌پیوسته است. ولی (و این همان چیزی است که او نادیده گرفت) تابع مذکور ممکن است $+\infty$ را در مجموعهٔ مقادیرش بپذیرد.

با استدلال او اثبات می‌شود که تابعهایی نامنفی مانند h در L^1 وجود دارند که نمی‌توان آنها را به صورت $h = f * g$ با شرایط $f \geq 0$ و $g \geq 0$ نمایش داد (من هم این را دریافته بودم). در حالت کلّی (با مقادیر حقیقی)، اگر $h = f * g$، هر کدام از f و g تفاضل دو تابع نامنفی است، که باعث می‌شود $f * g$ به چهار پیچش از نوعی که دیودونه در نظر داشت تجزیه شود. از این چهار تا، دو تابع نامنفی‌اند و دوتای دیگر نامثبت، و بنابراین ممکن است با مسألهٔ تفریق ∞ از ∞ مواجه شویم (که دست کم همانقدر ناجور است که تقسیم صفر بر صفر.) بنابراین دیگر نمی‌توان نتیجه گرفت که h تقریباً همه جا برابر است با تابعی از ردهٔ نخست بئر، یعنی تابعی حقیقی‌مقدار که همه‌جا حد نقطه به نقطهٔ دنباله‌ای از توابع پیوسته باشد.

دیودونه با محدود کردن استدلال به حالتهای $f \geq 0$ و $g \geq 0$، و همچنین این فرض تلویحی که حالت کلی باید درست باشد، به دام معروف «بدون از دست دادن کلیّت» افتاده بود.

پاسخ وی را به توضیح من در ستون مقابل بخوانید

پاریس، ۱۲ ژانویهٔ ۱۹۵۸

پروفسور رودین عزیز

سپاسگزارم که خطای مرا گوشزد کرده‌اید. از آنجا که این نوع خطا بسیار متداول است، گمان می‌کنم می‌بایست خودم قادر به کشف آن بوده باشم. ولی می‌دانید که خطای خود را یافتن چه دشوار است، آن‌هم وقتی که اعتقاد یافته‌اید که نتیجهٔ خاصی باید درست باشد!!

اثبات شما بسیار زیرکانه است. امیدوارم بتوانید این نتیجه را به گروههای موضعاً فشردهٔ آبلی دلخواه تعمیم دهید. ولی گمان من این است که چنین تعمیمی نوع نسبتاً متفاوتی از اثبات را می‌طلبد.

با تبریک برای حکم زیبایی که یافته‌اید، و بهترین سپاسها.

ارادتمند شما

ژ. دیودونه

قضیهٔ تجزیه واقعاً تعمیم داده شد، حتّی بیش از آنچه او امید داشت. هنگامی که پال کوهن اثبات نسبتاً پیچیدهٔ مرا دربارهٔ $L^1(\mathbb{R}^n)$ دید (حالت $n = 1$ بسیار آسانتر بود) گفت: «آهان، همانیهای تقریبی.» و طولی نکشید که حالتی بسیار کلّی از قضیهٔ تجزیه را با همانیهای چپ تقریبی در جبرهای باناخ ارائه داد [۳]. اد هیوئیت در مجلهٔ دیگری [۴] اثبات کوهن را تعمیم داد تا شامل عملگرهای پیچش روی $L^p (1 \leq p < \infty)$ شود:

«هر h در L^p به صورت $h = f * g$ است که در آن f در L^1 است و g در L^p.»

در ماجرای بعدیی که نقل می‌کنم، فرد خطاکار من بودم، ولی ماجرا به خوبی و خوشی پایان یافت. این یکی مربوط بود به گوی باز یکهٔ B در فضای مختلط nبعدی $\mathbb{C}^n$. یک نگاشت یک به یک تحلیلی از B به روی B را یک خودریختی از B می‌خوانیم. (وقتی $n = 1$، B قرص یکه در $\mathbb{C}$ است و خودریختیهای آن همان تبدیلات آشنای موبیوس هستند که z را به $\frac{e^{i\theta}(z-\alpha)}{1-\bar{\alpha}z}$ می‌فرستند. همچنین خودریختیهای B برای همهٔ مقادیر n به طور صریح شناخته شده‌اند.)

فضای X از توابع مختلط مقدار روی B (یا روی مرز B) را موبیوس-ناوردا (یا $\mathcal{M}$-ناوردا) گویند هرگاه ترکیب $f \circ \varphi$ برای هر f در X و هر خودریختی φ از B، در X باشد. من و الکس نِیگِل[1] همهٔ فضاهای $\mathcal{M}$-ناوردا از نوعهای معیّن را یافته بودیم [۵] ولی پرسش زیر همچنان بی‌پاسخ مانده بود:

«کدام زیرجبرهای $C(B)$، موبیوس-ناوردا هستند؟»

در اینجا $C(B)$، جبر همهٔ توابع مختلط‌مقدارِ پیوسته (که ممکن است کراندار نباشند) روی B است با توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده و جمع و ضرب نقطه به نقطه.

پنج حالت واضح عبارت‌اند از: $\{0\}$، ثابتها، توابع تمام‌ریخت روی B، مزدوجهای توابع تمام‌ریخت، و خود $C(B)$. پاسخ پرسش بالا هم از این قرار است [۶]:

قضیه: هیچ حالت دیگری وجود ندارد.

به گمان من، این سخت‌ترین قضیه‌ای است که تاکنون ثابت کرده‌ام. این قضیه حتّی برای حالت $n = 1$ هم تازگی داشت. من با اثبات حالت یک‌بُعدی آغاز کردم، و آن را برای دستیابی به همان نتایج در حالت nبعدی به کار بردم. کمی پس از آنکه مقاله را تحویل دادم، مالگرانژ[2] که از ویراستاران آنال فوریه[3] بود، نوشت که داور مقاله درنیافته است چگونه از ۱ به n رسیده‌ام. و وقتی که من به آن مقاله مراجعه کردم، خودم هم نتوانستم آن را دریابم! آنچه نوشته بودم کاملاً بی‌معنا بود، و هیچ راهی هم برای ترمیم آن به نظر نمی‌رسید. مجبور بودم باز گردم و به جای اینکه از حالت یک متغیری شروع کنم، همهٔ کارها را در حالت nمتغیری از ابتدا انجام دهم. خوشبختانه، این کار به نتیجه رسید، گو اینکه تمام تابستان وقت مرا گرفت.

هنگامی‌که نسخهٔ تصحیح‌شده (و بسیار طولانیتر) را برای مالگرانژ فرستادم، نوشتم که مایلم از داور مقاله در نسخهٔ تجدیدنظر شده سپاسگزاری کنم، ولی تنها در صورتی که بتوانم نام او را ذکر کنم. هیچ فضیلتی در سپاسگزاری از یک فرد ناشناس نمی‌دیدم. ویراستار با این کار موافقت کرد: او دوست من، ژان پیر رُزه[4] از کار درآمد.

چند سال بعد، ما (یعنی بخش ریاضی مَدیسن) می‌خواستیم رزه را برای یک دیدار یکساله دعوت کنیم. من صاحب کرسی استادی ویلاس[5] بودم و بودجه‌ای برای برنامه‌های پژوهشی ارزشمند در اختیار صاحب این کرسی قرار داشت. پس دست به کار شدم و درخواستی برای کمیتهٔ مربوط فرستادم. برای محکم‌کاری، ذکر کردم که نه تنها من بلکه بسیاری از همکارانم (از جمله آهرن[6]، فورلی[7]، نیگل و وینگر[8]) او را فردی می‌دانند که از لحاظ ایجاد

1. Nagel 2. Malgrange 3. Annales Fourier 4. Rosay
5. Vilas 6. Ahern 7. Forelli 8. Wainger

تحرک علمی مفید است. نامهٔ مرا ایروینگ شِین[1] رئیس دانشگاه بازگرداند با ذکر اینکه این کار اصلاً درست نیست، آن بودجهٔ پژوهشی تنها برای استفادهٔ کسانی است که صاحب آن کرسی‌اند، و نه برای دیگری؛ و اینکه من باید نامهٔ دیگری بنویسم و در آن شرح دهم که چرا حضور رُزه به نفع من خواهد بود. این کار را انجام دادم، و رونوشتی هم از مقاله‌ای که در آن از رزه سپاسگزاری کرده بودم، به پیوست فرستادم. همین، کار را راه انداخت.

کمی پس از اینکه او رسید، با هم شروع به تحقیق در چند مسأله دربارهٔ نگاشتهای تحلیلی کردیم. نتیجهٔ این کار در مقاله‌ای طولانی [۷]، نخستین مقالهٔ مشترک ما، منتشر شد (برخی از جزئیات آن در فصل ۳۱ این کتاب آمده است). همکاری ما چنان مفید از آب درآمد که من پیشنهاد کردم که بکوشیم او را [در مَدیسن] نگه داریم. در این مورد موفق شدیم و به جرأت می‌توانم بگویم که نقش من در نگه‌داشتن او در مدیسن یکی از بهترین کارهایی بود که من برای بخش ریاضی آنجا انجام دادم.

من تنها از یک مورد مقالهٔ سراسر مغلوط خبر دارم که در مجلهٔ معتبری چاپ شده باشد، و آن، مقالهٔ نیکلا پاندسکی[2] است در ماتماتیشه آنالین [۸]. در حالت یک‌متغیری، «قضیهٔ تاج» بیان می‌کند که قرص باز یکهٔ U در فضای ایده‌آل ماکسیمالِ جبر باناخی که از همهٔ توابع تحلیلی کراندار در U تشکیل می‌شود، چگال است. اثبات اولیهٔ این قضیه، از لنارت کارلسون[3] [۹] مستلزم مقدار زیادی آنالیز «سخت» است. اثباتی بسیار ساده‌تر بعدها توسط تام وولف ارائه شد [۱۰]. ولی صورت nمتغیری این قضیه، که پاندسکی ادّعا کرد ثابت کرده است، هنوز اثبات نشده است.

این مقاله در خلال کنفرانسی در آنالیز چندمتغیرهٔ مختلط در اُبروُلفاخ[4] ارائه شد. شنیدم که باعث خنده و مضحکه شده بود، چون هیچ چیز آن معنی نداشت. مثلاً اثبات با پوشاندن یک کُره با گردایه‌ای متناهی و «مجزا» از گویهای کوچک آغاز می‌شود! تاکنون چندین توجیه از اینکه چگونه چنین مقاله مهملی به چاپ رسیده به گوشم خورده است که هیچ‌کدام قانع‌کننده نبوده‌اند. از کلّ ماجرا به شدّت دلگیر شدم، چون پاندسکی چندین حکم کاملاً نادرست را به من نسبت داده بود، و گراوئرت[5] سردبیر مجلّه هم که در بررسی مقاله کوتاهی کرده بود، از چاپ اعتراض من سر باز زد.

مراجع

1. Natural Language and Linguistic Theory 5, 1987, 303-309.
2. Compositio Mathematica, 12 (1954) p. 17, footnote 3.
3. Duke Math. J. 26, 1959, 199-205.
4. Math. Scand. 15, 1964, 147-155.
5. Duke Math. J. 43, 10976, 841-861.
6. Ann. Inst. Fourier 23, 1983, 19-41.
7. Trans. AMS 310, 1988, 47-86.
8. Math. Annalen 287, 1990, 185-192.
9. Annals of Math. 76, 1962, 547-559.
10. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Chap. VIII.

1. Irv Shain 2. Pandeski 3. Lennart Carleson
4. Oberwolfach 5. Grauert

مسأله

چند مسأله از کتاب

محفلهای ریاضی (تجربهٔ روسی)

کتاب محفلهای ریاضی (تجربهٔ روسی)[1] که ترجمهٔ انگلیسی آن را انجمن ریاضی آمریکا در سال ۱۹۹۶ منتشر کرده است کتاب قابل توجهی است، هم از نظر مجموعهٔ مسائلی که در آن مطرح شده و هم از لحاظ اینکه تجربهٔ محفلهای ریاضی در روسیه را بازگو می‌کند.

«محفلهای ریاضی» کلاسهایی غیررسمی بوده است که در آنها به طور عمده به حل مسائل غیرمتعارف برای دانش‌آموزان می‌پرداخته‌اند. محل برگزاری این کلاسها دانشگاه مسکو بود و دانش‌آموزان علاقه‌مند بدون هیچ تشریفات رسمی می‌توانستند در این کلاسها حاضر شوند. دانشجویان رشتهٔ ریاضی دانشگاه مسکو برگزاری این کلاسها را بر عهده داشتند و البته بعد از مدتی خودِ دانش‌آموزان کلاسها که به کسوت دانشجویی درمی‌آمدند تجربه‌های کسب شده را به نسل جدید منتقل می‌کردند و این چرخه ادامه می‌یافته است و چه ریاضیدانهایی که از این محفلها برنخاستند!

اهمیت این محفلها درواقع از دو لحاظ است، یکی ارتباط برقرار کردن و پیوند زدن بین نسلها و دیگری ایجاد یک «فضای ریاضی» که نوجوان مستعد در این فضا به پختگی نسبی و اولیه دست می‌یابد و راه ویژهٔ خود را پیدا کرده ادامه می‌دهد.

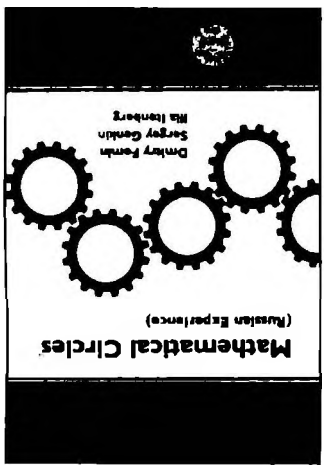
قلبِ کتاب محفلها مسائلی است که در آن آمده است ولی در هر مبحث قبل از درج مسائل یا در حین ارائهٔ مسائل توضیحات لازم نیز برای خواننده داده شده است که راهگشای مطالعات اضافی است. مباحثی که در کتاب آمده است علاوه بر مقدمات و مجموعهٔ مسائل کلی شامل مباحث زیر است:

زوجیت، ترکیبیات، بخش‌پذیری، اصل لانهٔ کبوتری، گرافها، استقرا، نامساویها، بازیها، مباحثی از هندسه، و مباحثی از نظریهٔ اعداد.

کتاب به سنتهای روسی که از سن‌پترزبورگ (لنینگراد سابق) شروع شده است، پایبند است، سنتهایی که در آنها بر محاورهٔ بین معلم و شاگرد تأکید می‌شود و اعتقاد بر این است که نوجوانان باید از سنین پایین یعنی ۱۱، ۱۲ سالگی از آموزشهای جانبی و غیررسمی برخوردار شوند.

نگاهی به چند مسأله از این کتاب خالی از لطف نیست، مسائلی که با ابزارهای ساده ولی ایده‌های پیچیده سروکار دارند.

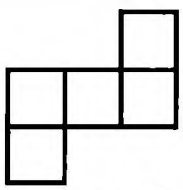
1. *Mathematical Circles (Russian Experience)*, Dmitri Fomin, Sergey Genkin, Ilia Itenberg, Translated from Russian: M. Saul. American Mathematical Society (1996).



۱. دنبالهٔ عددی ۱، ۹، ۸، ۲، ... در قاعدهٔ زیر صدق می‌کند: هر عضو دنباله از جملهٔ پنجم به بعد آخرین رقم مجموع چهار جملهٔ ماقبل آن است. آیا در این دنباله هرگز به چهار جملهٔ متوالی ۳، ۰، ۴، و ۴ خواهیم رسید؟

۲. تعدادی اتوموبیل روی یک مسیر دایره‌ای شکل قرار دارند. همهٔ این اتوموبیلها روی هم آن‌قدر بنزین دارند که یک اتوموبیل بتواند مسیر دایره شکل را یک دور کامل بزند. ثابت کنید حداقل یکی از اتوموبیلها می‌تواند با گرفتن بنزین از سایر اتوموبیلها (در بین راه در مسیر حرکتش) یک دور کامل بزند.

۳. خانه‌های یک صفحهٔ کاغذ شطرنجی را با هشت رنگ، رنگ‌آمیزی می‌کنیم. ثابت کنید به هر طریق که این رنگ‌آمیزی انجام شود می‌توانیم شکلی به صورت زیر پیدا کنیم که مشتمل بر دو خانهٔ یکرنگ باشد.

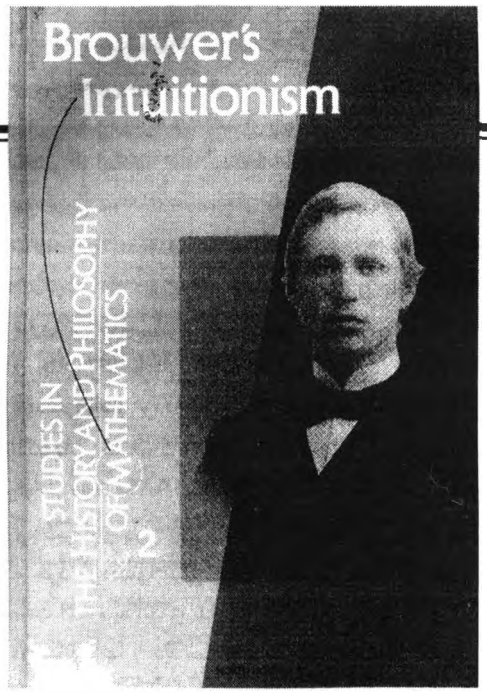


۴. سه مهره را روی سه رأس یک پنج‌ضلعی قرار داده‌ایم. می‌توانیم هر مهره را در امتداد یک قطر به یک رأس خالی ببریم. آیا ممکن است پس از چندین بار حرکت دادن مهره‌ها به وضعیتی برسیم که یکی از مهره‌ها به محل اصلی خود بازگردد ولی دو مهرهٔ دیگر با یکدیگر جابه‌جا شوند؟

ی. ت.

کتاب

دو نقد در بارهٔ کتاب شهودگرایی براؤر



***Brouwer's Intuitionism*, Walter P. van Stigt, Elsevier Science, New York (1990), xxvi+532pp.**

نقد اول• (کریگ اسموریِنسکی*)

سالها قبل معلمِ توپولوژیِ من به کلاس گفت که براؤر توپولوژیدانِ قابلی بوده است که به سرش زد و شهودگرایی را از خودش درآورد. در این اواخر، در عقلِ جدیدِ امپراطور، راجر پِن‌رُز[1] همین قصه را با تفصیلِ بیشتر، گیرم کمی مؤدبانه‌تر، با این اظهارِ نظرش باز گفته است که «شهودگرایی را، در ۱۹۲۴، ریاضیدانِ هلندی اِل. اِ. یِ. براؤر به‌عنوانِ پاسخِ دیگری ــ متمایز از پاسخِ صورت‌گرایی ــ به پارادکسهایی (از قبیلِ پارادکسِ راسل) مطرح کرد که وقتی در استدلالِ ریاضی از مجموعه‌های نامتناهی استفادهٔ بی حد و حصری شود ممکن است پدید آید.» در موردِ اخراجِ براؤر از هیأتِ تحریریهٔ ماتماتیشه آنالن، کُنستنس رید[2]، در زندگینامهٔ هیلبرت‌اش، به ما می‌گوید که این به سببِ آن بود که براؤر بر بررسیِ همهٔ مقالاتِ در موضوعِ توپولوژی یا با نویسندهٔ هلندی اصرار داشت و موجبِ تأخیرهای بسیار زیادی در موردِ این مقالات می‌شد. هم‌زمان، در زندگینامهٔ خودنوشتِ ابراهام فرَنکل[3]، می‌توانیم خبردار شویم که براؤر را اخراج کردند چون مقالاتِ بسیار زیادی از نوشته‌های ریاضیدانانِ روس-یهودی را رد کرده بود. با این حال، فرنکل براؤر را با نظری مساعد با وان‌دِروردِن مقایسه می‌کند، که در طولِ جنگ در آلمانِ نازی باقی ماند. در حالی که هم‌میهنانِ وان‌دروردن با او آشتی کرده‌اند، هنوز وسیعاً اعتقاد بر آن است که براؤر نازی بوده است، و حتی نسخهٔ پیش از چاپ یک آگهیِ مهمِ درگذشتِ او شرح می‌دهد که براؤر به SA ملحق شده بوده است و، در حالی که باد موهایش را به طرزِ شکوهمندی آشفته می‌کرده است، در صفوفِ آن رژه رفته است.

براؤر پیش از شهودگراشدنْ توپولوژیدان نبود. او در واکنش به پارادکسها شهودگرا نشد. اخراجِ او از هیأتِ تحریریهٔ ماتماتیشه آنالن نه به عملکردش ربطی داشت نه به هیچ یهودستیزی‌ای از جانبِ او. و اصلاً هیچ دلیلی در دست نیست که براؤر هیچ‌گاه نازی بوده باشد. در برخی از این قصه‌ها هسته‌هایی از حقیقت هست اما هیچ‌کدام حاویِ همهٔ حقیقت نیست. گذر از توپولوژی به شهودگراییْ صرفاً ظاهری است. رسالهٔ براؤر در ۱۹۰۷ در مبانیِ ریاضیات بوده است. در ۱۹۰۸ او دو مقاله با اندیشه‌های شهودگرایانه منتشر کرد، یکی اعدادِ اصلیِ نامتناهیِ مراتبِ بالا را رد می‌کرد و یکی اعتبارِ اصلِ طردِ شقِّ ثالث در حوزه‌های نامتناهی را زیرِ سؤال می‌بُرد. پس از آن، به پیشنهادِ استادِ راهنمایش، دِ. یِ. کورتوِخ (همانِ کورتوِخِ معادلهٔ کورتوِخ-دِوریس[1])، براؤر در ریاضیاتِ کلاسیک فعالیت کرد، و توپولوژیِ جبری را به تنهایی به‌وجود آورد. براؤر علی‌الظاهر شهودگرایی را چند سالی برای به‌دست آوردنِ شغل و امنیت رها کرد. اما آنچه کنار گذاشتنْ به نظر می‌رسد صرفاً ظاهری است. در تمامِ این مدت، براؤر نوعی از توپولوژی را می‌پروراند که بر این باور بود که به لحاظِ شهودگرایی می‌تواند پذیرفتنی باشد. او پس از اینکه یک ریاضیدانِ بین‌المللیِ مشهوری شد به شهودگرایی بازگشت، و مهمترین مقاله‌اش از جنبهٔ تاریخی، در دو بخش در ۱۹۱۸ و ۱۹۱۹ (و نه ۱۹۲۴) منتشر شد که با گزارشهایی در مجلاتِ هلندی و آلمانی همراه بود. او در این مقالاتْ اصلِ طردِ شقِّ ثالث در حوزه‌های نامتناهی را به صراحت رد کرد، و در عینِ حال هنوز در بسطِ شهودگرایانهٔ نگرهٔ مجموعه‌ها بسیار موفق بود. انگیزه‌های واقعیِ اخراجِ براؤر از هیأتِ تحریریهٔ ماتماتیشه آنالن را پیشتر

1. Roger Penrose, *The Emperor's New Mind*.

2. Constance Reid 3. Abraham Fraenkel

1. Korteweg-de Vries

دیرک فان‌دالن در متمتیکال اینتلیجنسر (سالِ ۱۲، شمارهٔ ۴ (۱۹۹۰)، صص. ۱۷ـ۳۱)* بررسی کرده است و در اینجا نیازی به تکرارِ آنها نیست. کافی است گفته شود که کنستانتین کاراتئودُوری، یکی از ویراستارانِ اصلی، براوِر را وظیفه‌شناس‌ترین ویراستارِ گروه می‌دانست، و اینکه، وقتی براوِر بعداً مجلهٔ خودش را پایه گذاشت، دوستِ نازیِ او لودویگ بیبرباخ از تعدادِ ویراستارانِ یهودیِ مجله آزرده‌خاطر بود. این درست است که براوِر دوستانِ نازی‌ای داشت و اینکه، به خاطرِ اموالی که در آلمان داشت، در گسستن از حکومت تعلل می‌کرد. این هم درست است که او از قطعِ دوستیش با ریاضیدانی هلندی که در زمانِ جنگ نازی بود امتناع کرد و حتی بعد از آن کوشید که برای این دوست شغلی بیابد. اما هیچ‌یک از اینها خودِ براوِر را نازی نمی‌کند، و حتی بعد از جنگ دولتِ هلند هم او را میرا دانست.

منشأ بخشی از اطلاعاتِ نادرست در بارهٔ براوِر روشن است. مقالهٔ پرنفوذِ براوِر در شهودگرایی — همان که هرمان وایل را پیروِ خود کرد و باعثِ وقوعِ مجادله بر سرِ مبانی[1] مشهورِ دهۀ ۱۹۲۰ شد — بعد از آثارِ معروفِ او در توپولوژیِ جبری در آمد. آنچه معلمِ توپولوژیِ من و پن‌رز به آن حکم کرده‌اند یک نتیجهٔ فوریِ این مطلب است. اینکه شهودگراییِ براوِر واکنشی به پارادکسها بود نتیجه‌ای از این قضیهٔ کلّی است که همهٔ کارها در مبانیِ ریاضیات در واکنش به پارادکسِ راسل بوده است. حتی هیلبرت، که در اواسط و اواخرِ دهۀ ۱۸۹۰ پارادکسهایی کشف کرده بود، که شاگردش اِرنست تسرملو پارادکسِ راسل را در اواخرِ دهۀ ۱۸۹۰ کشف کرده بود، او که در سخنرانی‌اش در کنگرهٔ بین‌المللیِ ریاضیدانان در ۱۹۰۰ علناً یک نتیجهٔ این پارادکسها را ذکر کرده بود، و او که خودْ پارادکسها بیش از حد منقلبش نکرد (او حتی در ۱۹۰۰ به خود زحمتِ اشاره به آنها را نداد) تا آنکه عکس‌العمل‌های افراطیِ راسل و ددکیند در مقابلِ آنها را دید — می‌گویم حتی هیلبرت، که می‌دانست که لئوپلد کرونکِر در ۱۸۹۱ پیش از آنکه پارادکسها شناخته شوند مرده بود، نتیجه گرفت که رد کردنِ کرونکر نگرهٔ مجموعه‌ها را، واکنشی به این پارادکسها بوده است. در واقع پارادکسها تأثیرِ مستقیمِ اندکی داشته‌اند. راسل، فرگه، ددکیند، و وایل آنها را جدی گرفتند. هیلبرت عکس‌العمل در مقابلِ آنها را جدی گرفت، اما خودِ آنها مستقیماً تکانش ندادند. او تنها وقتی واردِ عمل شد که وایل به شهودگرایی گروید، که در این رهیافت به ریاضیات هم پارادکسها موضوعیت ندارند. کارِ هیلبرت در مبانیِ ریاضیات در دهۀ ۱۹۲۰ واکنشی به شهودگرایی بود، نه به پارادکسها. اما او با توسعهٔ نقشِ پارادکسها به گونه‌ای که کرونکر، و نتیجتاً براوِر، را شامل شود، کارش را به‌صورتِ پاسخی به پارادکسها عرضه کرد.

حقیقتِ امر آن است که بیشترِ آنچه در بارهٔ براوِر می‌دانیم هیلبرت، ریاضیدانی بزرگ اما مورخی غیرقابلِ اعتماد، نوشته است. مثلاً اگر می‌خوانیم که براوِر به صورت‌گراییِ هیلبرت با عنوانِ «بازی با فرمولها» حمله می‌کند، می‌توانیم منشأ این اتهام را در یکی از مقالاتِ هیلبرت پیدا کنیم. این عبارت را در هیچ‌یک از مقالاتِ براوِر نخواهیم یافت، بلکه خواهیم فهمید که هرمان وایل آن را به کار برده است! در واقع در تمامِ مقالاتِ هیلبرت در دهۀ ۱۹۲۰ تنها یک ارجاعِ مستقیم به نوشته‌ای از براوِر هست — و این در موردِ امکانِ یافتنِ بسطِ اعشاریِ اعدادِ حقیقی است. هر ارجاعِ دیگری به براوِر توسطِ هیلبرت، یا ارجاعی است به چیزی که وایل گفته یا به کاری که کرونکر کرده؛ ارجاعِ مستقیمی به براوِر نیست.

اگر کسی مقالاتِ هیلبرت و براوِر در دهۀ ۱۹۲۰ را بخواند اصلاً شک می‌کند که هیچ مجادله‌ای بر سرِ مبانی بوده باشد. چنین کسی هیلبرت را می‌یابد که دلیرانه با شبحِ کرونکر، یا با مدلی مقوایی از براوِر که وایل ناخودآگاهانه جعل کرده بود، می‌جنگد. کسانی که با حکایتهای خنده‌دارِ کرونکر یا با کارهای عجیب و غریبِ متأخرترِ بیشاپ آشنا باشند متعجب خواهند شد که دریابند که مقالاتِ این دورهٔ براوِر حتی ذره‌ای متعصبانه نیست. برخلافِ کرونکر که به شیوهٔ مَن‌قال[1] بحث می‌کرد، یا وایل و بیشاپ که صرفاً به هر چه با آن موافق نبودند برچسبِ مهملْ‌بودن می‌زدند، براوِر انتقادی دقیق از صورت‌گرایی عرضه می‌کرد و به شکلی غیراحساساتی به نفعِ شهودگرایی استدلال می‌کرد.

در مبارزه در موردِ مبانی تنها نشانهٔ عصبانیت از جانبِ براوِر بعداً بروز کرد، وقتی که براوِر گفت که صورت‌گرایی، با ملاحظهٔ اینکه هم کاری انجام نداده است (که به حدِ کفایتْ درست است) و هم ایده‌های شهودگرایی را به خود بسته است (که به احتمالِ زیاد درست است، اما هنوز به صورتی که رضایتِ مورخان را برآورَد ثابت نشده است)، نباید شهودگرایی را ریشخند کند. شاید آنچه براوِر در جمع می‌گفته با آنچه می‌نوشته تفاوت داشته است؛ اگر چنین است دوست دارم بدانم. ولی، در حالِ حاضر، این‌طور به نظرم می‌آید که شهرتِ براوِر به آن نوع رفتاری که حقیقتاً تداعی‌گرِ ساختارگرا-فاشیست‌هایی چون کرونکر و بیشاپ است به تمامی مبتنی است بر اتهاماتِ هیلبرت بر پایهٔ بازنمودهای نادرستِ مطنطنِ وایل.

اکراه دارم که بگویم زمانِ اعادهٔ حیثیت به براوِر است. هر چه باشد، او اصلاً قدّیس نبود. او با هیلبرت جدال کرد (گرچه فقط بر سرِ تدابیری برای بهبودِ نحوهٔ عملِ دانشمندانِ آلمانی پس از جنگِ جهانیِ اول). او بر سرِ فضلِ تقدم جنگهای زیادی کرد و بسا که در این جنگها کاملاً تنگ‌نظر بوده باشد. او زن‌ستیز[2] متعصبی هم بود. مسلماً سببی برای تقدیسِ این مرد نداریم؛ اما سَبِّ او هم نباید بگوییم. براوِر، پایه‌گذارِ توپولوژیِ جبری و یکی از معدود فیلسوفانِ قابلِ فهمِ ریاضیات، یکی از بزرگترین ریاضیدانان قرنِ ما بود، بزرگترین ریاضیدانی که هلند از زمانِ کریستیان هویگنس به‌وجود آورده است، و از جامعهٔ ریاضیْ مستحقِ چیزهایی است بهتر از آنچه به او رسیده است.

من با برخی ملاحظات خوانندهٔ کنجکاو یا حتی نادم را برای تصویری از براوِر، دقیقتر از آنچه ممکن است معلمِ توپولوژیش به او عرضه کرده باشد یا ممکن است او به شاگردانش نشان داده باشد، به کتابِ وان‌ستیخت ارجاع خواهم داد. مهمترین ملاحظه این است که این کتاب اثری است در فلسفهٔ ریاضیات، نه تاریخِ آن، و، بنابراین، انتخابِ مناسبِ جامعهٔ ریاضی نیست. با این حال، تا حدِ زیادی، این کتابْ تنها موردی است که فعلاً در دسترس است و باید به آن توجه کنیم. فقط فصلِ اول، ماهیتاً شبه‌زندگینامه‌ای، ارتباطِ مستقیم با ریاضیدان دارد. این زندگینامه، هرچند مجمل، جامعترین زندگینامهٔ در دسترس به انگلیسی است و، گرچه بیشتر بر فلسفه متمرکز است، به آثارِ ریاضیِ براوِر، به‌ویژه توپولوژیِ او، و ارتباطش با فلسفهٔ او اشاره می‌کند. مسلماً این فصل باید تصورِ غلطِ رایج در بارهٔ شروعِ دیرهنگامِ علائقِ براوِر در مبانیِ ریاضیات یا در واکنش-به-پارادکسها-بودنِ این علائق را اصلاح کند. از بحثِ

* ترجمهٔ فارسی در همین شمارهٔ نشر ریاضی، صص.۳۶ـ۴۹.

۱. Grundlagenstreit؛ نویسنده در متنِ اصلی از همین کلمهٔ آلمانی استفاده کرده است.

1. *ad hominem* 2. sexist

مربوط به مجادله بر سر مبانی که بالضروره کوتاه است، در جایگزینیِ این داستانِ عامه‌پسند کاری بر نخواهد آمد و بنابراین باید این بحث را برای اصلاحِ تاریخِ عامه‌پسندِ براؤری ناکافی دانست. (اثباتِ این ناکافی‌بودنْ در دست است: پی در آسمانِ اخیر بَرو[1] به شدت بر کتابِ حاضر تکیه دارد و با براؤر نه تنها به‌صورتِ یک شرکت‌کنندهٔ فعال در این جنگ، بلکه به‌صورتِ مقصرِ آن رفتار می‌کند.) وان‌ستیخت در موضوعِ اخراجِ براؤر از ماتماتیشه آنالن بسیار بهتر از ریدِ و فرنکل کارکرده است، اما، مقالهٔ قبلاً ذکر شدهٔ وان‌دالن در اینتلیجنسر برتر است. در موردِ مشکلاتِ بعد از جنگِ براؤر، وان‌ستیخت موضعِ درستی دارد، اما هیچ واردِ جزئیات نمی‌شود. هیچ‌یک از اینها، البته، انتقاد از کتاب نیست، بلکه نشان‌دهندهٔ آن است که چگونه کتاب در خدمتِ هدفی نیست که قرار نبوده است باشد ــ ملاحظهٔ ذکر شده از اینجا ناشی می‌شود.

با این حال، به خودِ شهودگراییِ براؤر هم انتقاداتی وارد است. منتقدان روشن کرده‌اند که این کتابْ کاملاً خوانا نیست. کتابْ نمونه‌خوانی نشده و شاید حتی ویرایش هم نشده باشد. برای نمونه، این امر که نقلِ‌قولهای مکرری از براؤر در مواردِ تکرار از نو ترجمه شده است مطلبِ اخیر را به ذهن متبادر می‌کند. نتیجه‌گیریها و گمانه‌زنی‌ها به شکلِ حقایقی با پشتوانه‌های ناکافی عرضه شده است. مثلاً در بحثِ ماجرای ماتماتیشه آنالن، وان‌ستیخت حدسِ براؤر را ذکر می‌کند که انگیزهٔ هیلبرتْ عصبانیت از این بوده است که براؤر در ۱۹۱۹ شغلی در گوتینگن را رد کرده بوده، و به جای بررسیِ انتقادیِ این حدس یا ذکرِ منابعِ مستندِ دیگری در بارهٔ عصبانیتِ هیلبرت (که چنین پیش خواهند نهاد که براؤر در این باورش کاملاً بر حق نبوده است)، وان‌ستیخت این حکم را با حدسِ دیگری تأیید می‌کند. به عنوانِ گواهی بر اینکه این‌گونه گمانه‌زنی‌ها تا چه اندازه ممکن است به خارج از هدف بزند، می‌توانم اظهارِنظرِ وان‌ستیخت را در موردِ معاشرتِ براؤر با شاعرانِ جوانِ متعددی نقل کنم: «براؤر فاقدِ توانایی بیانِ هنرمندانهٔ احساساتش بود». این مسلماً خلافِ چیزی است که هر هلندی‌ای که با او حرف زده‌ام در بارهٔ ارتباطِ براؤر با آداما وان سخلتِما[2] گفته است: نثرِ براؤر همواره در سطحی قابل مقایسه با نثرِ این شاعر قلمداد شده است. انتقادی که خوانده‌ام و باید با آن موافقت کنم این است که تحلیلِ روان‌شناختیِ وان‌ستیخت از براؤر افراطی، و به‌نحوی افراطی منفی است. در واقع می‌شود گفت که وان‌ستیخت براؤر را اجن‌مال کرده است. اما او با چنین کاری باز هم موفق شده است تصویری از براؤر رسم کند مثبت‌تر از آنچه عموماً به ریاضیدانان نشان داده شده است و خواننده می‌تواند از کتابِ وان‌ستیخت تخمینی ابتدایی، هرچند نادقیق، از براؤر به‌دست آورَد. بدین‌گونه، با این ملاحظات که این کتاب تنها به نحوی جانبی به جامعهٔ ریاضی ارتباط دارد و اینکه باید بسیار نقادانه به آن نزدیک شد، خواننده را برای برداشتن گامِ اولیهٔ تردیدآمیزی در شناختِ براؤرِ واقعی به آن ارجاع می‌دهم.

ترجمهٔ ک. ل.

• Craig Smoryński, *The American Mathematical Monthly*, (8) **101** (1994) 799-802.

* * * * * *

* کریگ اسمورینسکی،
429 South Warwick Avenue, Westmont, IL 60559, USA.

1. Barrow, *Pi in the Sky*. 2. Adama van Scheltema

نقد دوم• (ویم رویتنبرگ، ترجمهٔ بردیا حسام)

لوئیتزن اخبرتوس یان براؤر انسان خوشایندی نبود. رفتار خودپسندانه و اغلب نسنجیدهٔ او نزدیکترین همکاران، دانشجویان و دوستانش را هم از او می‌رماند. تحسین و علاقه‌ای که بسیاری از ریاضیدانها و فیلسوفها نثارش می‌کنند به خاطر نبوغ اوست. خودمحوریِ بسیار و بی‌اعتناییش به عقاید دیگران یکی از اصیلترین و عمیقترین فیلسوفان ریاضیات را از او ساخت.

والتر وان استیخت تلاش زیادی کرده تا عمق شخصیت، فلسفه و مبانی ریاضیات براؤر را به ما نشان بدهد. او ــ ضمن بررسی شخصیت براؤر ــ بر پایهٔ نوشته‌های براؤر به عنوان منبع اصلی، تمام تفکر براؤر در بارهٔ منشأ و ماهیت ریاضیات را می‌نمایاند. اکنون از نوشته‌های براؤر بیش از آنچه در زمان فراهم آوردن مجموعه آثار براؤر به‌وسیلهٔ هیتینگ و فرویدنتال در دست بوده موجود است، مثل دستنوشته‌های تازه یافتهٔ کتابهای ناتمامش [۲]. صفحاتِ این کتاب لزومِ مطالعهٔ شخصیتِ براؤر را به وضوح نشان می‌دهد. تصادفی نیست که کتاب شش فصل دارد، چه عدد جادویی شش یادآور تعداد فصلهای هر یک از سه کتاب ناتمام براؤر است. حتی پایان‌نامهٔ براؤر «در بارهٔ مبانی ریاضیات» (۱۹۰۷)، هم بنا بود که شش فصل داشته باشد، اما با پایان یافتن حمایت مالی و ضیق وقت، به سه فصل تقلیل یافت. در حوزهٔ محدود کتابی که مرور می‌کنیم اساساً صحبتی از سهم کسان دیگر و پیشرفتهای بعدی شهودگرایی به میان نیامده، جز استثنایی مهم: بحثی ذیربط در باب صوری‌سازی شهودگرایی به‌وسیلهٔ هیتینگ و دیگران، و با وجود این جای قیاسی نقدگونه با فلسفه‌های دیگر خالی است. در این کتاب کارهای براؤر در توپولوژی فقط از لحاظ نقش آن در به دست آوردن کرسیی در دانشگاه آمستردام و ترفیع موقعیت براؤر در جامعهٔ بین‌المللی ریاضی بررسی شده است. شواهدی در دست است که براؤر توپولوژی را دقیقاً به همین منظور انتخاب کرده بود و این انتخاب برای براؤری که در جهت همان «مشاهده با چشم درونی»اش، رهیافت «بصری» هندسی را ترجیح می‌دهد طبیعی به نظر می‌رسد. او در خطابهٔ عمومی‌اش با عنوان ماهیت هندسه، «توپولوژیک» را معادل «هندسی» و «بی‌فرمول» می‌گیرد.

فصل اول کتاب وان استیخت شامل کتابنامه‌ای کامل به همراه نامه‌ها و مقاله‌های منتشر نشدهٔ مربوط و مقاله‌های چاپ شده در روزنامه‌هاست. فصل دوم کار براؤر را در بستر تاریخیش بررسی می‌کند و حاوی جزییاتی از زندگی براؤر است که به درک شخصیت او و سیر رشد ایده‌هایش کمک می‌کنند. فصل سوم به آن قسمت از ایده‌های اصلی فلسفی براؤر که مستقیماً زاییدهٔ تفسیرش از ریاضیات هستند می‌پردازد؛ مسائلی از قبیل ماهیت انسان و ذهن، دانش بشری، علیت و «ارزشهای متعالی نیکی، حقیقت و زیبایی». فصل چهارم، مفهوم براؤری ریاضیات، ریشهٔ آن در «شهود نخستین[1]»، ساختمانهای مشخصه‌اش و «ذهنی‌بودن» جوهری آن را تحلیل می‌کند. فصل پنجم با تفسیر براؤر از منشأ زبان شروع می‌شود و با تشریح نظریه‌ای از او در بارهٔ معناشناسی و انتقادش از طرز استفادهٔ معمول از اصلهای منطقی و صوری‌سازی در ریاضیات ادامه می‌یابد. فصل ششم،

1. Primordial Intuition

معرفی بعضی بخشهای اساسی کار براؤر در بازسازی شهودگرایانهٔ ریاضیات است، علی‌الخصوص آن بخشهایی که از برداشت کلاسیک فاصله می‌گیرند و ریشه‌های فلسفی‌شان آشکار می‌شود. پیوستها گزیده‌ای از آن نوشته‌های براؤرند که کمتر در دسترس هستند.

براؤر در سال ۱۸۸۱ متولد شد. از کودکیش چندان چیزی نمی‌دانیم جز اینکه دو سالی از همکلاسیهایش جلوتر بوده و با وجود این، در همهٔ درسهایش موفق بوده است (مگر احتمالاً در «کوشش» در ریاضیات). هنگامی که در ۱۸۹۷ به دانشگاه آمستردام وارد شد، نبوغش را به سرعت دریافتند. گرچه او را در انجمنهای دانشجویی با آغوش باز می‌پذیرفتند، آمیزه‌ای از کمرویی و تکبر او را از دانشجویان دوروبرش دور می‌کرد. اولین مدرک موجود از خودمحوری و روحیهٔ ستیزه‌جویانهٔ او، سخنانش در هنگام «اعلان ایمان[1]» در مراسم پذیرش عضویتش در کلیسا در ۱۸۹۸ است. اظهارات او در مورد شناخت شخصی و نه جمعی یا خارجیِ خدا و دیدگاه منفیش در مورد دینِ سازمان‌یافته، هم گویای هوش غیرعادی اوست و هم نمایانگر بی‌اعتنایی به افکار جماعت حاضر در مراسم. وان استیخت نه اینجا و نه در جاهای دیگر کتاب از این‌گونه رفتار براؤر چشم نمی‌پوشد. براؤر حساس بود و بسیاری از کارهایش را تحت تأثیر احساساتش انجام می‌داد؛ «او نیازی فزاینده به محبت و ستایش و قدرشناسی دیگران داشت ولی بر روابطش با دیگران، نوعی بدجنسی و جاه‌طلبی و بدگمانی غالب بود. او گاه دچار بدبینی و افسردگی می‌شد و ممکن بود دچار خشم و عصبانیت شدید گردد. در چنین حالتهای روانی، کار کردن برایش غیرممکن می‌شد.»

کم مانده بود که براؤر ریاضیات را و نقش خدمتگزارانهٔ آن به سایر علوم را کنار بگذارد، تا اینکه خربت مانوری[2]، ریاضیدانی خودآموخته و یکی از اولین کسانی که مسائل اساسیِ آن زمانِ مبانی ریاضیات را در هلند مطرح کرد، چشمهایش را بازکرد. بیانیهٔ ۱۹۰۵ براؤر، «زندگی، هنر و عرفان»، که در مخالفت با فلسفه بولند[3] نوشته، حاوی اولین منبع منتشر شده از دیدگاههای فلسفی اوست: مزیت «چشم درونی» یا «شهود»، ذهن[4]، و جایگاه زبان. در عین حال، این بیانیه، بیانیهٔ «جوانی عصیانگر» بود که علیه علوم کاربردی آشوب به راه انداخته بود. (در بارهٔ علوم طبی: «صناعت طب به عهدهٔ سامانی‌ها و پزشکان قلابی بود و آنها به خوبی از عهده برمی‌آمدند؛ اما از زمانی که در محدودهٔ خرد عنوان علم طب یافت، اثر بس کمتری دارد»). و بالاخره، بیانیه آمیزه‌ای از ژرف‌اندیشی و نومیدی می‌نماید همراه با آرزوی وارد کردن ضربه‌ای به «نظام مستقر». براؤر در همهٔ عمرش به «زندگی، هنر و عرفان» وفادار ماند و در واقع، جز در چند مورد نادر، آثار قبلیش را تأیید می‌کرد و به‌ندرت می‌توانست اشکالی در آنها پیدا کند.

وان استیخت به نرمی از این نکته می‌گذرد که حملات شدید براؤر به دیگران چندان هم صادقانه نبوده است. براؤر رسوم مضحک و ضعفهای بشری مانند جاه‌طلبی، حرص و قدرت، حسد و ... را به مسخره می‌گرفت ولی خودش هم عاری از این ضعفها نبود. حملهٔ او به کسانی که با انباشتن ثروت به دنبال تأمین زندگی خود هستند، در حالی که خودش این‌گونه در قید پول بود، پوچ و بی‌معنی به نظر می‌رسد. اینکه روح‌گرایی و عرفان را ریشخند می‌کرد ... لبخندی بر لبان کسانی که می‌شناختندش می‌نشاند ... (او در جلسات احضار روح و گردهمایی‌های عرفانی شرکت می‌جست ...). این خصیصه بارها و بارها ذکر شده است. براؤر از نفوذ شخصیتش برای فراهم کردن کرسیی در ریاضیات برای مانوری و کرسیی در زمین‌شناسی برای یکی از برادرانش استفاده کرد، در حالی که تقریباً در همان زمان مبارزه‌ای علنی را برای استقرار یک نظام انتصابات دانشگاهی بر شالودهٔ شایستگی علمی و نه بر اساس سنت نهانکاری و اعمال نظرهای شخصی، شروع کرده بود (صص ۶۸ و ۶۹). براؤر با از یاد بردن ضدیتش با ریاضیات کاربردی، ادعا می‌کرد که برپا کردن کارگاهی ملی برای نقشه‌برداری (هوایی) آرزوی همه عمرش بوده است (ص ۷۹). ورود شوق‌آمیز براؤر به زندگی سیاسی در ۱۹۱۲ جدیتش را در جستجوی خلوت و صداقت دیدگاههایش را در بارهٔ جامعهٔ انسانی زیر سؤال می‌برد؛ و در این موارد چرخشی صد و هشتاد درجه‌ای در طرز برخوردش با اصلاحات اجتماعی دیده می‌شود (ص ۱۹۴).

پایان‌نامهٔ براؤر اساساً عاری از اخلاقیات، «عرفان» و افکار تعصب‌آمیز است. این نکته تا حدی به علت فشار استادش، کورتوخ[1]، بوده است. بررسی دقیق مکاتبات کورتوخ و براؤر و مطالعهٔ قسمتهای حذف شدهٔ پایان‌نامه، هم در کتاب وان استیخت و هم در اصل هلندی [۱]، حساسیت و واقع‌بینی کورتوخ را نشان می‌دهد. علیرغم وجود قرائنی از تیرگی روابط بین استاد و دانشجو، مکاتبات نشان می‌دهد که اساساً بحثی علیه نظر کورتوخ ــ که لازم نمی‌دید پایان‌نامه حاوی گرایشی صوفیانه و بدبینانه در بارهٔ زندگی باشد ــ در کار نبوده است. همچنین مطالعهٔ اصل هلندی به من نشان داد که دقت زیادی در ترجمهٔ انگلیسی شده است. وان استیخت این نکته را روشن می‌کند که کورتوخ نبوغ براؤر را ارج می‌نهاد و حتی برای فراهم کردن کرسیی برای او، از منصب دانشگاهیش در ۱۹۱۳ کناره گرفت.

براؤر از فلسفهٔ ریاضیش به این نتیجهٔ قابل توجه می‌رسد که اصل «طرد شق ثالث» در منطق، معتبر نیست. رسالهٔ بی‌اعتباری اصول منطقی اش که در ۱۹۰۸ به هلندی نوشته شده، چنانکه باید مورد توجه واقع نشد. وان استیخت یادآوری می‌کند که حتی خود براؤر هم در ابتدای کار حضلت انقلابی آن را احساس نکرده بود. حتی حمله‌اش به طرد شق ثالث در ۱۹۱۲ هم فقط پاورقیی است که به ترجمهٔ انگلیسی سخنرانی معارفه‌اش اضافه شده. او در ۱۹۲۳ با انتقاد از اصل حذف نقیض مضاعف ($\neg\neg\varphi \to \varphi$) به منطق بازگشت. در نوامبر کشف کرد که $\neg\neg\neg\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$. حمله به اصل طرد شق ثالث بدل به یک صف‌آرایی تبلیغاتی شد. با وجود این، گسترش منطق شهودگرایانه بعدها به دست کولموگوروف، گلیونکو[2] و بالاخره هیتینگ، در ۱۹۲۸ انجام شد، یعنی در زمانی که براؤر در سکوت فرو رفته بود.

پایان دورهٔ فعالیت جدی براؤر، همچنان که وان استیخت نشان می‌دهد، به خاطر «بدقلق» بودن خود او فرا رسید. با این حال، در این مورد همهٔ تقصیر به گردن براؤر نیست. در سالهای دههٔ ۱۹۲۰ هیلبرت به مخالفت با دیدگاههای براؤر در بارهٔ ریاضیات و دفاع از دیدگاه صورتگرایی خود پرداخت. اینکه این مخالفت تا چه حد با شبح کرونکر بود تا با شهودگرایی، نمی‌دانیم؛ توصیفی بسیار با روح و جالب توجه از این ماجرا در [۳] آمده، که خواندن آن مؤکداً توصیه می‌شود. هنگامی که هیلبرت در ۱۹۲۸ رهبر هیأت آلمانی در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات در بولونیا بود و براؤر به خاطر

1. Profession of Faith 2. Gerrit Mannoury 3. Bolland
4. Subject

1. Korteweg 2. Glivenko

رفتار تبعیض‌آمیز علیه آلمانیها که پس از جنگ جهانی در این‌گونه کنفرانسها اعمال می‌شد این کنفرانس را تحریم کرده بود، داستان به اوج خود رسید. پس از کنگره، هیلبرت براؤر را بدون جلب موافقت بقیهٔ ویراستاران ارشد ماتماتیشه آنالن، مثل اینشتین و کاراتئودوری، از هیأت ویراستاران کنار گذاشت. بررسی وان استیخت نشان می‌دهد که افراد دیگری هم در این امر مقصرند که کوشیدند آبرو و اعتبار هیلبرت را به قیمت لطمه‌زدن به براؤر حفظ کنند.

ماجرای ماتماتیشه آنالن ممکن است تنها علت کناره‌گیری براؤر از برنامهٔ شهودگرایی نباشد. بازسازی براؤر [از این برنامه] تا حدی به خاطر دشواری پیدا کردن برهانی قانع‌کننده برای «قضیهٔ اساسی»اش (که قضیهٔ بادبزن[1] هم نامیده می‌شود) به بن‌بست رسیده بود و تا حدی هم، به قول وان استیخت، عقیدهٔ براؤر در بارهٔ جداسازی مطلق ریاضیات و زبان باعث «ناکارآمدی غیرقابل تحملی در ریاضیات شهودگرایانه»اش شده بود. از این گذشته، طرحش برای یک «مؤسسهٔ ریاضیات» در آمستردام مورد بی‌مهری قرار گرفته بود، در صورتی که در پاییز ۱۹۲۷ مؤسسهٔ ریاضیات جدیدی در گوتینگن باز شده بود که نشان‌دهندهٔ تغییر جهتی در مرکز ثقل تحقیقات ریاضی بود.

وان استیخت قریب به سیصد صفحه را به بررسی بسیار دقیق فلسفهٔ براؤر به‌طور عام، فلسفهٔ ریاضیش به‌طور خاص، و نظرهایش در بارهٔ زبان و منطق اختصاص داده است (این به دنبال جزئیات رفتن وان استیخت گهگاه مرا به توجه خاص به برخی ریزه‌کاری‌های زبان هلندی واداشت؛ مثل تمایز بین «willekeurig» و «willekeurige» در صفحهٔ ۱۷۹، بین «به دلخواه داده‌شده» و «به دلخواه انتخاب‌شده»). گاهی تکرار و بازگویی بعضی نظرها هم در این بخشها پیش آمده، اما بدون از دست دادن وضوح نمی‌توان آنها را حذف کرد. بعضی تکرارها هم غیرضروری به نظر می‌آیند، مثل توضیح مکرر معنی شهود نخستین.

این کتاب جلدِ ضخیم با صحافی خوب، حروف زیبا و چند عکس سیاه و سفید، خوب از کار درآمده است، ولی متأسفانه، اشتباهات چاپی نه چندان کمی هم دارد. اغلب آنها را می‌توان به آسانی دریافت (مثل «philosphy» یا کلمات مکرر از قبیل the the و of of). ولی چنین چیزی، احساسی بجا اما ناگوار یعنی احساس عدم اطمینان به بعضی قسمتهای متن را در خواننده به وجود می‌آورد (آیا علاوه بر علامت نقل قول حذف شده، 'l' در «world» در صفحهٔ ۲۰۰ در عبارت

'The world cannot wait for 'higher society' while the 'higher society waits for the word'

اشتباه است؟).

به دلیل محدودیت حوزهٔ بحث کتاب، بحث انتقادی در بارهٔ قسمت عمدهٔ فلسفهٔ براؤر صورت نگرفته و سؤالهای مختلفی بی‌جواب مانده‌اند. مثلاً براؤر احتمالاً می‌تواند ادعا کند که با زبانهای فعلی نمی‌توانیم همهٔ افکار و فرایندهای تفکرمان را با کلمات و یا روی کاغذ بیان کنیم، اما هیچ دلیلی ندارد که باور کنیم حافظهٔ بشر قابل اعتمادتر از حافظهٔ «نوشته‌شده» است. تمییز این دو برای آنها که به وجود جهان خارجی مشکوک‌اند و نوشتن روی کاغذ را حقهٔ ذهن بشر برای به‌خاطر آوردن اطلاعات می‌دانند مشکلتر است. براؤر هنگامی به این مسأله می‌رسد که جایزالخطابودن و محدودیت حافظهٔ بشری را می‌پذیرد و ارزش زبان را به عنوان یاوری برای حافظه بیان می‌کند. یک بار هم ادعا کرد که ممکن نیست زبانی منزه از خطا برای ریاضیات محض موجود باشد که کژتابی نداشته باشد. اما ادعای مرتبهٔ بالاتر براؤر در بارهٔ همهٔ زبانهای ممکن مبتنی بر تجربهٔ او در مورد چند زبان معدود است. حداکثر چیزی که می‌توان ادعا کرد این است که اگر هم چنین زبانی وجود داشته باشد ما نمی‌توانیم به آن پی ببریم. بنابراین فقط [می‌توان گفت که] زبان قطعیت کمتری دارد. حتی همین ادعای رقیقتر در مورد عدم قطعیت هم امکان غیرمنصفانهٔ توجیه مسائل منطق را به این عنوان که «به هر حال به زبان نمی‌شود اعتماد کرد» فراهم می‌کند. شاید مشکلات براؤر در مورد قضیهٔ اساسی (ص ۹۳، ص ۳۸۳) هم به خاطر عدم دقت کافی در جداکردن سطوح مراتب بالاتر بوده باشد. نتایج بسیار بحث‌انگیز براؤر عبارت‌اند از اصل جدید استقرای مانع که گفته شده «با تأمل شهودی ژرف، واضح» است، و استفادهٔ او از تحلیلی از ساختار برهانهای ممکن. بالنتیجه برخی از استفاده‌های بعدی براؤر از مشاهدات فراریاضی و از مرتبه‌های بالاتر، آن دقت زیاد ریاضیات شهودگرایانهٔ اولیه را از بین می‌برد. یک نکتهٔ بحث‌انگیز دیگر: «مشاهده با چشم درونی»ای که براؤر مطرح می‌کند، شامل بینش «شهودی» از خدا هم می‌شود. از این موضوع در ریاضیات استفاده‌ای نشده، اما هیچ حد قابل اندازه‌گیری برای آنچه که می‌توان در قلمرو «شهود درونی» دانست موجود نیست. جایزالخطابودن ذهن بشر هم نقطهٔ ضعفی دیگر است. علوم طبیعی، هر چند که نتیجه‌هایشان در نظر اول از قطعیت کمتری برخوردار است، این نتیجهٔ آنها که خود ذهن بشری هم از «قوانین طبیعت» پیروی می‌کند به احتمال زیاد، درست است و در نتیجه، طی دگرگونی کامل پیش‌آمدها موقعیت اصلی ذهن شهودی را تضعیف می‌کنند. کتاب وان استیخت تا سالهای سال متنی بسیار اساسی در بارهٔ شهودگرایی براؤر خواهد بود، اما هنوز جای بررسی انتقادی و تطبیقی نظرهای براؤر خالی است و این، شاید باید موضوع کتابی جدید باشد.

مراجع

1. L. E. J. Brouwer. *Over de Grondslagen der Wiskunde*, D. van Dalen (editor). MC Varia, Vol. 1, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1981.

2. D. van Dalen (editor). *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*. Cambridge University Press, 1981.

3. C. Smoryński. *Hilbert's Programme*. CWI Quarterly, Vol. 1, No. 4, 1988, 3-59.

* * * * * *

• Wim Ruitenburg, "Brower's intuitionism, *Modern Logic* (4) 2 (1992) 424-430.

1. Fan

منابع کتاب جبر نوین من•

بارتل وان در وردن
ترجمهٔ مهدی مجیدی ذوالبنین

کتاب جبر نوین وان در وردن که اولین کتاب جبر مجرد به مفهوم امروزی آن و پرنفوذترین کتاب در نوع خود بوده است اولین بار در دو جلد در سالهای ۱۹۳۰ـ۱۹۳۱، که نویسنده بیش از ۲۸ سال نداشت، با عنوان آلمانی *Moderne Algebra* انتشار یافت. تاکنون جلد اول این کتاب به ویرایش هفتم و جلد دومش به ویرایش پنجم رسیده است. در این نوشته، وان در وردن تاریخچه و منابع تهیهٔ این کتاب تاریخی را شرح می‌دهد.

همه چیز از ددکیند شروع می‌شود
اِمی نوتر

در دسامبر ۱۹۷۱. گِرت برکاف از من خواست تا نظر خود را در مورد منابع اصلی کتابم ارائه دهم. من برایش نامه‌ای هفت صفحه‌ای با دو ضمیمه نوشتم. او تصمیم گرفت نسخه‌ای ویراسته‌شده از نامهٔ مرا به همراه توضیحات خودش چاپ کند، اما در جریان مکاتبات ما مشخص شد که هیچ‌کدام از این دو نسخه رضایت‌بخش نیستند. اکنون می‌خواهم گزارش مفصلتری بنویسم و به‌صورت کاملتری شرح دهم که چطور این کتاب را نوشتم و وضعیت کلی جبر در زمان نوشتن آن چگونه بود.

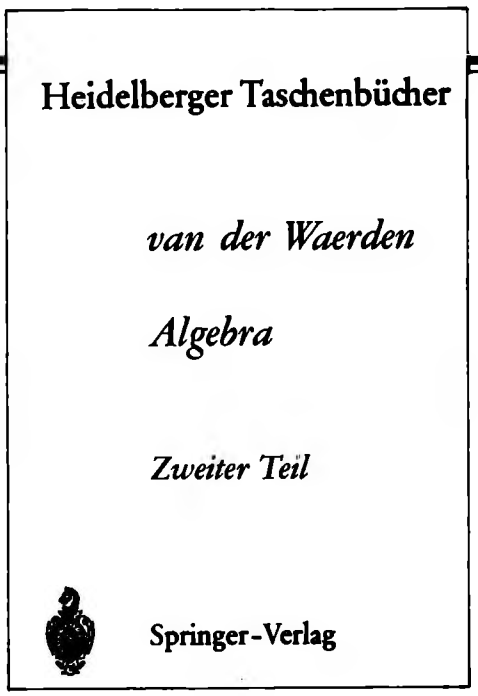
مقدمه

من از ۱۹۱۹ تا ۱۹۲۴ در دانشگاه آمستردام به تحصیل ریاضیات و فیزیک مشغول بودم. در آنجا هندریک دوریس[1] درس بسیار خوبی در زمینهٔ جبر کلاسیک ارائه می‌کرد که سرفصلهای زیر را دربرمی‌گرفت:

دترمینانها و معادلات خطی
توابع متقارن
منتج[2]ها و مبین‌ها
قضیهٔ استورم در مورد ریشه‌های حقیقی
«اندیسِ اینرسی[3]» سیلوستر برای فرمهای درجه دوم حقیقی
حل معادلات درجه سه و دو مجذوری به‌وسیلهٔ رادیکالها.

من این درس را با مطالعهٔ نظریه گالوا و سایر مطالب موجود در کتاب جبر

1. Hendrik de Vries 2. resultant 3. index of inertia



سه‌جلدیِ ستودنیِ هاینریش وبر[1] تکمیل کردم. همچنین کتاب مطالعاتی دربارهٔ بیست‌وجهی [۱] فلیکس کلاین را خواندم و نظریهٔ ناورداها را به دقت مطالعه نمودم.

در ابتدای قرن حاضر، خیلیها حس می‌کردند که نظریهٔ ناورداها ابزاری قدرتمند در هندسهٔ جبری است. طبق «برنامهٔ ارلانگن» فلیکس کلاین، سروکار هر شاخه‌ای از هندسه با خواصی از اشیاء هندسی است که تحت گروه معینی ناوردا هستند. با این حال، وقتی مقالات اساسیِ ماکس نوتر، «پدر هندسهٔ جبری» و پدر اِمی نوتر و کارهای هندسه‌دانان بزرگ ایتالیایی، به‌خصوص سِوِری[2] را مطالعه کردم، دریافتم که مشکلات واقعی هندسهٔ جبری را نمی‌توان با محاسبهٔ ناورداها و هموردا[3]ها برطرف کرد.

در همان آمستردام دربارهٔ مسائلی از نوعِ زیر بسیار فکر می‌کردم، ولی نمی‌توانستم آنها را حل کنم:

چطور می‌توان «بعد» یک چندگونا[4]ی جبری را تعریف کرد؟

وقتی هندسه‌دانان ایتالیایی در مورد یک «نقطهٔ نوعیِ[5]» یک چندگونا صحبت می‌کنند مقصودشان چیست؟

چگونه می‌توان چندگانگی‌های تقاطعی را تعریف کرد؟

چطور می‌توان تعمیمهای nبعدی قضیهٔ بزو در مورد نقاط تقاطع دو خم مسطح را اثبات نمود؟

1. Heinrich Weber 2. Severi 3. covariant 4. variety
5. punto generico

آیا می‌توان «اصل بقای تعداد[1]» شوبرت و «حساب هندسهٔ شمارشی[2]» شوبرت را توجیه کرد؟

این آخری یکی از مسائل هیلبرت بود که در سال ۱۹۰۰ به کنگرهٔ پاریس ارائه شد، اما من هنگامی‌که در ۱۹۲۴ به گوتینگن آمدم این را نمی‌دانستم.

مسألهٔ دیگری که مرا بسیار نگران کرده بود تعمیم «قضیهٔ اساسی ماکس نوتر در مورد توابع جبری» به حالت nبعدی بود. قضیهٔ نوتر شرایطی را مشخص می‌کرد که تحت آن شرایط یک چندجمله‌ای داده شدهٔ $F(x,y)$ را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از دو چندجمله‌ای داده‌شدهٔ f و φ با ضرایب چندجمله‌ای A و B نوشت: $F = Af + B\varphi$. مسألهٔ کلیتر این است که یک چندجمله‌ای $F(x_1, \ldots, x_n)$ را تحت چه شرایطی می‌شود به‌صورت ترکیبی خطی از چندجمله‌ایهای داده شدهٔ f_1، ...، f_r با ضرایب چندجمله‌ای نوشت: $F = A_1 f_1 + \ldots + A_r f_r$، و یا به زبان امروزی، تحت چه شرایطی F در ایده‌آل تولید شده توسط f_1، ...، f_r قرار دارد. از مقالات ماکس نوتر می‌دانستم که این مسأله در هندسهٔ جبری اهمیت قابل ملاحظه‌ای دارد و من توانستم آن را در چند حالت خاص حل کنم. در آن زمان نمی‌دانستم که لاسکر[3] و مکالی[4] نتایج بسیار کلیتری به‌دست آورده‌اند.

گوتینگن

وقتی در ۱۹۲۴ به گوتینگن آمدم، دنیای تازه‌ای پیش روی من گشوده شد. از اِمی نوتر آموختم که ابزارهایی که می‌شد با آنها به مسائل موردنظر من پرداخت، قبلاً به‌وسیلهٔ ددکیند و وبر، هیلبرت، لاسکر و مکالی، اشتاینیتس[5] و خود اِمی نوتر فراهم شده است. او به من گفت که من باید مقالهٔ اساسی اشتاینیتس با عنوان «نظریه جبری میدانها» [۲] و رسالهٔ مکالی، دستگاه‌های پیمانه‌ای [۳]، و نیز مقالهٔ معروف ددکیند و وبر در زمینهٔ توابع جبری [۴] و مقالات خود او در باب نظریهٔ ایده‌آلها و نظریهٔ حذف[6] را بخوانم.

کتابخانهٔ ریاضی گوتینگن بی‌نظیر بود. مراجعه‌کننده به هر چه نیاز داشت در آنجا می‌یافت و می‌توانست خودش کتابها را از قفسه‌ها بردارد! این کار در آمستردام و در بیشتر دانشگاههای اروپا غیرممکن بود. بدین ترتیب من شروع کردم به آموختن جبر و کار بر روی مسألهٔ اصلی خودم: مبانی هندسهٔ جبری.

اکنون به بررسی موضوعات اصلیی که درکتابم در مورد بحث قرارگرفته‌اند می‌پردازم ولی نه به ترتیب منطقی متن کتاب، بلکه تقریباً به همان ترتیبی که نظریه را آموختم. در شماره‌گذاری فصلها و بخشهای کتاب از چاپ اول پیروی می‌کنم.

نظریهٔ میدانها [هیأتها]

در متنهای قبلی، میدانهای اعداد و میدانهای توابع جبری معمولاً در فصلهای جداگانه مورد بحث قرار می‌گرفتند و به میدانهای متناهی نیز در یک فصل دیگر پرداخته می‌شد. اولین کسی که آنها را در چارچوب واحدی عرضه کرد اشتاینیتس بود که این کار را با شروع از تعریف مجردی از «میدان» در مقالهٔ ۱۹۱۰ خود که در بالا به آن اشاره شد انجام داد. من در فصل ۵، با عنوان «نظریهٔ میدان»، اساساً از اشتاینیتس پیروی کردم. اثبات «قضیهٔ عنصر اولیه»

1. principle of conversation of number 2. calculus of enumerative geometry 3. Lasker 4. Macaulay 5. Steinitz 6. elimination theory

در بخش ۳۴ متعلق به گالواست. اِمی نوتر بود که توجه مرا به این اثبات جلب کرد.

فصل ۹ به توسیعهای نامتناهی میدان می‌پردازد. ایده‌های اصلی باز هم از اشتاینیتس است. اثباتهای او مبتنی بر خوشترتیبی و استقرای ترامتناهی بودند. به همین دلیل فصل ۸ راکه در آن به این موضوعات پرداخته شده پیش از آن آوردم. بخشهای ۵۷ـ۵۸ دربارهٔ خوشترتیبی، از مقاله‌های کلاسیک تسرملو اقتباس شدند اما بخش ۵۹ در مورد استقرای ترامتناهی، جدید و الگوی آن بحث استقرای کامل در بخش ۳ بود.

داستان بخش ۳ عجیب است. نکتهٔ اصلی در این بخش، توجیه «تعریف به‌وسیلهٔ استقرای کامل» است یعنی اثبات قضیهٔ زیر (متغیر x روی همه اعداد طبیعی تغییر می‌کند):

> (الف) اگر مجموعه‌ای از روابط بازگشتی داده شده باشند که $f(x)$ را برحسب مقادیر پیشینِ $f(m)$ $(m < x)$ تعریف کنند، تابعی چون $f(x)$ وجود دارد که در این روابط صدق می‌کند.

قضیهٔ (الف) را برای اولین بار ددکیند اثبات کرد، اساساً به همان صورت که من آن را در بخش ۳ ثابت کرده‌ام. اثبات او بر اصول موضوع پئانو مبتنی نیست. ددکیند مفهوم «قطعهٔ آغازی از ۱ تا n» یا (معادلش) رابطهٔ $m < n$ را از پیش فرض می‌کند. از آنجا که این رابطه را می‌توان به‌صورت $m + u = n$ تعریف کرد، می‌توان چنین نیز گفت که در اثبات ددکیند، جمعْ از پیشْ فرض شده است. به عبارت دیگر، قضیهٔ زیر از پیش فرض شده است:

> (ب) تابعی چون $x + y$ وجود دارد که در روابط $x + 1 = x^+$ و $x + y^+ = (x + y)^+$ صدق می‌کند.

بنابراین (ب)، (الف) را نتیجه می‌دهد و برعکس، زیرا (ب) حالت خاصی از (الف) است.

پیش از ۱۹۲۵، همه فرض می‌کردند که حساب مقدماتی و به‌ویژه (الف) و (ب) از اصول پئانو نتیجه می‌شود. اما در ۱۹۲۷ سه نفر دریافتند که در این مورد مشکلی وجود دارد: ادموند لانداو، جان فون‌نویمان و لاسلو کالمر[1].

لانداو در حال آماده‌سازی جزوهٔ اصول آنالیز [۵] خود بود. او سعی کرد (الف) یا (ب) را از اصول پئانو نتیجه بگیرد اما موفق نشد. موضوع را با جان فون نویمان که به‌کرات از برلین به گوتینگن می‌آمد در میان گذاشت. فون نویمان نشان داد که (الف) و در نتیجه (ب) را می‌توان از اصول پئانو به‌دست آورد اما اثباتش تا حدی پیچیده بود. در همان سال ۱۹۲۷ لاسلو کالمر از گوتینگن بازدید کرد و اثبات بسیار ساده‌ای از (ب) را که مبتنی بر استقرای کامل نسبت به x بود به لانداو نشان داد. این اثبات در جزوهٔ لانداو آورده شد. من در جبر خود، اثبات (ب) را به این کتاب ارجاع دادم و (الف) را با روشی متعلق به ددکیند ثابت کردم.

نظریهٔ گروهها

من بیشتر نظریهٔ گروهها را از درسِ اِمی نوتر با عنوان «نظریهٔ گروهها و اعداد فوق مختلط» (زمستان ۱۹۲۴/۲۵) و بحثهای شفاهی با آرتین و شرایر

1. Laslo Kálmár

در هامبورگ آموختم. همچنین کتاب نظریهٔ گروههای از مرتبهٔ متناهی [۶] اِشپایزر[1] و نظریهٔ گروههای [۷] برنساید[2] را مطالعه کردم. چون چنین کتابهای فوق‌العاده‌ای موجود بودند، لازم نبود درکتابم به طور مفصل به نظریهٔ گروهها بپردازم.

در فصل ۲ تحت عنوان «گروهها» بحث را به مفاهیم اساسیی محدود کردم که در تمام کتاب به‌کار می‌روند.

در فصل ۶ با عنوان «ادامهٔ نظریهٔ گروهها» مفهوم گروه با عملگرها معرفی شده است که بیشتر در فصل ۱۵ («جبر خطی») و فصلهای ۱۶ و ۱۷ به کار رفته است. از ددکیند به بعد، بسیاری از نویسندگان، گروههای جابه‌جایی با عملگرها، مثلاً مدولهای روی یک حلقه، را مورد توجه قرار دادند، اما مفهوم کلی گروه با عملگرها به آن شکلی که در کتاب من تعریف شده، متعلق به ریاضیدان روسی اُتو اشمیت[3] است که در ۱۹۲۵ از گوتینگن بازدید کرد و مقالهٔ بسیار زیبایی با عنوان «در مورد گروههای نامتناهی با زنجیرهای متناهی» در ۱۹۲۸ منتشر نمود [۸].

صورت و اثبات دو قضیهٔ یکریختیِ بخش ۴۰ از اِمی نوتر است. همین مطلب در مورد بخش ۴۲ نیز درست است. اثبات قضیه ژوردان-هولدر در بخش ۴۱ از اُتو شرایر است که در ۱۹۲۸ در [۹] منتشر شد.

دو بخش آخر فصل ۶ به این دلیل اضافه شدند که در فصل بعدی که دربارهٔ نظریهٔ گالواست مورد نیازند. قضیه‌هایی که در این دو بخش اثبات شده‌اند از خود گالوا هستند.

برای اینکه ترتیب تاریخی را رعایت کنم، باید اکنون به سراغ جلد ۲ بروم.

نظریهٔ ایده‌آلها

وقتی به گوتینگن آمدم یکی از مسائل اصلی من تعمیم «قضیهٔ اساسی» ماکس نوتر یعنی $F = Af + B\varphi$ به بعد n بود. شرایطی که F باید در آنها صدق کند «شرایطی موضعی» در همسایگی نقاط تقاطع منزوی[4] خمهای $f = 0$ و $\varphi = 0$ است. اگر P یک نقطهٔ تقاطع باشد، این شرایط موضعی یک «ایده‌آل اولیهٔ» Q تعریف می‌کنند و ایده‌آل آغازی $M = (f, \varphi)$ برابر اشتراک این «ایده‌آلهای اولیه» است. این نامها جدیدند اما ایده‌ها همان ایده‌های ماکس نوتر و برتینی[5] هستند.

ظاهراً هیلبرت اولین کسی بود که متوجه فایدهٔ تعمیم nبعدیِ قضیهٔ نوتر شد. امانوئل لاسکر، قهرمان شطرنج، که درجهٔ دکتری خود را زیر نظر هیلبرت در ۱۹۰۵ گرفت نخستین کسی بود که این مسأله را حل کرد. وی ثابت کرد که به‌طور کلی هر ایده‌آل چندجمله‌ای $(f_1, \ldots, f_r)$ برابر اشتراکی از ایده‌آلهای اولیه است.

اِمی نوتر در مقالهٔ خود با عنوان «نظریهٔ ایده‌آلها در حوزهٔ حلقه‌ها» [۱۰] قضیهٔ لاسکر را به حلقه‌های جابه‌جایی داخواهی که در یک «شرط پایایی زنجیر صعودی» (قضیهٔ زیرزنجیرها) صدق می‌کنند تعمیم داد. فصل ۱۲ کتاب من، نظریهٔ عمومی ایده‌آلها در حلقه‌های جابجایی [۱۱]، بر این مقالهٔ اِمی نوتر استوار است. اثبات قضیهٔ پایهٔ متناهی هیلبرت در بخش ۸۰ از آرتین است؛ او این اثبات را طی یک سخنرانی در سمیناری در هامبورگ در ۱۹۲۶ ارائه کرد. شرط پایایی زنجیر صعودی بسیار ضعیف است؛ این شرط در همه حوزه‌های چندجمله‌ای روی هر میدان و در خیلی حالتهای دیگر برقرار است. اگر فرضهای قویتری در مورد حلقه اتخاذ کنیم می‌توان حتی ثابت کرد که ایده‌آلهای اولیه توانهایی از ایده‌آلهای اول هستند و هر ایده‌آلی حاصلضرب چند ایده‌آل اول است. در مقالهٔ اِمی نوتر با عنوان «بازسازی مجرد نظریهٔ ایده‌آلها در میدانهای اعداد جبری و توابع جبری» [۱۲] پنج اصل موضوع صورتبندی شده بود که تضمین می‌کرد هر ایده‌آلی حاصلضرب چند ایده‌آل اول است. حلقه‌هایی که در این اصول صدق می‌کنند اکنون «حلقه‌های ددکیند» نامیده می‌شوند. در این حلقه‌ها، نظریهٔ ددکیند در مورد ایده‌آلهای میدانهای اعداد جبری و توابع جبری یک‌متغیره صادق است.

نظریهٔ حلقه‌های ددکیند در فصل ۱۴ کتابم آمده است. در آنجا اثباتهای اِمی نوتر را با استفاده از ایده‌ای متعلق به کرول در بخش ۳ی مقاله‌اش در [۱۳] ساده‌تر کرده‌ام. اِمی نوتر یکی از داوران این مقاله بود و در مورد آن به آرتین اطلاع داد. آرتین اثبات کرول را ساده کرد و آن را در سمیناری در هامبورگ که من هم در آن شرکت داشتم ارائه نمود. صورت ساده‌شدهٔ اثبات کرول توسط آرتین، در بخش ۱۰۰ (بخش ۱۳۷ از چاپ جلد نازک) بازنویسی شد.

در ۱۹۲۹ من نظریهٔ ددکیند ـ نوتر ـ کرول ـ آرتین را به حلقه‌هایی که در میدان کسرهایشان به‌طور صحیح بسته‌اند تعمیم دادم [۱۴]. ایدهٔ کار این بود که به‌جای ایده‌آلها، رده‌های ایده‌آلهای «شبه‌برابر[1]» قرار گیرند. نشان داده شد که هر ایده‌آل با حاصلضربی از ایده‌آلهای اول، شبه‌برابر است. در ۱۹۳۰ نامه‌ای از آرتین دریافت کردم که در آن اثبات ساده‌تری از قضیهٔ من ارائه داده بود و این اثبات در بخش ۱۰۳ از کتابم (بخش ۱۴۰ از چاپ جلد نازک) بازنویسی شد.

ایده‌آلهای چندجمله‌ای و هندسهٔ جبری

همان‌طور که قبلاً هم گفتم، یکی از علایق اصلی من دقت بخشیدن به مبانی هندسهٔ جبری بود. اولین مقاله‌ای که در این‌باره نوشتم، «نظریهٔ صفرهای ایده‌آلهای چندجمله‌ای» در سال ۱۹۲۶ بود [۱۵]. بخش اصلی این مقاله را در فصل ۱۳ کتابم گنجاندم. برای ملاحظهٔ شرح کاملتری از تاریخچهٔ اولین کارهای من در زمینهٔ هندسهٔ جبری، می‌توانید به متن سخنرانیم در نیس[2] دربارهٔ مبانی هندسهٔ جبری [۱۶] رجوع کنید.

در فصل ۱۳، از رسالهٔ دستگاههای پیمانه‌ای اثر مکالی [۳] نیز استفاده کردم. آخرین قسمت فصل ۱۳ (بخش ۹۶) مبتنی بر مقاله‌ام با عنوان «مفهوم چندگانگی در هندسهٔ جبری» است [۱۷]. در این مقاله «اصل بقای تعداد جوابها»ی شوبرت تحت شرایطی نسبتاً کلی اثبات شد. در مورد تاریخچهٔ این مقاله، به صفحهٔ ۱۷۳ از مرجع [۱۶] مراجعه کنید.

مطالب فصل ۱۵ («جبر خطی») در ۱۹۲۴ بر هنگان معلوم بود. برای بخش ۱۰۶ از کتاب درسهایی در نظریهٔ اعداد [۱۸] اثر شاتله[3] استفاده (و مطالبی از آن نقل) کردم. اِمی نوتر توجه مرا به این کتاب جلب کرده بود. بخش ۱۰۷ تحت تأثیر بحثهایم با اُتو شرایر در هامبورگ نوشته شد. وی در جبر خطی و نظریهٔ گروهها متخصص بود. بخش ۱۰۸ برگرفته از مقالهٔ اِمی نوتر در [۱۹] و بخش ۱۱۰ به شدت متأثر از مقالات کلاسیک فروبنیوس در مورد شمارنده‌های ابتدایی[4] بود.

1. Speiser 2. Burnside 3. Otto Schmidt 4. single
5. Bertini

1. quasi-equal

۲. پنجم سپتامبر ۱۹۷۰، کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان، نیس.

3. A. Châtelet 4. elementary divisors

در فصل ۱۱ («نظریهٔ حذف»)، بخشهای ۷۱ و ۷۲ کلاسیک هستند (کارهای اویلر). بخشهای ۷۳ و ۷۴ بر پایهٔ دستاوردهای مکتب کرونکر استوار است؛ مرجع مستقیم من رسالهٔ دستگاههای پیمانه‌ای اثر مکالی، بود. بخش ۷۵ از مقالهٔ رابینوویچ[1] با عنوان «دربارهٔ قضیهٔ صفرهای هیلبرت» [۲۰] گرفته شده است. اثبات او از قضیهٔ صفرها درست به موقع انتشار یافته بود و من توانستم آن را هم بیاورم. بخش ۷۶ مبتنی بر سه مقالهٔ زیر بود:

(۱) مقاله‌ای از مرتِنس[2]، «دربارهٔ نظریهٔ حذف I» [۲۱]. اگر درست به خاطر داشته باشم، اُستروسکی[3] بود که توجه مرا به این مقالهٔ مهم جلب نمود. در این مقاله برای نخستین بار وجود دستگاهی از منتج‌ها برای معادلات همگن اثبات شده بود.

(۲) مقاله‌ای از وان در وردن، «محکی جبری برای حل‌پذیری یک دستگاه معادلات همگن» [۲۲]. در این مقاله دوباره وجود دستگاهی از منتج‌ها اثبات شده بود.

(۳) مقاله‌ای از کاپفِرر[4]، «دربارهٔ منتج‌ها و دستگاههای منتج‌ها» [۲۳]. در این مقاله اثبات کوتاهتری برای وجود دستگاهی از منتج‌ها ارائه شده بود.

در بخشهای ۷۷ـ۷۸ بیشتر از مقالهٔ هورویتس،[5] «دربارهٔ فرمهای اینرسی یک مدول جبری» [۲۴] با ساده‌سازیهایی که خودم در «مبانی نو برای نظریهٔ حذف و نظریهٔ منتج‌ها» [۲۵] عرضه کرده بودم، استفاده کردم.

بخش ۷۹، از مقاله‌ام با عنوان «مفهوم چندگانگی در هندسهٔ جبری» [۲۶] گرفته شده است.

در مجموع می‌توان گفت که کل فصل ۱۱ ارتباط تنگاتنگی داشت با کارهای اِمی نوتر در زمینهٔ نظریهٔ حذف [۲۷] و کارهای خودم در مبانی هندسهٔ جبری.

جبرها و نمایشها

هنگامی‌که به گوتینگن آمدم. درس اِمی نوتر با عنوان «نظریهٔ گروهها» و اعداد فوق مختلط را در ۱۹۲۴/۲۵ گرفتم. یکی از موضوعات اصلی این درس نظریهٔ مک‌لاگان‌ـودربورن[6] در مورد جبرهای تعریف‌شده روی میدانهای دلخواه بود. این موضوع به شکلی بسط‌یافته‌تر در درس ۱۹۲۷/۲۸ اِمی نوتر که همان عنوان قبلی را داشت مورد بحث قرار گرفت. در این درس بحث کاملاً جدیدی در مورد نمایش گروهها و جبرها نیز ارائه شد. من از درس اخیر یادداشتهایی برداشتم و این یادداشتها اساسِ یکی از مقالات اِمی نوتر [۲۸] را تشکیل داد. فصل ۱۶ («نظریهٔ کمیّتهای فوق مختلط») و فصل ۱۷ («نظریه نمایش گروهها و کمیّتهای فوق مختلط») تقریباً به تمامی متعلق به اِمی نوتر هستند. تنها بخش ۱۲۷ که دربارهٔ نمایش گروههای متقارن S_n است حاصل گفتگوی حضوری با جان فون نویمان است که در یک پانویس به آن اشاره شده است.

گوتینگن و هامبورگ

اولین اقامت من در گوتینگن درست یک سال طول کشید، از ۱۹۲۴ تا ۱۹۲۵. در این مدت اعضای دایم مؤسسهٔ ریاضیات عبارت بودند از هیلبرت، هِرگلوتس[7]، لاندا، رونگه، کورانت، اِمی نوتر و فلیکس برنشتاین؛ یک مجمع‌الکواکب باشکوه! از میان «مدرسان بدون حقوق[1]» از آنهایی نام می‌برم که بیشتر مدیونشان هستم: الکساندر اُستروسکی، هلموت کنزر[2]، پاول برنیز[3] و اُتو نویگه‌باوِر[4] متخصص تاریخ علم. میهمانان سرشناسی از سرتاسر دنیا به آنجا می‌آمدند: هرمان وایل، کاراتئودوری، جان فون نویمان، زیگل، هاسه، ریچارد براوِر[5]، هاینتس هوپف، پُل الکساندروف، کوراتوسکی[6]، اسکُلِم[7]، نیلز و هارالدبور، رولف نوانلینا، آزوالد وِبلِن، گرت برکاف، نوربرت وینر و خیلیهای دیگر.

من منطق ریاضی را عمدتاً از پرینکیپیا ماتماتیکای راسل و وایتهد و نظریهٔ مجموعه‌ها را از مقالات فلیکس برنشتاین و تسرملو آموختم. از کورانت و شاگردان جوانش هانس لِوی و کورت فریدریش روشهای فیزیک ریاضی را یاد گرفتم. استادان من در توپولوژی الکساندروف، کوراتوسکی و کنزر بودند؛ من همچنین با ستایش فراوان مقالات الکساندر را مطالعه کردم. نظریهٔ جبری اعداد را بیشتر از کتاب هِکه و «گزارش اعداد[8]» معروف هیلبرت آموختم. در هندسه جبری مقالات ماکس نوتر و هندسه‌دانان بزرگ ایتالیایی سِوِری، کستل نوو[9] و اِنریکِز[10] منابع الهام‌بخش پایان‌ناپذیری بودند.

در ۱۹۲۵ برای یک سال به هلند بازگشتم. در ۱۹۲۶ درجهٔ دکتری خود را با نوشتن پایان‌نامه‌ای که در آن برنامه‌ای برای مبانی هندسهٔ جبری عرضه شده بود، گرفتم. سپس با استفاده از بورس راکفِلِر برای تحصیل نزد هِکه، آرتین و شرایر به هامبورگ رفتم. آرتین در تابستان ۱۹۲۶ درسی در جبر می‌داد. وی قول داده بود برای «سری زرد» اشپرینگر کتابی در زمینهٔ جبر بنویسد. تصمیم گرفتیم که من از درس یادداشت بردارم و بعد کتاب را با هم بنویسیم. کورانت، ویراستار سری مذکور، موافقت نمود. درس آرتین فوق‌العاده بود. من یادداشتهایم را تنظیم می‌کردم و فصل به فصل به آرتین نشان می‌دادم. او کاملاً راضی بود و گفت، «چرا تمام کتاب را خودت نمی‌نویسی؟»

موضوعات اصلیِ درس آرتین، میدانها و نظریهٔ گالوا بودند. در نظریهٔ میدانها آرتین بیشتر از اشتاینیتس پیروی می‌کرد و من هم فقط یادداشتهایم را تنظیم کردم. در مورد نظریهٔ گالوا هم همین‌طور: شکل ارائهٔ مطالب در کتاب من از آنِ آرتین است.

البته آرتین می‌بایست درست در ابتدای درسش به تشریح مفاهیم بنیادی مانند: گروه، زیرگروه نرمال، گروه خارج‌قسمتی، حلقه، ایده‌آل، میدان و چندجمله‌ای می‌پرداخت و قضایایی نظیر قضیهٔ همریختی و قضایای یکتایی تجزیه برای اعداد صحیح و چندجمله‌ایها را اثبات می‌کرد. این مطالب را عموماً می‌دانستند. در بیشتر مواقع من فقط اثباتهای آرتین را از روی یادداشتهای خود بازنویسی می‌کردم.

من به مدت دو یا سه نیمسال تحصیلی تقریباً هر روز با آرتین و شرایر ملاقات می‌کردم و با خوشوقتی بسیار شاهد بودم که آنها چطور نظریهٔ «میدانهای حقیقی» را کشف کردند و آرتین چگونه قضیهٔ مشهور خود دربارهٔ نمایش توابع معین به‌صورت مربعات را ثابت کرد. همهٔ اینها را در کتابم گنجاندم (فصل ۱۰). البته منابع من دو مقالهٔ آرتین و شرایر بودند [۲۹].

1. A. Rabinowitsch 2. F. Mertens 3. Ostrowski 4. H. Kapferer 5. A. Hurwitz 6. Maclagan-Wedderburn 7. Herglotz

۱. Privat dozent، مدرسی که دانشگاه حقوقی برایش مقرر نکرده و دستمزدش از طرف دانشجویان کلاسش تأمین می‌شود.

2. Helmut Kenser 3. Paul Bernays 4. Otto Neugebauer 5. Richard Brauer 6. Kuratowski 7. Skolem 8. Zahlbericht 9. Castelnuovo 10. Enriques

فصلهای مقدماتی جلد ۱

فصل ۱، «اعداد و مجموعه‌ها»، به عنوان یک فصل مقدماتی هنگامی نوشته شد که بقیهٔ جلد ۱ تقریباً تمام شده بود. مطالب بخشهای ۱ـ۲ و ۴ـ۵ بطورکلی در آن زمان بر همگان معلوم بودند. داستان بخش ۳ قبلاً در این مقاله نقل شد.

در فصلهای ۲ و ۳ بیشتر از درسهای آرتین و نوتر پیروی کردم.

فصل ۴ در مورد چندجمله‌ایها شامل مطالبی کلاسیک است، اما بخش ۱۸ دربارهٔ مشتق‌گیری، از خودِ من است. در بخش ۲۲ («محکهای تحویل‌ناپذیری») از منابعی استفاده کردم که در پانویس صفحهٔ ۷۹ ویراست اول ذکر شده است: شونمان[1]، نِتو[2]، دوماس[3]، اُر[4] و غیره.

بخش ۲۳ («تجزیه‌کردن در تعداد متناهی مرحله») بر اساس ایده‌های کرونکر است.

فصلهای ۵ـ۱۰ جلد ۱

در بخش اول این مقاله توضیحاتی دربارهٔ فصل ۶ («ادامهٔ نظریهٔ گروهها») و فصل ۸ («ترتیب و خوشترتیبی مجموعه‌ها») داده‌ام. فصلهای باقی‌مانده ۵، ۷ و ۹ـ۱۰ از جلد ۱ همگی مربوط به نظریهٔ میدانها هستند.

در فصل ۵ («نظریهٔ میدان») بیشتر از آرتین و اشتاینیتس پیروی کردم. در بخش ۳۵ از درس نوتر دربارهٔ دستگاههای فوق مختلط استفاده کردم.

بخش ۳۷ جدید است. گرِته هرمان[5]، یکی از شاگردان اِمی نوتر، در پایان‌نامهٔ خود به همین مسأله پرداخته بود. در بحث او نقصانی وجود داشت که من آن را در مقالهٔ «نکته‌ای در مورد تجزیه‌ناپذیری چندجمله‌ایها» [۳۰] نشان دادم. گرِته هرمان در ریاضیاتِ شهودگرایانه تعلیم ندیده بود اما من دیده بودم، زیرا در آمستردام تحت راهنمایی ل. ا. ی. براؤر تحصیل کرده بودم. بنابراین فوراً اشتباه او را تشخیص دادم و با استفاده از روشهای براؤر مثال ناقضی برای یکی از گزاره‌های او ساختم.

فصل ۷ که دربارهٔ نظریهٔ گالواست، بر اساس درسهای آرتین نوشته شده است (مقالهٔ من، «نظریهٔ گالوا از هاینریش وبر تا امیل آرتین» را در [۳۱] ملاحظه کنید). فقط بخشهای ۵۴ و ۵۶ (در چاپ جلد نازک، بخشهای ۶۵ و ۶۶) را خودم اضافه کردم.

فصل ۹ به تمامی از مقالهٔ کلاسیک اِشتاینیتس، «نظریه جبری میدان»، [۳۲] گرفته شد.

در فصل ۱۰ دو موضوع در هم ادغام شده بودند که در ویراستهای بعدی در فصلهای جداگانه به آنها پرداخته شد؛ آنها عبارت بودند از:

(الف) نظریهٔ آرتین‌ـشرایر در مورد میدانهای حقیقی و نمایش توابع گویای مثبت به‌صورت مجموع مربعات بخشهای ۸۱ـ۸۳ در چاپ جلد نازک، بخشهای ۶۸ـ۷۰ در چاپ اول).

(ب) میدانهای دارای ارزه و میدانهای pـای (بخش ۶۵ در چاپ اول، فصل ۱۸ در چاپ جلد نازک).

در مورد موضوع (الف) از مقالات آرتین و شرایر که قبلا مورد اشاره قرار گرفتند پیروی کردم. همچنین از مقاله‌ای از بائِر با عنوان[6] «دربارهٔ میدانهای مرتب غیرارشمیدسی» [۳۳] نیز استفاده کردم. به عنوان مقدمه، بخش ۶۴، «تعریف اعداد حقیقی»، را اضافه کردم. این بخش را از روش کانتور برای ساختن اعداد حقیقی به‌صورت «دنباله‌های بنیادی» الهام گرفته بودم، اما طوری آن را نوشتم که تعمیم مطلب به میدانهای دارای ارزه، بدیهی باشد. این تعمیم در بخش ۶۵ ارائه شد.

برای قسمت (ب)، یعنی بخش ۶۵، منابع اصلیْ مقالات هنزل[1]، کورشاک[2] و اُستروسکی در زمینهٔ میدانهای pـای و میدانهای دارای ارزه بودند که در صفحهٔ ۲۲۰ به آنها اشاره شد (جلد ۱ از چاپ اول). توجه کنید که وقتی جلد ۱ را می‌نوشتم، اُستروسکی در گوتینگن بود و هاسه، بهترین شاگرد هِنسِل و یکی از مروجان بزرگ روشهای pـای به‌کرات به گوتینگن می‌آمد. در صفحهٔ ۲۰۶ از چاپ جلد نازکِ جلد ۲ و نیز در مقاله‌ام «جبر از زمان گالوا»، [۳۴] به مقالات بیشتری در مورد ارزه‌ها اشاره شده است.

در ویراستهای بعدی، هنگامی‌که اهمیت ارزه‌ها بیشتر و بیشتر روشن شد، فصل جداگانه‌ای به میدانهای دارای ارزه اختصاص یافت (فصل ۱۸ در چاپ جلد نازک) منبع اصلی، مهمترین مقالهٔ اُستروسکی در مورد ارزه‌ها [۳۵] بود.

بعد از آن فصلی دربارهٔ جبر توپولوژیک اضافه شد که شامل نظریهٔ گروهها، حلقه‌ها و میدانهای توپولوژیک بود. نخستین کسی که این نظریه‌ها را به‌صورتی اسلوبمند بسط داد، دوست من وان دانتسیگ[3] در آمستردام بود. در ویراست چهارم و ویراستهای بعدی تکیه‌ام بیشتر بر مقالهٔ اساسی وان دانتسیگ «در مورد جبر توپولوژیک I: نظریهٔ تتمیم» [۳۶] بود. همچنین از مقالاتی از کاپلانسکی، کوالسکی[4] و پُنتریاگین هم استفاده کردم که در صفحهٔ ۲۹۲ از چاپ جلد نازکِ جلد ۲ به آنها اشاره شده است.

یکی دیگر از افزوده‌های بعدی به جلد ۲ (اولین بار در ویراست چهارم، ۱۹۵۹) فصل «توابع جبری یک‌متغیره» (فصل ۱۹ در چاپ جلد نازک) بود. این فصل به اثباتی از قضیه ریمان‌ـرُخ بر اساس ایده‌های ددکیند و وبر، اِمی نوتر، اشمیت، سِوِری و آندره ویل می‌انجامد. برای تاریخچهٔ این اثبات، مقدمهٔ فصل ۱۹ در چاپ جلد نازک، را ملاحظه نمایید.

همچنین در ویراست چهارم، فصل مربوط به جبرها (فصل ۱۳ در چاپ جلد نازک) به میزان زیادی بسط داده شد و اثباتها با ترکیب روشهای اولیهٔ اِمی نوتر و روشهای جیکوبسن ساده‌تر شدند. در بخش ۹۳ از چاپ جلد نازک، زیربخشهایی در مورد جبرهای گراسمن و کلیفرد افزوده شد. فهرست منابع این زیربخشها در پایان بخش ۹۳ آمده است (جلد ۲ صفحهٔ ۴۲ در چاپ جلد نازک).

مراجع

1. *Studien über das Ikosaeder.*
2. "Algebraische Theorie der korper", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 137 (1910).
3. *Modular Systems*, Cambridge 1916.
4. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92 (1882).
5. *Grundlagen der Analysis.*
6. *Theorie der Gruppen endlicher Ordnung.*
7. *Theory of Groups.*

1. Schönemann 2. Netto 3. Dumas 4. Ore 5. Grete Hermann 6. R. Baer

1. Hensel 2. Kürschak 3. D. Van Dantzig 4. Kowalski

8. "Ueber unendliche Gruppen mit endlicher Kette", *Mathematische zeitschrift* 29 (1928) 34.

9. *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar Hamburg* 6 (1928) 300.

10. "Idealtheorie in Ringbereichen", *Mathematische Annalen* 83 (1921).

11. *Allgemeine Idealtheorie der kommutativen Ringe.*

12. "Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern", *Mathematische Annalen* 96 (1926) 26-61.

13. *Mathematische Annalen* 99 (1927) 51-70.

14. *Mathematische Annalen* 101 (1929).

15. "Nullstellentheorie der polynomideale", *Mathematische Annalen* 96 (1926).

16. *Archive for History of Exact Sciences* 7, p. 171.

17. "Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie", Mathematische Annalen 97 (1927).

18. *Lecons sur la théorie des nombres* (1913).

19. *Mathematische Zeitschrift* 30 (1929).

20. "Zum Hilbertschen Nullstellen satz". *Mathematische Annalen* 102 (1929) 520.

21. "Zur theorie der Elimination I", Sitzungsberichte der Akademie der wissenschaften Wien 108 (1899) 1173.

22. "Hin algebraisches Kriterium für die Lösbarkeit eines homogenen Gleichungssystems", *Proceedings Koninklijke Akademie Amsterdam* 29 (1926) 142.

23. "Ueber Resultanten und Resultantensysteme", Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie München 1929 179.

24. "Ueber die Trägheitsformen eines algebraischen Moduls", *Annali die Matematica* (3a seria) 20 (1913).

25. "Neue Begründung der Eliminations-und Resultantentheorie", *Nieuw Archief voor wiskunde* 15 (1928) 301.

26. "*Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie*", *Mathematische Annalen* 97 (1927).

27. *Mathematische Annalen* 90, p. 229.

28. *Mathematische Zeitschrift* 30 (1929) 641.

29. *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar Hamburg* 5 (1926) 83 and 100.

30. "Eine Bemerkung über die Unzerlegbarkeit von Polynomen", *Mathematische Annalen* 102 (1930) 738.

31. "Die Galois-Theorie von Heinrich Weber bis Emil Artin", *Archive for the History of Exact Sciences* 9 (1972) 240.

32. "Algebraische Theorie der Korper", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 137 (1910).

33. "Ueber nichtarchimedisch geordnete körper", *Sitzungs berichte der Heidelberger Akademie, Abhandlung* 8 (1927).

34. "Algebra seit Galois", *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 68 (1966) 155.

35. *Mathematische Zeitschrift* 39 (1934) 296-404.

36. "Zur topologischen Algebra I: Komplettierungstheorie", *Mathematische Annalen* 107 (1933) 587.

******

- B. L. van der Waerden, "On the sources of my book *Modern Algebra*", *Historia Mathematica* 2 (1975) 31-40.

نشر ریاضی، سال ۹ شمارهٔ ۱، صص ۷۰ـ۷۳

دربارهٔ ترجمه‌ای از

مقدمه بر فلسفهٔ ریاضی

کاوه لاجوردی*

• برتراند راسل. مقدمه‌ای بر فلسفهٔ ریاضی، ترجمهٔ ابوالقاسم لاله. انتشاراتِ یاسین، بی جا، ۱۳۷۶. ۲۴۳ صص.، ۶۰۰ تومان.

مقدمه بر فلسفهٔ ریاضی را راسل در تابستانِ ۱۹۱۸ در زندان نوشت. هدفِ راسل، آن‌طور که خودش در جاهای دیگر گفته، نوشتنِ کتابی درسی بوده است که در حکمِ درآمدی بر کتابِ مهم و بسیار فنّیِ پرینکیپیا ماتماتیکا* باشد. کتاب در ۱۹۱۹ همزمان در لندن و نیویورک منتشر شد و تا امروز به دفعات تجدیدِ طبع شده است.** مطمئناً زیباییِ توأم با روشنیِ بیانِ راسل، یا، بهتر بگویم، «راسلی» بودنِ نثرِ کتاب، در اقبالِ زیادِ خوانندگان تأثیر زیادی داشته است. در این نوشتهٔ کوتاه قصدِ من، متأسفانه، نه پرداختن به آراء و آثارِ راسل در فلسفهٔ ریاضیات و منطقِ ریاضی است [۱] و نه معرفیِ جامعِ اصلِ کتاب؛ قصدِ من بررسیِ ترجمه‌ای از این کتابِ زیباست که اخیراً منتشر شده و مشخصاتش را در بالای این صفحه می‌بینید.

مطالبِ ریاضیِ این کتاب را اکنون می‌توان در دهها کتابِ جدیدتر یافت، و گمان می‌کنم که خوانندهٔ عادیِ امروزی تنها به دو دلیل ممکن است به سراغِ (ترجمه‌ای از) مقدمه بر فلسفهٔ ریاضی برود: بخواهد از بصیرتِ ژرفِ راسل در فلسفه بهره‌ای گیرد و یا، در مرتبه‌ای پایینتر، بخواهد از زیباییِ نثرِ او لذت برَد. در موردِ ترجمهٔ آقای ابوالقاسم لاله، فراوانیِ جمله‌هایی از قبیلِ

تولید رشته‌ها به وسیلهٔ روابط کمتر و بیشتر شبیه رابطهٔ n با $n + ۱$ بسیار عادی است. ـص. ۴۹

و

روش «فرض مسلم» آن‌چنان‌که می‌خواهیم مزایای فراوانی دارد؛ آنها شبیه مزایای سرقت از روی کار دشوار شرافتمندانه‌اند. ـص. ۸۸

و

لذا آن تنها چیزی است که می‌توانیم این مفهوم بنامیم که مشمول در گزاره می‌شود. ـص. ۱۹۶

قاعدتاً باید به خواننده بقبولانَد که در این ترجمه نباید چندان در پیِ التذاذ از شیواییِ نثرِ راسل باشد. در مقابل، متأسفم بگویم که خوانندهٔ غیرعادی و عصبانی از مطالعهٔ این کتاب لذتِ زیادی خواهد برد: چنین کسی می‌تواند با نمایاندنِ خطاهای ترجمه، اضافه بر تشفّیِ خاطر، به خوانندهٔ عادی نشان دهد که در این ترجمه به دنبالِ اندیشه‌های فلسفیِ راسل هم نباید باشد. بگذارید فصلِ خاصی را انتخاب کنم و مشخصتر حرف بزنم.

هیلری پاتنم[۱] گفته است که راهِ اغفالِ دانشجویانِ خوب و کشاندنشان به فلسفه این است که تعریفِ فرگه‌ـراسلیِ عدد را برایشان شرح دهیم [۲]. به لحاظِ ریاضی، کلیدِ این تعریف تعریفِ عددِ اصلی برای مجموعه‌هاست. انتظارِ ریاضیِ ما از عددِ اصلی چیست؟ می‌خواهیم که اولاً هر مجموعه عددِ اصلیِ منحصر به فردی داشته باشد، و ثانیاً عددِ اصلیِ مجموعه‌های هم‌عدد یکی باشد (دو مجموعه هم‌عددند اگر تابعِ یک، به یک و پوشایی از یکی به

* Alfred North Whitehead and Bertrand Russell, *Principia Mathematica*. 3 vols., 1910-1913.

** متنِ موردِ استفادهٔ من این است:

Bertrand Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy* (with a new Introduction by John G. Slater), Routledge, London, 1993.

۱. Hilary Putnam (متولدِ ۱۹۲۶).

دیگری وجود داشته باشد). اکنون ایدهٔ اصلی این است: A هر مجموعه‌ای که باشد، $\{B$ با A هم‌عدد است : $B\}$ $\overline{\overline{A}}$ (در صورتِ وجود) انتظاراتِ ما را برمی‌آورد [۳]. از اینجا تا تعریفِ عدد به شیوهٔ فرگه و راسل راهی نیست.

در فصلِ II، «تعریفِ عدد»، راسل ابتدا به برخی ملاحظاتِ فلسفی می‌پردازد (و، چنانکه گفتم، ارزشِ این کتاب در زمانِ ما عمدتاً به واسطهٔ همین مباحث است). در صفحهٔ ۲۲ از ترجمهٔ فارسی می‌خوانیم

> در جستجوی تعریفی برای عدد، اولین مطلبی که بدیهی به نظر می‌رسد چیزی است که می‌توانیم آن را ساخت دستوری پرسشمان بنامیم.

ولی توضیحاتِ بعدی معلوم می‌کند که این ساختِ دستوریِ بحثْ اصلاً «بدیهی به نظر نمی‌رسد» و اتفاقاً از کارهای مهمِ فرگه و راسل روشن کردنِ همین مطلبی است که «بدیهی به نظر می‌رسد». جریان چیست؟ راسل نوشته است

> In seeking a definition of number, the first thing to be clear is what we may call the grammar of our inquiry. -p. 11

که یعنی اولین چیزی که باید روشن شود چیزی است که . . . .

پس از این، راسل به تشریحِ فرقِ عدد و چیزی به نامِ 'plurality' می‌پردازد که مترجم به آن «تعدد» می‌گوید. بعد، به روایتِ مترجم، راسل می‌گوید

> این نکته ممکن است ابتدایی و برای تذکر کم‌اهمیت جلوه کند؛ اما آن، مشکل حساس و ظریفی را برای فلاسفه، البته با چند استثناء حل کرده است. ـصص. ۲۲ـ۲۳.

از این جمله ظاهراً این‌طور مستفاد می‌شود که این نکته (یعنی فرقِ عدد و «تعدد») هرچند ممکن است ابتدایی به‌نظر آید، برای بسیاری از فیلسوفان مشکلِ حساس و ظریفی را حل کرده است ــ عجالتاً کاری با این موضوع نداریم که این مشکلِ حساس و ظریف چه بوده است. حالا اشکالِ این جمله در چیست؟ اشکالش این است که این تقریباً خلافِ چیزی است که راسل گفته است:

> This point may seem elementary and scarcely worth mentioning; yet it has proved too subtle for the philosophers, with few exceptions. -p. 11.

که گمان می‌کنم یعنی ممکن است به نظر برسد که این نکته ابتدایی است و ارزشِ ذکر کردن ندارد، اما معلوم شده است که برای فیلسوفان (غیر از تعدادِ کمی از آنها) بسیار غامض بوده است.

مطلبِ بعدیِ این فصل توضیحِ دو روشِ تعریفِ رده‌ها یا مجموعه‌هاست: اولی نام بردنِ اعضا، که این نوع تعریف را مصداقی (by extension) گویند، و دیگری تعریف با خاصیتی معین، که نامِ این‌یکی تعریفِ مفهومی (by intension) است [۴]. اگر بتوانیم برای مجموعه‌ای تعریفِ مصداقی بدهیم مسلماً در باره‌اش چیزهای زیادی می‌دانیم (مثلاً مجموعهٔ کسانی را در نظر بگیرید که در کشتنِ جان اِف. کندی دخیل بوده‌اند؛ احتمالاً هنوز صدها نفر هستند که سعی می‌کنند این مجموعه را ــ که برایش تعریفِ مفهومی دادیم ــ با مصداقهایش مشخص کنند). در مقابل، همان‌طور که در متنِ کتاب هم آمده، ممکن است در موردِ مجموعه‌ای (مثلاً مجموعهٔ ساکنانِ لندن) چیزهای زیادی بدانیم بی‌آنکه عملاً بتوانیم اعضایش را فهرست کنیم و برایش تعریفِ مصداقی بدهیم. احتمالاً خوانندهٔ ترجمهٔ فارسی از خواندنِ این جمله، بلافاصله بعد از مثالِ اهالیِ لندن، بسیار تعجب خواهد کرد:

> این مطالب برای نشان دادن آنکه تعریف توسط توسعه مستلزم داشتن آگاهی در بارهٔ یک رده نیست کافی می‌باشد، [. . .] ـ ص. ۲۴.

متنِ اصلی:

> This is enough to show that definition by extension is not *necessary* to knowledge about a class. -p. 12.

ترجمهٔ پیشنهادیِ من:

> این نشان می‌دهد که تعریفِ مصداقی برای آگاهی در موردِ رده‌ها لازم نیست.

نمونه‌ای دیگر از ترجمهٔ جمله‌های همین فصل. راسل می‌گوید

> It is this fact that a defining characteristic is never unique which makes classes useful; otherwise we could be content with [. . .]. -p. 14.

هم ساختِ جمله روشن است و هم معنای آن: نویسنده می‌گوید که درست به همین دلیلِ منحصر به فرد نبودنِ ویژگیهای تعریف‌کننده است که رده‌ها مفیدند؛ در غیر این صورت . . . . و ترجمهٔ منتشرشده:

> به این دلیل است که یک ویژگی تعریفی که رده‌ها را مفید می‌سازد هرگز منحصر به فرد نیست، زیرا در این صورت می‌توانستیم به [. . .] اکتفا کنیم. ـص. ۲۴

اینها مربوط بود به چهار صفحهٔ اولِ ترجمهٔ فصلِ II (این کتاب هجده فصل دارد). قبل از اینکه به چند مورد از فصلهای دیگر بپردازم بگذارید یک نمونهٔ جالبِ دیگر را هم بیاورم:

> در برخی کشورها، رابطهٔ تعداد زوجات یک به یک است، و در برخی دیگر می‌تواند یک به چند و احتمالاً در کشورهایی هم ممکن است چند به یک باشد. ـص. ۲۷.

خواننده‌ای که تا اینجای این نقد پیش آمده شاید زیاد تعجب نکند اگر بداند که «رابطهٔ تعداد زوجات» در اصلْ 'the relation of husband to wife' بوده است که قاعدتاً یعنی «نسبتِ شوهر به زن» (یا: «رابطه‌ی شوهر با زن»!) [۵]؛ آنچه تعجب‌آور است سانسورِ غیرضروری است که بر جمله اعمال شده، و حال آنکه راسل در اینجا نه دروغ نوشته و نه حرفِ راستی نوشته که نتوان بازگفت:

> درکشورهای مسیحی، نسبت شوهر به زن یک به یک است؛ در کشورهای مسلمان این نسبت یک به چند است؛ در تبت این نسبت چند به یک است. ـص. 15.

این فصل را رها کنیم.

برای توضیح فرقِ مقدارِ توابع و حدِ آنها، در فصلِ XI بخشی از ماجرای یک داستانِ هربرت جرج ولز* آورده شده است. در ترجمهٔ فارسی،

> قهرمان داستان فرد مجنونی است که بدون اطلاع وی، نیروی تجسم آرزوهایش، توسط یک پلیس مورد حمله قرار می‌گیرد، اما [...] ـص‌ص. ۱۳۵ـ۱۳۶.

راستش را بخواهید، شنیده بودم که داستانهای ولز علمی‌ـتخیلی است، اما با خواندنِ این جمله دیدم که اصلاً به کلّی سورئالیستی است؛ فکرش را بکنید: نیروی تجسمِ آرزوهای فردی، آن‌هم یک فردِ مجنون، آن‌هم بدون اطلاعِ وی، توسط یک پلیس موردِ حمله قرار می‌گیرد .... متأسفانه مراجعه به اصلِ کتابِ راسل تصوراتِ مرا به هم ریخت:

> The hero of the story, who possessed, without his knowledge, the power of realising his wishes, was being attacked by a policeman, but [...] -p. 114.

ظاهراً راسل می‌خواسته بگوید که در داستانِ ولز، پلیسی به قهرمانِ داستان ــ که، بدونِ اینکه خودش بداند، قادر به محقق کردنِ آرزوهایش است ــ حمله می‌کند .... [۶]

در فصلهای XVI و XVII راسل به حرفِ معرفهٔ 'the' می‌پردازد. در ابتدای نخستینِ این دو فصل می‌نویسد:

> It may be thought excessive to devote two chapters to one word, [...] -p. 167.

که، ظاهراً، یعنی

> ممکن است اختصاصِ دو فصل به یک کلمه زیادی به نظر برسد، [...].

ترجمهٔ مترجمِ فارسی چنین است:

> ممکن است با قضاوت عجولانه فکر شود که دو فصل را به یک کلمه اختصاص داده‌ایم، [...] ـص. ۱۹۵.

اما، حتی اگر «عجولانه» هم «قضاوت» نشود، راسل واقعاً دو فصل را به یک کلمه اختصاص داده است!

همین فصلِ XVI، با عنوانِ «توصیفات»، از جالبترین فصلهای کتاب است، و، سپاس خدای را، فصلی است که فارسی‌زبانانِ ناآشنا به انگلیسی هم می‌توانند از آن فایده برند [۷]. با کمی توضیح در بارهٔ (ترجمهٔ فارسیِ) این فصل حرفم را تمام می‌کنم.

* H.G. Wells (۱۸۸۶ـ۱۹۴۶)

این دو جمله را بخوانید:

(۱) جرجِ چهارم نمی‌دانست که اسکات نویسندهٔ وِیورلی است [۸].

(۲) اسکات نویسندهٔ وِیورلی است.

هر دوی اینها درست‌اند. اما آیا اگر اسکات همان نویسندهٔ وِیورلی است، درستیِ (الف) مستلزمِ این است که جرجِ چهارم نمی‌دانسته که اسکات اسکات است؟ معلوم است که می‌دانسته. نگرهٔ توصیفهای راسل برای این‌گونه مشکلات (و مشکلاتِ مربوط به صدقِ جمله‌هایی مثل «شاهِ فعلیِ فرانسه طاس است» [۹]) راه‌حلی پیش می‌نهد. مطابقِ تحلیلِ راسل، (ب) به این معناست که شخصِ منحصر به فردی هست که نویسندهٔ وِیورلی است، و او همان اسکات است [۱۰]. جوابِ راسل به معمای مطرح‌شده این است که جمله‌ای که شاملِ توصیفی باشد، با جملهٔ حاصل از جایگزین کردنِ توصیف با اسمی خاصِ یکی نیست، حتی اگر این اسمِ خاص، اسمِ همان چیزی باشد که توصیفِ مندرج در جمله وصفِ آن است. این ترجمهٔ منتشرشده از جمله‌ای در این باره است:

> یک گزاره شامل یک توصیف با آنچه که آن گزاره وقتی یک اسم در آن جایگزین شود به دست می‌آید یکی نیست، حتی اگر این اسم همان شئ را به عنوان توصیف کردن توصیف ذکر کند. ـص. ۲۰۳.

و باز، به نظرِ راسل، گزارهٔ «نویسندهٔ وِیورلی اسکاتلندی بوده» [۱۱] متضمنِ اینهاست:

> (1) "x wrote *Waverley*" is not always false;
>
> (2) "if x and y wrote *Waverley*, x and y are identical" is always true;
>
> (3) "if x wrote *Waverley*, x was Scotch" is always true. -p. 177.

که ترجمه‌اش از من هم ساخته است:

> (۱) «x وِیورلی را نوشته است» همیشه نادرست نیست؛
>
> (۲) «اگر x و y وِیورلی را نوشته‌اند، x و y یکی‌اند» همیشه درست است؛
>
> (۳) «اگر x وِیورلی را نوشته، x اسکاتلندی بوده» همیشه درست است.

اینها را نوشتم که از شما بخواهم که (با هم و) با ترجمهٔ فارسیِ منتشرشده مقایسه‌شان کنید:

> (۱) «x، وورلی را نوشت» همیشه درست نیست؛
>
> [...]
>
> (۳) «اگر x، وورلی را نوشت، x اسکاچ بود» همیشه درست است. ـ ص. ۲۰۶

بهتر است این بحث را ادامه ندهم.

حواشی

۱. در این موارد مقالهٔ کلاسیکِ گودل خواندنی است:

Kurt Gödel. Russell's Mathematical Logic (1944), *Kurt Gödel Collected Works*, vol. II (edited by Solomon Feferman *et al.*), Oxford University Press, New York, 1990; pp. 119-141.

مراجعه به این کتاب هم مفید است:

Francisco A. Rodriguez-Consuegra, *The Mathematical Philosophy of Bertrand Russell: Origins and Developments*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.

۲. نگاه کنید به

Warren Goldfarb, In Memoriam: George Stephen Boolos: 1940-1996, *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 2, no. 4 (Dec. 1996), pp. 444-447.

۳. در ZFC، مزیتِ این «تعریف» بر تعریفِ استانده (با استفاده از اعدادِ ترتیبی) در بی‌نیازیِ آن به اصلِ موضوعِ انتخاب است؛ اشکالش این است که، غیر از حالتی که $A = \varnothing$، اصلاً در ZF ثابت می‌شود که چنین $\overline{\overline{A}}$ای وجود ندارد! با این حال، با شیوه‌ای که به «شگردِ اسکات» معروف است می‌توان در تعریفْ تصرفی کرد تا وجودِ $\overline{\overline{A}}$ را اصولِ ZF تضمین کنند ــ مثلاً نگاه کنید به

Frank R. Drake, *Set Theory: An Introduction to Large Cardinals*, North-Holland, Amsterdam, 1974.

۴. در بارهٔ خطای شایعِ برگرداندنِ 'extension' در متونِ منطقی به «توسیع» و امثالِ آن در «ریاضیات به زبانِ سعدی، I» توضیح داده‌ام (خبرنامهٔ انجمن ریاضی ایران، ۱۸، ۳ (اردیبهشتِ ۱۳۷۵)، صص. ۱۹ـ۲۱). به ترجمهٔ منتشرشده توجه کنید: «تعریفی که از شمردن منشاء می‌گیرد یک تعریف توسط 'توسعه' نامیده می‌شود، و تعریفی که خاصیت معینی را ذکر می‌کند تعریفی توسط 'تمرکز' نام دارد.» (ص. ۲۳).

۵. و اصلاً تعداد زوجات چگونه می‌تواند «رابطه» باشد؟

۶. یا شاید هم «[. . .] لازم نیست که همیشه در تأکید تفاوت ملالفتی [بخوانید ملاتّقطی] باشیم» (ترجمهٔ فارسی، ص. ۸۱).

۷. از این فصل ترجمه‌ای منتشر شده است: «توصیفها»، ترجمهٔ سیدمحمدعلی حجتی، ارغنون، سالِ دوم، شمارهٔ ۷ و ۸ (پاییز و زمستانِ ۱۳۷۴)، صص. ۱۶۳ـ۱۴۹. [شاید برای این مفهومِ خاصِ واژهٔ 'description'، اصطلاحِ «وصفِ خاص» مناسبتر از «توصیف» باشد.]

۸. جرج حق داشته این را نداند، زیرا اسکات دِیورلی را با نامِ مستعار منتشر کرده بود. [در ضمن، این اسکات (۱۷۷۱ـ۱۸۳۲) را با کسی (Dana S. Scott، متولدِ ۱۹۳۲) که در یادداشتِ ۳ نامش آمده اشتباه نکنید!]

۹. مشکلْ این است که، دست‌کم در نگاهِ اول، باید حداقل یکی از دو جملهٔ «شاهِ فعلیِ فرانسه طاس است» و «شاهِ فعلیِ فرانسه طاس نیست» درست باشد، حال آنکه فرانسه فعلاً شاه ندارد.

۱۰. و دو جملهٔ یادداشتِ قبل، هرکدام یک مقدمهٔ «شخصِ منحصر به فردی هست که شاهِ فعلیِ فرانسه است» دارند، و لذا هر دو غلط‌اند.

۱۱. این جمله هم درست است.

* kaave@vax.ipm.ac.ir.

زندان را از بسیاری جهاتْ بسیار خوشایند یافتم. هیچ مشغله‌ای نداشتم، هیچ تصمیمِ سختی نمی‌بایست بگیرم، هیچ نگرانِ ملاقات کنندگان نبودم، هیچ وقفه‌ای در کارم نبود. مقدارِ زیادی مطالعه کردم؛ یک کتاب، مقدمه بر فلسفهٔ ریاضی، . . . نوشتم، و کار روی تحلیلِ ذهن را شروع کردم. همبندانم برایم نسبتاً جالب بودند؛ به‌نظرم می‌رسید که از لحاظ اخلاقی به‌هیچ‌وجه پایینتر از بقیهٔ جامعه نیستند، گرچه روی‌هم‌رفته از نظرِ زیرکی در سطحی پایینتر از معمول قرار داشتند، که این را گرفتارشدنشان نشان می‌داد.

* * *

نقل از:

Bertrand Russell, *Autobiography*, reprinted by Routledge, London (1991) 256.

دیدگاه

مطالب این بخش بیانگر آرای نویسندگان آنهاست و ضرورتاً مبیّن دیدگاه نشر ریاضی نیست.

جبر هومولوژیک یا بازی موش و پنیر

قافله بس رفت از این راه، ایک کس نشد آگاه که مقصد کجاست
پروین اعتصامی

حدود ۹ سال پیش بود که درس جبر هومولوژیک (۱) را به‌عنوان یکی از دروس دورهٔ دکتری خود اختیار کردم (با توجه به اینکه دورهٔ کارشناسی ارشد خود را در گرایش هندسه‌ـتوپولوژی به اتمام رسانده بودم و در دورهٔ دکتری، در گرایش جبر جابه‌جایی پذیرفته شده بودم، درس فوق یکی از دروس اصلی من محسوب می‌شد). قبل از آن زمان نیز از افراد بسیاری در مورد اهمیت این درس شنیده بودم و لذا با قرض گرفتن دوگوش و دو چشم اضافی سر کلاسِ این درس رفتم. در اولین جلسهٔ درس، استاد محترم به دانشجویان کلاس توصیه کردند که برای جلسات آینده قلمهایی با رنگهای متنوع همراه داشته باشند. با توصیهٔ فوق (که در آن مقطع تحصیلی عادی به‌نظر نمی‌رسید) توجه بنده (و احتمالاً دیگر دانشجویان) به این درس چند صد برابر شد. پس از چندی جبر هومولوژیک (۱) عبارت شد از تصویرهایی شامل خطوط رنگارنگ (بسیار زیبا) و متقاطعی که همواره هَدَف به‌دست آوردن مسیر مناسبی (و گاهی تنها مسیر ممکن) بین نقاط مختلفِ تصویر بود. این موضوع مرا به یاد مسابقه‌ای در مجلات مخصوص کودکان و نوجوانان می‌انداخت که یکی از قسمتهای ثابت و همیشگی آنها، تصویری متشکل از مسیرهای متقاطعی بود که یک موش در ابتدای تصویر و یک تکه پنیر در انتهای آن قرار داشت و هدف پیدا کردن مسیر مناسبی (و گاهی تنها مسیر ممکن) برای رسیدن موش به پنیر بود. البته در آن‌گونه مسابقات، پس از یافتن مسیر مناسب برای جناب موش، کار به اتمام می‌رسید و باید منتظر شمارهٔ بعدی مجله می‌ماندیم تا مهارت خود را در مسابقهٔ بعدی به نمایش بگذاریم. ولی در مورد جبر هومولوژیک (۱)، اطمینان داشتم که هَدَف تنها یافتن مسیرهای مناسب نیست و لذا بی‌صبرانه در انتظار ادامهٔ کار بودم. امّا هر چه به اواخر ترم نزدیکتر می‌شدیم، تعداد خطوط رنگارنگ متقاطع در یک تصویرْ بیشتر (و بالطبع زیباتر) و اطمینان فوق در بنده کم‌رنگ‌تر (و بالطبع نازیباتر) می‌شد. در ابتدا از تصاویری که شامل سه نقطه بود شروع کردیم و سپس تعداد نقاط و خطوط اضافه شد تا جایی که به هیولاهای رنگارنگی (و زیبایی) رسیدیم که برای به‌دست آوردن مسیر مناسب در آنها لازم بود تا چند جلسه از زمانِ درس را صرف آن کنیم.

سؤالی که در ذهن بنده (و شاید دیگر دانشجویان) پدید آمد، آن بود که هدف از این درس چیست (ناگفته نماند که پس از گذراندن دروس جبر جابه‌جایی (۲) و جبر هومولوژیک (۲) آثاری از کاربرد روشهای هومولوژیک در جبر جابه‌جایی ملاحظه شد.)

پس از چند سال به خواست، خداوند متعال و کمکهای (ناخواسته!) مسؤولانِ گرانقدر، برای ادامهٔ تحصیل راهی دیار فرنگ شدم. در آنجا فاکسبی (Foxby) را به‌عنوان استاد راهنمای خود انتخاب کردم و پایان‌نامهٔ دکتری خود را در مورد استفاده از روشهای هومولوژیک در جبر جابه‌جایی تهیه نمودم. در ضمنْ مدت دو ترم نیز در آن دانشگاه (کپنهاگ) درسهایی با عناوین «حلقه و مدول» و «جبر آبَر هومولوژیک» تدریس کردم. اکنون نیز بیش از سه سال است که به وطن بازگشته و مشغول تدریس دروس جبر و از جمله درس جبر هومولوژی (۱) درگروه ریاضی دانشگاه تهران هستم.

اکنون با توجه به مقدمات فوق و با توجه به اینکه درس جبر هومولوژیک (۱) یکی از دروسی است که معمولاً دانشجویان دورهٔ کارشناسی ارشد ریاضی (محض) آن را اختیار می‌کنند و همچنین این قبیل دانشجویان معمولاً موفق به اخذ دروس پیشرفته‌تر از قبیل جبر جابه‌جایی (۲) و جبر هومولوژیک (۲) در مقطع کارشناسی ارشد نمی‌شوند، پیشنهادهای زیر را در مورد این درس مطرح می‌کنم.

از آغاز دههٔ ۱۹۵۰ روشهای هومولوژیک از مهمترین ابزارها در شاخه‌های مختلف ریاضیات بوده است. استفاده از این روشها، مخصوصاً در موضوعات «جبری» مانند هندسهٔ جبری، توپولوژی جبری و جبر جابه‌جایی محسوستر است. لذا در ارائهٔ این درس (جبر هومولوژیک (۱)) باید توجه داشت که هدف ما استفاده از آن در چه شاخه‌ای است. به‌عنوان مثال من می‌خواهم از روشهای هومولوژیک در جبر جابه‌جایی استفاده کنم و لذا در ارائهٔ این درس سعی می‌کنم قدمهای ابتدایی استفاده از روشهای هومولوژیک در جبر جابه‌جایی را به دانشجویان نشان دهم. مثلاً دسته‌بندی حلقه‌های منظم توسط بُعدهای هومولوژیک (حلقهٔ موضعی و نوتری ($\mathfrak{M}$ و R) یک حلقهٔ منظم است اگر و فقط اگر هر Rـمدول دارای بُعدْ پروژکتیو متناهی باشد) که از جملهٔ مهمترین کارهای آوسلندر (Auslander) و بوکسباوم (Buchsbaum) از یک طرف و سِرْ (Serre) از طرف دیگر است. (برای نگاهی عمیقتر به این موضوع می‌توانید به [۱] مراجعه فرمایید.)

برای رسیدن به هدف فوق باید در درس جبر پیشرفتهٔ مدولهای پروژکتیو و انژکتیو به‌طور کامل تدریس شود و وجود یا عدم وجود روکش پروژکتیو (projective cover) و پوشش انژکتیو (injective envelop) برای مدولها نیز مطرح شود تا در جبر هومولوژیک (۱) وقت بیشتری برای قسمتهای دیگر باقی بماند. به‌علاوه اگر هدفْ معرفی روشهای هومولوژیک در جبر جابه‌جایی باشد، بهتر آن است (و شاید لازم است) که دانشجویان قبلاً درس جبر جابه‌جایی یک را گذرانده باشند تا با مدولهای یکدست (flat)، موضعی‌سازی و حلقه‌های منظم آشنا باشند.

سیامک یاسمی، دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران
yassemi@khayam.ut.ac.ir, yassemi@rose.ipm.ac.ir

مرجع

۱. سیامک یاسمی، «روشهای هومولوژیک در جبر جابه‌جایی»، آمادهٔ انتشار.

از انتشارات گروه، ریاضی، آمار، و کامپیوتر

مرکز نشر دانشگاهی

آشنایی با اقتصادسنجی
اسکار لانگه
ترجمهٔ محمدحسین طوفانی نژاد

آشنایی با تاریخ ریاضیات (دوجلد)
هاورد و. ایوز
ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل

آشنایی با تحقیق در عملیات (جلداول)
حمدی طه
ترجمهٔ محمد باقر بازرگان

آشنایی با توپولوژی و آنالیز نوین
ج. ف. سیمونز
ترجمهٔ اسدالله نیکنام

آشنایی با دانش کامپیوتر
توماس بارتی
ترجمهٔ ابراهیم نقیب‌زادهٔ مشایخ،
داریوش موسوی‌زاده

آشنایی با فرایندهای تصادفی
هوئل، پورت، استون
ترجمهٔ محمدحسین افقهی

آشنایی با منطق ریاضی
هربرت ب. اندرتون
ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی،
محمدرجبی طرخورانی

آشنایی با نظریهٔ اعداد
ویلیام و. آوامز، لری، جوئل گولدشتین
ترجمهٔ آدینه محمد نارنجانی

آشنایی با نظریهٔ گروهها
والتر لدرمن
ترجمهٔ محمدحسین بیژن‌زاده

آمار ریاضی
جان فروند، رانلد والپول
ترجمهٔ علی عمیدی، محمد قاسم وحیدی اصل

آمار کاربردی
جان نتر، ویلیام واسرمن، ویتمور
ترجمهٔ علی عمیدی

آمار مقدماتی (دو جلد)
تامس اچ. ووناکات، رانلد جی. ووناکات
ترجمهٔ محمدرضا مشکانی

آمار ناپارامتری کاربردی
کنوور
ترجمهٔ سیدمقتدی هاشمی پرست

آموزش تدریس ریاضیات دبیرستانی
اتو س. بسلر، جان ر. کولب
ترجمهٔ جواد همدانی‌زاده

آنالیز عددی مقدماتی به شیوهٔ الگوریتمی
سموئل د. کونت، کارل دوبور
ترجمهٔ سراج‌الدین کاتبی

آنالیز مختلط و کاربردهای آن
ریچارد ا. سیلورمن
ترجمهٔ علی عمیدی، خلیل پاریاب

استنباط آماری ناپارامتری
جین دیکنسن گیبنز
ترجمهٔ عبدالرحیم شهلایی، علی عمیدی

اصول آماری در طرح آزمایشها (دو جلد)
ب. واینر
ترجمهٔ زهرهٔ سرمد، مهتاش اسفندیاری

اصول آنالیز حقیقی
ربرت جی بارتل
ترجمهٔ جعفر زعفرانی

اعداد مختلط
والتر لدرمان
ترجمهٔ علی‌اکبر مهرورز

برنامه‌نویسی سیستم برای کامپیوترهای شخصی (PC) (دوجلد)
مایکل تیشر
ترجمهٔ امیر صادقی

تابع گاما
امیل آرتین
ترجمهٔ سعید ذاکری

تحقیقی در آثار ریاضی ابوریحان بیرونی (تحریری نوین از بیرونی نامه)
ابوالقاسم قربانی

تحلیل چندمتغیره
ماردیا و کنت
ترجمهٔ محمدمهدی طباطبایی

توابع متغیر مختلط
د. ا. تال
ترجمهٔ مجید محمدزاده

توپولوژی
کلاؤس ینیش
ترجمهٔ ارسلان شادمان

توپولوژی، نخستین درس
جیمز ر. مانکرز
ترجمهٔ یحیی تابش، ابراهیم صالحی،
جواد لآلی، نادر وکیل

جبر خطی
مایکل اونان
ترجمهٔ علی‌اکبر محمدی حسن‌آبادی

جبر خطی
چارلز کرتیس
ترجمهٔ نوروز ایزد دوستدار،
بیژن شمس، اسدالله کارشناس

جبر خطی
کنت هافمن، ری کنزی
ترجمهٔ جمشید فرشیدی

جبر ماتریسها برای علوم زیستی و کاربردهای آماری آن
س. سیرل
ترجمهٔ جلال داودزاده

حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد اول)
تام م. آپوستل
ترجمهٔ علیرضا ذکائی، مهدی رضائی دلفی،
علی‌اکبر عالم‌زاده، فرخ فیروزان

حساب دیفرانسیل وانتگرال (برای رشته‌های بازرگانی، زیست‌شناسی و علوم اجتماعی)
د. ج. کرودیس، س. م. شلی، ب. و. ویلر
ترجمهٔ ابوالقاسم لاله

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی
(دو جلد، جلد اول در دو قسمت)
جورج توماس، راس فینی
ترجمهٔ مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، علی کافی

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی
(دو جلد، هر جلد در دو قسمت)
لوئیس لیتهلد
ترجمهٔ مهدی بهزاد، محسن رزاقی، سیامک کاظمی، اسلام ناظمی

روشهای آنالیز حقیقی
ریچارد گولد برگ،
ترجمهٔ محمدعلی پورعبدالله‌نژاد، باقر نشوادیان

روشهای بنیادی اقتصاد ریاضی
آلفاسی. شیانگ
ترجمهٔ مجید کوپاهی

ریاضیات در علوم زیستی (جلد اول)
ادوارد باچلت
ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی، ابوالقاسم شریفیان

ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی از دیدگاه کاربردی (جلد اول)
رالف گریمالدی
ترجمهٔ علی عمیدی

ریاضیات مهندسی پیشرفته
اروین کرویت‌سیگ
ترجمهٔ عبدالله شیدفر، حسین فرمان

سری فوریه
ی. ن. اسندون
ترجمهٔ بتول جذبی

طراحی منطقی دستگاههای رقمی
آرتور د. فریدمن
ترجمهٔ فرهاد صاحبان، شهلا طباطبایی

علم و هنر شبیه‌سازی سیستمها
رابرت شانون
ترجمهٔ علی‌اکبر عرب‌مازار

کاشانی نامه (احوال و آثار غیاث‌الدین جمشید کاشانی)
ابوالقاسم قربانی

مبانی اقتصادسنجی
یان کمتا
ترجمهٔ کامبیز هژبر کیانی

مبانی ریاضیات
ایان استیوارت، دیوید تال
ترجمهٔ محمد مهدی ابراهیمی

مبانی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
ایان اسندون
ترجمهٔ مرتضی شفیعی موسوی، علی کدخدایی

مبانی نظریهٔ تصمیم
برنارد و. لیندگرن
ترجمهٔ عبدالرحمن ستارزادهٔ آذری، علی عمیدی

مبانی نظریهٔ صف
دانلد گراس، کارل م. هریس
ترجمهٔ غلامحسین شاهکار

متغیرهای مختلط و کاربرد آنها
روئل و. چرچیل، جیمز و. براون، راجر ف. ورهی
ترجمهٔ امیر خسروی

معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها
جرج ف. سیمونز
ترجمهٔ علی‌اکبر بابائی، ابوالقاسم میامئی

معماری سیستمهای کامپیوتری
م. موریس مانو
ترجمهٔ امیر صادقی

مفاهیم و روشهای آماری (دو جلد)
گوری ک. باتاچاریا، ریچارد ا. جانسون
ترجمهٔ مرتضی ابن شهرآشوب، فتاح میکائیلی

مقدمات معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی
ویلیام ا. بویس، ریچارد ک. دیپریما
ترجمهٔ محمدرضا سلطانپور، بیژن شمس

نخستین درس در جبر مجرد
جان ب. فرالی
ترجمهٔ مسعود فرزان

نخستین درس در جبر مجرد
ف. ج. هیگینز
ترجمهٔ محمدرضا رجب‌زادهٔ مقدم

نخستین گامها در آنالیز عددی
هوسکینگ، جویس، ترنر
ترجمهٔ اسماعیل بابلیان، میرکمال میرنیا

نظریهٔ آمار
برنارد م. و. لیندگرن
ترجمهٔ ابوالقاسم بزرگ‌نیا

نظریهٔ اعداد
ت. ه. جکسن
ترجمهٔ اکبر حسنی

نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها
پ. ر. هالموس
ترجمهٔ عبدالحمید دادالله

نظریهٔ گالوا
پاولمن مورتی و همکاران
ترجمهٔ محمدتقی دیبایی

نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربرد آنها
شووینگ تی. لین، یو-فنگ. لین
ترجمهٔ عمید رسولیان

نظریهٔ مقدماتی احتمال و فرایندهای تصادفی
کان لای چانگ
ترجمهٔ ابوالقاسم میامئی، محمدقاسم وحیدی اصل

نظریهٔ و کاربردهای آنالیز عددی
ج. م. فیلیپس، پ. ج. تیلر

واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار
انجمن ریاضی ایران با همکاری مرکز نشر دانشگاهی

هندسهٔ جبری مقدماتی
مایلز رید
ترجمهٔ رحیم زارع نهندی

هندسهٔ دیفرانسیل مقدماتی
بارت اونیل
ترجمهٔ بیژن شمس، محمدرضا سلطانپور

هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی
ماروین جی. گرینبرگ
ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها

NASHR-E RIYĀZI

Volume 9, Number 1, April 1998

Nashr-e Riyāzi **is a Persian-language, expository mathematics journal published biannually (in April and October) by Iran University Press.**

Annual subscription rates (including airmail postage) are: Middle East £ 18, Europe & Asia £ 20, North America & Far East £ 25.

For more information write to Iran University Press, 85 Park Avenue, Tehrān 15134, Iran, or contact (nashriaz@vax. ipm. ac. ir).

CONTENTS

Notes & News

Articles

Brouwerian intuitionism, M. ARDESHIR

* Brouwer's topology, D. VAN DALEN
* Intuitionism and formalism, L.E.J. BROUWER
* The war of the frogs and the mice, or the crisis of the *Mathematische Annalen*, D. VAN DALEN
* Unique factorization, P. SAMUEL
* Misteaks (excerpts from *The way I remember it*, by W. RUDIN)

Problems

* Four problems from *Mathematical circles (Russian experience)*, Y. TĀBESH

Book Reviews

* *Brouwer's intuitionism*, by W.P. van Stigt (reviewed by C. SMORYŃSKY)
* *Brouwer's intuitionism*, by W.P. van Stigt (reviewed by W. RUITENBURG)
* On the sources of my book *Moderne Algebra*, B. L. VAN DER WAERDEN
* A Persian translation of Russell's *Introduction to mathematical philosophy* (reviewed by K. LĀJEVARDI)

Opinion

* An asterisk indicates that the article was originally published elsewhere; complete address of the original article appears at the end of the article.

ISSN: 1015-2857

در شمارهٔ آینده می‌خوانید

دو مقاله در هندسهٔ ناجابه‌جایی	ویدا میلانی و کامران کاویانی
نظریهٔ ریاضی ارتباطات	کلود شانون
شکست فوبینی	میلنر