نیرنگ

سال ۷، شمارهٔ ۲

شمارهٔ پیاپی: ۱۴

بسم‌الله الرحمن الرحیم

نشر ریاضی

مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

شمارهٔ ۸۵ خیابان پارک خیابان دکتر بهشتی، تهران ۱۵۱۳۴

بهای این شماره ۲۵۰۰ ریال؛ حق اشتراک سالانه برای داخل کشور ۵۰۰۰ ریال.
(برای دانشجویان با ۳۰٪ تخفیف)

وجه اشتراک به حساب شمارهٔ ۹۰۰۰۹ بانک ملی شعبهٔ خیابان پارک تهران به نام مرکز نشر دانشگاهی واریز شود.

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر شش ماه یک بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجّه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی پژوهان فارسی زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چهارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبک مقاله‌های چاپ‌شده در *نشر ریاضی* باشد. به همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حک و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ شدهٔ در *نشر ریاضی* باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۷، شمارهٔ ۲

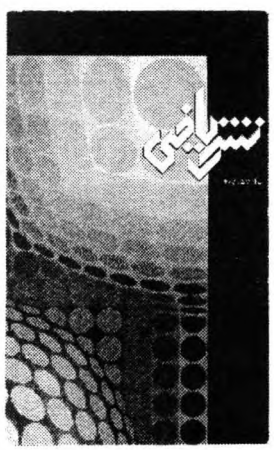
تاریخ انتشار: مرداد ۱۳۷۵

شمارهٔ پیاپی: ۱۴

nashriaz@rose.ipm.ac.ir

مدیر مسؤول: سیاوش شهشهانی

فهرست



روی جلد

تابلویی از وازارلی، نقاش فرانسوی مجاری‌تبار به مناسبت درج مقالهٔ «وقتی که بیضیها دایره به‌نظر می‌رسند ...»

گزارش

در میان همهٔ علوم و فنون امروزی قطعاً هیچ رشته‌ای به اندازهٔ ریاضیات مشکلِ «روابط عمومی» ندارد. ریاضیدانان معمولاً نمی‌توانند دستاوردهای تحقیقاتی جدید خود را به زبان عامه‌فهم یا حتی به زبان قابل درک، برای ریاضیدانانِ غیر متخصص در مبحث مورد نظر عرضه کنند و هیجانی را که بر اثر کشفیات جدید به‌خودشان دست می‌دهد، به دیگران منتقل سازند. این ناتوانی موجب می‌شود که زمینهٔ حمایتهای اجتماعیِ لازم برای رشد و گسترش این رشته به آسانی فراهم نشود و همواره سوءتفاهم و خلأ ارتباطی میان جامعهٔ ریاضیکاران و جهان خارج از آن وجود داشته باشد. این در حالی است که از یک‌سو ریاضیدانان نمی‌توانند نسبت به ضرورت پشتوانهٔ اجتماعی، چه به‌صورت مادی و چه به‌صورت معنوی، بی‌اعتنا باشند، و از سوی دیگر، در جامعه به‌طور کلی این احساس وجود دارد که ریاضیات یک رکن اساسی پیشرفت و تکنولوژی است.

این جدایی و بیگانگی از کجا سرچشمه می‌گیرد؟ نخستین عاملی که به ذهن می‌رسد مجرد بودن اشیاء ریاضی است. هر چند مفاهیم ریاضیات سرچشمهٔ طبیعی دارند و جریانهای اصلی ریاضیات از پشتوانهٔ مستحکم تاریخی و غنای ذاتی غیر قابل انکار برخوردارند، لیکن اغلب مفهومهایِ مورد بحث ریاضیدانان چند گام از ملموسترین تجربیات روزمره فاصله دارند زیرا حاصل چند درجه تجرید و انتزاع‌اند. بی‌شک این واقعیت بخشی از مسأله است، یعنی ماهیت ریاضیات باعث می‌شود عرضهٔ آن به عموم‌دشوارتر از سایر رشته‌ها باشد. ولی به گمان ما این همهٔ مسأله نیست. حتی در رشته‌های تجربی مانند زیست‌شناسی، شیمی و فیزیک، امروزه بیشتر تحقیقات، گامها از تجربیات روزمره و آماتوری فاصله گرفته‌اند. بااین‌حال بخشی از کوشش تحقیقاتی در این رشته‌ها مصروف تبدیل کردن محصول علمی محض به محصول قابل استفاده برای عموم می‌شود، یا دست‌کم پژوهشگران این رشته‌ها بیش از ریاضیدانان تلاش می‌کنند که با استمداد از زبان استعاری و غیرانتزاعی قشری وسیع از مردم را با آخرین پیشرفتهای رشته‌شان آشنا کنند و در هیجان آن سهیم سازند. برعکس، در ریاضیات به نظر می‌رسد که فاصلهٔ قله‌های رفیع تجرید ریاضی از سطح خاک به حدی است که کوه‌پیمایان ریشه‌های خاکی خود را به فراموشی سپرده‌اند. شاید بی‌مورد نباشد این هشدار آموزنده را تکرار کنیم که تنها راه دست یافتن به قله‌های جدید، پایین آمدن از قله و عبور از دره‌هاست. این وظیفهٔ ریاضیدانان است که هم با هدف استمرار سلامت و پویایی دانش خود، و هم برای ایجاد تفاهم بیشتر با جامعه، کوشش بیشتری در شناساندن تحقیقات و اکتشافات ریاضی و نیز تبیین جایگاه فرهنگی و عملی ریاضیات مبذول کنند.

در راستای تحقق این هدف یعنی تقویت ارتباط با جامعه است که اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان، با پشتیبانی یونسکو، سال ۲۰۰۰ میلادی را «سال جهانی ریاضیات» اعلام کرده و از هم‌اکنون فعالیتهای بسیاری را برای تدارک مراسم و برنامه‌های ویژه آغاز کرده است. دیوید مامفرد (Mumford)، رئیس اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان، در مصاحبه‌ای که در همین صفحات خواهید خواند، بر لزوم استفادهٔ هوشمندانه از این فرصت برای تلطیف چهرهٔ اجتماعی ریاضیات تأکید می‌ورزد.

در کشور خودمان در سالهای اخیر شاهد حرکتهای ثمربخشی در جهت اشاعه و ترویج ریاضیات بوده‌ایم. شرکت در المپیاد جهانی ریاضیات و موفقیتهای تیمهای دانش‌آموزی ما در آن بی‌شک نقش مهمی در ایجاد شور و انگیزه در میان جوانان داشته است. انتشار مجلات ادواری و کتابهای ریاضی غیر درسی و نیز برگزاری دوره‌ها و کنفرانسهای گوناگون همه موجب شده‌اند که ریاضیات بیش از گذشته در جامعه مطرح شود.

رویداد جالب توجه اخیر، برگزاری نخستین «جشنوارهٔ ریاضیات» در روزهای ۱۵ تا ۱۷ اردیبهشت‌ماه در دانشگاه تهران بود. این جشنواره که تا حدودی در رسانه‌های همگانی هم انعکاس یافت، در مجموع حرکت موفقی بود در جهت تبلیغ ریاضیات در جامعه. روز اول جشنواره با مراسمی در بزرگداشت دوران اولیه و متقدمان ریاضیات در دانشگاه تهران ــ دانشگاه مادر ــ و نیز بازگویی خاطراتی چند از آن دوران شروع شد و با میزگردی در مورد راههای اعتلای ریاضیات درکشور به پایان رسید. روز دوم قرار بود به «ریاضیات و پژوهش» اختصاص داشته باشد ولی در واقع مجموعه‌ای بود ازگفتنیهایی در مورد وضع ریاضیات درکشور، ابزارهای تحقیقاتی و مسائل دیگر. موضوع روز سوم، آموزش ریاضیات در دبیرستان بود و جمع کثیری از دبیران و دانش‌آموزان در جلسات حضور داشتند. اگر بعضی ناهماهنگیها در برنامه‌ریزی و موضوع سخنرانیها رخ نداده بود، روز سوم ممکن بود به‌عنوان یکی از پرشورترین گردهماییهای ریاضی کشورمان در خاطره‌ها ثبت شود. ولی در هر صورت، «جشنوارهٔ ریاضیات» رویدادی میمون

بود که امیدواریم در آینده شاهد تداوم و گسترش آن باشیم.

* * * * * *

بیست و هفتمین کنفرانس ریاضی کشور از ۸ تا ۱۱ فروردین‌ماه ۱۳۷۵ در دانشگاه شیراز برگزار شد. گزارش مبسوطی از این کنفرانس در خبرنامهٔ انجمن ریاضی ایران (سال ۱۸، شمارهٔ ۲، اردیبهشت ۱۳۷۵) درج شده است. در این کنفرانس تجلیل ویژه‌ای از خدمات آقای دکتر منوچهر وصال استاد ریاضیات و یکی از بنیانگزاران دانشگاه شیراز به عمل آمد. دکتر وصال که به‌ندرت از خود سخن می‌گوید در شمارهٔ فوق‌الذکر خبرنامهٔ انجمن ریاضی شمه‌ای از خاطرات خود را نقل کرده است.

* * * * * *

و اما چند کلمه‌ای در حاشیهٔ نمایشگاه کتاب (تهران، ۱۹ تا ۲۸ اردیبهشت‌ماه ۱۳۷۵). بی‌نظمیهای نمایشگاه سال قبل باعث شد که امسال عده‌ای برای حفظ جان و مال خود! از نمایشگاه دوری گزینند. برخی ناشران عمدهٔ خارجی نیز به دلایل دیگر در نمایشگاه شرکت نکردند و تعدادی غرفه‌ها بسته باقی ماند. امسال قول داده بودند برای «اهل قلم» یا «پدیدآورندگان کتاب» تسهیلات ویژه‌ای قائل شوند و کارتهایی هم با خوشرویی و بدون استنطاق برایشان صادرکردند ولی ظاهراً تنها امتیاز این کارتها جواز شرکت در مصاحبهٔ تلویزیونی برای تعریف و تمجید از نمایشگاه بود، زیرا اهل قلم، که میانگین سنی بالایی دارند، عملاً در صفهای خرید کتاب حریف کارپردازان قبراق دانشگاهها و دیگر جوانان کاراته‌باز نبودند. جای تأسف است که دانشگاههای ما باید از روی استیصال، برای خرید کتاب به چنین نمایشگاهی هجوم آورند. طبق عرف، انتخاب و خرید کتاب در مؤسسات علمی باید از استمرار، برنامه‌ریزی و دقت کارشناسانه برخوردار باشد و این مؤسسات توانایی حرفه‌ای و قدرت مالی لازم برای انتخاب و خرید کتاب را در بدو انتشار داشته باشند. متأسفانه محدودیتهای ارزی و موانع گوناگون دیگر باعث شده است که دانشگاهها تیمهای ضربتی ویژه متشکل از متخصصان و کارپردازان برای بهره‌گیری بهینه از نمایشگاه تدارک ببینند.

جایزهٔ وبلن

جایزهٔ وبلن در هندسه که هر پنج سال یک‌بار اعطا می‌شود در سال ۱۹۹۶ مشترکاً به ریچارد همیلتن (Richard Hamilton) استاد دانشگاه کالیفرنیا در سن‌دیه‌گو و گنگ‌تیان (Gang Tian) استاد اِم.آی.تی تعلق گرفت.

اعطای جایزه به همیلتن به‌خاطر کوششهای پانزده‌سال اخیر او در بررسی عمیق شارش ریچی (Ricci Flow) و معادلات دیفرانسیل سهموی مربوط به آن است که تحولات ممکنِ متریک ریمانی روی یک خمینه را توصیف می‌کنند. همیلتن که خود آغازگر این مقوله بود توانسته است با بررسی تکینه‌هایی که تحت شارش ریچی پدید می‌آیند به نتایج قابل توجهی در مورد خمینه‌های سه‌بُعدی و چهاربعدی دست یابد. همیلتن پنجاه و سه سال دارد و آمریکایی است.

گنگ‌تیان که ۳۸ ساله و متولد جمهوری خلق چین است، طی مدتی کوتاهتر از ده سال موفق به حل مسائل دشوار و مهمی در زمینهٔ آنالیز هندسی به‌خصوص در ارتباط با شرایط وجود متریکهای کهلر-اینشتین روی خمینه‌های مختلط شده است. مسألهٔ یافتن شرایط لازم و کافی برای وجود متریک کهلر روی خمینه‌های مختلط که انحنای ریچی آنها مضرب ثابتی از خود متریک است کاربردهای مهمی در هندسه و فیزیک دارد. حالتی را که مضرب ثابت، منفی باشد، یائو (Yau) و اوبَن (Aubin) حل کردند و حالتِ مضرب صفر نیز که با حدس معروف کالابی (Calabi) مرتبط است توسط یائو حل شد. حالتِ مضرب مثبت که تا مدتی لاینحل به نظر می‌رسید در سالهای اخیر توسط تیان (که شاگرد یائو است) و ریاضیدانان دیگری حل شده است. به‌خصوص تیان مسأله را برای رویه‌های مختلط به‌طورکامل حل کرده است. علاوه بر این تحقیقات، تیان آثاری نیز با همکاری دیگران درکوهومولوژی کوانتومی، یعنی خانواده‌ای از دگردیسیهای حلقهٔ کوهومولوژی خمینه‌های همتافته (symplectic) پدید آورده است.

از سال ۱۹۶۴ که اولین جوایز وبلن اعطا شد، تاکنون ۱۶ ریاضیدان این جایزه را دریافت کرده‌اند که از آن میان چهار نفر بعداً موفق به کسب مدال فیلدز شده‌اند.

س.ش.

کسب رتبهٔ نُهم در المپیاد بین‌المللی ریاضی

سی و هفتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی در تیرماه ۱۳۷۵ در شهر مامبی (بمبئی) هندوستان برگزار شد. در این المپیاد ۷۵ کشور جهان شرکت داشتند و تیم دانش‌آموزان ایران مقام نهم را در میان آنها به‌دست آورد. نام اعضای تیم و نوع مدالهایشان از این قرار بود: ایمان افتخاری از تهران (طلا)، روح‌الله ابراهیمیان از اصفهان (نقره)، علی‌رضا صالحی گل سفیدی از کرج (نقره)، مرتضی فتوحی از یزد (نقره)، سیدرضا مقدسی از تهران (نقره)، و هادی ساماسیان از اصفهان (برنز).

مسائل این دورهٔ المپیاد دشوارتر از، و به عبارت دیگر «متفاوت» با، مسائل دوره‌های قبل بود به‌طوری که فقط یک دانش‌آموز رومانیایی نمرهٔ کامل گرفت حال آنکه معمولاً هشت نُه نفر نمرهٔ کامل می‌گرفتند. نمرات سایر شرکت‌کنندگان نیز نسبت به‌سالهای قبل به‌مراتب پایینتر بود. دو تا از مسائل این دوره در بخش مسائل این شماره آمده است.

احراز رتبهٔ هشتم در المپیاد بین‌المللی کامپیوتر

تیم دانش‌آموزان ایران در هشتمین المپیاد بین‌المللی کامپیوتر که مردادماه امسال در کشور مجارستان برگزار شده، رتبهٔ هشتم را در میان ۵۶ کشور شرکت‌کننده به‌دست آورد. نام اعضای این تیم و نوع مدالهایشان از این قرار بود: روزبه پورنادر از تهران (طلا)، احسان چینی‌فروشان از تهران (نقره)، مهران مهر از تهران (نقره)، و امین صابری از اصفهان (برنز).

ی. ت.

مصاحبه با دیوید مامفرد، رئیس اتحادیه بین‌المللی ریاضیدانان•

این مصاحبه در ماه مه ۱۹۹۵ همزمان با اجلاس کمیتهٔ اجرایی اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان (IMU) در پاریس صورت گرفت.

س: نظر اتحادیه، و مشخصاً نظر خود شما در مورد ابتکار اعلام سال ۲۰۰۰ به‌نام «سال جهانی ریاضیات» چیست؟

ج: به نظر من ابتکار فوق‌العاده‌ای است و فرصتی برای کوشش در جهت بهبود چهره و وجههٔ ریاضیات فراهم می‌آورد. همچنین موقعیتی است برای دمیدن روحیهٔ تازه در جامعهٔ ریاضی. این کار باید به چند طریق صورت گیرد. از یک سو مضمون سخنرانی معروف هیلبرت در آغاز قرن اخیر به ذهن می‌رسد، یعنی باید جایگاه فعلی خود در ریاضیات را ارزیابی کنیم و به چالشهای آینده بنگریم، و از سوی دیگر باید به روابط ریاضیات با کاربردهای آن نظر بیفکنیم، به مسائل آموزش ریاضی توجه کنیم، و تدابیری در زمینهٔ شرکت جدیتر جهان سوم در فعالیتهای ریاضی بیندیشیم.

س: دقیقاً در مورد همین سه مبحث که برای سال جهانی ریاضیات (WMY) در نظر گرفته شده‌اند، آیا نظرات شخصی خاصی در باب اینکه مسائل اساسی و مبرم ریاضیات در قرن بیست و یکم چه خواهند بود دارید؟

ج: سؤال فوق‌العاده جالبی است ولی واقعاً نیاز به تأمل و تفکر خیلی بیشتری دارد. از نظر شخص من یک مسألهٔ مهمّ احیای جریان مبادلهٔ آزاد اندیشه‌ها میان ریاضیدانان محض و کاربردی است. در طی قرن نوزدهم مشاهده می‌کنیم که اکثر ریاضیدانان هر دو گرایش را داشته‌اند. مثلاً سری فوریه از کاربردها نشأت گرفت. ولی اکنون تباعُدی صورت گرفته است، به‌خصوص در آمریکا و تا حدودی هم در کشورهای دیگر. امیدوارم که تأکید فعلی بر لزوم مفید بودن علوم (یعنی این فکر که اگر قرار است جامعه هزینهٔ تحقیقات علمی را تأمین کند لازم است که تحقیقات به درد جامعه بخورد) منجر به رونق موضوعهای کاربردی به قیمت لطمه خوردن به موضوعهای محض نشود، بلکه یک نوع حس وحدت در هدف پدید آورد که موجب شود محققین محض از کاربردها الهام بگیرند و ایده‌های نظری خود را به نحو کاراتر و مؤثرتری در برخورد با مسائل کاربردی به‌کار بگیرند. من گمان می‌کنم همیشه نوعی مبادله درکار بوده است ولی به هر حال این یک مسألهٔ عمده است.

س: در زمینهٔ آموزش ریاضی چه فعالیتهایی دارید؟

ج: این موضوع دامنهٔ گسترده‌ای دارد. من شخصاً درگیر پروژهٔ خاصی در آمریکا هستم که به «نهضت اصلاح آموزش حساب دیفرانسیل و انتگرال» معروف شده است. هدف این است که تعلیم حساب دیفرانسیل و انتگرال را با نیازهای تخصصهای گوناگون در علوم و مهندسی و امور مالی هماهنگتر کنیم. گروهی به رهبری دبورا هیوز-هلت (Deborah Hughes-Hallet) و اندرو گلیسن (Andrew Gleason) کتابهایی در این زمینه نوشته‌اند. آنها شعاری دارند که آن را «فرمان سوم» می‌نامند، به‌این مضمون که به‌جای تدریس فرمولها و محاسبات جبری که برای بسیاری از دانش‌آموزان به‌کار بردن آنها خیلی دشوار است، به تفهیم ارتباط آنها با واقعیت و کاربردها بپردازیم. آنها به همان اندازه به کار عددی اهمیت می‌دهند یعنی هر مفهوم کلی را برحسب اینکه «چگونه باید عملاً آن را با یک ماشین حساب محاسبه کرد، یا چگونه باید آن را تخمین زد وقتی داده‌های لازم در اختیار باشند» بیان می‌کنند. این یک موضوع است. موضوع دوم رهیافت بصری است که هدف از آن استفادهٔ مؤثر از تکنیکهای ترسیمی است برای مشاهدهٔ جنبهٔ هندسی مفاهیم. و بالاخره محاسبات جبری نیز نباید به فراموشی سپرده شود. باید این را نیز اضافه کنم که آنها همواره این سه روش را با ایدهٔ ارائهٔ تعبیر در هر مرحله در می‌آمیزند و به‌این ترتیب کاربردهایی از فیزیک، شیمی و اقتصاد به‌کار گرفته می‌شود. به‌عنوان مثال آنها با نموداری شروع می‌کنند از کتاب مرجع اساسی نوشتهٔ موری (Murray) در زمینهٔ زیست‌شناسی ریاضی که نمودار جمعیت روباهها در جنوب غربی انگلستان را نشان می‌دهد و می‌پرسند «چگونه می‌توانیم از روی این نمودار که چگالی حضور روباهها را بیان می‌کند جمعیت کل روباهها را محاسبه کنیم؟». چنین سؤالی طبعاً انگیزه‌ای برای طرح حساب انتگرال می‌شود.

من قویاً معتقدم که در آموزش ریاضی باید کاربردهای واقعی همواره مد نظر باشد. اگر به قرن نوزدهم باز گردید خواهید دید که تقریباً همهٔ معلمها از مثالهای پولی مانند سود و مرابحه و امثال آن استفاده می‌کنند؛ هر کودکی پول را درک می‌کند، و این‌گونه مثالها برایش ملموس است. به نظر من آمار موضوع مهمی است که باید وارد برنامهٔ درسی مدرسه شود زیرا اشتباهاتی که کودکان اغلب گرفتارش می‌شوند از نوع اشتباه در قضاوت عددی است. اگر این موضوع در برنامهٔ درسی وارد شود، کودکان آمادگی بهتری پیدا می‌کنند.

س: در این خبرنامه نوع دیدن چه مطالبی را دارید؟

ج: امیدوارم تدریجاً شاهد شکل‌گیری فعالیتهای مشخصتری باشیم، برنامه‌های مشخصی که گروههای گوناگونی درآنها مشارکت داشته باشند. به‌این ترتیب فکر می‌کنم خبرنامه حول و حوش این حرکتها متحول شود.

در کمیتهٔ اجرایی اتحادیه پیرامون مسألهٔ چهرهٔ اجتماعی ریاضیات صحبت کردیم و کوشش کردیم روشهای مناسب شناساندن ریاضیات به عامهٔ مردم را مشخص کنیم. این مشکل راه‌حل ساده‌ای ندارد. به نظر من بهترین کار این است که افراد پرانگیزه‌ای بیابیم که بتوانند خودشان را جای مردم بگذارند. بعضی افراد از این مهارت برخوردارند و بعضی نیستند. باید به هر قیمتی با این تمایل که سخنرانیهای تخصصی و تخصصیتر ارائه کنیم، مقابله کنیم.

س: آیا برنامه‌هایی برای تجدید سازمان اتحادیه در ذهن دارید؟

ج: از وقتی از من خواستند رئیس اتحادیه بشوم دو برنامه داشته‌ام که به نظر من مهم هستند.

یکی از اینها مربوط می‌شود به‌این دیدگاه رایج در آمریکا، که اتحادیه یک سازمان سری و مرموز است که هیچ‌وقت معلوم نیست چه می‌کند. یک هدف من تبلیغ ماهیت و فعالیتهای اتحادیه است. قصد داریم همزمان با جلسهٔ آوریل آیندهٔ کمیتهٔ اجرایی در شهر نیویورک، میزگردی در مورد فعالیتهای اتحادیه برگزار کنیم که در آن مردم بتوانند شرکت کنند و از کارهای ارزشمندی که اتحادیه انجام می‌دهد آگاه شوند.

مسألهٔ دیگری که مرا به خود مشغول کرده است کوشش برای شرکت گسترده‌تر ریاضیدانان کاربردی در کنگره‌هاست. روشی که برای این کار در پیش گرفته‌ایم فعالیتهای مشترک با سازمانهای ریاضیات کاربردی است. منظور از این سازمانها، زیرکمیته‌هایی از خود اتحادیه نیست، بلکه گروههایی مانند مجمع بین‌المللی ریاضیات صنعتی و کاربردی (ICIAM)، متخصصان علم کامپیوتر، آماردانان، و ریاضی-فیزیک‌دانان است.

• این مصاحبه از خبرنامهٔ مخصوص سال جهانی ریاضیات (*Newsletter MWY2000*)، شمارهٔ ۳، پاییز ۱۹۹۵، ترجمه شده است.

نشر ریاضی، سال ۷، شمارهٔ ۲، صص ۵ـ۱۴

وقتی که بیضیها دایره به نظر می رسند: صورتِ نظریهٔ اندازه‌ایِ قضیهٔ نگاشت ریمان

سعید ذاکری، محمود زینلیان*

۱. مقدمه

در سال ۱۸۲۲ گاوس مقاله‌ای نوشت که عنوانش چنین بود: «دربارهٔ نگاشتن بخشهای یک رویهٔ مفروض به روی یک رویهٔ دیگر به‌طوری که این نگاشت، شباهت دو رویه را حتی درکوچکترین اجزاء حفظ کند» [۹]. به زبان هندسهٔ دیفرانسیل جدید، او در آن مقاله نشان داد که هر دو رویه موضعاً همدیس‌اند. این مطلب معادل آن‌است که بگوییم با مفروض بودن هر خمینهٔ دو بعدیِ مجهز به متریک ریمانی، می‌توان حول هر نقطه مختصاتی یافت که در آن، متریکِ داده‌شده به‌صورت مضربی از متریک اقلیدسی صفحه بیان شود. چنین مختصاتی را مختصات تکدما می‌نامیم. تعویض مختصات تکدما، نگاشتی حافظ زاویه از صفحه است و بنابراین اگر جهت‌نگهدار باشد، تحلیلی خواهد بود. از این‌رو هر رویهٔ جهتپذیر را می‌توان به ساختار یک رویهٔ ریمانی مجهز کرد.

در اواخر دههٔ ۱۹۲۰ گروچ[1] مفهوم نگاشت شبه‌همدیس را معرفی کرد. این نوع نگاشتها همساریختیهای صفحه با مشتقات جزئی تعمیم‌یافته در L^2_{loc}اند که دایره‌های بینهایت کوچک را به بیضیهایی با پخیدگی[2] کراندار می‌نگارند. در دههٔ ۱۹۵۰ و اوایل دههٔ ۱۹۶۰، نظریهٔ نگاشتهای شبه‌همدیس و تحقیقات تایشموار[3] در مورد فضای ساختارهای مختلط رویه‌های ریمانی فشرده به‌دست دو ریاضیدان پیشرو، لارس آلفُرس و لیپمن برس و شاگردانشان توسعهٔ بسیار یافت. این پیشرفت سریع مستلزم صورتی از قضیهٔ گاوس بود که بتوان با استفاده از آن، خانواده‌ای از متریکهای ریمانی اندازه‌پذیر بر یک رویه را نیز بررسی کرد. در ۱۹۶۰ آلفرس و برس به کمک نتایج پیشینِ کالدرون و زیگموند در مورد عملگرهای انتگرالی تکین توانستند صورت مورد نظر قضیه را ثابت کنند که امروزه به «صورتِ نظریهٔ اندازه‌ایِ قضیهٔ نگاشت ریمان» معروف است [۳]. بااین‌حال، برس تشخیص داد که صورتی از همین قضیه (بدون در نظرگرفتن وابستگی به پارامتر) قبلاً توسط موری در ۱۹۳۸ ثابت شده است [۱۴].

قضیهٔ آلفرس-برس-موری به زودی به‌صورت ابزاری اساسی در بررسی فضاهای تایشموار و گروههای کلاینی در آمد. بعدها، در اوایل دههٔ ۱۹۸۰، ریاضیدانانی چون سالیون[1]، شیشیکورا[2]، دوآدی[3] و هابرد[4] این قضیه را در جراحی شبه‌همدیس[5] و بررسی فرایند تکرار توابع گویا روی کرهٔ ریمان به‌کار بردند. معلوم شد که خاصیت شبه‌همدیس بودن دقیقاً آن درجه از خوشرفتاری یک همساریختی است که در جریان جراحی لازم است. این واقعیت که ساختارهای همدیس مورد بحثِ قضیه تنها اندازه‌پذیرند، انعطاف‌پذیری بسیار زیاد آن‌را به عنوان ابزاری برای جراحی نشان می‌دهد. این ایده به اثبات دو حدس قدیمی در دینامیک مختلط منجر شد ([۱۶]، [۱۸])، و منشأ پیدایش نظریهٔ نگاشتهای شبه‌چندجمله‌ای نیز بود [۷].

در این مقاله می‌خواهیم بی‌آنکه به پیشنیاز چندانی احتیاج باشد، این قضیه و چند کاربرد آن‌را شرح بدهیم.

۲. ساختارهای همدیس بر رویه‌ها

فرض کنیم X یک رویهٔ هموار C^∞، همبند، و جهتپذیر باشد. یک ساختار همدیس بر X عبارت است از رده‌ای هم‌ارزی از متریکهای ریمانیِ اندازه‌پذیر به مفهوم زیر: اگر متریک g را در مختصات موضعی (x, y) به شکل

$$g(x,y) = E(x,y)dx^2 + 2F(x,y)dxdy + G(x,y)dy^2$$

نمایش دهیم، آنگاه g را اندازه‌پذیر می‌نامیم هرگاه E، F و G توابعی اندازه‌پذیر (به مفهوم لبگ) از x و y باشند به‌طوری که تقریباً همه‌جا $E > 0$، $G > 0$،

1. Grötzsch

۲. پخ بودن، معادل dilatation.

3. Teichmüller

1. Sullivan 2. Shishikura 3. Douady

4. Hubbard 5. quasiconformal surgery

و $EG - F^2 > 0$. دو متریک g_1 و g_2 هم‌ارز خوانده می‌شوند اگر و تنها اگر به‌ازای تابع مثبت اندازه‌پذیری بر X مانند γ، $g_1 = \gamma g_2$. بدین ترتیب، در ردهٔ هم‌ارزی یک متریک داده‌شده، مفهوم زاویهٔ بین دو بردار مماس در تقریباً هر نقطهٔ X خوش تعریف است.

اکنون فرض کنیم که X علاوه بر مفروضات فوق یک رویهٔ ریمانی نیز باشد، یعنی فرض کنیم که به X یک ساختار مختلط $\mathscr{A}$ (یک اطلس تحلیلی ماکسیمال) نسبت داده باشیم. با چنین فرضی بهتر آن‌است که از نمادهای متغیر مختلط برای نمایش متریکها استفاده کنیم. در این‌صورت متریک g را می‌توان به شکل

$$g(z) = \gamma(z)|\, dz + \mu(z) d\bar{z}\, |^2 \qquad (1)$$

نمایش داد که در آن $z = x + iy$، γ و μ توابعی اندازه‌پذیر از zاند، و به‌ازای تقریباً هر z، $\gamma(z) > 0$ و $|\mu(z)| < 1$ (ضمیمهٔ الف را نگاه کنید). به سادگی دیده می‌شود که $\mu(z)$ به‌عنوان تابعی روی X خوش تعریف نیست. اما عبارت $\mu(z)\frac{d\bar{z}}{dz}$ تحت تعویض مختصات تحلیلی روی X ناورداست. در واقع اگر $z \mapsto w$ یک چنین تعویض مختصاتی باشد، و اگر g در (۱) را در مختصات w بتوان به شکل $\tilde{\gamma}(w)|dw + \tilde{\mu}(w) d\bar{w}\,|^2$ نمایش داد، آنگاه

$$\tilde{\mu}(w) = \mu(z)\frac{(dw/dz)}{(d\bar{w}/dz)} \qquad (2)$$

که از آن نتیجه می‌شود $\mu(z)\frac{d\bar{z}}{dz} = \tilde{\mu}(w)\frac{d\bar{w}}{dw}$. عبارت

$$\mu = \mu(z)\frac{d\bar{z}}{dz}$$

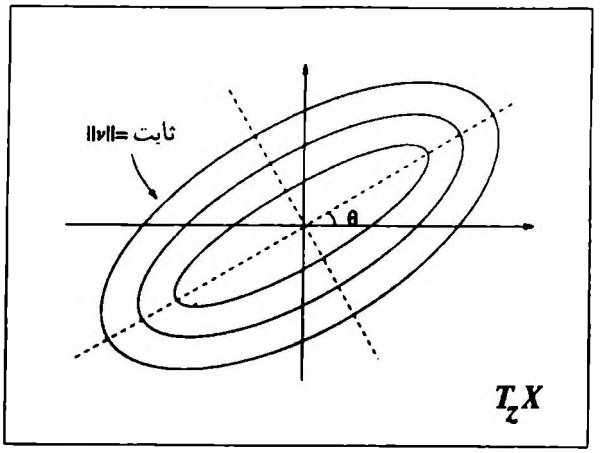
را فرم بلترامی متریک g می‌نامیم. از تعریف ساختار همدیس نتیجه می‌شود که μ تنها به ردهٔ هم‌ارزی g بستگی دارد.

به‌عکس، اگر μ اندازه‌پذیر باشد و $|\mu| < 1$، می‌توانیم ساختار همدیس متناظر آن‌را در نظر بگیریم که ردهٔ هم‌ارزی متریک $|dz + \mu(z) d\bar{z}\,|^2$ است. نتیجه آنکه بر یک رویهٔ ریمانی، تناظری یک به یک بین ساختارهای همدیس و فرمهای بلترامی برقرار است.

از سوی دیگر، هرگاه ساختار مختلطی چون $\mathscr{A}$ را بر X در نظر بگیریم، می‌توانیم به X ساختاری همدیس نسبت بدهیم که فرم بلترامی آن نسبت به هر مختصات موضعی وابسته به $\mathscr{A}$، متحد با صفر باشد. این ساختار همدیس را ساختار همدیس استاندارد X می‌خوانیم و همواره آن‌را با σ_X نشان می‌دهیم. بنابراین یک متریک نوعی در σ_X نسبت به هر مختصات موضعی z وابسته به $\mathscr{A}$، به شکل $\gamma(z)|dz|^2$ خواهد بود.

اندکی پیش دیدیم که هر ساختار همدیس بر رویهٔ ریمانی X را می‌توان به شکل یک به یک به‌وسیلهٔ یک فرم بلترامی بر X توصیف کرد. در اینجا سؤالی طبیعی پیش می‌آید و آن اینکه چگونه می‌توان توصیفی از یک ساختار همدیس بر X به دست داد که هندسیتر باشد؟ پاسخ ساده است: کافی است نگاهی به «میدان بیضیهای» مرکب از بردارهای با طول ثابت در صفحات مماس بر X بیندازیم. بگذارید این مطالب را با تفصیل بیشتری بررسی کنیم.

ساختار همدیس σ بر X و فرم بلترامی μی آن‌را در نظر می‌گیریم. برای تقریباً هر z در X، می‌توان بیضیهای هم‌مرکز «ثابت $=\|\mathbf{v}\|$» را به‌ازای $\mathbf{v}$ در T_zX (صفحهٔ مماس بر X در نقطهٔ z) تشکیل داد:



توجه کنید که این بیضیهای هم‌مرکز تنها به σ بستگی دارند، زیرا تحدید هر دو متریک ریمانی دلخواه در این ساختار همدیس به صفحهٔ T_zX، مضرب حقیقی یکدیگرند. به آسانی می‌توان وضعیت این بیضیها را برحسب μ مشخص کرد. بردار مماس $\mathbf{v} = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$ را در T_zX در نظر می‌گیریم. با استفاده از نمادهای متغیر مختلط می‌بینیم که شرط $\|\mathbf{v}\| = c$ معادل است با $|(u + iv) + \mu(z)(u - iv)| = c$ (ضمیمهٔ الف را نگاه کنید). هرگاه $u + iv = re^{i\theta}$، شرط اخیر به‌صورت $|1 + |\mu(z)|e^{i(\arg\mu(z) - 2\theta)}| =$ c/r در می‌آید. بنابراین، نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک این بیضی، محاسبه شده در ساختار همدیس استاندارد σ_X، از رابطهٔ

$$K(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \qquad (3)$$

و زاویهٔ انحراف قطر کوچک نسبت به راستای افقی در این مختصات موضعی خاص از رابطهٔ

$$\theta(z) = \frac{1}{2}\arg\mu(z) \qquad (4)$$

به دست می‌آید. از (۳) ضمناً نتیجه می‌شود که $|\mu(z)|$ تابع اندازه‌پذیر خوش تعریفی بر X است (این مطلب از قانون تعویض مختصات (۲) نیز معلوم می‌شود). این رابطه همچنین نشان می‌دهد که هرگاه بیضیهای حاصل از σ_X را در نظر بگیریم، خانواده‌ای از «دایره»ها به دست می‌آوریم.

به‌عکس، به‌ازای هر میدان اندازه‌پذیر بیضیها بر X، یعنی خانواده‌ای از بیضیهای هم‌مرکز بر تقریباً هر صفحهٔ مماس که به طرز اندازه‌پذیر تغییر می‌کنند، می‌توانیم با حرکت در جهت عکس یک ساختار همدیس به دست بیاوریم: ابتدا نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک بیضیها را در ساختار همدیس استاندارد اندازه می‌گیریم تا K را پیدا کنیم. سپس زاویهٔ θ را نسبت به یک مختصات موضعی خاص z اندازه می‌گیریم. آنگاه از (۳) و (۴)، $\mu(z)$ را می‌یابیم. در این‌صورت ساختار همدیس مطلوب، ردهٔ هم‌ارزی $|dz + \mu(z) d\bar{z}\,|^2$ خواهد بود.

نتیجه آنکه ساختارهای همدیس بر X و میدانهای اندازه‌پذیر بیضیها بر صفحات مماس بر X، اشیای واحدی هستند.

می‌گوییم میدان اندازه‌پذیری از بیضیها نسبت به σ_X پخیدگی کراندار دارد هرگاه $\|K\|_\infty < +\infty$، که در آن $\|\cdot\|_\infty$ نشانگر کوچکترین کران

بالای اساسی روی X است. این بدان معنی است که میزان پخیدگیِ بیضیهای این میدان نمی‌تواند به قدر دلخواه زیاد باشد. در واقع در یک چنین میدانی تنها مجازیم به اندازهٔ معینی در رسم دایره‌هایمان مرتکب خطا بشویم. به موجب (۳) طبیعی است که بگوییم یک ساختار همدیس نسبت به σ_X پخیدگی کراندار دارد هرگاه فرم بلترامیش در

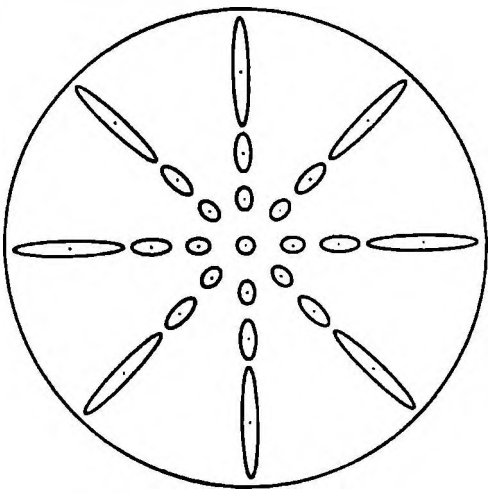
$$\| \mu \|_\infty < 1$$

صدق کند.

مثلاً، ردهٔ هم‌ارزی متریک

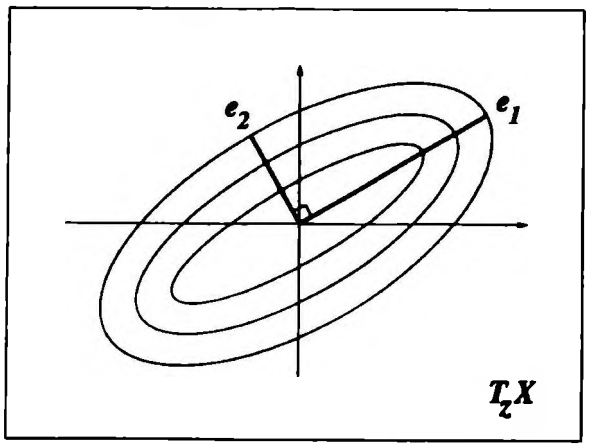
$$|dz + \frac{z^2}{|z|} d\bar{z}|^2 \qquad (5)$$

روی قرص واحد $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ پخیدگی کراندار ندارد.



راه دیگری برای توصیف ساختاری همدیس بر یک رویهٔ ریمانی، اتخاذ رهیافتی جبری است. ساختار همدیس σ را بر X تثبیت می‌کنیم و میدان بیضیهای حاصل را بر تقریباً هر صفحهٔ مماس T_zX در نظر می‌گیریم. در این‌صورت می‌توان یک یکریختی $\mathbb{R}$ـخطی J_z بر T_zX تعریف کرد به‌طوری که $J_z^2 = -id$ (که در آن id تبدیل همانی روی T_zX است). بدین منظور جفت بردارهای (e_1, e_2) را مانند شکل بعدی انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $J_z(e_1) = e_2$ و $J_z(e_2) = -e_1$ و J_z را به‌طور خطی به T_zX گسترش می‌دهیم. روشن است که J_zای که چنین تعریف می‌شود به انتخاب بیضی خاصی که (e_1, e_2) روی آن قرار دارد بستگی ندارد. این خانواده از تبدیلهای خطی مثالی است از یک ساختار تقریباً مختلط اندازه‌پذیر. به بیان صریحتر، یک ساختار تقریباً مختلط اندازه‌پذیر بر X تابعی اندازه‌پذیر چون $z \mapsto J_z$ است که به تقریباً هر z در X یک یکریختی $\mathbb{R}$ـخطی مانند J_z روی T_zX نسبت می‌دهد به‌طوری که $J_z^2 = -id$.

به‌عنوان مثال، ساختار تقریباً مختلطی که از σ_X به دست می‌آید، در هر مختصات موضعی $z = x + iy$ بردار $\frac{\partial}{\partial x}$ را به $\frac{\partial}{\partial y}$ و بردار $\frac{\partial}{\partial y}$ را به $-\frac{\partial}{\partial x}$ می‌فرستد. بنابراین اگر نمادهای متغیر مختلط را به کار ببریم، $\frac{\partial}{\partial z}$ را به $i\frac{\partial}{\partial z}$ می‌نگارد (ضمیمهٔ الف را نگاه کنید). به همین دلیل است که معمولاً این ساختار تقریباً مختلط را به‌صورت «ضرب در i» یا «دوران به اندازهٔ 90°» در جهت مثبت T_zX تصور می‌کنیم.



به‌عکس، ساختار تقریباً مختلط $z \mapsto J_z$ را در نظر می‌گیریم به‌طوری که جهت زوج $(\frac{\partial}{\partial x}, J_z(\frac{\partial}{\partial x}))$ به‌ازای تقریباً هر نقطهٔ X با جهت $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ یکی باشد. نقطهٔ نوعی z را تثبیت می‌کنیم و یکریختی $\mathbb{R}$ـخطی ϕ بر T_zX را چنان انتخاب می‌کنیم که $\phi^{-1}J_z\phi(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}$ و $\phi^{-1}J_z\phi(\frac{\partial}{\partial y}) = -\frac{\partial}{\partial x}$. به عبارت دیگر ϕ چنان یکریختیی است که J_z را با ضرب در i تزویج می‌کند. دایره‌های هم‌مرکز القاشده از σ_X را بر T_zX و تصویر آنها را تحت ϕ در نظر می‌گیریم. بیضیهای هم‌مرکز به‌دست آمده خوش تعریف‌اند، زیرا نه به مختصات موضعی z بستگی دارند و نه به انتخاب ϕ. هر بیضی در این خانواده تحت اثر J_z به‌روی خودش نگاشته می‌شود. به‌این ترتیب با مفروض بودن یک ساختار تقریباً مختلط، یک میدان بیضیها و از آنجا یک ساختار همدیس به دست می‌آید.

اکنون می‌خواهیم عملی روی ساختارهای همدیس تعریف کنیم که متناظر با برگردان کردن[1] متریکهای ریمانی در هندسهٔ دیفرانسیل است. به بیان غیر دقیق، می‌توان هر ساختار همدیس را به کمک هر وابرریختی [دیفئومورفیسم] موضعی برگردان کرد، اما به دلیل سرشت اندازه‌پذیر اشیای مورد مطالعه‌مان، می‌توانیم شرط هموار بودن را ضعیف کنیم. موقتاً فرض می‌کنیم X و Y دو رویهٔ ریمانی و $f : X \to Y$ یک وابرریختی هموارِ جهت نگهدار باشد. با در دست داشتن هر ساختار همدیس σ بر Y، می‌توانیم آن‌را به کمک f به روی X برگردان کنیم تا ساختار همدیسی چون $f^*\sigma$ به‌دست بیاوریم. در واقع، هرگاه σ ردهٔ هم‌ارزی $|dw + \mu(w)d\bar{w}|^2$ باشد و f را موضعاً به شکل $w = f(z)$ بنویسیم، آنگاه $f^*\sigma$ ردهٔ هم‌ارزی

$$|dz + \frac{f_{\bar{z}} + \mu(f(z))\bar{f}_{\bar{z}}}{f_z + \mu(f(z))\bar{f}_z} d\bar{z}|^2$$

خواهد بود که در آن f_z و $f_{\bar{z}}$ مشتقات جزئی مختلط f در مختصات موضعی zاند (ضمیمهٔ الف را نگاه کنید). به‌ویژه اگر σ_Y ساختار همدیس استاندارد Y باشد، آنگاه

$$f^*\sigma_Y = |dz + \frac{f_{\bar{z}}}{f_z} d\bar{z}|^2 \quad \text{ردهٔ هم‌ارزی} \qquad (6)$$

دراین‌صورت معادلات کوشی-ریمان نشان می‌دهند که $f : X \to Y$ همدیس است اگر و تنها اگر $f^*\sigma_Y = \sigma_X$. این مطلب، برحسب ساختارهای تقریباً

1. to pull back

مختلط، بدان معنی است که مشتق $Df(z)$ به عنوان تابعی $\mathbb{R}$-خطی از T_zX به $T_{f(z)}Y$ با ضرب در iهای متناظر جابه‌جا می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} T_zX & \xrightarrow{Df(z)} & T_{f(z)}Y \\ J_z \downarrow & & \downarrow J'_z \\ T_zX & \xrightarrow{Df(z)} & T_{f(z)}Y \end{array}$$

اکنون توجه کنیم که همهٔ ساختارهای همدیسِ مورد بررسی تنها اندازه‌پذیرند و بنابراین استفادهٔ انحصاری از نگاشتهای هموار برای برگردان کردن آنها نابجاست. درواقع عملیاتی را مانند آنچه دربالا دیدیم می‌توان حتی هنگامی‌که f وابرریختی نباشد تعریف کرد. اما به هر حال برای توسعهٔ ردهٔ نگاشتهایی که برگردان کردن تحت آنها معنی دارد باید آن همسانریختیهایی را انتخاب کنیم که به مفهومی منطقی مشتقات جزئی دارند. معلوم می‌شود که چنین همسانریختیهایی واقعاً وجود دارند و همسانریختیهای شبه‌همدیس نامیده می‌شوند.

به بیان صریح، همسانریختی $f : X \to Y$ **شبه‌همدیس** نام دارد اگر در تقریباً هر نقطه، مشتقات جزئی تعمیم‌یافتهٔ موضعاً مربع‌ـانتگرالپذیر f_z و $f_{\bar{z}}$ نسبت به هر مختصات موضعی z وجود داشته باشند (ضمیمهٔ ب را نگاه کنید) و

$$\| \frac{f_{\bar{z}}}{f_z} \|_\infty < ۱ \qquad (۷)$$

در این‌صورت می‌توانیم مانند حالت وابرریختی، محاسبات بالا را تکرار و ساختار همدیس σ_Y را تحت f برگردان کنیم، به‌طوری که (۶) همچنان برقرار باشد. در نتیجه $f : X \to Y$ شبه‌همدیس است اگر و تنها اگر $f^*\sigma_Y$ نسبت به σ_X پخیدگی کراندار داشته باشد.

نکتهٔ جالبتر آنکه حتی برای یک نگاشت شبه‌همدیس $f : X \to Y$، رابطهٔ $f^*\sigma_Y = \sigma_X$ همدیس بودن را نتیجه می‌دهد. به بیان دیگر، همسانریختی شبه‌همدیس f که در $f_{\bar{z}} = ۰$ صدق می‌کند عملاً تحلیلی است. این تعمیمی از معادلات کوشی‌ـریمان برای همسانریختیهاست که به لم وایل موسوم است. کمیت سمت چپ (۷) **حداکثر پخیدگی** f نام دارد. بنابر لم وایل، f همدیس است اگر و تنها اگر حداکثر پخیدگیِ آن صفر باشد.

همسانریختیهای شبه‌همدیس خواص تحلیلی خارق‌العاده‌ای دارند. آنها را می‌توان به کمک خواص هندسی ساده‌ای نیز تعریف و مشخص کرد. برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه خواننده را به [۲] رجوع می‌دهیم (ضمیمهٔ ب، قضیهٔ ب ـ ۱ را هم نگاه کنید).

اکنون بگذارید لحظه‌ای تأمل کنیم و نظری به آنچه تاکنون ساخته‌ایم بیندازیم. با مفروض بودن یک ساختار مختلط بر یک رویه، می‌توان یک ساختار همدیس (استاندارد)، یا معادل آن یک میدان بیضیها، یا معادلش یک ساختار تقریباً مختلط، به دست آورد:

در اینجا سؤال بسیار ظریفی مطرح می‌شود: آیا می‌توان در نمودار فوق پیکانی از پایین به بالا رسم کرد؟ به بیان دیگر، با مفروض بودن

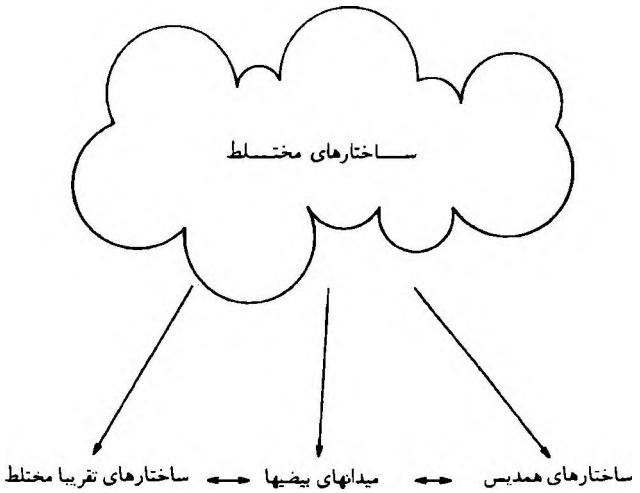
(الف) یک ساختار همدیس σ، یا

(ب) یک میدان اندازه‌پذیر بیضیها، یا

(ج) یک ساختار تقریباً مختلط اندازه‌پذیر J

بر رویهٔ X، آیا می‌توان ساختار مختلطی چون $\mathscr{A}$ بر X یافت به‌طوری که

(الف ۱) σ ساختار همدیس استاندارد $(X, \mathscr{A})$ باشد؟ یا



(ب ۱) دایره‌های واقع در صفحات مماس $(X, \mathscr{A})$ همان بیضیهای داده‌شده باشند؟ یا

(ج ۱) عمل J همان ضرب در i در $(X, \mathscr{A})$ باشد؟

۳. قضیه

صورت نظریهٔ اندازه‌ای قضیهٔ نگاشت ریمان پاسخ کاملی به پرسش بالا می‌دهد. معلوم می‌شود که پاسخ مثبت است مشروط بر اینکه یک شرط کرانداری روی ساختار همدیسِ داده‌شده بگذاریم. به بیان غیر دقیق، قضیه می‌گوید که پاسخ مثبت است هرگاه ساختار همدیس داده‌شده در فاصلهٔ معقولی از ساختار همدیس استاندارد نسبت به یك ساختار مختلط بر رویهٔ مورد نظر باشد. به بیان دیگر، هرگاه ساختار مختلطی بر X وجود داشته باشد به‌طوری که σ نسبت به σ_X پخیدگی کراندار داشته باشد، آنگاه می‌توان ساختار مختلط X را به‌گونه‌ای عوض کرد که σ در اطلس تحلیلی جدید استاندارد باشد. در این حالت σ، یا میدان بیضیهای وابسته، یا ساختار تقریباً مختلط وابسته، انتگرالپذیر نامیده می‌شود.

ابتدا بگذارید پرسش بالا را به زبان مناسبتری فرمولبندی کنیم. فرض کنیم به X ساختار مختلط مشخصی نسبت داده باشیم و نیز فرض کنیم σ نسبت به σ_X پخیدگی کراندار داشته باشد.

گزارهٔ (*) انتگرالپذیری σ معادل آن است که بگوییم رویهٔ ریمانی Y و همسانریختی شبه‌همدیسی چون $f : X \to Y$ وجود دارند به‌طوری که $f^*\sigma_Y = \sigma$.

درواقع، اگر f چنین نگاشتی باشد، X را به برگردان ساختار مختلط Y مجهز می‌کنیم (که نقشه[1]های آن عبارت‌اند از ترکیب f با نقشه‌های Y). در این‌صورت σ در این ساختار مختلط جدید استاندارد خواهد بود. برعکس، اگر σ نسبت به یک ساختار مختلط جدیدْ روی X استاندارد باشد، X مجهز شده به‌این ساختار جدید را Y می‌نامیم و تابع همانی $id : X \to Y$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $(id)^*\sigma_Y = \sigma$.

1. chart

به علاوه، به آسانی می‌توان یکتایی چنین Yای را (در صورت وجود) ثابت کرد. هرگاه $g : X \to Z$ همسانریختی شبه‌همدیس دیگری با $g^*\sigma_Z = \sigma$ باشد، آنگاه $h = g \circ f^{-1} : Y \to Z$ در $h^*\sigma_Z = \sigma_Y$ صدق می‌کند و بنابراین h همدیس است. به‌عکس، اگر $h : Y \to Z$ یک همسانریختی همدیس باشد، آنگاه $g = h \circ f : X \to Z$ در $g^*\sigma_Z = \sigma$ صدق می‌کند. نتیجه آنکه جواب $f : X \to Y$ در حد ترکیب از چپ با یك همسانریختی همدیس Y یکتاست.

برای بررسی یک حالت اساسی، ابتدا حالت $X = \mathbb{D}$، یعنی قرص واحد در صفحهٔ مختلط را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم σ نسبت به $\sigma_{\mathbb{D}}$ پخیدگی کراندار داشته باشد، که بدین معنی است که فرم بلترامی μی وابسته در $\| \mu \|_\infty < 1$ صدق می‌کند. در این‌صورت از (۶) معلوم می‌شود که $f : \mathbb{D} \to Y$ در $f^*\sigma_Y = \sigma$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر f جواب معادلهٔ

$$\frac{f_{\bar z}}{f_z} = \mu, \qquad \| \mu \|_\infty < 1$$

باشد، که معادلهٔ بلترامی خوانده می‌شود.

گاوس نخستین کسی بود که جوابهای موضعی این معادله را برای μی تحلیلی حقیقی به دست آورد. خود بلترامی در مطالعاتش در زمینهٔ رویه‌ها استفاده‌های گوناگونی از این معادله کرد [۴]. موری اولین کسی بود که برای μی اندازه‌پذیر وجود جوابهای سراسری[1] معادلهٔ بلترامی را ثابت کرد. با وجود این حدود ۲۰ سال طول کشید تا ارتباط کار او با معادلهٔ بلترامی بر آلفرس و بسیاری از دیگر متخصصان آشکار شود، زیرا که او مقاله‌اش را کاملاً به زبان معادلات دیفرانسیل جزئی نوشته بود. در نتیجه زمانی‌که برس این ارتباط را تشخیص داد، آلفرس صورت اولیهٔ قضیه را برای μی پیوستهٔ هولدر در مقاله‌ای به چاپ رسانیده بود. با این‌همه، آلفرس و برس در مقالهٔ اساسی سال ۱۹۶۰ خود شکل بسیار قویتری از این قضیه را ثابت کردند که در عین حال وابستگی تحلیلی نسبت به پارامتر را نیز نشان می‌داد. بعداً مشخص شد که این نکتهٔ به ظاهر فنّی، در نظریهٔ فضاهای تایشمولر اهمیت زیادی دارد.

بنابر قضیهٔ یکنواخت‌سازی، رویهٔ ریمانی Yی بالا به‌طور همدیس معادل با $\mathbb{D}$ یا صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ است. اما قضیه عملاً نشان می‌دهد که Y را همواره می‌توان $\mathbb{D}$ اختیار کرد، و این بدان معنی است که معادلهٔ بلترامی جوابهایی دارد که همسانریختیهای شبه‌همدیس $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ هستند. این نکته نشان می‌دهد که Y هرگز نمی‌تواند $\mathbb{C}$ باشد، یعنی هیچ همسانریختی شبه‌همدیسی بین $\mathbb{D}$ و $\mathbb{C}$ وجود ندارد (نتیجهٔ ۱ زیر را ببینید).

قضیهٔ ۱ (آلفرس ـ برس ـ موری). فرض کنیم σ یك ساختار همدیس اندازه‌پذیر با پخیدگی کراندار روی قرص واحد $\mathbb{D}$ باشد. در این‌صورت همسانریختی شبه‌همدیسی چون $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ وجود دارد به‌طوری که $f^*\sigma_{\mathbb{D}} = \sigma$. f در حد ترکیب از چپ با یك همسانریختی همدیس $\mathbb{D}$ یکتاست. به علاوه، اگر $\{\sigma^t\}$ خانواده‌ای از این ساختارهای همدیس باشد که به‌طور پیوسته (به‌ترتیب، هموار، تحلیلی) به پارامتر t وابسته باشد، آنگاه خانواده‌ای چون $\{f^t\}$ از همسانریختیهای شبه‌همدیس $\mathbb{D}$ وجود دارد به‌طوری که $(f^t)^*\sigma_{\mathbb{D}} = \sigma^t$ و وابستگی $\{f^t\}$ به t نیز پیوسته (به‌ترتیب، هموار، تحلیلی) است.

نتیجهٔ ساده‌ای از این قضیه چنین است:

نتیجه ۱. هیچ همسانریختی شبه‌همدیسی بین $\mathbb{D}$ و $\mathbb{C}$ وجود ندارد.

در واقع فرض کنیم $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ چنین همسانریختیی باشد. در این صورت $g^*\sigma_{\mathbb{C}}$ نسبت به $\sigma_{\mathbb{D}}$ پخیدگی کراندار دارد. بنابر قضیهٔ بالا، $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ای هست که $f^*\sigma_{\mathbb{D}} = g^*\sigma_{\mathbb{C}}$، یا $(f \circ g^{-1})^*\sigma_{\mathbb{D}} = \sigma_{\mathbb{C}}$. اما این بدان معنی است که $f \circ g^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ همدیس است، پس بنابر قضیهٔ لیوویل باید ثابت باشد.

ممکن است چنین تصور شود که در حالت یک رویهٔ ریمانی دلخواه، موانع ذاتی سراسری در برابر انتگرالپذیر بودن یک ساختار همدیس وجود دارد. اما در واقع چنین نیست. در زیر نشان می‌دهیم که حالت کلی نتیجه‌ای از حالت «موضعی» $X = \mathbb{D}$ است.

فرض کنیم X یک رویهٔ ریمانی دلخواه با اطلس تحلیلی $\mathscr{A}$ باشد. σ را یک ساختار همدیس اندازه‌پذیر می‌گیریم که نسبت به σ_X پخیدگی کراندار داشته باشد. X را با دستهٔ شمارشپذیری از نقشه‌های (U, z) در $\mathscr{A}$ می‌پوشانیم که در آن $z : U \to \mathbb{D}$ یک همسانریختی است. در هر چنین مختصهٔ موضعی zای، σ ردهٔ هم‌ارزی $|dz + \mu(z)d\bar z|^2$ است که z در $\mathbb{D}$ است و $\| \mu \|_\infty < 1$. بنابر قضیهٔ بالا، همسانریختی شبه‌همدیسی چون $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ وجود دارد به‌طوری که $f^*\sigma_{\mathbb{D}} = \sigma$. زوج $(U, f \circ z)$ را به عنوان نقشه‌ای در یک اطلس جدید $\mathscr{B}$ انتخاب می‌کنیم. اگر (V, w) نیز در $\mathscr{A}$ باشد و $U \cap V \neq \emptyset$، و اگر $(V, g \circ w)$ نقشهٔ جدید متناظر در $\mathscr{B}$ باشد، آنگاه تعویض مختصات $(g \circ w) \circ (f \circ z)^{-1}$ همدیس است، زیرا $\sigma_{\mathbb{D}}$ را حفظ می‌کند

$$\begin{aligned}
[(g \circ w) \circ (f \circ z)^{-1}]^*\sigma_{\mathbb{D}} &= (f^{-1})^*(w \circ z^{-1})^* g^*\sigma_{\mathbb{D}} \\
&= (f^{-1})^*(w \circ z^{-1})^*\sigma \\
&= (f^{-1})^*\sigma \\
&= \sigma_{\mathbb{D}}
\end{aligned}$$

بنابراین $\mathscr{B}$ عملاً یک اطلس تحلیلی برای X است که نسبت به مختصات آن، σ استاندارد است. بنابر گزارهٔ (*) بالا، ثابت کرده‌ایم که

قضیهٔ ۲. فرض کنیم X یك رویهٔ ریمانی و σ یك ساختار همدیس اندازه‌پذیر بر X باشد که نسبت به σ_X پخیدگی کراندار دارد. در این‌صورت رویه‌ای ریمانی چون Y و همسانریختی شبه‌همدیسی چون $f : X \to Y$ وجود دارد به‌طوری که $f^*\sigma_Y = \sigma$. f در حد ترکیب از چپ با یك همسانریختی همدیس Y یکتاست.

در حالتی که X کرهٔ ریمان $\bar{\mathbb{C}}$ باشد، از قضیهٔ یکنواخت‌سازی نتیجه می‌شود که هر رویهٔ ریمانی Y همسانریخت با X در واقع به‌طور همدیس

1. global

هم‌ارز X است. به علاوه هر همسانریختی همدیس کره یک تبدیل موبیوس مختلط است که با اثرش بر ۳ نقطهٔ متمایز به‌طور یکتا مشخص می‌شود. در نتیجه

قضیهٔ ۳. فرض کنیم σ یک ساختار همدیس اندازه‌پذیر بر $\bar{\mathbb{C}}$ با پخیدگی کراندار باشد. در این صورت همسانریختی شبه‌همدیس یکتایی چون $f:\bar{\mathbb{C}}\to\bar{\mathbb{C}}$ وجود دارد به‌طوری که $f(0)=0$، $f(1)=1$، $f(\infty)=\infty$، و $f^*\sigma_{\bar{\mathbb{C}}}=\sigma$.

اثبات قضیهٔ (۲) همچنین حقیقت زیر را آشکار می‌کند: هرگاه رده‌ای هم‌ارزی از متریکهای ریمانی پیوسته را بر یک رویهٔ ریمانی در نظر بگیریم، برای مسألهٔ انتگرالپذیری لزومی ندارد که هیچ نوع شرط کرانداری بر آن اعمال کنیم. در واقع با مفروض بودن هر چنین ردهٔ هم‌ارزیی، X را به یک ساختار مختلط دلخواه مجهز می‌کنیم و پوششی از X را با قرصها در نظر می‌گیریم که در آن هر قرص به‌طور فشرده در دامنهٔ یک نقشهٔ X می‌نشیند. به سادگی دیده می‌شود که تابع $|\mu|$ بر هر قرص به‌طور یکنواخت کوچکتر از ۱ خواهد بود. اکنون همان اثبات بالا را برای قضیهٔ (۲) می‌توان تکرار کرد.

نتیجه ۲. هر ساختار همدیس پیوسته بر یک رویهٔ هموار، انتگرالپذیر است.

به‌عنوان مثال، ساختار همدیس (۵) بر $\mathbb{D}$ نسبت به $\sigma_{\mathbb{D}}$ پخیدگی کراندار ندارد. بااین‌حال پیوسته و بنابراین انتگرالپذیر است. می‌توان دید که رویهٔ ریمانیی که (۵) بر آن استاندارد است به‌طور همدیس هم‌ارز $\mathbb{C}$ است. در واقع، تابع $f(z)=z(1-|z|)^{-2}$ همسانریختی همدیس مطلوب از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{C}$ را به دست می‌دهد.

۴. یک کاربرد: نگاشتهای شبه چندجمله‌ای

در چند سال اخیر نتایج متعددی در دینامیک مختلط به دست آمده‌اند که در اثبات آنها، صورت نظریهٔ اندازه‌ای قضیهٔ نگاشت ریمان نقش اساسی دارد. به عنوان مثال می‌توان از نتایج زیر نام برد: اثبات سالیون از حدس دامنه‌های ناسرگردان[1] [۱۸]، تخمینهای دقیق شیشیکورا از تعداد مدارهای تناوبی غیر دافع یک تابع گویا بر کرهٔ ریمان [۱۶]، ساختن حلقه‌های هرمان به کمک جراحی شبه‌همدیس [۱۶]، و نظریهٔ نگاشتهای شبه چندجمله‌ای دوآدی و هابرد [۷] که ابزاری مهم در مطالعهٔ خانوادهٔ چندجمله‌ایهای درجهٔ دوی $\{z\mapsto z^2+c\}$ و مجموعهٔ مندلبرات است. در اینجا می‌خواهیم کاربردی مقدماتی از قضیهٔ ۳ را در نظریهٔ نگاشتهای شبه‌چندجمله‌ای ارائه کنیم.

فرض کنیم P یک چندجمله‌ای با ضرایب مختلط از درجهٔ $d>1$ باشد. برای $|z|$ به قدر کافی بزرگ، رفتار P همانند رفتار $z\mapsto cz^d$ است. بنابراین اگر $R>0$ به قدر کافی بزرگ باشد، P قرص $U=\{z:|z|<R\}$ را به روی قرص توپولوژیک V می‌نگارد که $V\supset\bar{U}$ و $P:U\to V$ یک نگاشت تحلیلی سرهٔ d به ۱ است. مجموعهٔ ژولیای پرشده $K(P)$ را به عنوان مجموعهٔ همهٔ نقاطی چون x تعریف می‌کنیم که مدار $\{P^n(x)\}_{n\geqslant 0}$ آنها تحت P در صفحهٔ مختلط کراندار می‌ماند:

$$K(P)=\bigcap_{n\geqslant 0}P^{-n}(\bar{U})$$

این مجموعه، زیرمجموعه‌ای فشرده از U است که غالباً شکل بسیار پیچیدهٔ برخالی دارد.

با توجه به رفتار چندجمله‌ایها به‌ازای $|z|$ بزرگ، به فکر مطالعهٔ وضعیت زیر می‌افتیم: فرض کنیم U و V دو قرص توپولوژیک در صفحه باشند که مرزشان هموار است و $\bar{U}\subset V$. همچنین فرض کنیم $f:U\to V$ یک نگاشت تحلیلی سره از درجهٔ $d>1$ باشد. در این‌صورت f را یک نگاشت شبه چندجمله‌ای می‌نامیم. با الگو گرفتن از حالت چندجمله‌ایها، مجموعهٔ ژولیای پرشدهٔ f را به‌عنوان مجموعهٔ همه نقاطی در U تعریف می‌کنیم که مدارشان تحت f هیچ‌گاه U را ترک نمی‌کند. این مجموعه را به $K(f)$ نشان می‌دهیم. پس $K(f)=\bigcap_{n\geqslant 0}f^{-n}(\bar{U})$.

می‌خواهیم نشان دهیم که هر نگاشت شبه‌چندجمله‌ای درنزدیکی مجموعهٔ ژولیای پرشده‌اش رفتار دینامیکی مشابهی با یک چندجمله‌ای واقعی دارد. در حقیقت نشان خواهیم داد که یک تزویج شبه‌همدیس بین هر نگاشت شبه چندجمله‌ای و یک چندجمله‌ای واقعی وجود دارد که در درون مجموعهٔ ژولیای پرشده همدیس است. در چنین حالتی می‌گوییم که این دو نگاشت به‌طور پیوندی هم‌ارز[1] اند.

قضیهٔ ۴ (دوآدی ـ هابرد). فرض کنیم $f:U\to V$ یک نگاشت شبه چندجمله‌ای از درجهٔ $d>1$ باشد. در این‌صورت یک چندجمله‌ای P از درجهٔ d و یک همسانریختی شبه‌همدیس $\phi:\bar{\mathbb{C}}\to\bar{\mathbb{C}}$ با $\phi(\infty)=\infty$ وجود دارد که f و P را در یک همسایگی مجموعه‌های ژولیای پرشده‌شان مزدوج می‌کند

$$\phi(f(z))=P(\phi(z))$$

به علاوه، بر $K(f)$ داریم $\phi_{\bar{z}}=0$، بنابراین تزویج ϕ در درون $K(f)$ همدیس است.

قلب اثبات در این نکته نهفته است که عمل f را می‌توان با چسباندن[2] آن به چندجمله‌ای $z\mapsto z^d$ به همهٔ کرهٔ ریمان گسترش داد. در این‌صورت می‌توانیم یک ساختار همدیس ناوردا روی کره پیدا کنیم و قضیهٔ ۳ را به کار ببندیم و نتیجه بگیریم که آن ساختار انتگرالپذیر است.

به‌این منظور فرض می‌کنیم $h:\bar{\mathbb{C}}\setminus V\to\{z:|z|\geqslant 2\}$ همسانریختی همدیسی باشد که $h(\infty)=\infty$. h را به‌طور هموار به یک وابرریختی $h:\bar{\mathbb{C}}\setminus U\to\{z:|z|\geqslant 2^{1/d}\}$ گسترش می‌دهیم به‌طوری که

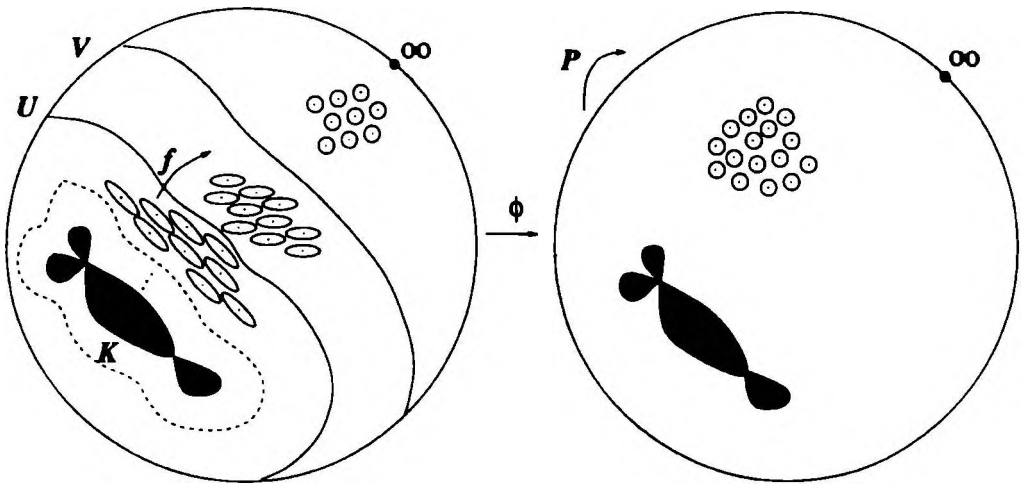
$$h(f(z))=(h(z))^d \qquad \text{به‌ازای } z \text{ بر } \partial U$$

اکنون تابع هموار

$$\tilde{f}(z)=\begin{cases} f(z) & z\in U\\ h^{-1}\circ(h(z))^d & z\in\bar{\mathbb{C}}\setminus U\end{cases}$$

1. nonwandering

1. hybrid equivalent
2. to glue



توسیع مورد نظر f است که در خارج V به‌طور همدیس با $z \mapsto z^d$ مزدوج است. ساختار همدیس اندازه‌پذیر σ را بر کرهٔ ریمان چنین تعریف می‌کنیم: فرض کنیم σ در $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{V}$ همان $\sigma_{\overline{\mathbb{C}}}$ باشد. می‌توانیم این ساختار را به کمک $\widetilde{f}$ از $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{V}$ به $V \setminus \overline{U}$ برگردان کنیم تا تعریف σ روی $V \setminus \overline{U}$ به دست آید. سپس σ را روی $U \setminus f(\overline{U})$ به عنوان برگردان σ روی $V \setminus \overline{U}$ توسط $\widetilde{f}$ تعریف می‌کنیم. این روند برگردان کردن به کمک $\widetilde{f}$ را می‌توان ادامه داد تا سرانجام σ در همه جا، مگر روی $K(f)$، تعریف شود. بر $K(f)$ به‌سادگی قرار می‌دهیم $\sigma = \sigma_{\overline{\mathbb{C}}}$. توجه کنیم که σیی که چنین تعریف شده تحت $\widetilde{f}$ ناورداست ($\widetilde{f}^* \sigma = \sigma$) و پخیدگی کراندار دارد، زیرا پس از مرحلهٔ اول، همهٔ برگردانهای بعدی به کمک f انجام می‌شود که تابعی تحلیلی است و پخیدگی را تغییر نمی‌دهد.

بنابر قضیهٔ ۳، همسانریختی شبه‌همدیسی چون $\phi: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ وجود دارد که ∞ را ثابت نگه می‌دارد و $\phi^* \sigma_{\overline{\mathbb{C}}} = \sigma$. چون σ تحت $\widetilde{f}$ ناورداست، $\sigma_{\overline{\mathbb{C}}}$ تحت $P = \phi \circ \widetilde{f} \circ \phi^{-1}$ ناوردا خواهد بود، پس P یک نگاشت تحلیلی است. همچنین P یک نگاشت سرهٔ d به ۱ است که ∞ را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین P یک چندجمله‌ای درجهٔ d خواهد بود. دقت کنیم که روی $K(f)$ داریم $\phi_{\overline{\mathbb{C}}} = 0$ زیرا σ را در آنجا ساختار استاندارد تعریف کردیم.

۵. منابعی برای مطالعهٔ بیشتر

این مقاله تنها درآمدی بر چند جنبهٔ بسیار مقدماتیِ صورتِ نظریهٔ اندازه‌ایِ قضیهٔ نگاشت ریمان است. در اینجا به‌طور خلاصه چند مرجع را ذکر می‌کنیم که در آنها، اغلب مباحث اشاره‌شده در این مقاله با تفصیل بیشتر بررسی شده است.

اثبات گاوس برای وجود مختصات تکدما را می‌توان در مجموعه آثار او یافت [۹]. ترجمهٔ انگلیسی بخش اعظم مقالهٔ او در این زمینه، در [۱۷] آمده است. اثبات بسیار جالبی از دوآدی وفتی در مورد وجود جوابهای معادلهٔ بلترامی (بدون وابستگی به پارامتر) در [۶] آمده است. آنها ابتدا به کمک یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی با زمان مختلط، نتیجه را برای μی تحلیلی حقیقی ثابت می‌کنند و سپس با به کار بستن فنون استاندارد تقریب، وجود جواب را در حالت کلی نشان می‌دهند. به مسألهٔ کلی انتگرالپذیری ساختارهای تقریباً مختلط هموار در قضیه‌ای بنیادی از نیولندر و نیرنبرگ پاسخ داده شده است [۱۵]؛ این قضیه در حالت هموار دوبعدی اثبات ساده‌ای از انتگرالپذیری را به‌دست می‌دهد.

جامعترین بررسی نگاشتهای شبه‌همدیس را می‌توان در [۱۲] یافت. برای ملاحظهٔ مدخلی کوتاه و عالی بر این موضوع، شامل اثباتی از قضیهٔ ۱ مقالهٔ حاضر و نیز کاربردهایی در نظریهٔ فضاهای تایشموار، [۲] را ببینید. موضوع جالب توجه دیگر در این میان، نظریهٔ نگاشتهای شبه‌همدیس در بعدهای بالاتر است [۱۰].

نظریهٔ فضاهای تایشموار عبارت است از بررسی فضای دگردیسیهای شبه‌همدیس یک رویهٔ ریمانی. این نظریه از لحاظ تاریخی در نتیجهٔ تلاش برای حل مسألهٔ رده‌بندی ساختارهای مختلط روی رویه‌های فشرده به وجود آمد. برای آشنایی با این نظریه و ارتباط آن با دیفرانسیلهای درجهٔ دوم و گروههای فوخسی می‌توان به [۱]، [۸]، یا [۱۱] مراجعه کرد.

دینامیک مختلط قلمرو پهناوری است که کاربرد نگاشتهای شبه‌همدیس در آن موفقیت‌آمیز بوده است. در [۱۳] شرح بسیار خوبی برای آشنایی با نظریهٔ کلاسیک ژولیا ـ فاتو آمده است. کاربردهای استاندارد نگاشتهای شبه‌همدیس در دینامیک مختلط را می‌توان در [۷]، [۱۶]، و [۱۸] یافت. برای ملاحظهٔ توصیفی کلی از کاربرد نگاشتهای شبه‌همدیس در دینامیک (و نیز چند شاخهٔ دیگر) مرجع [۱۹] را نگاه کنید. فنون نظریهٔ فضاهای تایشموار کاربردهای زیبایی در نظریهٔ باز بهنجارش[1] دارند، که برای ملاحظهٔ آن خواننده را به فصل آخر کتاب [۵] رجوع می‌دهیم.

ضمیمهٔ الف. نمادهای متغیر مختلط بر رویه‌ها

فرض کنیم X یک رویهٔ هموار C^∞، همبند، و جهت‌پذیر باشد. کلاف مماس حقیقی TX، و دوگان آن T^*X را که کلافهای برداری از رتبهٔ ۲اند می‌توان با گرفتن حاصلضرب تانسوری $T_{\mathbb{C}}X = TX \otimes \mathbb{C}$ و $T^*_{\mathbb{C}}X = T^*X \otimes \mathbb{C}$ به‌صورت مختلط درآورد. بنابراین، در یک مختصات موضعی (x, y) بر X، مقاطع نوعی $T_{\mathbb{C}}X$ و $T^*_{\mathbb{C}}X$ به‌ترتیب به شکل

1. renormalizatoin

$$u(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+v(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

و

$$u(x,y)dx+v(x,y)dy$$

هستند، که در آن u و v توابعی هموار از x و y با مقادیر مختلط‌اند. دو مقطع خاص

$$d\bar{z}=dx-idy \quad , \quad dz=dx+idy$$

را در نظر می‌گیریم که در هر مختصات موضعی (x,y) پایه‌ای برای $T^*_{\mathbb{C}}X$ تشکیل می‌دهند. برای پایهٔ دوگان در همین مختصات، نمادهای $\frac{\partial}{\partial z}$ و $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ را برمی‌گزینیم:

$$dz(\tfrac{\partial}{\partial z})=1 \quad , \quad dz(\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}})=0$$
$$d\bar{z}\,(\tfrac{\partial}{\partial z})=0 \quad , \quad d\bar{z}\,(\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}})=1$$

بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}) \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y})$$

می‌توان $\frac{\partial}{\partial z}$ و $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ را عملگرهای دیفرانسیلی تلقی کرد که بر توابع هموار $f:U\to\mathbb{C}$ عمل می‌کنند، که در آن U قلمرو مختصات موضعی (x,y) است. این عمل به سادگی با روابط

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}) \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y})$$

تعریف می‌شود. از این پس برای سادگی مشتقات جزئی را با اندیس نشان می‌دهیم، مانند f_z برای $\frac{\partial f}{\partial z}$ و غیره. اکنون در هر مختصات موضعی (x,y) دیفرانسیل تابع f در رابطهٔ

$$df=f_xdx+f_ydy=f_zdz+f_{\bar{z}}d\bar{z}$$

صدق می‌کند.

در حالتی که X ساختار مختلطی دارد که آن‌را به یک رویهٔ ریمانی مبدل می‌کند، زیرفضایِ یک بعدیِ مختلطِ پدیدآمده توسط $\frac{\partial}{\partial z}$ نسبت به هر مختصات موضعی $z=x+iy$ زیرکلافی از $T_{\mathbb{C}}X$ تعریف می‌کند که آن‌را با $T_{hol}X$ نشان می‌دهیم. این مطلب مستقیماً از تحلیلی بودن تعویض مختصات روی X نتیجه می‌شود. $T_{hol}X$ به عنوان یک کلاف حقیقی رتبهٔ ۲ از طریق نگاشت $\frac{\partial}{\partial z}\mapsto\frac{\partial}{\partial x}$ و $i\frac{\partial}{\partial z}\mapsto\frac{\partial}{\partial y}$ با TX یکریخت می‌شود. از معادلات کوشی-ریمان به سادگی نتیجه می‌شود که تابع f بر X تحلیلی است اگر و تنها اگر $f_{\bar{z}}=0$ یا df به کلاف دوگان $T^*_{hol}X$ تعلق داشته باشد.

به حالتِ رویهٔ هموار باز گردیم. یک متریک ریمانی اندازه‌پذیر بر X را می‌توان موضعاً به‌صورت

$$g=Edx^2+2Fdxdy+Gdy^2 \qquad (8)$$

نوشت که در آن E، F، و G توابعی اندازه‌پذیر (به مفهوم لبگ) از x و yاند و تقریباً همه‌جا $E>0$، $G>0$، و $EG-F^2>0$. طول یک بردار مماس

$$\mathbf{v}=u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}$$

از رابطهٔ

$$\|\mathbf{v}\|^2=Eu^2+2Fuv+Gv^2$$

به دست می‌آید. هرگاه از نمادهای مختلط استفاده کنیم، بردار $\mathbf{v}$ نمایشی به‌صورت

$$\mathbf{v}=(u+iv)\frac{\partial}{\partial z}+(u-iv)\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \qquad (9)$$

خواهد داشت. با محاسبهٔ مستقیم معلوم می‌شود که g در (۸) را می‌توان به شکل

$$g(z)=\gamma(z)|dz+\mu(z)d\bar{z}\,|^2 \qquad (10)$$

نوشت که در آن $z=x+iy$، و

$$\gamma(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{E+G}{2}+\sqrt{EG-F^2}\right)$$
$$\mu(z)=\frac{1}{\gamma(z)}\left(\frac{E-G}{4}+i\frac{F}{2}\right)$$

به آسانی می‌توان دید که تقریباً همه‌جا $\gamma>0$ و $|\mu|<1$. عبارت (۱۰) به‌این معنی است که طول بردار مماس $\mathbf{v}$ در (۹) از رابطهٔ

$$\|\mathbf{v}\|^2=\gamma|(u+iv)+\mu(u-iv)|^2$$

به دست می‌آید.

متریک g را در مختصات موضعی z همدیس می‌نامیم اگر $\mu(z)\equiv 0$، که در این‌صورت g به شکل $\gamma(z)|dz|^2$ در می‌آید. این مفهوم بر رویه‌ای که تعویض مختصات آن تنها توابعی هموارند خوش تعریف نیست. در واقع، اگر $z\mapsto w$ چنین تعویض مختصاتی باشد، آنگاه g برحسب w به شکل

$$g(w)=\gamma(w)|z_w dw+z_{\bar{w}}d\bar{w}\,|^2=\gamma(w)|z_w|^2|dw+\frac{z_{\bar{w}}}{z_w}d\bar{w}\,|^2$$

در خواهد آمد که برحسب w همدیس نیست. اما اگر X به ساختاری مختلط مجهز باشد که آن‌را به یک رویهٔ ریمانی بدل کند، تعویض مختصات تابعی تحلیلی است و بنابراین $z_{\bar{w}}=0$، که نشان می‌دهد متریک برحسب w نیز همدیس خواهد بود. نتیجه آنکه بر یک رویهٔ ریمانی، مفهوم یک متریک همدیس به انتخاب مختصات موضعی خاص بستگی ندارد.

ضمیمهٔ ب. همسانریختیهای شبه‌همدیس

دراین ضمیمه چند تعریف معادل برای شبه‌همدیسی را درمورد همسانریختیهای صفحه می‌آوریم. به‌کمک این تعاریف «موضعی» می‌توان مفهوم شبه‌همدیس بودن یک نگاشت را بر رویه‌های ریمانی را تعریف کرد (مراجع [۲] و [۱۲] را نیز ببینید).

در مطالب زیر، همواره فرض بر آن‌است که $f:U\to V$ یک همسانریختی جهت نگهدار بین دو دامنه در صفحه است.

می‌گوییم همسانریختی f مشتقات جزئی تعمیم‌یافته دارد هرگاه توابعی انتگرالپذیر چون ξ و η وجود داشته باشند به‌طوری که به‌ازای هر تابع هموار

$h : U \to \mathbb{C}$ با تکیه‌گاه فشرده، داشته باشیم

$$\int_U \xi h \, dxdy = -\int_U f h_z \, dxdy$$
$$\int_U \eta h \, dxdy = -\int_U f h_{\bar z} \, dxdy$$

در این حالت به مفهوم تعمیم‌یافته می‌نویسیم $\xi = f_z$ و $\eta = f_{\bar z}$.

می‌گوییم f مشتقات جزئی تعمیم‌یافتهٔ موضعاً مربع‌انتگرال‌پذیر دارد، و می‌نویسیم $f \in W^1_{loc}$، اگر مشتقات جزئی تعمیم‌یافتهٔ f_z و $f_{\bar z}$ در U به‌ازای هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ $E \subset U$ در

$$\int_E |f_{\bar z}|^2 dxdy < \infty \quad \text{و} \quad \int_E |f_z|^2 dxdy < \infty$$

صدق کنند.

همسانریختی f مطلقاً پیوسته بر خطوط نامیده می‌شود هرگاه تحدید آن به تقریباً هر خط افقی و عمودی در U مطلقاً پیوسته باشد. از آنالیز حقیقی کلاسیک نتیجه می‌شود که تقریباً همه‌جا در U، مشتقات جزئی f_x و f_y، و بنابراین f_z و $f_{\bar z}$ (به مفهوم عادی) وجود دارند.

یک طوقه زیرمجموعه‌ای از صفحه است که با یک طوقهٔ «مُدور» $A(1,r) = \{z : 1 < |z| < r\}$ همسانریخت باشد. قرار می‌دهیم $A(1,\infty) = \{z : |z| > 1\}$. از قضیهٔ یکنواخت‌سازی نتیجه می‌شود که هر طوقهٔ A به‌طور همدیس با یک $A(1,r)$ یکتا همسانریخت است، که در آن $1 < r \leqslant \infty$. در این‌صورت پیمانهٔ A را با رابطهٔ

$$\text{mod}\,(A) = \frac{1}{2\pi}\log r$$

تعریف می‌کنیم، که $\log\infty = \infty$. نتیجه آنکه پیمانه یک ناوردای همدیس است: دو طوقهٔ A و A' به‌طور همدیس با یکدیگر همسانریخت‌اند اگر و تنها اگر $\text{mod}\,(A) = \text{mod}\,(A')$

قضیهٔ زیر را می‌توان به عنوان تعریف شبه‌همدیسی به‌کار برد.

قضیهٔ ب.۱. فرض کنیم $K \geqslant 1$. برای یک همسانریختی جهت نگهدار $f : U \to V$ شرایط زیر هم‌ارزند:

(i) $f \in W^1_{loc}$ و تقریباً همه‌جا بر U، $|\frac{f_{\bar z}}{f_z}| \leqslant \frac{K-1}{K+1}$.

(ii) f مطلقاً پیوسته بر خطوط است و تقریباً همه‌جا بر U، $|\frac{f_{\bar z}}{f_z}| \leqslant \frac{K-1}{K+1}$.

(iii) به‌ازای هر طوقهٔ $A \subset U$،

$$K^{-1}\text{mod}(A) \leqslant \text{mod}\,(f(A)) \leqslant K\ \text{mod}\,(A)$$

(iv) به‌ازای تقریباً هر x در U،

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\max\{|f(x)-f(y)| : |x-y| = r\}}{\min\{|f(x)-f(y)| : |x-y| = r\}} \leqslant K$$

همسانریختی f را Kـشبه‌همدیس می‌نامیم هرگاه در یکی از شرایط بالا (و بنابراین در همهٔ آنها) صدق کند.

تعریف. فرض کنیم $f : X \to Y$ یک همسانریختی جهت نگهدار بین رویه‌های ریمانی باشد. f را Kـشبه‌همدیس می‌نامیم اگر نمایش موضعی آن در هر مختصات روی X و Y یک همسانریختی Kـشبه‌همدیس بین دامنه‌های صفحه باشد. f را شبه‌همدیس می‌نامیم هرگاه به‌ازای یک $K \geqslant 1$، K ـ شبه‌همدیس باشد.

به‌سادگی دیده می‌شود که این تعریف با تعریفی که پیشتر برحسب برگردان ساختارهای همدیس دادیم یکی است.

در قضیهٔ زیر ویژگیهای اساسی همسانریختیهای شبه‌همدیس خلاصه شده است.

قضیهٔ ب.۲. (الف) اگر $f : X \to Y$ یک همسانریختی K_1ـشبه‌همدیس و $g : Y \to Z$ یک همسانریختی K_2ـشبه‌همدیس باشد، آنگاه $g \circ f : X \to Z$ یک همسانریختی K_1K_2ـشبه‌همدیس است.

(ب) $f : X \to Y$ یک همسانریختی Kـشبه‌همدیس است اگر و تنها اگر $f^{-1} : Y \to X$ چنین باشد.

(ج) $f : X \to Y$ یک همسانریختی ۱ـشبه‌همدیس است اگر و تنها اگر همدیس باشد.

(د) اگر f شبه‌همدیس باشد، آنگاه تقریباً همه‌جا $f_z \neq 0$.

(ه) اگر f شبه‌همدیس باشد، مجموعه‌های با اندازهٔ صفر را به روی مجموعه‌های با اندازهٔ صفر می‌نگارد.

سپاسگزاری

لازم می‌دانیم از آقایان سیاوش شهشهانی، فردریک گاردینر، و برنارد مسکیت به‌خاطر پیشنهادهای ارزشمندشان برای بهبود کیفیت توصیفی مقاله تشکر کنیم.

مراجع

1. W. Abikoff, *The Real Analytic Theory of Teichmüller Spaces*, Lecture Notes in Mathematics 820, Springer-Verlag (1980).
2. L. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, Van Nostrand- Reinhold, Princeton (1966), reprint.
3. ———, and L. Bers, "Riemann mapping's theorem for variable metrics", *Annals of Math.*, **72** (1960) 385-404.
4. E. Beltrami, "Ricerce di analisis applicata alla geometria", *G. Mat. Battaglini*, **2** (1864).
5. W. de Melo, and S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer- Verlag (1993).
6. A. Douady, and A. Fathi, Notes on quasiconformal mappings, University of Paris 11, Orsay (1990).
7. A. Douady, and J. Hubbard, "On the dynamics of polynomial-like mappings", *Ann. Sc. Ecole Norm. Sup.*, (4)**20**(1985) 287-343.
8. F. Gardiner, *Teichmüller Theory and Quadratic Differentials*, Wiley-Interscience (1987).
9. C. F. Gauss, *Werke IV*, 193-216.
10. F. Gehring, "Topics in quasiconformal mappings", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, vol.1* (1986) 62-80.

11. O. Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer- Verlag (1987).

12. _____, and K. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Springer-Verlag (1973).

13. J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable: Introductory Lectures*, Institute for Mathematical Sciences, SUNY Stony Brook (1990).

14. C. Morrey, "On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **43**(1938) 126-166.

15. A. Newlander, and L. Nirenberg, "Complex analytic coordinates in almost complex manifolds", *Annals of Math.*, **65**(1957) 391-404.

16. M. Shishikura, "On the quasiconformal surgery of rational functions", *Ann. Sc. Ecole Norm. Sup.* (4)**20**(1987) 1-29.

17. D. Smith, *Source Book in Mathematics*, McGraw-Hill (1922).

18. D. Sullivan, "Quasiconformal homeomorphisms and dynamics, I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains", *Annal of Math.*, **122**(1985) 401-418.

19. _____, "Quasiconformal homeomorphisms in dynamics, topology, and geometry", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, vol.II*, (1986) 1216-1228.

* * * * * *

* سعید ذاکری، دانشگاه ایالتی نیویورک در استونی بروک، آمریکا

zakeri@math.sunysb.edu

* محمود زینالیان، دانشگاه شهری نیویورک، آمریکا

mzeinali@email.gc.cuny.edu

نشر ریاضی، سال ۷، شمارهٔ ۲، صص ۱۵ـ۲۴

دو مسألهٔ الگوریتمی•

برونو پوازا*
ترجمهٔ یوسف امیرارجمند

۱. یک جمعِ بسیار ساده

مبحث الگوریتم، علمِ محاسبه است؛ کلمهٔ «الگوریتم» از نام خوارزمی ریاضیدان مشهور گرفته شده است. موضوع این علم یافتن روشهای کارآمد برای محاسبه است: کسی که از آن استفاده می‌کند باید بتواند به کمک این علم بین دو روش که به نتیجهٔ واحدی منتهی می‌شوند، روشی را انتخاب کند که به وقت و تلاش کمتری نیاز دارد. بنابراین، وظیفهٔ این علم در وهلهٔ اول، ارزیابی زمان و امکانات لازم برای به نتیجه رسیدن یک محاسبه است؛ در مرحلهٔ بعد باید، درصورت امکان، محاسبه‌ای را جانشین این محاسبه کند که کارآمدتر باشد، یعنی همان کار را انجام دهد اما با هزینهٔ کمتر.

باید بین دو نوع [مدت] زمان تمایز قائل شد: زمانِ موازی و زمانِ متوالی. زمان متوالی، مدتی است که صرف یک کار می‌شود اگر آن کار را به تنهایی انجام دهیم و زمان موازی، مدت لازم برای یک کار است اگر آن را با همکاری دوستان انجام دهیم.

بنا به تجربه یا قرارداد، الگوریتمی را قابل اجرا به‌حساب می‌آوریم که، وقتی داده‌ای به طول n به‌آن داده شود، جواب را در یک زمان متوالی به‌دست دهد که به‌صورت یک چندجمله‌ای برحسب n باشد، یعنی زمانی‌که کران بالای آن n^A، به‌ازای عدد ثابتی مانند A، است. و برای اینکه ارزش آن را داشته باشد که از رفقا کمک بگیریم، می‌پذیریم که این الگوریتم واقعاً رضایتبخش نخواهد بود مگر آنکه زمان موازیِ لازم برای اجرای آن به‌صورت لگاریتمی و دارای کران بالای $B \log n$ باشد، که در آن B یک عدد ثابت است.

واضح است که مدت زمان اجرای الگوریتم، چه متوالی باشد چه موازی، یک مفهوم ریاضیِ خوش‌تعریف نیست؛ بنابراین باید دقیقتر بود.

اولاً باید معلوم کنیم که محاسبات در مورد چیست. واقعگرایانه‌ترین دیدگاه این است که محاسبات در مورد کلماتی است که با یک الفبای متناهی [مرکب از ارقام] نوشته می‌شوند. در مدرسه به‌سختی با الفبای ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ عادت کرده‌ایم. اکنون که در عصر کامپیوتر هستیم، کار را آسان می‌کنیم و از میان این ارقام، تنها دو رقم اول ۰ و ۱ را نگه می‌داریم. حتماً می‌دانید که می‌توان اعداد را برمبنای دو (یا هر مبنای دیگری!) نوشت. کلمهٔ $\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}\ldots\varepsilon_1\varepsilon_0$ نمایشگر عدد صحیح $\varepsilon_n \times 2^n + \varepsilon_{n-1} \times 2^{n-1} + \cdots + \varepsilon_1 \times 2 + \varepsilon_0$ است؛ مثلاً ۱۰۱۰۱ در مبنای دو نمایشگر عددی است که در مبنای ده به‌صورت ۲۱ نوشته می‌شود.

جمع کردن دو عدد که در مبنای دو نوشته شده باشند چندان مشکل نیست، زیرا جدول جمع را می‌توان زود یاد گرفت؛ مثال شکل ۱ را نگاه کنید، در این شکل ارقامِ نگه داشته شده با حروف ایرانیک نوشته شده‌اند: یک به‌علاوهٔ یک، می‌شود ده؛ می‌نویسیم صفر، و یک را نگه می‌داریم؛ یک به‌علاوهٔ یک به‌علاوهٔ یک می‌شود یازده؛ می‌نویسیم یک، و یک را نگه می‌داریم؛ و همین‌طور الی آخر . . .

بنابراین می‌بینیم که، در یک محاسبه، دادهٔ اولیه یک کلمهٔ دودویی است، یعنی رشته‌ای متناهی از ۰ ها و ۱ هاست، و حاصلْ هم به تبع یک کلمهٔ دودویی است. مثلاً، در مورد جمع، دو کلمهٔ دودویی داریم که باید نمایشگر

```
 11   111
      10111
+    110011
-----------
   1001010
```

شکل۱

اعداد صحیح x و y باشند، و می‌خواهیم نمایش دودویی حاصلجمع آنها $x+y$ را بیابیم. طول داده‌ها، برطبق تعریف، تعداد کُل نمادهای ۰ و ۱ ای است که در آن داده وجود دارد؛ بدین ترتیب، وقتی دو عدد n رقمی را با یکدیگر جمع می‌کنیم، طول داده $2n$ است. طول آن کلمهٔ دودویی که نمایشگر عدد x است، تقریباً برابر است با لگاریتم آن عدد در مبنای دو که با $\log x = \mathrm{Log}_{10} x/\mathrm{Log}_{10} 2$ نشان داده می‌شود.

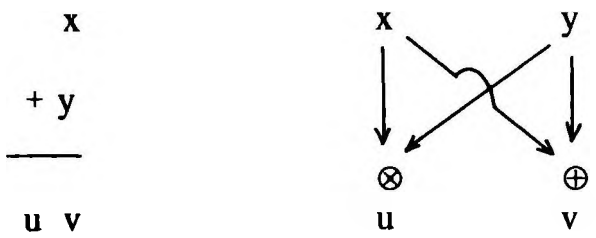
زمان محاسبه برحسب طول داده، یعنی n، حساب می‌شود. تقریباً واضح است که زمانِ لازم برای جمع کردن دو عدد n رقمی با روش دبستانی، تابعی است خطی از n به شکل $An+B$، که متناظر است با تعداد عملیاتی که باید روی نمادهای ۰ و ۱ انجام شود تا حاصل به‌دست آید. این هم واضح است که روشی که اجرای آن گام به گام پیش می‌رود الزاماً روشی است متوالی (که بسیار مناسبِ دبستان است: در دبستان خانم معلم نوشتن از روی دست همکلاسیهایتان را قدغن کرده است!) زیرا، برای دانستن رقم iام سمت راست در عدد حاصل، کافی نیست که ارقام iام دو عددی را که به هم اضافه می‌کنیم بدانیم؛ باید بدانیم آیا باقیمانده‌ای وجود دارد که از سمت راست بیاید یا خیر.

اَخیقار حکیم آشوری این الگوریتم را به‌صورت زیر اصلاح کرد تا یک زمان موازی لگاریتمی به‌دست آورد: فرض کنید می‌خواهیم دو عدد x و y را که به‌وسیلهٔ دو رشتهٔ دودویی با طولی کمتر از 2^{m+1} نمایش داده می‌شوند با یکدیگر جمع کنیم. این دو را به دو قسمت می‌کنیم، و می‌نویسیم $x = a \times 2^m + b$ و $y = c \times 2^m + d$، که در آن اعداد a، b، c، و d با رشته‌هایی دودویی نمایش داده می‌شوند که طول هر یک از 2^m کمتر است. سپس، در حینی که اخیقار دو عدد b و d را با یکدیگر جمع می‌کند، همسر اول او شامیران، a و c را با این فرض که باقیماندهٔ نهایی جمع اخیقار صفر است، جمع می‌کند؛ و همسر دوم او ایشتار، همین جمع را با فرض اینکه باقیمانده ۱ خواهد بود انجام می‌دهد. هر سهٔ آنها همزمان کار می‌کنند، و بعد از اینکه کارشان را تمام کردند معلوم می‌شود که کدامیک، شامیران یا ایشتار، کارش بیهوده نبوده است! نتیجه اکنون در دسترس است. اما نباید وقت را برای نوشتن آن تلف کرد: این‌کار به‌دست $2^m + 1$ زنی که در حرمسرای اخیقار هستند سپرده خواهد شد. زن iام باید رقم iام حاصل را بنویسد؛ او برحسب باقیمانده‌ای که اخیقار حساب کرده است، یا رقم iام شامیران و یا رقم iام ایشتار را می‌نویسد.

فرض می‌کنیم t_m زمان موازی لازم برای به‌دست آوردن حاصلجمع دو عدد 2^m رقمی به‌علاوهٔ یک عدد یک‌رقمی (باقیمانده) باشد. بنابراین داریم $t_{m+1} \leqslant t_m + A$، که در آن A یک ثابت است و متناظر است با زمانی که زنهای حرمسرا برای انتخاب خود لازم دارند؛ از آنجا داریم $t_m \leqslant A \times m$. بنابراین اگر $2^{m-1} < n \leqslant 2^m$، برای جمع کردن دو عدد n رقمی با این روش، زمان موازی لازم بیشتر از $A \times m \leqslant A(\log n + 1)$ نخواهد بود.

۲. مدارهای بولی

در اثبات کوچکی که در بالا آمد، مسامحه‌ای صورت گرفت: در این اثبات برای تعریف زمان، چه زمان متوالی و چه زمان موازی، شهود خواننده به کمک طلبیده شده است. در این بخش وسیلهٔ جبران این بی‌دقتی را فراهم می‌آوریم.



شکل۲

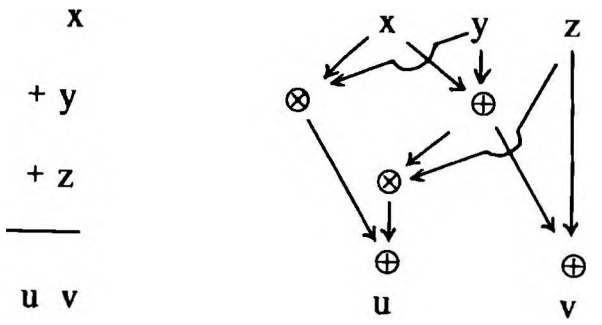
تصویر شکل ۲یک مدار بولی بسیار ساده را نشان می‌دهد و تصویر شکل ۳مدار دیگری را نشان می‌دهد که کمی پیچیده‌تر است.

همان‌طور که می‌بینیم، مدار عبارت است از یک نمودار جهتدار، یعنی ساختاری مرکب از تعدادی متناهی نقطه، که در اینجا به آنها «دَر» می‌گوییم، و تعدادی متناهی پیکان. هر پیکانی از یک دَر به دَرِ دیگر می‌رود. سه نوع دَر وجود دارد: اول دَرِ ورودی که هیچ پیکانی به‌آن منتهی نمی‌شود، و با یک نماد متغیر x، y، z ... (یک متغیر واحد ممکن است چند در ورودی را مشخص کند)، و یا با یکی از دو نماد ثابت ۰ یا ۱ مشخص می‌گردد؛ دوم درهای جمعی، که با نماد $\oplus$ نشان داده می‌شوند و بالاخره درهای ضربی که با نماد $\otimes$ مشخص می‌شوند و دو پیکان به آنها منتهی می‌شود. دری را که پیکانی از آن خارج نمی‌شود دَرِ خروجی گویند. به‌علاوه، لازم است نمودار شامل هیچ دورِ جهتدار نباشد، یعنی در آن هیچ راه دوری، که به نقطهٔ اولش بازگردد و تمام پیکانهایش در یک جهت واحد باشند نتوان یافت.

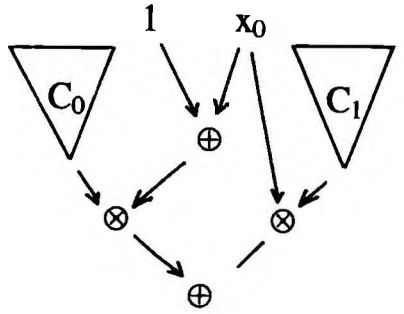
دو نماد $\oplus$ و $\otimes$ نشان‌دهندهٔ عملیات اصلیی هستند که فقط روی دو نماد ۰ و ۱ اجرا می‌شوند و به‌ترتیب جمع و ضرب به پیمانهٔ دو هستند که مقادیر آنها برابر است با $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$، $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$، $0 \otimes 0 = 0 \otimes 1 = 0$، $1 \otimes 1 = 1$. این دو عملِ بسیار ساده ویژگیهای معمولِ جمع و ضرب را دارند، و تحت آنها مجموعهٔ $\{0, 1\}$ هیأتی می‌سازد که آن را با $\mathbf{F}_2$ نشان می‌دهیم.

به مدار C با m خروجی، که ورودیهای آن با n متغیر x_1، ...، x_n مشخص شده‌اند، تابع f_C از $\{0, 1\}^n$ در $\{0, 1\}^m$ نظیر می‌شود که به طریق زیر محاسبه می‌گردد: رشتهٔ دودویی ε_1، ...، ε_n مرکب از ε_i ها را درنظر می‌گیریم که ε_i یا ۰ است یا ۱؛ به‌جای هر x_i مقدار ε_i ی متناظر را قرار می‌دهیم؛ سپس این مقادیر را در مدار پراکنده می‌سازیم، پیکانها را دنبال می‌کنیم، و هر بار که از دری عبور می‌کنیم عملی را که متناظر با آن است انجام می‌دهیم: هر دَرِ $\oplus$، حاصلجمع دو مقداری را که دریافت می‌کند به پیمانهٔ دو تحویل می‌دهد. هر دَرِ $\otimes$، حاصلضرب دو مقداری را که دریافت می‌کند به پیمانهٔ دو تحویل می‌دهد. از آنجا که در نمودارْ دور وجود ندارد، بالاخره این عمل به هر یک از m هایی که از مدار خارج می‌شوند، بدون هیچ‌گونه ابهامْ مقداری می‌دهد. طبق تعریف، m تایی متناظر، مقدار $f_C(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n)$ است.

مثلاً، در مورد مدار شکل ۲، اگر به دو ورودی x و y مقدار ۱ را نسبت دهیم، در خروجی u عدد ۱ و در خروجی v عدد ۰ به‌دست می‌آید. در مدار شکل ۳، اگر مقدار ۱ را به ورودیهای x و z و مقدار ۰ را به ورودی y نسبت دهیم، باز هم در خروجی u عدد ۱ و در خروجی v عدد ۰ به‌دست



شکل۳



شکل۵

می‌آید. خواننده می‌تواند، اگر روش بهتری به‌نظرش نمی‌رسد، با انجام دادن تمام آزمایشها، تحقیق کند که این مدار آخر در v حاصلجمع x، y و z را به پیمانهٔ دو به‌دست می‌دهد، در حالی‌که u مقداری را نمایش می‌دهد که در میان مقادیر x، y و z از همه بیشتر ظاهر می‌شود (اگر در میان مقادیر x، y و z دو تا ۱ باشد داریم $u = ۱$، در غیر این‌صورت $u = ۰$).

هر تابع دلخواهی از $\{۰,۱\}^n$ به $\{۰,۱\}^m$ را می‌توان با یک مدار مناسب نمایش داد (اما، طبیعتاً ممکن است دو مدار مختلف تابع واحدی را نشان دهند؛ در این‌صورت می‌گوییم که این دو مدار هم‌ارز هستند). در واقع، اولاً چون تابعی از $\{۰,۱\}^n$ به $\{۰,۱\}^m$ چیزی جز یک نوع گروه‌بندی m مختصهٔ آن، که توابعی از $\{۰,۱\}^n$ به $\{۰,۱\}$ هستند، نیست، می‌توان فرض کرد که $m = ۱$ (علت این هم که غالباً در بررسی مدارها به مدارهایی باز می‌گردیم که تنها یک خروجی دارند همین است)؛ سپس از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. به‌ازای $n = ۱$، چهار تابع ممکن عبارت‌اند از ۰، ۱، x، $۱ \oplus x$، که توسط مدارهایی که در شکل ۴ نشان داده شده‌اند محاسبه می‌گردند. اکنون باید ثابت کنیم که اگر این امر در مورد توابع n متغیره صادق باشد، در مورد توابعی که به $n+۱$ متغیر بستگی دارند نیز صادق است. فرض می‌کنیم $f(x_۰, x_۱, \ldots x_n)$ یک چنین تابعی باشد، که دو تابع n متغیرهٔ $f_۰(x_۱, \ldots x_n) = f(۰, x_۱, \ldots x_n)$ و $f_۱(x_۱, \ldots x_n) = f(۱, x_۱, \ldots x_n)$ به‌آن وابسته است؛ اگر دو تابع اخیر توسط مدارهای $C_۰$ و $C_۱$ محاسبه شوند، تابع $f = x_۰ \otimes f_۱ \oplus (۱ \oplus x_۰) \otimes f_۰$ توسط مداری محاسبه می‌شود که در شکل ۵ نمایش داده شده است، و از آنجا نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

این مطلب را می‌توان به‌نحو دیگری نیز مطرح کرد، و آن اینکه هر تابعی از $\{۰,۱\}^n$ به $\{۰,۱\}$ را می‌توان به‌صورت یک چندجمله‌ای در هیأت $\mathbf{F}_۲$ بیان کرد؛ تقریباً واضح است که این چندجمله‌ایها هم توابعی هستند که توسط مدارها محاسبه می‌شوند! مثلاً در مورد مدار شکل ۳،

شکل۴

در حالی که

$$v = (x \oplus y) \oplus z = x \oplus y \oplus z$$

همان‌طورکه همه می‌دانند، چندجمله‌ای طبق تعریف برابر است با مجموعی از تک‌جمله‌ایها. چون با هیأتی سر و کار داریم که هر عنصر آن در رابطهٔ $x^۲ = x$ (منظورم البته $x \otimes x = x$ است!) صدق می‌کند، فقط مجهولات درجهٔ اول را دخالت می‌دهیم؛ با این‌وصف می‌توانیم، به‌محض اینکه n مجهول را در دست داشته باشیم، ۲^n تک‌جمله‌ای بسازیم. وقتی می‌خواهیم مقدار چندجمله‌ای $P(x_۱, \ldots x_n) = (۱ \oplus x_۱) \otimes \ldots \otimes (۱ \oplus x_n)$ را در یک نقطه حساب کنیم، بهتر است که با بسط آن برحسب ۲^n تک‌جمله‌ای‌اش شروع نکنیم، چون مدت زمان لازم برای این کار، تابعی نمایی از n است؛ بنابراین، هریک از $۱ \oplus x_i$ها را محاسبه می‌کنیم، و سپس حاصلضرب آنها را درنظر می‌گیریم. برای این کار تنها به تعدادی خطی عملیات احتیاج داریم (درواقع، $P(x_۱, \ldots x_n) = ۱$ اگر تمام x_i ها صفر باشند، در غیر این‌صورت $P(x_۱, \ldots x_n) = ۰$)؛ این طرز محاسبه به‌صورت یک مدار درمی‌آید که بدون کم و کاست نمایشگر عبارت $P(x_۱, \ldots x_n) = (۱ \oplus x_۱) \otimes \ldots \otimes (۱ \oplus x_n)$ است، و در مورد چهار متغیر در شکل ۶ ترسیم شده است.

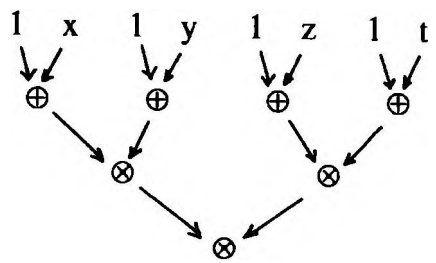
بنابراین، برای کارآمد بودن شیوهٔ محاسبه، بهتر است از نوشتن عبارات چندجمله‌ای به‌صورت متعارف اجتناب کنیم، و این چیزی است که تمام دانشجویان سال اول دانشگاهها می‌دانند. اما منظور ما از «عبارت چندجمله‌ای» دقیقاً چیست، و تفاوت آن با مدارهای ما کدام است؟ برای جواب دادن به‌این سؤال، به‌این نکته توجه می‌کنیم که درهای این مدارها، که درصورت ورودی نبودن باید به‌سبب دوتایی بودنِ عملیات مربوطه دو پیکان دریافت کنند، این امکان را دارند که هر تعداد پیکان صادر کنند. می‌گوییم ظرفیت (خارجی) آنها نامحدود است. این توانایی به‌این شکل متجلی می‌شود که می‌توان از نتیجهٔ محاسبه‌ای که یک‌بار انجام شده است دوبار استفاده کرد و تکرار آن لزومی ندارد.

در میان مدارها، آنهایی را که تنها دارای یک خروجی هستند و ظرفیت آنها یک است، یعنی مدارهایی را که درهایشان فقط می‌توانند یک پیکان واحد صادر کنند، درنظر می‌گیریم. به آنها عبارتهای بولی خواهیم گفت، و خواننده خود می‌تواند دریابد که این عبارتها درواقع متناظرند با عبارات چندجمله‌ای (که به‌صورت مجموعی از تک‌جمله‌ایها درنیامده‌اند) که به شکل سطری (پشت سرهم) نوشته شده‌اند. در این طرزِ نوشتن اگر دو زیرعبارتِ یکسان

$$P(x,y,z,t) =$$

$$((1\oplus x)\otimes(1\oplus y))\otimes((1\oplus z)\otimes(1\oplus t)) =$$

$$1 \oplus x \oplus y \oplus z \oplus t \oplus x\otimes y \oplus x\otimes z \oplus x\otimes t \oplus y\otimes z \oplus y\otimes t \oplus z\otimes t \oplus x\otimes y\otimes z \oplus x\otimes y\otimes t \oplus x\otimes z\otimes t \oplus y\otimes z\otimes t \oplus x\otimes y\otimes z\otimes t$$



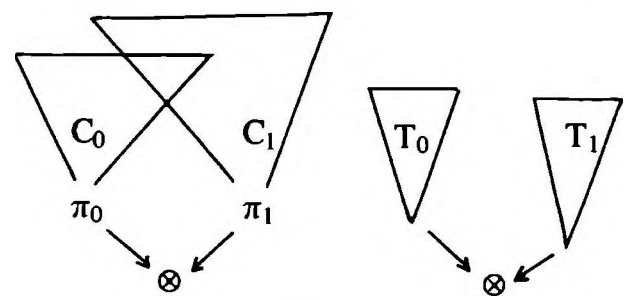
شکل ۶

در دو محل مختلف ظاهر شوند، فرمالیسم ریاضی ما را وادار می‌کند که آنها را تکرار کنیم: به شکل ۶ نگاه کنید، در این شکل ترجمهٔ کلمه به‌کلمه سبب شده است که به‌جای یک در با ظرفیت چهار، چهار در با نشانهٔ ۱ بیاوریم.

این را هم همین الآن بگوییم: نمی‌دانیم که آیا در حقیقت می‌توان به کمک مدارها توابع را به‌صورتی واقعاً کوتاهتر از عبارات نشان داد یا نه؛ این مسأله، مسألهٔ حل‌نشده‌ای در مبحث الگوریتم است، که در پاراگراف بعد مورد بررسی قرار خواهد گرفت. برای اینکه منظورمان را از کلمهٔ «کوتاهتر»، دقیقتر بیان کنیم، باید دو پارامتر عددی وابسته به مدار را تعریف کنیم: اولی اندازهٔ آن است، که عبارت است از تعداد درهایی که ورودی نیستند؛ دومی عمق آن است، که عبارت است از درازای (= تعداد پیکانهای) حداکثر راهی که از یک ورودی به یک خروجی می‌رود. مثلاً، اندازهٔ مدار شکل ۳ برابر است با ۵ و عمق آن ۳ است.

هر مداری، مانند C، که تنها یک خروجی دارد، آشکارا به یک عبارت هم‌ارز T به‌صورت زیر تبدیل می‌شود: با استقرا روی عمق C، یعنی p، شروع می‌کنیم: اگر $p = 0$، C یک ورودی می‌شود و قرار می‌دهیم $T = C$؛ اگر $p = q + 1$، خروجی C دو پیکان خود را از درهای π_0 و π_1 دریافت می‌کند (که ممکن است یکی باشند!): آن قسمت از C را که بالای درِ اول قرار دارد با C_0، و آن قسمت از C را که بالای در دوم است با C_1 نشان می‌دهیم؛ از آنجا که یک در C می‌تواند چند پیکان صادر کند، C_0 و C_1 مجزا نیستند. اکنون این دو مدار را، که عمق آنها حداکثر q است، به دو جملهٔ هم‌ارز T_0 و T_1 تبدیل می‌کنیم. این کار به ما اجازه می‌دهد که $T_0 \oplus T_1$ یا $T_0 \otimes T_1$ را جایگزین C کنیم، بسته به اینکه C جمعی باشد یا ضربی (نگاه کنید به شکل ۷).

این تبدیل عمق را تغییر نمی‌دهد، اما اثر فاجعه‌باری بر اندازه دارد. در واقع این تبدیل عبارت است از اینکه در هر مرحله به‌جای C_0 و C_1 دو



شکل ۷

نسخهٔ متناظر و مجزا از هم را قرار دهیم، و این کار، اندازه را هر بار تقریباً دو برابر می‌کند، و در آخر اندازهٔ T نسبت به اندازهٔ C نمایی خواهد شد!

مسألهٔ حل‌نشده‌ای که اکنون مطرح شد، این است که آیا تبدیل دیگری وجود دارد که ظریفتر باشد و همواره یک مدار را، بدون افزایشِ خارق‌العادهٔ اندازه، به یک عبارت هم‌ارز تبدیل کند؟ اکثر متخصصین برآن‌اند که جواب منفی است، اما نمی‌دانند چگونه آن را ثابت کنند.

این بخش را با دو مثال از تبدیلهایی که در آنها اندازه و عمق فقط در اعداد ثابتی ضرب می‌شوند خاتمه می‌دهم.

اولین تبدیل بسیار ساده است و مربوط می‌شود به عملیات پایه بر روی دو نماد ۰ و ۱. در تعریف مدارهای بولی، بیشتر مرسوم است که «عملگرهای بولی»، یعنی $\neg x = 1 \oplus x$، $x \vee y = x \oplus y \oplus x \otimes y$، $x \wedge y = x \otimes y$ را در نظر بگیریم. از آنجا که هر یک از آنها برحسب جمع و ضرب به پیمانهٔ ۲ بیان می‌شود، می‌توان هر مداری را که دارای ورودیهای $\neg$، $\vee$، و $\wedge$ باشد، به‌سادگی، با قرار دادن یک مدار کوچک به‌جای هر ورودی بولی، به یک مدار با ورودیهای $\oplus$ و $\otimes$ تبدیل کرد. این کار را می‌توان در جهت عکس نیز انجام داد زیرا $x \oplus y = (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$ و $x \otimes y = x \wedge y$. ما ترجیح می‌دهیم که مدارها را از طریق عملیاتی معرفی کنیم که ماهیت حسابی دارند و ریاضیدانان با ویژگیهای آنها آشناترند تا با ویژگیهای عملیات بولی؛ اما خواهیم دید که با این کار تغییر چندانی پدید نمی‌آید.

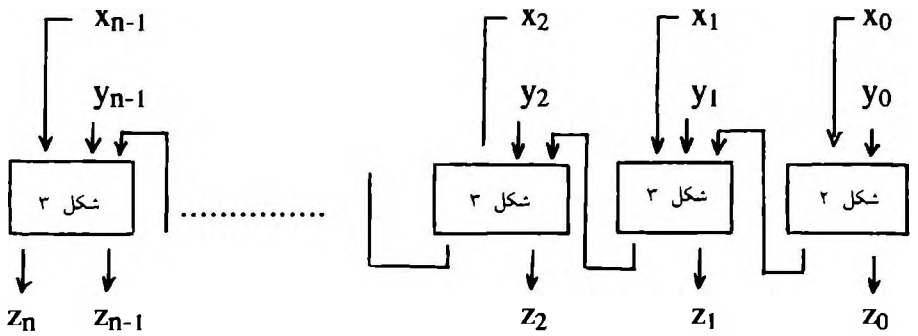
مثال دوم بسیار ظریفتر است. این مثال را هوور[1]، کلاو[2]، و پی‌پنجر[3] ابداع کرده‌اند (نگاه کنید به اثباتی که در [۹]، قضیهٔ ۶.۲، آمده است) و هر مداری مانند C با اندازهٔ t و عمق p را به مدار هم‌ارزی مانند C^* تبدیل می‌کند که ظرفیت آن دو است (از یک ورودی فقط صفر، یک، یا دو پیکان می‌تواند خارج شود)، اندازهٔ آن t^* است که از $3t$ کوچکتر است و عمق آن p^* است که از $2p$ کوچکتر است!

۳. الگوریتم و رشتهٔ مدارها

نمایش مداریِ تابع بولی نحوهٔ محاسبهٔ آن را بهتر از نمایش سطریش نشان می‌دهد. اندازهٔ مدار، که عبارت است از تعداد کل عملیات اصلیی که باید انجام شود، همان زمان متوالی لازم برای محاسبه است. اما زمان موازی، عمق مدار است زیرا، اگر در کنار هر دری یک نگهبان بگماریم، او نمی‌تواند قبل از رفقایش که بالا هستند عمل کند.

از اینجا تعریفی به‌دست می‌آید، که شاید برخی جزئیات آن (که تأثیری

1. Hoover 2. Klawe 3. Pippenger



شکل۸

بر مفهوم «محاسبهٔ قابل اجرا در یک زمان چندجمله‌ای» ندارد) محل بحث باشد، اما به هر حال تعریفی است مُتقن از مفهوم زمانِ اختصاص داده شده به یک الگوریتم. در اینجا آنچه را که در بخش اول در مورد زمان لازم برای جمع دو عدد گفتیم ثابت خواهیم کرد.

از این‌رو فرض می‌کنیم که می‌خواهیم اعداد $x_0 \ldots x_{n-1}$ و $y_0 \ldots y_{n-1}$ را که توسط دو رشتهٔ دوتایی با اندازهٔ n نمایش داده می‌شوند با یکدیگر جمع کنیم. مداری که جمع را انجام می‌دهد باید $2n$ ورودی متناظر با تمام این ارقام داشته باشد؛ و نیز باید $n+1$ خروجی برای نوشتن $z_0 z_1 \ldots z_n$، یعنی حاصلجمع وجود داشته باشد.

اکنون مداری را که متناظر با جمع دبستانی است، توصیف می‌کنیم. ابتدا x_0 و y_0 را با یکدیگر جمع می‌کنیم که در نتیجه آخرین رقم حاصلجمع و یک باقیماندهٔ r_1 به‌دست می‌آید: این دقیقاً همان کاری است که مدار شکل ۲ انجام می‌دهد. سپس، باید x_1، y_1 و r_1 را با یکدیگر جمع کنیم تا z_1 و ماندهٔ r_2 به‌دست آید: این کاری است که مدار شکل ۳ انجام می‌دهد. حالا باید دوباره شروع کنیم، و برای این کار باید نسخه‌هایی از مدار شکل ۳ را در کنار هم قرار دهیم. نگاه کنید به طرح سوار کردن مدار در شکل ۸.

پیدا کردن اندازهٔ مدار ساده است: یک نسخه از شکل ۲ را که دارای دو دَرِ عملیاتی است درکنار $n-1$ نسخه از شکل ۳ که اندازهٔ آن ۴ است قرار می‌دهیم. بنابراین اندازهٔ کل می‌شود $4(n-1)+2=4n-2$؛ از این‌رو زمان متوالی خطی است و کران بالای آن $4n$ است.

پیدا کردن عمق هم خیلی پیچیده‌تر از این نیست: یک نسخه از مدار شکل ۲، به عمق ۱، و $n-1$ نسخه از مدار شکل ۳، به عمق ۳، را بر روی هم قرار داده‌ایم (هر چند که طرح شکل ۸ افقی است!)، به‌طوری‌که کران بالای عمق کل $3(n-1)+1$ است، اما، اگر با دقت بیشتری نگاه کنیم (این طرح را برای، مثلاً، $n=4$ رسم کنید)، می‌بینیم که «مسیر بُحرانی» متعلق به مانده‌هاست، و این راه از هر شکلِ ۳ تنها از طریق دو پیکان عبور می‌کند. به‌عبارت دیگر، یکی از طولانی‌ترین راههای مدار، راهی است که x_0 را به z_n وصل می‌کند، و اندازهٔ آن $2(n-1)+1=2n-1$ است.

بنابراین، این الگوریتم که یک الگوریتم متوالی نمونه است، با زمان موازی خطی کار می‌کند، و برای کسی که عجله دارد رضایت‌بخش نیست. برای توصیف مدار اخیقار، باید ابتدا به خوانندهٔ (ناآشنا) توضیح دهم که زنان حرمسرا به چه کار می‌آیند. گفتیم که اگر ماندهٔ اخیقار ۰ باشد، آنها عدد شامیران را انتخاب می‌کنند، و اگر مانده ۱ باشد، عدد ایشتار را انتخاب می‌کنند. به‌عبارت دیگر آنها تابع $s(x,y,z)$ را که به‌صورت $s(x,y,0)=x$ و $s(x,y,1)=y$ تعریف می‌شود حساب می‌کنند. این تابع طبیعتاً گزیننده نامیده می‌شود، و به‌وسیلهٔ مدار شکل ۹ نمایش داده شده است.

در ضمن این را هم مشاهده می‌کنیم که به کمک گزیننده می‌توان جمع و ضرب را به پیمانهٔ دو بیان کرد، زیرا: $x \oplus y = s(x, s(1,0,x), y)$، $x \odot y = s(0,x,y)$. از این‌رو می‌توان گزیننده را به‌عنوان تنها عمل پایه در مدارها درنظر گرفت. بنابراین لازم است که هر دَر که ورودی نیست سه پیکان دریافت کند، و این باید به‌ترتیب باشد زیرا عمل دیگر جابه‌جایی نیست. این امر زیاد هم غیرطبیعی نیست، زیرا محاسبهٔ چیزی جز یک رشته انتخاب نیست: برحسب اینکه یک ۰ و یا یک ۱ پیش‌رو باشد، این یا آن عمل انجام می‌شود. اما ما دو عمل $\oplus$ و $\odot$ را به‌آن ترجیح داده‌ایم زیرا این‌دو عمل ویژگیهای جبری جالب توجه‌تری دارند. همان‌طورکه گفتیم این انتخاب اهمیت حیاتی ندارد، زیرا با تغییر پایهٔ عملیات اصلی تنها کاری که انجام می‌شود این است که اندازه و عمق مدارها در یک، عدد ثابت ضرب می‌شود.

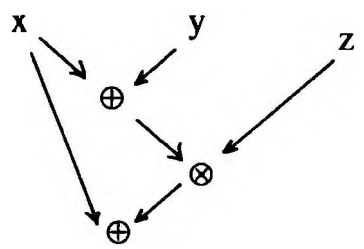
بنابراین فرض می‌کنیم A_m مداری باشد که روش اخیقار برای جمع دو عدد 2^m رقمی را توصیف‌می‌کند. عمق مدار را با p_m نشان‌می‌دهیم. به‌ازای $m=0$، داریم $2^m=1$، و مدار شکل ۳ مناسب است: $p_0=3$. شکل ۱۰ [زنان] حرمسرای اخیقار را نشان می‌دهد، که مشغول جمع زدن دو عدد 2^{m+1} رقمی هستند. در سمت راست، خودِ اخیقار مشغول جمع زدن دو نیمهٔ سمت راست است (دو عدد 2^m رقمی و یک ماندهٔ ۰)؛ او 2^m رقم اول حاصلجمع به‌علاوهٔ یک، مانده را پیدا می‌کند؛ در سمت چپ شامیران و ایشتار را مشاهده می‌کنیم، که مشغول جمع زدن دو نیمهٔ سمت چپ هستند و هر یک با فرض متفاوتی در مورد ماندهٔ اخیقار کار می‌کند. وقتی هر سه کارشان را تمام کنند، 2^m+1 زن حرمسرا (که فقط یکی را نشان داده‌ایم) انتخابشان را می‌کنند، و 2^m+1 رقم سمت چپ حاصلجمع را می‌نویسند.

چون عمق s برابر ۳ است، می‌بینیم که $p_{m+1}=p_m+3$، یا $p_m=3(m+1)$. عمق در واقع لگاریتمی است، زیرا اخیقار برای جمع زدن دو عدد n رقمی، با قرار دادن چند صفر در سمت چپ آنها را کامل خواهد کرد تا کلماتی با طول 2^m به‌دست آورد، که m کوچکترین عدد ممکن است؛ بنابراین $m \leqslant 1+\log n$؛ او این کار را در زمانی (موازی) که کران بالای آن $6+3\log n$ است انجام می‌دهد.

$$s(x,y,0) = x$$

$$s(x,y,1) = y$$

$$s(x,y,z) = (x \oplus y) \otimes z \oplus x$$



شکل۹

در این میان، بیایید اندازهٔ مدار A_m یعنی t_m را محاسبه کنیم. داریم $t_0 = 4$. از آنجا که هر گزیننده متناظر است با یک مدار با اندازهٔ ۳ (نگاه کنید به شکل ۹)، داریم $t_{m+1} = 3t_m + 3(1 + 2^m)$؛ قرار می‌دهیم $u_m = 3^m t_m$؛ پس رابطهٔ بازگشتی زیرا را به‌دست می‌آوریم: $u_0 = 4$، $u_{m+1} = u_m + (1/3)^m + (2/3)^m$؛ و از آنجا $u_m = 2 + 1 + 1/3 + \cdots + (1/3)^m + 1 + 2/3 + \cdots + (2/3)^m$. برای محاسبهٔ مقدار دقیق u_m کافی است فرمول حاصلجمع یک تصاعد هندسی را به‌یاد بیاوریم، و توجه داشته باشیم که این مقدار همواره از حد خود، یعنی $2 + (1 - 1/3)^{-1} + (1 - 2/3)^{-1} = 6.5$، کوچکتر خواهد بود. بنابراین $t_m < (6.5)3^m$. به‌جای m قرار می‌دهیم $1 + \log n$، و می‌بینیم که اندازهٔ مداری که دو عدد با طول n در عمق لگاریتمی را جمع می‌کند از $(6.5)3^1 + \log n = (3 \times 6.5)2^{\log n \times \log 3} < 20 n^{\log 3} < 20 n^2$ بیشتر نیست (چون $2 < 3 < 4$، پس $1 < \log 3 < 2$؛ فراموش نکنید که لگاریتم در مبنای دو است!). برای اینکه یک زمان موازی لگاریتمی داشته باشیم، مجبور شدیم مقداری انرژی هَدَر دهیم، و در نتیجه دیگر اندازهٔ مدار برحسب n خطی نیست؛ اما بازهم چندجمله‌ای باقی می‌ماند. این نهایتِ حکمت اخیقار را می‌رساند که برای اینکه جمعهایش را انجام دهد به تعدادی نمایی زن حرمسرا احتیاج ندارد.

۴. مسأله موازی بودن

نکته‌ای هست که دربارهٔ آن زیاد بحث نمی‌کنیم: هر الگوریتمی را می‌توان به‌طور طبیعی با یک مدار نمایش داد، که اندازه و عمق آن تقریبهای معقولی هستند از زمان متوالی و زمان موازیِ لازم برای اجرای آن الگوریتم. امیدوارم که خواننده از طریق مثال جمع به اندازهٔ کافی در این مورد متقاعد شده باشد.

دقیقتر بگوییم: هر الگوریتمْ رشته‌ای نامتناهی از مدارهای $C_1, \ldots, C_n, \ldots$ به‌دست می‌دهد، که جملهٔ nام آن متناظر است با محاسبه‌ای که روی داده‌های با طول n انجام می‌شود (بنابراین C_n دارای n متغیر ورودی است). در واقع، الگوریتم جمع تنها دو عدد ده رقمی یا دو عدد ده هزار رقمی را با یکدیگر جمع نمی‌کند بلکه، دو عدد n رقمی را با یکدیگر جمع می‌کند، که n دلخواه است.

برای اینکه بیان مطلب را ساده کنیم، از این به بعد فرض می‌کنیم که مدارها فقط یک خروجی دارند، یعنی جواب الگوریتم همیشه یا ۱ است و یا ۰، یعنی یا «آری» و یا «خیر». به‌عبارت دیگر، الگوریتمْ تعلق دادهٔ مفروض μ را، که یک کلمهٔ دوتایی دلخواه است، به یک مجموعهٔ معین X می‌آزماید (اگر جواب در مورد دادهٔ μ، ۱ باشد، می‌گوییم الگوریتم μ را می‌پذیرد، و اگر جواب ۰ باشد می‌گوییم μ را طرد می‌کند). تحت این شرایط، به مجموعهٔ X می‌گوییم مسأله (به‌عبارت دیگر، معنی «مسأله» چیزی جز «مجموعهٔ کلمات» نیست!). مثالِ یک مسأله: $x_1, \ldots, x_n$ را داریم، سومین رقم اعشار عددی را که از جمع نیمهٔ اول این کلمه با نیمهٔ دوم آن به‌دست می‌آید پیدا کنید!

الگوریتمی که شایستهٔ نام الگوریتم باشد، روی داده‌های با طول دلخواه محاسبات را یکسان انجام می‌دهد، به‌این معنی که رشتهٔ $\{C_n\}$ از مدارها رفتار نسبتاً منظمی از خود نشان می‌دهند. در اینجا نمی‌خواهیم به تحلیل این موضوع بپردازیم زیرا اولاً چنین تحلیلی آن‌قدرها هم ساده نیست، و ثانیاً این تحلیل اثری بر روی دو مسألهٔ مهمی که در اینجا مورد بحث ما هستند و به مقدار امکانات لازم برای اجرای یک محاسبه مربوط می‌شوند، ندارد. بنابراین رشته‌های دلخواه C_n را می‌پذیریم، با این شرایط که اندازه و یا عمق آنها از توابع مشخصی از n تجاوز نکند و این رشتهٔ تعریف‌کننده چیزی است که متخصصین امر، آن را «الگوریتمهای نایکنواخت» می‌گویند.

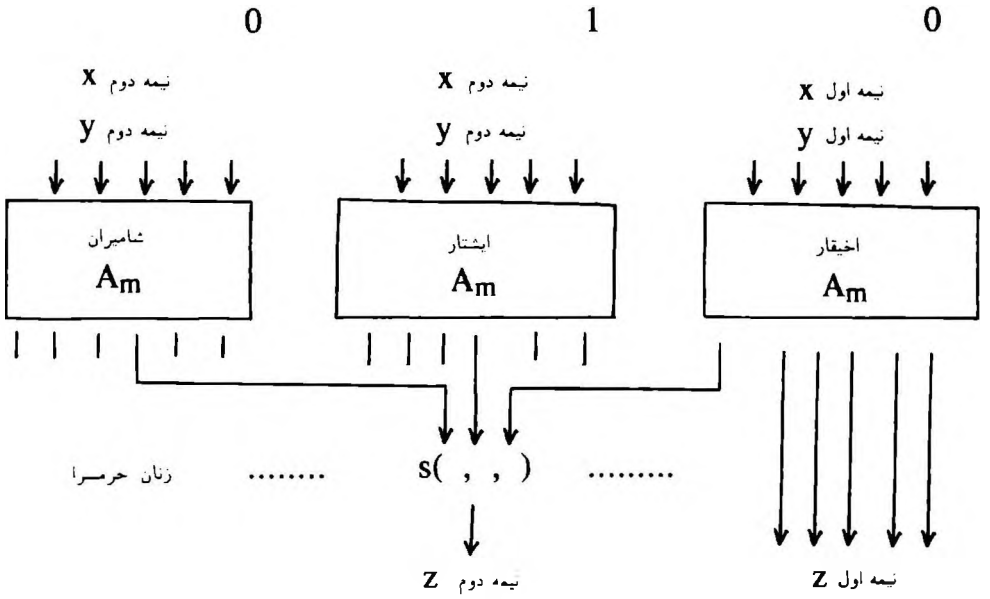
بدین‌ترتیب می‌گوییم مسألهٔ X از نوع $\mathbb{P}$ است هرگاه توسط رشته‌ای چون $\{C_n\}$ از مدارها حل شود که اندازهٔ آن، t_n، از یک چندجمله‌ای برحسب n تجاوز نکند. این ردهٔ $\mathbb{P}$ نوع نایکنواخت ردهٔ Pِ مسائلی است که در یک زمان چندجمله‌ای حل می‌شوند. این رده بیشتر به‌نام P/poly معروف است و در اینجا بیش از این دربارهاش بحث نمی‌کنیم. همین‌طور، نوعِ نایکنواختِ ردهٔ نیک، به روایت کوک * را درنظر خواهیم گرفت: مسأله را $\mathbb{NC}$ گوییم هرگاه توسط رشته‌ای از مدارها حل شود که عمق آن p_n از تابعی خطی از $\log n$ تجاوز نکند.

تقریباً واضح است (نگاه کنید به حرمسرای اخیقار) که ردهٔ $\mathbb{NC}$ مشمول ردهٔ $\mathbb{P}$ است. در واقع، از آنجا که هر دری تنها دو پیکان دریافت می‌کند، مداری با عمق p بیش از $2p$ در نخواهد داشت (از پایین شروع کنید)، و در نتیجه اندازهٔ مداری به عمق $A \log n$ کوچکتر از n^A است.

چیزی که مشکل ایجاد می‌کند، عکس قضیه است: نمی‌دانیم که آیا $\mathbb{P} = \mathbb{NC}$ یا نه، یعنی نمی‌دانیم که آیا می‌توان هر مسأله‌ای را که قابل حل در یک زمان متوالی چندجمله‌ای است، در یک زمان موازی لگاریتمی نیز حل کرد یا نه. سؤال این است که آیا $\mathbb{P} = \mathbb{NC}$؟ این همان مسألهٔ موازی بودن است.

احتمالاً تساوی برقرار نیست، اما نمی‌توان این موضوع را ثابت کرد. از طرف دیگر متخصصان مبحث الگوریتم برای پیدا کردن الگوریتمهایِ با عمق

* Nick's Classe de Cook



شکل ۱۰

لگاریتمی برای اکثر مسائل جاری تلاش فراوانی به‌خرج داده‌اند. این را در مورد جمع دو عدد مشاهده کردیم؛ در مورد ضرب، مسأله کمی پیچیده‌تر است [۹].

برای فهم بهتر مطلب، دو حکم را اثبات می‌کنیم.

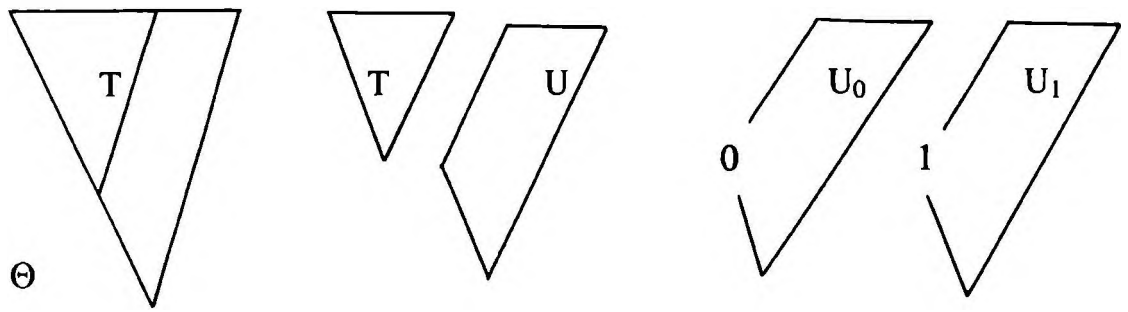
لِم قطری کردن. $\mathbb{P} = \mathbb{NC}$ اگر و تنها اگر عدد ثابتی مانند A وجود داشته باشد به‌طوری که هر مداری با اندازهٔ t، که دارای تنها یك خروجی است، هم‌ارز باشد با یك مدار (یا حتی یك عبارت!) که عمق آن از $A \log t$ تجاوز نکند.

اثبات. وجود A ایجاب می‌کند که $\mathbb{P} = \mathbb{NC}$، زیرا $\log(n^B) = B \log n$. برعکس، فرض می‌کنیم A وجود ندارد یعنی به‌ازای هر عدد صحیح m، مداری مانند C_m داریم با اندازهٔ t_m، که هم‌ارزی با عمق کوچکتر از $m \log(t_m)$ ندارد. می‌توانیم، شاید با اغماض از برخی C_m ها، فرض کنیم که رشتهٔ $\{t_m\}$ از اندازه‌ها اکیداً صعودی است. تعدادی درهای ورودی C_m از $1 + t_m$ کوچکتر است (این را می‌توان از طریق استقرا بر روی اندازه و با حذف یک ورودی ثابت کرد)، و تعداد متغیرهای ورودی v_m نیز همین‌طور. اکنون مسألهٔ X زیر را درنظر می‌گیریم که فقط شامل کلماتی است که اندازهٔ آنها به‌صورت $n = 1 + t_m$ است. یک چنین کلمه‌ای، μ، در X است اگر و فقط اگر C_m، کلمه‌ای را که از v_m حرف اول آن تشکیل می‌شود بپذیرد. در این‌صورت X در یک زمان متوالی خطی حل می‌شود و نه در یک زمان موازی الگاریتمی. **فهوالمطلوب**

قضیهٔ اسپایرا. هر عبارت بولی با اندازهٔ t هم‌ارز است با یك مدار (یا یك عبارت!) با عمقی کوچکتر از $1 + 4 \log t$.

اثبات (نگاه کنید به شکل ۱۱). اثبات از طریق استقرا بر روی t است. گزاره به‌ازای $t = 1$، که عمق عبارت ۱ است، درست است. بنابراین عبارت Θ با اندازهٔ t را که مقدار آن اقلاً ۲ باشد درنظر می‌گیریم. یک زیرعبارت مینیمال با اندازه‌ای اکیداً بزرگتر از $t/2$ استخراج می‌کنیم. خروجی آن دو پیکانش را از یک یا دو زیر عبارت که اندازهٔ آنها کوچکتر از و یا مساوی با $t/2$ است دریافت می‌کند، که آن‌هم اکیداً کوچکتر است از t. برطبق فرض استقرا، T هم‌ارز است با عبارتی مانند T^* با اندازهٔ $1 + 1 + 4 \log(t/2) = 1 + 4 \log t - 3$. اگر T کل عبارت Θ باشد، مطلوب حاصل است؛ در غیر این‌صورت، عباراتی را که از جایگذاریِ فقط یک درِ ورودی به‌جایِ T در Θ حاصل می‌شوند با U_0 و U_1 نشان می‌دهیم؛ U_0 عبارتی است که در آن دَرِ ورودیِ جایگزینِ T با ۰ نشانگذاری شده است، و به همین نحو U_1. اندازهٔ این دو جمله از $t/2 + 1$ (در واقع از $(t/2 + \frac{1}{2})$!) کوچکتر است. آنها را مانند T به یک یا دو زیر عبارت با اندازهٔ کوچکتر از $t/2$ تجزیه می‌کنیم و در مورد آنها از فرض استقرا استفاده می‌کنیم. بنابراین U_0 و U_1 را هم می‌توان با دو عبارت U_0^* و U_1^* به عمق $2 + 4 \log(t/2)$ تعویض کرد. عبارت Θ هم‌ارز عبارت $\Theta^* = s(U_0^*, U_1^*, T^*)$ است، که در آن s گزیننده‌ای است که از طریق مداری به عمق ۳ بیان می‌شود. بنابراین عمق Θ^* (حداکثر) برابر است با $3 + 2 + 4 \log(t/2) = 1 + 4 \log t$. **فهوالمطلوب**

نتیجه: $\mathbb{P} = \mathbb{NC}$ به‌این معنا هم هست که می‌توان مداری مانند C را به یک عبارت هم‌ارز T تبدیل کرد؛ اندازهٔ T هم کوچکتر از یک چندجمله‌ای برحسب اندازهٔ C است. در واقع، از طرفی دیگر اگر $\mathbb{P} = \mathbb{NC}$، مدار C با اندازهٔ t تبدیل می‌شود به یک مدار، یا حتی یک عبارت T، به عمق $A \log t$، که اندازهٔ آن کوچکتر است از $2^{A \log t} = t^A$. از طرف دیگر، اگر جملهٔ T با اندازهٔ t^A با C هم‌ارز باشد، طبق قضیهٔ اسپایرا به یک جملهٔ هم‌ارز T^* به عمق $1 + 4 \log(t^A) = 1 + 4A \log t$ تبدیل می‌شود. بنابراین مسألهٔ



شکل۱۱

موازی بودن هم‌ارز است با مسألهٔ قدرتِ توصیف‌کنندگی عبارتها و مدارها، در مقایسه با یکدیگر.

۵. مسألهٔ مهم دیگر

در ابتدای این مقاله شما را به دبستان برگرداندم و از شما خواستم که جمع بزنید. اکنون به دبیرستان می‌برمتان، و دستگاههای معادلات خطی را حل خواهیم کرد.

یک داده برای مسألهٔ LIN که اکنون بررسی خواهیم کرد عبارت است از دستگاهی مرکب از n معادلهٔ خطی n مجهولی که ضرایب آن در $\mathbf{F}_2$ هستند؛ این دستگاه به‌صورت زیر است:

$$a_{11} \odot x_1 \oplus \ldots \oplus a_{1n} \odot x_n = b_1$$

$$a_{n1} \odot x_1 \oplus \ldots \oplus a_{nn} \odot x_n = b_n$$

که در آن a_{ij} ها و b_i ها همگی ۰ هستند یا ۱!

عدد صحیح n شاخص معقولی از اندازهٔ دستگاه است زیرا که اندازهٔ دستگاه متناظر است با $n^2 + n$ ضریب دوتایی داده شده.

مسألهٔ LIN این است که بدانیم آیا این دستگاه جوابی در $\mathbf{F}_2$ دارد یا ندارد، یعنی جوابی که از x_iهایی تشکیل شده باشد که مقدار آنها همگی ۰ و یا ۱ باشد.

روش اول: فقط تعدادی متناهی n تایی بولی وجود دارند که می‌توانند جواب دستگاه باشند. همگی آنها را یکی یکی می‌آزماییم و مشاهده می‌کنیم که آیا جوابی در میان آنها وجود دارد یا خیر! اینکه آیا این روش شایستهٔ نام الگوریتم هست یا نه، محل بحث است. نقص این روش در این است که به تعدادی نمایی آزمایش احتیاج دارد.

می‌توانیم دترمینانها را حساب کنیم که هم در $\mathbf{F}_2$ و هم در هر هیأت دیگری معتبر است؛ در روش کرامر فرض بر این است که می‌توان یک زیردترمینان ماکسیمال غیر صفر از دستگاه [معادلات] استخراج کرد. از این نکته بگذریم و توجه خود را به محاسبهٔ یک دترمینان از مرتبهٔ n معطوف داریم.

دترمینان دستگاه ما دارای فرمول زیر است:

$$D = \Sigma a_{1,\sigma 1} \ldots a_{n,\sigma n} = \Sigma a_{\sigma 1,1} \ldots a_{\sigma n,n}$$

که جمعبندی روی تمام جایگشتهای σی $\{1, \ldots, n\}$ صورت می‌گیرد. لازم نیست نگران علامت جایگشتها باشیم زیرا $1 - = 1$. ضرب کردن n عامل که مقدار هر یک ۰ و یا ۱ است، بیشتر از n واحد زمان وقت نمی‌گیرد. کاری که زیاد وقت می‌گیرد انجام دادن $n!$ ضرب، و سپس جمع کردن حاصلضربها با هم است. زمان لازم برای این کار تابعی است که از تابع نمایی هم بزرگتر است.

باقی می‌ماند روش حذفی گاوس. این روش عبارت از این است که به‌جای دستگاه [معادلات]، دستگاه هم‌ارزی به‌دست آوریم که مثلث‌شکل است و جواب را فوری به‌دست می‌دهد.

شروع کار بدین‌گونه است: اولین مجهول را درنظر می‌گیریم؛ اگر در هیچ یک از معادلات ظاهر نشده باشد آن را یک پارامتر محسوب می‌کنیم، در غیر این‌صورت یکی از معادلاتی را که شامل آن مجهول می‌شود در سطر اول، که سطر محور است، قرار می‌دهیم؛ سپس این سطر را به تمام سطور دیگری که شامل این مجهول می‌شود اضافه و یا از آنها کم می‌کنیم. به‌این ترتیب دستگاهی به‌دست می‌آوریم که تشکیل شده از یک معادله که مجهول اول را برحسب مجهولات دیگر بیان می‌کند، و $n - 1$ معادلهٔ دیگر با $n - 1$ مجهول که مجهول اول از آنها حذف شده است. این دستگاه با دستگاه قبل هم‌ارز است زیرا از ترکیب سطرهای دستگاه قبل به‌دست آمده است. ممکن است این حالت پیش بیاید که اولین عضو یکی از این معادلات جدید ناپدید شود؛ اگر در مورد دومین عضو نیز چنین باشد، شرط $0 = 0$ به‌دست می‌آید، و می‌توان سطر مورد نظر را حذف کرد؛ اگر دومین عضو ناپدید نشود، شرط $1 = 0$ به‌دست می‌آید و دستگاه غیرممکن [ممتنع] است. همین اعمال را برای حذف دومین، و سپس سومین مجهول و غیره تکرار می‌کنیم. اگر به حالت غیرممکنی برنخوریم، بالاخره یک دستگاه مثلثی به‌دست خواهد آمد، که در آن برخی از مجهولات، که به‌صورت پارامتر درنظر گرفته شده بودند، به عضو دوم، منتقل شده‌اند. اگر به شرط $1 = 0$ برنخوریم، دستگاه جواب دارد.

اکنون حداکثر زمان محاسبهٔ متوالی را، بدون دقت زیاد، پیدا می‌کنیم (و خوانندهٔ ناباورمان را دعوت می‌کنیم که خود مدار متناظر با این الگوریتم را رسم کند!). برای جدا کردن سطر اول از بقیهٔ سطرها باید $n + 1$ عمل انجام داد؛ $n - 1$ سطر دیگر نیز وجود دارند؛ بنابراین برای حذف اولین مجهول،

$(n+1)(n-1) < n^2$ عمل لازم است. از آنجا که باید n مجهول حذف شوند، تعداد عملیات لازم برای مثلثی‌سازی از مرتبهٔ n^3 است، یعنی زمان لازم از درجهٔ سوم n است، و ما طبق قرارداد و یا بنا به تجربه این زمان را عملی می‌دانیم!

حال، پس از یادآوری مطالب بالا دستگاههایی درنظر می‌گیریم که از معادلات چندجمله‌ای با ضرایب متعلق به $\mathbf{F}_2$ تشکیل شده‌اند و دیگر به معادلات خطی اکتفا نمی‌کنیم. خانواده‌ای متشکل از n معادله به‌صورت $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ را، که در آن P یک چندجمله‌ای است که به‌صورت مجموع چند تک‌جمله‌ای نوشته می‌شود، یک دستگاه معادلات چندجمله‌ای با اندازهٔ (حداکثر) n می‌گوییم؛ تعداد کل مجهولات دستگاه حداکثر n تاست. عدد صحیح n، در مورد چندجمله‌ایها، محک واقعاً خوبی است برای اندازهٔ دستگاه.

مسئلهٔ POL عبارت از این است که بدانیم آیا چنین دستگاهی در $\mathbf{F}_2$ جواب دارد یا نه.

سؤال مهم دوم که به‌صورت «آیا P = NP؟» یا دستکم «آیا $\mathbb{P} = \mathbb{NP}$؟» مطرح می‌شود این است که بدانیم آیا الگوریتمی برای حل POL در یک زمان (متوالی) چندجمله‌ای وجود دارد یا نه.

البته می‌توان تمام مقادیر ممکن مجهولات را آزمود، اما این کار به زمانی نمایی احتیاج دارد. بیایید روش حذف را بیازماییم. قرار می‌دهیم $x = x_1$، $y = (x_2, \ldots, x_n)$. هر معادله‌ای به‌صورت $A(y) \otimes x \oplus B(y) = 0$، نوشته می‌شود که A و B در $\mathbf{F}_2[y]$ هستند. به‌ازای هر y که $A(y) = 1$، این معادله دارای جواب یکتای $x = B(y)$ است؛ در حالی که اگر $A(y) = 0$، مقدار x هرچه باشد، باید داشته باشیم $B(y) = 0$. به‌عبارت دیگر، معادله دارای جواب است اگر و تنها اگر معادلهٔ زیر دارای جواب باشد:

$$(1 \oplus A(y)) \otimes B(y) = 0 \qquad (i)$$

هرگاه چند معادله داشته باشیم، باید این مطلب را که مقادیر به‌دست آمده برای x برابر هستند بیان کنیم، و این منجر می‌شود به

$$A(y) \otimes A'(y) \otimes (B(y) \oplus B'(y)) = 0 \qquad (ii)$$

بنابراین اگر تمام معادلاتی را که به شکل (i) و نیز تمام آنهایی را که به شکل (ii) هستند بنویسیم، دستگاهی به‌دست خواهیم آورد که متغیر x از آن حذف شده است، و دارای یک جواب است اگر و تنها اگر دستگاه اولیه جواب داشته باشد. با تکرار این عمل، دستگاهی به‌دست می‌آوریم بدون متغیر، که تنها درصورتی سازگار است که شامل $1 = 0$ باشد!

بله، اما این کار عملی نیست، زیرا زمانِ لازم به‌سرعت و با شدت افزایش می‌یابد، به دو دلیل. اولاً باید، برطبق قراردادهایمان، چندجمله‌ایها را به‌صورت مجموعی از تک‌جمله‌ایها بنویسیم، به‌عبارت دیگر باید ضربها را در معادلاتی به‌شکل (i) و (ii) انجام دهیم. تکرار این عمل مقداری وقت لازم دارد. ثانیاً، پس از اولین حذف، درحدود n^2 معادله از نوع (ii) و پس از حذف دوم تقریباً n^4 معادله خواهیم داشت ... و الیٰ آخر؛ بنابراین خیلی زود با تعدادی نمایی معادله مواجه خواهیم شد! (برعکس حالت خطی، که در آن حذف گاوسی تعداد معادلات را افزایش نمی‌دهد.)

«P = NP?» اسرارآمیزترین مسألهٔ حل‌نشدهٔ مبحث الگوریتم است. پانزده سالی است که این مسألهٔ مشغلهٔ فکری تمام متخصصین بوده است و جملگی، به استثنای چند آشوبگر، متفق‌القول‌اند که جواب منفی است. بنابراین بجاست که از خود بپرسیم اهمیت NP در چیست، و چرا حل POL این‌قدر مهم است.

سعی خواهم کرد در چند کلمه جوابتان را بدهم. فرق بین حذف مجهول بین دو معادلهٔ خطی $x \oplus L(y) = 0$ و $x \oplus L'(y) = 0$، و حذف x بین دو معادلهٔ چندجمله‌ای $A(y) \otimes x \oplus B(y) = 0$ و $A'(y) \otimes x \oplus B'(y) = 0$، در این است که در مورد اول انشعاب وجود ندارد، در حالی که در مورد دوم، باید، برحسب اینکه $A(y)$ صفر است یا نه، چندین امکان را بررسی کرد: به‌این علت است که الگوریتم حذف، معادلاتی به‌شکل (ii) به‌وجود می‌آورد، که بالاخره تعداد آنها فوق‌العاده زیاد می‌شود.

الگوریتم NP، الگوریتمی است که باید در هر مرحله ازکارکردش، چندین امکان را بررسی کند؛ هر شاخه از کارکرد به یک زمان چندجمله‌ای احتیاج دارد، اما باید تعدادی نمایی از شاخه‌ها را بررسی کند؛ به محض اینکه یکی از شاخه‌ها اجازه دهد الگوریتم جواب مثبت می‌دهد. به‌عبارت دیگر اگر شاخهٔ درست را حدس بزنیم، جواب مسأله چندجمله‌ای می‌شود (در اینجا، در هر مرحله باید معادلهٔ «محوری»، مانند $A(y) = 0$، را که حذف x را ممکن می‌سازد حدس زد. خوب اگر این‌طور است، یکباره می‌توان جواب را حدس زد). گزارهٔ P = NP به‌این معناست که هر مسأله‌ای که به‌این ترتیب از طریق حدس زدن حل شود می‌تواند از طریق دیگر بدون حدس زدن نیز در یک زمان (متوالی) چندجمله‌ای حل شود. گزاره $\mathbb{P} = \mathbb{NP}$ نیز همان است اما به‌صورت نایکنواخت.

NP و سؤال بالا ازاین نظر اهمیت دارند که حاوی تعداد باور نکردنی مسألهٔ الگوریتمی جالب توجه‌اند، که خیلی دوست داریم برای آنها الگوریتمهای چندجمله‌ای داشته باشیم. اما چنین چیزی رؤیای زیبایی بیش نیست.

اینکه اهمیت مسألهٔ POL در ردهٔ NP تا این اندازه حیاتی است، به‌این علت است که تمام مسائل در ردهٔ اخیر توسط یک الگوریتم چندجمله‌ای به POL تبدیل می‌شود (می‌گوییم که POL، NP-تمام است؛ $\mathbb{NP}$-تمام نیز هست)؛ به‌عبارت دیگر درجهٔ پیچیدگی الگوریتمی POL حداکثر در ردهٔ NP است؛ اگر خودش P باشد، هر X دیگری در NP هم همین‌طور است. به‌جای اینکه به تفصیل توضیح دهم که یک تبدیل چندجمله‌ای چیست، مثالی خواهم آورد از تبدیل یک مسألهٔ POL به مسأله‌ای که ظاهراً ساده‌تر است، اما در واقع به همان اندازه پیچیده است.

مسألهٔ مورد نظر، مسألهٔ POL۳ است، که حالت خاصی است از POL که در آن هر معادله تحت این قید اضافی است که نباید شامل بیش از ۳ متغیر از n متغیر باشد.

قضیهٔ کوک. اگر POL۳ را بتوان در زمانی چندجمله‌ای برحسب n حل کرد، POL را هم می‌توان در همین زمان حل کرد (و P=NP).

اثبات. فرض می‌کنیم S یک دستگاه معادلات چندجمله‌ای با اندازهٔ n باشد. تک‌جمله‌ای $m = x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_p$ را که در این دستگاه هست درنظر می‌گیریم، و به‌آن $p-1$ مجهول جدید، یعنی $a_2, \ldots, a_p$،

نسبت می‌دهیم. دستگاه $x_1 \otimes x_2 = u_3$، $u_3 \otimes x_3 = u_4$، ... $u_p \otimes x_p = v$ معادل است با شرط $m = v$. سپس یکی از معادلات S به‌شکل $P = m_1 \oplus \ldots \oplus m_q = 0$ را درنظر می‌گیریم که به تک‌جمله‌ایهای آن متغیرهای v_1، ...، v_q نسبت داده شده‌اند. اکنون $q - 2$ مجهول جدید، یعنی w_3، ...، w_q را معرفی می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که دستگاه $w_3 = v_1 \oplus v_2$، $w_4 = w_3 \oplus v_3$، ...، $w_q \oplus v_q = 0$ هم‌ارز است با معادلهٔ $P = 0$.

بنابراین می‌بینیم که دستگاه T متشکل از تمام این معالات جدید دارای جواب است اگر و تنها اگر دستگاه S اولیه دارای جواب باشد. تمام این معادلات به‌صورت $x \otimes y \oplus z = 0$، $x \oplus y \oplus z = 0$، $x \oplus y = 0$، $x = 0$، $x = 1$ (حالتِ تک جمله‌ای ثابت!) هستند، و در نتیجه این دستگاه واقعاً داده‌ای است برای مسألهٔ SAT3. طول آن چقدر است؟ حداکثر n^2 تک‌جمله‌ای وجود دارد که هر یک بیش از n مجهول جدید و n معادله وارد کار نمی‌کنند. بنابراین اندازهٔ T از مرتبهٔ n^3 است. بنابر فرض، وجود یک جواب برای T را می‌توان در یک زمان چندجمله‌ای برحسب n^3 تعیین کرد، و این یک چندجمله‌ای در n نیز هست. فهوالمطلوب.

بنابراین POL3 ساده‌تر از POL نیست؛ و این امر چندان هم اسرارآمیز نیست؛ همین تبدیل را از LIN به حالت خاص آن LIN3 داریم، که در آن هر معادله‌ای بیش از سه متغیر ندارد (قرار می‌دهیم $u_1 = a_1 \otimes x_1$، $u_2 = u_1 \oplus a_2 \otimes x_2$، و غیره)، اما این کار به ما در حل LIN کمک زیادی نمی‌کند! برعکس، مسألهٔ POL2، که در آن هر معادلهٔ چندجمله‌ای فقط شامل یک یا دو متغیر می‌شود، به‌سادگی قابل حل است.

قضیه. مسألهٔ POL2ـ یعنی این مسأله که آیا دستگاهی مرکب از n معادلهٔ چندجمله‌ای با n مجهول که در آن هر معادله فقط شامل یك یا دو متغیر می‌شود دارای جواب است یا نه ـ از نظر الگوریتمی در یك زمان چندجمله‌ای قابل حل است.

اثبات. مشاهده می‌کنیم که اگر الگوریتم حذف را در مورد معادلات دو متغیره به‌کار ببریم، تنها معادلاتی با (حداکثر!) دو متغیر تولید می‌شوند. در این‌صورت ضرب چندجمله‌ایها سریعاً انجام می‌شود، زیرا یک چندجمله‌ای با دو متغیر x و y متشکل از بیش از چهار تک‌جمله‌ای ($x \otimes y$، x، y، ۱!) نیست؛ به‌علاوه، تعداد معادلات نمی‌تواند فوق‌العاده زیاد شود، زیرا بیش از $8n \times (n-1)$ چندجمله‌ای شامل دو متغیر که از میان $x_1 \ldots x_n$ انتخاب شده‌اند وجود ندارد. در هر مرحله معادلات را غربال می‌کنیم و تکراریها را حذف می‌کنیم، و در یک زمان چندجمله‌ای به نتیجه می‌رسیم. فهوالمطلوب

۶. توضیح دربارهٔ مراجع مقاله

مراجع مربوط به سه نتیجه‌ای که در این مقاله ذکر کردیم عبارت‌اند، از [۷] [۱۰] و [۳] (که در آن وجود خود مسائل NPـتمام نشان داده شده است). اگر فکر می‌کنید نگارندهٔ این سطور در مورد موضوع الگوریتم خالص و ناب قصور ورزیده به منابع کلاسیک در این مورد رجوع کنید: [۱] و [۸]. اثر مرجعی که باید برای گم نشدن در جنگلِ مسائل NPـبدان مراجعه کرد، مرجع [۵] است. در مورد مدارهای بولی دو مرجع اصلی وجود دارد: [۴] و [۱۱]. قبل از خواندن این آثار مهم، خواننده‌ای که از اسلوب این مقاله خوشش آمده می‌تواند یک کتاب راهنمای جدید [۹] را که در آن مطالب اصلی در مورد کاربرد مدارها در الگوریتم یادآوری شده مطالعه کند. این اثر در چارچوبی قرار دارد که در [۲] معرفی شده و در [۶] بسط و گسترش یافته و در آن محاسبات تنها به کمک دو نماد ۰ و ۱ انجام نشده، بلکه به‌وسیلهٔ عناصر یک ساختار دلخواه انجام شده است. این روش ممکن است کمتر از روش محاسبهٔ دوتایی واقعگرایانه باشد (که این‌هم جای بحث دارد)، اما امتیاز آن این است که مسائلی را مطرح می‌کند که از لحاظ ریاضی جالب توجه هستند، و شاید هم ـ البته مسلم نیست ـ آسانتر از دو مسألهٔ «P = NP?» و «P = NC?» باشند.

مراجع

1. A.V. Aho, J. E. Hopcroft & J.D. Ullman, *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley (1968).
2. Lenore Blum, Mike Shub & Steve Smale, "On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness, recursive functions, and universal machines", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **21** (1989) 1-46.
3. S.A. Cook, "The complexity of theorem proving procedures", *Proc. Third Annual ACM Symposium on the Theory of Computing* (1971) 151-158.
4. Paul E. Dunne, *The Complexity of Boolean Networks*, Academic Press (1988).
5. M.R. Garey & D.S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, H. Freeman, San Francisco (1979).
6. John B. Goode, "Accessible telephone directories", *The Journal of Symbolic Logic*, **59** (1994) 92-105.
7. H.J. Hoover, M.M. Klawe & N.J. Pippenger, " Bouding fan-out in logical networks", *Journal of the Association for Computing Machinery*, **31** (1984) 13-18.
8. Donald E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, vol. 3, Addison-Wesley (1973).
9. Bruno Poizat, *Les Petits Cailloux*, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah n° 3, Editions Aléas, Lyon, France (1995).
10. Spira, "On the time necessary to compute switching functions", *IEEE Transactions on Comp.*, **20** (1971) 104-105.
11. Ingo Wegener, *The Complexity of Boolean Functions*, Wiley-Teubner (1988).

* * * * * *

• این مقاله را نویسنده برای چاپ در نشر ریاضی نوشته است. متن فرانسهٔ مقاله، پس از انتشار ترجمهٔ فارسی آن در نشر ریاضی، در مجلهٔ فرانسوی *Gazette des Mathématiciens* چاپ خواهد شد.

* برونو پوازا، مؤسسه ژیرار دزارگ، دانشگاه لیون فرانسه؛ دانشگاه قزاقستان در قراگاندا
poizat@jonas.univ-lyon1.fr

ریاضیدانِ فیلسوف: هانس هان و حلقهٔ وین*

کارل زیگموند*

بر سر درِ آکادمی افلاطون نوشته شده بود: «کسی که هندسه نمی‌داند، وارد نشود.» ولی علی‌رغم این سخن نغز، ریاضیدانان و فلاسفه در طی قرون و اعصار اغلب نسبت به هم بی‌اعتنا بوده‌اند و حتی خصومت می‌ورزیده‌اند، چنان‌که گویی حوزهٔ تفکر انتزاعی تنگتر از آن است که دو رشتهٔ مختلف در آن جا بگیرند. دکارت و پاسکال در هر دو رشته به مقام والایی دست یافتند اما صرف‌نظر از این اقدامات انفرادی، همکاری واقعی بین ریاضیدانان و فیلسوفان تا قرن حاضر برقرار نشده بود. این همکاری با مشارکت راسل و وایتهد در نوشتنِ پرینکیپیا ماتماتیکا آغاز شد و به تشکیل حلقهٔ وین انجامید که در حدود ۱۹۳۰ رونق و شکوفایی یافت.

بنیانگذار و احتمالاً محور حلقهٔ وین، هانس هانِ ریاضیدان بود که به‌خاطر قضیهٔ هان-باناخ شهرت دارد. وی راهنما و استاد رسالهٔ کورت گودل بود؛ به کارل پوپرِ جوان حساب دیفرانسیل و انتگرال درس داد و مشوق او در نوشتن کتاب منطق اکتشاف علمی بود؛ به شکل‌گیری اندیشه‌های فلسفی کارناپ کمک کرد؛ و میزبان جلسات عصرانهٔ معروفی بود که به بازگشت ویتگنشتاین به فلسفه انجامید. در مجموعه آثار هان ــ که مشتمل بر سه جلد قطور و بیشتر در زمینهٔ آنالیز، توپولوژی، و حساب وردشهاست ــ نوشته‌های فلسفی جای کمی را اشغال کرده‌اند، ولی او از نزدیک شاهد مباحثات اساسیِ [نیمهٔ اول قرن] دربارهٔ مبانی ریاضیات و منطق بود و در برگزاری و پیشبرد این مباحثات نقش داشت.

در زمان تولد هان در ۱۸۷۹، دانشگاهِ شهر زادگاهش وین ریاضیدان برجسته‌ای، به استثنای لودویگ بولتسمن (آن‌هم برای مدتی کوتاه)، نداشت که به او ببالد. ولی در میان همشاگردان هان، آن‌قدر افراد بااستعداد بودند که برای یک آکادمی کفایت می‌کرد: از جمله، گوستاو هرگلوتس[1] که تحقیقاتش در اخترشناسی و نظریهٔ اعداد بعدها کرسی استادی را در لایپزیگ و گوتینگن برایش به ارمغان آورد؛ همکلاسی هرگلوتس به‌نام پاول اهرنفست، که بعدها یکی از تأثیرگذارترین فیزیکدانان نظری دوران خودش (و جانشین لورنتس در لیدن) شد، و هاینریش تیتسه[1]، ریاضیدانی با آثارِ فوق‌العاده زیاد که به‌دلیل کارهایش در توپولوژی معروف است و بعدها در مونیخ به استادی رسید. این چهار یار «جدانشدنی» در واقع پس از مدت کوتاهی از هم جدا شدند و هر یک از وین به‌سوی شهر دیگری رفتند ولی مانند تفنگداران آلکساندر دوما دوستی خود را تا پایان عمر حفظ کردند و بارها و بارها با یکدیگر دیدار کردند. مثلاً ده سال بعد هان و تیتسه به اتفاق یکدیگر یک رشته سخنرانی عمومی دربارهٔ ریاضیات مقدماتی ایراد کردند که متن آنها ده سال پس از آن به‌صورت کتاب به چاپ رسید.

ولی مدتی طول کشید تا این چهار نفر گرد هم آیند. هان ابتدا به خواست پدرش به تحصیل حقوق پرداخت اما پس از یک سال استقلال خود را نشان داد و به ریاضیات روی آورد. چند ترم را در دانشگاههای استراسبورگ و مونیخ گذراند و سپس به وین بازگشت. هان رسالهٔ دکتری خود را زیر نظر گوستاو فون اِشِریش[2] گذراند که مؤسسهٔ ریاضیات دانشگاه تحت تأثیر او به وضوح وضعیت بهتری پیدا کرده بود. دومین ممتحنِ هان، بولتسمن بود که پس از اشتغال کوتاه‌مدت در چندین شهر ــ گراتس، مونیخ، وین، و لایپزیگ ــ به کرسی فیزیک نظری در زادگاهش بازگشته بود. ولی اشریش این امتیاز را داشت که هم کاشف هانس هان بود و هم (چند سال بعد) یوهان رادون را کشف کرد. رادون همان کسی است که مبانی ریاضیِ برش‌نگاری[3] را در ۱۹۱۷ عرضه کرد و اندازهٔ رادون و تبدیل رادون هم به نام او نامیده شده است. هم هان و هم رادون با هدایت اشریش نخستین پژوهشهایشان را در حساب وردشها انجام دادند. این مبحث در آن زمان دورهٔ پرجنب و جوشی را از سر می‌گذراند (۳ مسأله از ۲۳ مسألهٔ سال ۱۹۰۰ هیلبرت به حساب وردشها مربوط می‌شد). در این زمینه، دستاوردهای رادون پردوام‌تر از آب در آمد، ولی هان به سرعت شهرت گسترده‌ای به‌عنوان متخصصِ این مبحث به دست آورد.

1. Herglotz

1. Tietze 2. Escherich 3. tomogradphy

هانس هان: مردی بلندقامت بود؛ «آدمی قوی، سرزنده، و بسیار زبان‌آور، که همیشه با صدای بلند حرف می‌زد» (منگر)، ولی دوستانش او را **Hähnchen** (خروس کوچک) می‌نامیدند. پوپر نوشت: «در برخورد با او احساس می‌شد که شخصی فوق‌العاده منضبط است.»

بی‌تردید مهمترین مرکز ریاضی در آغاز قرن بیستم، گوتینگن بود و هر یک از این چهار نفر مدتی را به‌عنوان دورهٔ پس از دکتری در محیطِ هیجان‌انگیز سمینار هیلبرت گذراندند. هان هنوز بیست سالش نشده بود که برای نوشتن فصلی در زمینهٔ حساب وردشها در دائرةالمعارف علوم ریاضی معتبر کلاین انتخاب شد. همکارش در نوشتن این مقاله، ارنست تسرملو دستیار هیلبرت بود. تقریباً در همان زمان تسرملو مشغول فرمولبندی اصل موضوع انتخاب بود که ۲۵ سال بعد یکی از اولین کاربردهای آن در قضیهٔ هان-باناخ پیدا شد. تسرملو قبلاً درگیر مباحثات علمی پرجنجالی با بولتسمن، استاد هان، شده بود و بعدها یکی از پیگیرترینِ منتقدان گودل، شاگرد هان، شد.

در جستجوی یک حلقه

اندک زمانی پس از آنکه هان مقاله‌اش را برای دائرةالمعارف نوشت، صلاحیتش برای تدریس تصویب شد، و باز بولتسمن یکی از اعضای کمیتهٔ بررسی صلاحیت بود. بولتسمن در این زمان همچون ارنست ماخ استاد موفقی در فلسفه به حساب می‌آمد. ماخ در مقام فیزیکدان در زمینهٔ موجهای شوک مطالعه و تحقیق کرده بود اما به‌عنوان فیلسوف نیز افکارش تأثیر عظیمی بر متفکران گوناگون، از اینشتین تا لنین، گذاشته بود. اتفاقاً دیدگاههای این دو نفر تقریباً در همهٔ موارد بر خلاف هم بود ولی هر دو دیدگاه به فیزیک اتکا داشت نه متافیزیک. هان طبیعتاً تحت تأثیرِ وحدت اندیشهٔ علمی و اندیشهٔ فلسفی در آثار این دو نفر قرار گرفت. ولی ماخ براثر سکتهٔ مغزی از کار باز ماند و بولتسمن هم در سال ۱۹۰۶ دست به خودکشی زد. بنابراین هان در زمینهٔ تفکر فلسفی کم و بیش تنها شد. [البته کسی مانند] برتراند راسل، که پرینسیپلز آو متمتیکس [اصول ریاضیات] او به‌تازگی انتشار یافته بود وجود داشت که هان به او اتکا کند، و درباره‌اش نوشت «برتراند راسل مهمترین فیلسوف عصر ما به حساب خواهد آمد.» این جمله امروز ممکن است [فقط] عدهٔ کمی را به ابراز تردید و تعجب وا دارد اما در آن جوّ فلسفی که اخلاف کانت، هگل، و حتی توماس قدّیس بر آن تسلط داشتند، طنینِ بسیار غریبی داشت.

گروه چهار نفری پراکنده شد اما هان در طی دورهٔ پس از دکتریش در وین، حلقهٔ جدیدی از یاران همفکر و بسیار بااستعداد پیدا کرد (یا تأسیس کرد) که به‌طور منظم در بعضی قهوه‌خانه‌های پرشکوه وین گرد می‌آمدند و به بحثهای طولانی در زمینهٔ فلسفه و موضوعهای دیگر می‌پرداختند. یکی از نزدیکترین دوستانش، ریشارت فُن میزِس بود که چند سال بعد نخستین هواپیمای غول‌پیکر را طراحی کرد و کتاب درسیش در زمینهٔ آئرودینامیک در طی پنجاه و چند سال با ویرایشهای تازه تجدید چاپ می‌شد و کتاب استاندارد در این زمینه بود. وی که در دانشگاههای برلین، استانبول، و هاروارد استاد مکانیک شد و تحقیقاتش تأثیر عمیقی در مبانی احتمال گذارد، کتاب مهمی هم در تشریح پوزیتیویسم [مذهب تحصلی] نوشت. عضو دیگر حلقه فیلیپ فرانک بود که در پراگ، بنا به توصیه‌نامهٔ پر از تعریف و تمجیدِ آلبرت اینشتین، جانشین او شد (در واقع اینشتین ابتدا پاول اهرنفست، یکی از چهار یار جدانشدنی، را برای جانشینی خود توصیه کرده بود. اهرنفست با همکاری همسرش تاتیانا فصلی بسیار عالی از دائرةالمعارف علوم ریاضی را نوشته بود که هنوز هم بسیار از آن نقل قول می‌شود و مکانیک آماری بولتسمن را وضوح بسیار بخشیده است. اما فرانتس یوزف، امپراتور کهنسال اتریش-هنگری، کسی را که علائق مذهبی نداشت به استادی نمی‌گماشت. حتی کسی مانند اینشتین حاضر شده بود [در این مورد کوتاه بیاید و] به تشریفاتی صوری و ظاهری در این زمینه تن دهد، اما علی‌رغم اصرار او و هان، اهرنفست چنین کاری را قاطعانه رد کرد) دوست نزدیک دیگر هان، اوتو نویرات[1]، مردی بود سرخ‌مو و عظیم‌الجثه با صدای پرطنین و علائقِ بسیار متنوع. او با اُلگا خواهر هان ازدواج کرد. اُلگا زنی استثنایی بود که گرچه در اوائل زندگی کور شده بود، چند مقالهٔ بسیار مهم در منطق نمادی نوشت.

کارهای هان تا زمان جنگ جهانی اول، به‌غیر از سلسله مقالاتی که مرتباً دربارهٔ حساب وردشها انتشار می‌داد، به موضوعات بسیار متنوعی مربوط می‌شد.

رساله‌ای دربارهٔ هیدرودینامیکِ جریان بوسینسک[2] با همکاری هرگلوتس (یکی از یاران چهارگانه) و کارل شوارتس شیاد (که بعدها اخترفیزیک نوین را پدید آورد) نوشت که به‌طرز عجیبی پیشگویانه بود. اما این اثر، علی‌رغم شهرتِ هر سه نویسنده‌اش، اصلاً مورد توجه قرار نگرفت. هانس به جبر نیز پرداخت و گروههای آبلی مرتب را به‌وسیلهٔ قضیهٔ نشاندن مشخص کرد. این دستاورد مدتها بعد به‌عنوان نتیجه‌ای اساسی در نظریهٔ فضاهای برداریِ مرتب مورد توجه قرارگرفت و به نام هان نامیده شد ولی وی دیگر به این مبحث باز نگشت.

1. Neurath 2. Boussinesq flow

هان مسأله‌ای را که ابگ مطرح کرده بود حل کرد یعنی نشان داد که اگر مشتق بتواند مقادیر نامتناهی داشته باشد، قضیهٔ بنیادی دیگر برقرار نیست؛ و قضیه‌ای نظیر قضیهٔ حاصلضرب وایرشتراس را برای توابع تمام‌ریخت با دو متغیر مختلط ثابت کرد. همچنین از نخستین کسانی بود که اهمیت فضاهای توپولوژیک فرشه را درک کرد و فضاهایی را که توابع پیوستهٔ غیرثابت می‌پذیرند، به دقت مشخص نمود، و اثباتی از قضیهٔ ژوردان برای چندضلعیها عرضه کرد که در آن فقط از اصول موضوع هیلبرت برای هندسهٔ اقلیدسی مسطحه استفاده کرده و ملاحظات مربوط به پیوستگی را کنار گذاشته بود.

هان تعمیم این نتیجه به ابعاد بالاتر را به یکی از دانشجویان دختر ــ که تعدادشان امروز هم کم است ــ محول کرد. آن دانشجو لیلی مینور نام داشت و زمانی‌که حاصل کارش را انتشار داد به همسری هان در آمده بود. وی کارِ فعالانهٔ علمی را کنار گذاشت ولی علاقه‌اش به موضوع را تا آخر عمر حفظ کرد و خانه‌اش بعدها کانونِ تجمع ریاضیدانان وین شد.

بلیط چرنوویتس

هان مراحل پیشرفت در حرفهٔ دانشگاهی را چنان‌که باید و شاید طی کرد. در اتریشِ «امپراتوری و پادشاهی» (*aiserlich und königlich*) اختصار، k.u.k؛ این عنوان در رُمان روبرت موزیل به‌نام مردی بدون صفات ممیزه به‌صورت *Kakanien* در آمده است. ضمناً اواریش قهرمان این داستانْ ریاضیدانی اهل وین و تقریباً هم‌سن و سال هان بود)، هر عضو کادر علمی باید خدمات دانشگاهی خود را از استادیِ موقت در یک شهر دورافتاده شروع می‌کرد. هان نیز همچون اشریش کار دانشگاهی خود را از شهر چرنوویتس[1] آغاز کرد که درست در مرز امپراتوری هابسبورگ و روسیهٔ تزاری واقع بود و برای رسیدن از وین به آنجا باید بیست و شش ساعت راه خسته‌کننده با قطار طی می‌شد. عقیده بر این بود که استادان جوان باید کسب تجربه کنند و صلاحیت خود را نشان دهند تا بتوانند در دانشگاه معتبرتری چون دانشگاه پراگ یا گراتس و نهایتاً دانشگاه وین کار بگیرند. در آن زمان بازیگران جوان تئاتر هم که می‌خواستند سرانجام در تئاتر مهمی در وین مشغول کار شوند باید مسیر مشابهی را طی می‌کردند. نیازی به گفتن ندارد که خیلیها در میانهٔ راه می‌ماندند. ولی هان ظاهراً هرگز شک نداشته است که مسیر شغلیش او را به وین باز خواهد گرداند. وقتی با دوستانش (البته در یک قهوه‌خانه) خداحافظی می‌کرد، نقشه‌هایش را برای زمانِ پس از بازگشت اعلام کرد: بحثها از سر گرفته خواهد شد ولی این بار «به کمک فلاسفهٔ دانشگاهی» (نه «فلاسفهٔ قهوه‌خانه‌ای» که فراوان بودند). ۱۲ سال طول کشید تا به این هدف برسد.

اعتماد به نفس هان خیلی زود با کسب موفقیت مهمی تقویت شد. وی مسألهٔ مشخص‌سازیِ توپولوژیکِ تصویرهای پیوستهٔ بازه‌های فشرده را حل کرد. حدود بیست سال قبل از آن، پئانو و هیلبرت جهان ریاضی را با نشان دادن خمهای فضاپرکن شگفت‌زده کرده بودند (به مقاله‌ای به قلم ساگان[2] که در صفحهٔ ۳۷ شمارهٔ ۴ سال ۱۹۹۳ مجلهٔ اینتلیجنسر چاپ شده، مراجعه کنید). تعریف قدیمی و متداول خم به‌عنوان تصویر پیوستهٔ بازه‌ای فشرده، حال بایستی با احتیاط مورد استفاده قرار می‌گرفت زیرا معلوم شده بود که اشیایی مانند مربع کامل که شباهتی به خم ندارند در آن تعریف صدق می‌کنند. البته

1. Czernowitz 2. H. Sagan

برتراند راسل: هان «در میان مشهورترین متفکران در مسیر رهایی» از فلسفهٔ مُنکر جهان، برتراند راسل را برگزید «که در زمان جنگ به‌خاطر ضدّیتش با نظامیگری به زندان افتاد». راسل در مدخلی بر فلسفهٔ ریاضی که در زندان نوشت می‌گوید: «اولین کسی که اهمیت همانگویی در تعریف ریاضیات را به من خاطر نشان کرد شاگرد سابقم لودویگ وینگنشتاین بود که روی این مسأله کار می‌کرد. نمی‌دانم که او این مسأله را حل کرده است یا نه، و حتی نمی‌دانم که زنده است یا مرده.»

اگر نگاشت پیوسته یک‌به‌یک می‌بود چنین چیزی اتفاق نمی‌افتاد. ولی مثال هیلبرت در هیچ‌جا چهار به یک نبود. هان نشان داد که چنین نگاشت مربع پُرکنی باید در بازه‌ای از نقاط دست‌کم دوبه‌یک و در مجموعه‌ای چگال دست کم سه‌به‌یک باشد. و نکتهٔ مهمتر اینکه، نشان داد تصویرهای پیوستهٔ پاره‌خطها دقیقاً آن مجموعه‌های فشرده و همبندی هستند که موضعاً همبندند. همین نتیجه را استفان مازورکیویچ[1] مستقلاً و تقریباً در همان زمان به دست آورد؛ وی یکی از ریاضیدانان جوانی بود که با عزم و ارادهٔ فوق‌العاده، لهستان را پیش از آنکه مرزهای جغرافیاییش تثبیت شود، روی نقشهٔ دنیای ریاضی تثبیت کردند. هان تا آخر عمر به این قضیه، که الهامبخش پژوهشهای بسیار بود و تکیه‌گاهی برای توپولوژی عمومی به‌شمار می‌آمد، می‌بالید.

وی در دوران اقامت در چرنوویتس به‌سوی مبحثی که بعدها به‌صورت آنالیز تابعی در آمد، کشانده شد. حساب وردشها انگیزهٔ نیرومندی برای مطالعهٔ تابعکها ــ یعنی تابعهایی که روی مجموعه‌های توابع و نه مجموعه‌های نقاط تعریف می‌شوند ــ ایجاد می‌کند. هان مقاله‌ای مروری دربارهٔ عملگرهای انتگرالی نوشت و نظریهٔ طیفی هلینگر در باب صورتهای متعامد کراندار را بسیار اعتلا بخشید و آن را در چارچوب انتگرالگیری ابگ بیان کرد.

دوران پرتلاطم

هنگامی‌که جنگ جهانی درگرفت، هان در ارتش اتریش ثبت‌نام کرد. در سال ۱۹۱۵ در جبههٔ ایتالیا مجروح شد و ریه‌اش به سختی آسیب دید؛ از بیماری بهبود یافت اما آینده‌اش تیره و تار به نظر می‌رسید. ارتش روسیه

1. Mazurkiewicz

چرنوویتس را به‌سرعت اشغال کرده و او خانه و کارش را از دست داده بود. هان مجبور شد مدتی در یک مدرسهٔ نظامی تدریس کند. بااین‌حال، وقت کافی برای نوشتن رسالات مهمی دربارهٔ آنالیز همساز و نظریهٔ انتگرالگیری پیدا کرد. بعد از مدتی اوضاع دوباره روبه‌راه شد. در ۱۹۱۷ در بُن استاد شد. کمی بعد، با پخش کردن اعلامیه به هواداری از صلح، سروصدایی به پا کرد. دوست نزدیکش شومپتر[1] که او نیز از چرنوویتس به بُن رفته بود، گفته است که این جریان باعث شد هان در دانشگاههای آلمان «عنصر نامطلوب» شناخته شود. (تقریباً در همین زمان، برتراند راسل به‌خاطر نظرات صلح‌طلبانه‌اش زندانی بود. وی اوقات خود را در زندان به نوشتن مدخلی بر فلسفهٔ ریاضی می‌گذراند.)

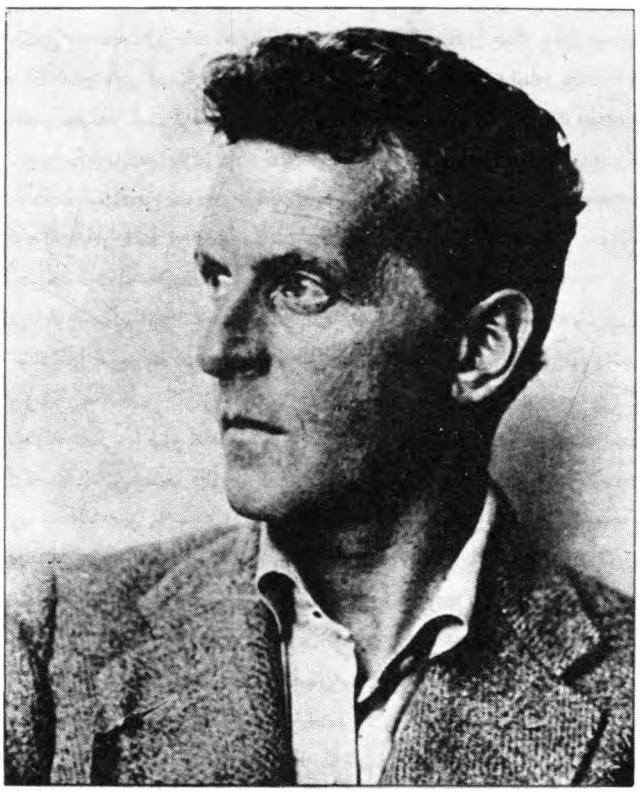
هان بعضی از بهترین دستاوردهایش را در دوران پرآشوبِ پس از سقوطِ امپراتوریهای آلمان و اتریش عرضه کرد. مثلاً «قضیهٔ ساندویچ» معروف خود را ثابت کرد (قضیه‌ای که می‌گوید اگر تابعی نیمه‌پیوسته از بالا همه‌جا کوچکتر از تابعی نیمه‌پیوسته از پایین باشد، می‌توانیم تابعی پیوسته بین آنها «جا دهیم»). همچنین مجموعهٔ نقاطی را که یک سری مرکب از توابع پیوسته، به‌عنوان اجتماع شمارایی از مقاطع شمارای مجموعه‌های باز، در آن نقاط واگراست، مشخص کرد؛ و نشان داد که اگر تابعی نسبت به هر یک از متغیرهایش $x_1, \ldots, x_n$ پیوسته باشد آنگاه نقاط پیوستگی آن در هر ابرصفحهٔ ثابت $x_i =$ چگال‌اند. هان همچنین کشف کرد که هر اندازهٔ علامتدار را می‌توان به‌صورت تفاضل دو اندازهٔ مثبت نوشت؛ و این نتیجه مرتبط با کارِ ژوردان است که تابعی با تغییرات کراندار را به‌صورت تفاضل دو تابع یکنوا-صعودی نمایش داد (این موضوع امروز به‌نام قضیهٔ تجزیهٔ هان-ژوردان شناخته می‌شود). و نیز هان در مقالهٔ دیگری با استفاده از نتایج ریس[2] دربارهٔ نمایش و همگرایی عملگرهای درونیابی بر فضای توابع پیوسته بحث کرد.

در این زمان زمینهٔ پیدایش آنالیز تابعی فراهم بود و چندی نگذشت که هان یکی از بنیانگذاران آن شد. او دنبالهٔ پژوهشهای ادوارد هلی ریاضیدانِ جوانِ اهل وین را گرفت. هلی پیش از آنکه در جنگ ناپدید شود، مقالهٔ بسیار مهمی در زمینهٔ عملگرهای خطی در فضاهای بینهایت بعدی نوشت. در ۱۹۲۰ دوباره سروکله‌اش پیدا شد. معلوم شد که تقریباً شش سال اسیر جنگی بوده و از ماجراهای بسیار خطرناکی در اردوگاههای اسیران جنگی از سیبری تا مصر جان به در برده است. ولی توانِ ریاضیش از بین نرفته بود و تحقیقِ پیشگامانهٔ خود را در زمینهٔ دستگاههای معادلات خطی با بینهایت متغیر از سر گرفت. هان این موضوع را بسط داد و در مقالهٔ واقعاً شگفت‌آوری که یکی از شالوده‌های اساسی آنالیز تابعی به‌شمار می‌رود، منتشر کرد. وی نشان داد ۲۳ مسأله را که ظاهراً هیچ ربطی به هم ندارند می‌توان در همین قالب حل کرد، و کافی است یک ساختار خطی با یک نرم و یک خاصیت کمال داشته باشیم. هارو هویزر[3] کار وی را چنین فرموله کرد:

> [هان] در اساس کاری نکرد جز افزودن یک فضای خطیِ تعریف‌شده با اصول موضوع به نُرم هالی که آن‌هم با اصول موضوع تعریف شده بود.

همین فضاست که فرشه بعدها آن را فضای باناخ نامید (و باناخ، از روی فروتنی، فضای از نوع B نام نهاد). در واقع وقتی مقالهٔ هان در آمد، یک

1. Schumpeter 2. Riesz 3. Harro Heuser



لودویگ ویتگنشتاین: وقتی کتاب راسل انتشار یافت، ویتگنشتاین در یک اردوگاه در اسارت ارتش ایتالیا به‌سر می‌برد. وی دستنویس رساله‌اش را در کوله‌پشتی‌اش گذاشته بود. بعدها در یک مدرسهٔ ابتدایی در اتریش سفلی به معلمی پرداخت و مدتی هم باغبانی کرد. هنگامی‌که با هان آشنا شد، مشغول ساختن خانه‌ای به سبکِ خیلی مدرن برای خواهرش مارگارت بود. از آن زمان به بعد، شغل ویتگنشتاین در گذرنامه‌اش «آرشیتکت» ذکر می‌شد.

سال از ارائهٔ رسالهٔ باناخ گذشته بود (هر دو مقاله در سال ۱۹۲۲ به چاپ رسیدند). آن رساله با تعریف فضای برداریِ نُرمدارِ کامل آغاز می‌شد و شامل قضیه‌ای بود که هان هم استفادهٔ شایانی از آن کرد و امروز اصل کرانداری یکنواخت نامیده می‌شود.

حلقه تشکیل می‌شود

در سال ۱۹۲۱ اشریش بازنشسته شد و هان برای تصدیِ کرسیِ استاد راهنمای سابقش به وین بازگشت (در ردیف متقاضیان این کرسی، رادون و نیتسه پس از هان قرار گرفته بودند). هان در بُن دلبستگیش را به فلسفه از دست نداده بود و در واقع، به‌تازگی پارادوکسهای بینهایت بولتسانو را ویرایش کرده بود (بولتسانو کشیش کاتولیکی بود که در پراگ زندگی می‌کرد و پیش از وایرشتراس، کانتور، و حتی پوانکاره، به برخی از ایده‌ها و نتایج آنها رسیده بود اما دستگاه کلیسا مدتها با کارهای او مخالفت ورزیده بود). چند ماهی پس از آنکه هان پُست خود را در وین تحویل گرفت، کرسی فلسفه که زمانی از آنِ ماخ بود، دوباره خالی شد. اکنون هان فرصتی برای جذب «فلاسفهٔ دانشگاهی» پیدا کرده بود، فرصتی که آرزوی آن را داشت. او دانشکده و وزارتخانه‌ها را ترغیب کرد که موریتس اشلیک آلمانی را به تصدیِ این کرسی

همکاران: هلی و رایده مایستر

کورت رایده مایستر: رایده مایستر در نتیجهٔ تلاش هانْ استاد هندسه در دانشگاه وین شد (۱۹۲۳ـ۱۹۲۵). وی نخستین کتابش را به هانس هان تقدیم کرد. از لحاظ سیاسی، با هانس همعقیده بود و این عقیده برایش به قیمتِ از دست دادن کرسی استادی در کونیکسبرگ تمام شد. رایده مایستر در توضیح و تشریح رسالهٔ ویتگنشتاین برای اعضای حلقه نقش اساسی داشت و کنفرانس معروف ۱۹۳۰ کونیکسبرگ در زمینهٔ فلسفهٔ ریاضی را او سازماندهی کرد.

ادوارد هلی: هلی فقط پنج مقالهٔ پژوهشی نوشت ولی همهٔ آنها طراز اول و ماندگار بودند. در سالهای دههٔ ۱۹۲۰، هان و هلی معمولاً برای بحث دربارهٔ بعضی موضوعها در کافه سانترال وین با هم ملاقات می‌کردند. در همین دوران اشتفان باناخ و «شوالیه‌ها»یش نیز برای بحث در همان موضوعها در کافهٔ اسکاتلندیِ لووف گرد می‌آمدند. هلی از ۱۹۱۵ تا ۱۹۲۰ اسیر جنگی بود. در وین نخست در یک بانک و سپس در یک شرکت بیمه به کار پرداخت ولی هر دو مؤسسه ورشکست شدند. پس از آنکه به‌خاطر مسائل نژادی مورد ایذاء و آزارِ نازیها قرار گرفت به ایالات متحده گریخت. در ۵۰ سالگی استاد ریاضیات در شیکاگو شد ولی چند هفتهٔ بعد براثر حملهٔ قلبی در گذشت.

بگمارند. اشلیک پایان‌نامهٔ خود را زیر نظر ماکس پلانک گذرانده بود و بنابراین، مانند ماخ و بولتسمن، زمینهٔ فیزیکی داشت. دیدگاه فلسفی او عمیقاً متأثر از دیدگاه اینشتین بود که روابط نزدیکی با او داشت.

اشلیک، هان، و نویرات (که پس از دورانی پرالتهاب که به زندانی شدنش به جرم «خیانت به کشور» یعنی تلاش برای سرنگونی حکومت باواریا انجامیده بود به وین برگشته بود) هنوز به چهل و پنج سالگی نرسیده بودند که اعضای ارشد حلقهٔ وین محسوب می‌شدند. کارل پوپر در این‌باره چنین می‌گوید

> آن‌طور که بعدها از چند تن از اعضای حلقهٔ وین شنیدم، هان بنیانگذارِ معنویِ حلقه بود و نویرات، شوهر خواهرش، سازمان‌دهندهٔ آن . . . گمان می‌کنم اشلیک در آغاز نوعی رئیس افتخاری بود، ولی بعداً خیلی فعال شد.

این سه نفر برنامه‌ای جدی برای برگزاری سخنرانیهای عمومی، سمینارها، و (البته) جلسات قهوه‌خانه‌ای ترتیب دادند که ثمرات چشمگیری به بار آورد. جوانانی که آیندهٔ درخشانی برایشان پیش‌بینی می‌شد گرد آنها جمع شدند. به توصیهٔ هان، ریاضیدان ۳۰ سالهٔ آلمانی کورت رایده مایستر به دانشیاری هندسه منصوب شد. وی که چندی بعد مُهر و نشان خود را در هندسه و نظریهٔ گرهها به جا گذاشت، بلافاصله جذبِ حلقه شد. کارناپ فیلسوف آلمانی، جوان دیگری بود که به حلقه پیوست. وی بعدها پایدارترین عضو حلقه در دوران تبعید و پراکندگی بود.

در میان دانشجویان دورهٔ کارشناسی که حوّ جدید و پرشور مؤسسهٔ ریاضیاتْ آنها را به شوق آورد، سه اعجوبه بارزتر از همه بودند: یکی کارل پوپر که اولین برخوردش با حساب دیفرانسیل و انتگرال او را مأیوس کرده بود و حال از وضوح و روشنیِ درسهای هان لذت می‌برد؛ ولی ستارهٔ اقبال او خیلی بعد طلوع کرد. دیگری کورت گودل، جوانی کم‌حرف اما سختکوش و پرشور اهل برنو واقع بر مرزِ جدیدِ اتریش با چکسلواکی، که در سمینار هان دربارهٔ پرینکیپیا

شاگردان: گودل، منگر، و پوپر

کورت گودل: در ۱۹۳۹ رئیس دانشکده نوشت: «گودل شهرت زیادی در رشته‌اش، که در مرز ریاضیات و منطق واقع است، دارد؛ معلمش، پروفسور هان یهودی، نیز توجه زیادی به این مبحث داشت . . . گودل در زمانی به مرحلهٔ بلوغ رسید که ریاضیات در وین کاملا «یهودی‌شده» بود. وی روابط چندان دوستانه‌ای با ناسیونال سوسیالیسم نداشته است، و احتمالاً نخواهد توانست از پس مشکلاتی که به‌عنوان نمایندهٔ آلمان جدید در ایالات متحده خواهد داشت بر آید.»

کارل پوپر: هدف پوپر این نبود که ریاضیدانِ حرفه‌ای شود. «من فقط به این دلیل ریاضیات را مطالعه می‌کردم که می‌خواستم چیزی بیاموزم.» مقالهٔ آخر پوپر با این جمله‌ها پایان می‌یابد: «چند هفته پیش از مرگ هان نامهٔ دوستانه‌ای از او دریافت کردم که از من می‌خواست در خانه‌اش به دیدارش بروم . . . باز هم تأثیری که بر شخص می‌گذاشت فوق‌العاده بود. هنوز هم پرشور و منضبط بود، ولی دیگر آدم کمال‌گرایِ دست‌نیافتنی و دیرجوشی نبود و انسانی صمیمی و پرمحبت شده بود. به تازگی نمونه‌های چاپی کتابم منطق اکتشاف را خوانده بود و می‌خواست نظرش را دربارهٔ آن به من بگوید. نظرش آن‌قدر مثبت بود که بیش از آن قابل تصور نبود و از من دعوت کرد باز هم پیش او بروم، و این آخرین خاطرهٔ من از هان است.

کارل منگر: پوپر دربارهٔ نخستین سالهای تحصیل او در دانشگاه نوشت: «از کارل منگر هم باید نام ببرم که همسن من بود و به وضوح نابغه‌ای بود [یا ذهنی] سرشار از اندیشه‌های نو و مهیج». نخستین ملاقات منگر با هان (در سمیناری دربارهٔ مفهوم خم) انگیزه‌ای در او ایجاد کرد که به توفیقاتش در توپولوژی انجامید. منگر نوشت: «سخنرانیهای عمومی هان از نهایت وضوح برخوردار بود، ولی درسهای روزانه‌اش را هم با وسواس زیاد تهیه می‌کرد. وی از روشی استفاده می‌کرد که هرگز ندیده‌ام کس دیگری به این خوبی به‌کار برد: با گامهایی تقریباً نامحسوس پیش می‌رفت و در پایان هر ساعت، حضار از انبوه مباحثی که مطرح شده بود، حیرت می‌کردند.

ماتماتیکا تحسین و احترام همهٔ شرکت‌کنندگان را برانگیخت، و بالاخره، ستارهٔ بی‌چون و چرا در میان تمام دانشجویان، کارل مِنگر پسر کارل منگر اقتصاددان مشهور بود (که ضمناً در گذشته معلم خصوصی رودولف ولیعهد اتریش معروف به «مایرلینگِ اندوهگین» بوده بود). وی به یاد می‌آورد که

> در مارس ۱۹۲۱ ــ که من فقط یک ترم در دانشگاه گذرانده بودم ــ هانس هان به عضویت هیأت علمی ریاضی در آمد. نخستین اطلاعیه‌ای که صادر کرد، اعلامیهٔ برگزاری سمیناری دربارهٔ مفهوم خم بود . . . من تردید داشتم [که در آن شرکت کنم]، ولی بالاخره دل به دریا زدم و در نخستین جلسهٔ سمینار حاضر شدم. هان بدون مقدمه به تشریحِ مسألهٔ دقیق‌سازی مفهوم خم پرداخت، مفهومی که همه در ذهن دارند ولی هیچ‌کس نتوانسته بود آن را بیان کند . . . من گیج و متحیر شدم . . . پس از یک هفته تفکر و غرق شدن در مسأله، راه‌حلی به هان ارائه دادم که مبتنی بر ساده‌ترین مفاهیم نظریهٔ مجموعه‌ها بود . . . هان قبول کرد که راهِ پیشنهادی من احتمالاً شیوهٔ ثمربخشی برای پرداختن به مسأله خواهد بود.

منگر چند هفتهٔ بعد دچار بیماری ریویِ سختی شد و ناچار گشت بیش از یک سال در آسایشگاه به‌سر بَرَد. هنگامی‌که به مؤسسه برگشت، چند مقالهٔ مهم و اساسی دربارهٔ مفهوم بُعد با خود آورد و همین مقاله‌ها باعث شد به‌سرعت زیر نظر هان درجهٔ دکتری بگیرد (آنها نمی‌دانستند که اوریسون ریاضیدان روس بسیاری از همان نتایج را در همان زمان به دست آورده اما پیش از آنکه آنها را انتشار دهد، در اثر سانحه‌ای درگذشته است).

هان منگر را تشویق کرد که برای دورهٔ پس از دکتری به آمستردام برود. در آنجا ممکن نبود کسی به توپولوژی و مبانی ریاضیات علاقه‌مند باشد و مجذوبِ کارها و شخصیتِ پراعتبار براوئر نشود. یکی دیگر از دانشجویان هان، پُل ویتولد هورویچ[1]، به‌زودی به دنبال منگر به آمستردام رفت. توپولوژیدانان نوخاستهٔ دیگر مدتی در وین ماندند و تأییدیهٔ صلاحیت خود را برای تدریس از کمیته‌هایی که ریاست آنها با هان بود، دریافت کردند: یکی از آنها لئوپولد ویتوریس[2] بود (همان که به‌خاطر دنباله‌های مایر-ویتوریوس معروف است) که مدتی قبل صد و چهار سالگی خود را جشن گرفت. دیگری گئورگ نوبلینگ بود که مدتی با منگرِ همکاریِ نزدیک داشت.

هان قبلاً در زمینهٔ تبدیلات فوریه، تقریباً به همان شیوهٔ وینر در آنالیز همساز عمومی‌اش، کار کرده بود ولی با توجه به همگراییِ نقطه به نقطه نه همگرایی در میانگین مربع. اما اینک علاقهٔ فزاینده‌ای به آنالیز تابعی پیدا می‌کرد. وی مثلاً از آنالیز تابعی برای روشن ساختن نقش ضرایب لاگرانژ در حساب وردشها و برای بحث در روشهای مجموعیابی استفاده کرد (از جمله، فضایی از دنباله‌های پوچ عرضه کرد که گاه «فضای دنباله‌ای هان» نامیده می‌شود). مناسبات نزدیک هان با هلی، برایش یک منبع الهامِ دائمی بود. هلی که کارِ ثابت و منظمی در دانشگاه پیدا نکرده و مجبور شده بود اول در یک بانک و بعداً در یک شرکت بیمهٔ عمر کار کند، به پژوهشهای پیشگامانه‌اش در آنالیز تابعی ادامه می‌داد. همچنین ممکن است هان تحت تأثیر قضیهٔ توسیعی که دوستش تیتسه در مورد توابع پیوستهٔ کراندار عرضه کرد، قرار گرفته

1. Hurewicz 2. Vietoris

باشد. هان در ۱۹۲۷ مقاله‌ای در مجلهٔ کرله دربارهٔ «دستگاههای معادلات خطی در فضاهای خطی» نوشت که در آن یک قضیهٔ توسیع را، تقریباً به‌عنوان یک نتیجهٔ جنبی، ثابت کرد: هر عملگر خطی را می‌توان از یک زیرفضا به کل فضای باناخ توسعه داد. بعدها این قضیه پیامدهای عظیمی داشت. دیودونه در تاریخ آنالیز تابعی می‌گوید:

> حقاً می‌توان گفت با این مقاله بود که نظریهٔ دوگانی موقعیت شایستهٔ خود را پیدا کرد

و در آنالیز تابعیِ هاوزر آمده است:

> مبالغه نیست اگر [این قضیه را] دُرِّ شاهوار آنالیز تابعی بنامیم.

دو سال بعد باناخ همین قضیه را با استفاده از همان تکنیکِ استقرایِ ترامتناهی [ترانسفینی] ثابت کرد. اعضای مکتب لهستانی، و به‌خصوص مازور[1] جوان، کارایی خارق‌العادهٔ این نتیجه را به‌سرعت تشخیص دادند. ولی این بار هان از باناخ پیشی گرفته بود. رهبرِ لهستانیِ آنالیز تابعی اقدام لازم و مناسب را انجام داد و طی نوشته‌ای در استودیا فضلِ تقدم هان را به رسمیت شناخت.

در سال ۱۹۲۸، بولونیا میزبان کنگرهٔ جهانی ریاضیدانان بود. در این کنگره برای اولین بار پس از جنگ جهانی، ریاضیدانانی از «دول مرکزی»[2] سابق دعوت شده بودند. هان برای سخنرانی انتخاب شد، اما نه در زمینهٔ تحقیقاتش در آنالیز تابعی بلکه دربارهٔ تصویرهای پیوستهٔ بازه‌های فشرده. وی با استفاده از برخی کارهای جدید هاوسدورف، اثبات بسیار زیبا و فشرده‌ای برای قضیهٔ مشخص‌سازی، که منسوب به مازورکیویچ و خود اوست، ابداع کرده بود.

شاخصترین چهرهٔ کنگرهٔ ۱۹۲۸، البته، داوید هیلبرت بود که ورودش در رأس هیأت آلمانی با استقبال و ابراز احساسات شدید روبه‌رو شد. وی این بار نیز، مانند کنگرهٔ ۱۹۰۰ که ۲۳ مسألهٔ معروف را در آنجا عرضه کرد، جامعهٔ ریاضی را به حل معضل مهمی فرا خواند. هیلبرت دوست داشت که ببیند ریاضیات بر پایهٔ مطمئنی استوار شده است. وی سالها از برنامهٔ اثبات سازگاریِ دستگاههای اصل موضوعیِ صوری با وسایل متناهی، دفاع کرده بود. در این کنگره چهار مسألهٔ حل‌نشده دربارهٔ سازگاری و تمامیتِ دستگاههای مختلفی که منطق مقدماتی، نظریهٔ اعداد، و آنالیز مبتنی بر آنهاست، مطرح کرد. وی فوق‌العاده مطمئن بود و حتی ادعا کرد ــ ادعایی که بعداً معلوم شد غلط بوده است ــ که سازگاری نظریهٔ اعداد قبلاً ثابت شده است و گفت که حل کامل این مسأله «نیاز به همکاری نسل جوانترِ ریاضیدانان دارد که با سختکوشی و تمرکز فکر و توجه، به آن بپردازند». هان از هر فرصتی استفاده کرد تا دیدگاههای هیلبرت را به حلقهٔ وین منتقل کند و بقبولاند، و گودل جوان را ــ دانشجویی که آن‌قدر در سمینار پرینکیپیا ماتماتیکا خوب درخشیده بود ــ تشویق کرد که به این مسأله بپردازد.

رساله‌ای که حلقه را مجذوب خود کرد

در این زمان پیشوای فکری دیگری جای برتراند راسل را در نظر اعضای حلقهٔ

1. Mazur

۲. کشورهای آلمان و اتریش و متحدان آنها که در جنگ جهانی اول با انگلیس و فرانسه و همپیمانانشان می‌جنگیدند.

وین گرفته بود و او لودویگ ویتگنشتاین بود که هم خیلی نزدیکتر و هم خیلی دورتر از او بود. این وینیِ نامتعارف، که قبل از جنگ در کیمبریج شاگرد برتراند راسل بوده و در سنگرهای اُکراین و اردوگاههای ایتالیاییِ اسیران جنگی رساله‌ای نوشته بود که آن را با فروتنی تمام «پاسخ نهاییِ مسائل فلسفه» می‌دانست، در پیدا کردن ناشر برای این اثر موجز، موسوم به رسالهٔ منطقی‌ـفلسفی، دچار مشکلات فراوان شده بود. ویتگنشتاین یکی از هنگفت‌ترین ثروتهایی را که کسی در اروپا ممکن بود داشته باشد به ارث برده بود (پدرش پیش‌بینی عجیبی در مورد تحولات فاجعه‌بار در اروپا کرده و ثروتش را به آمریکا انتقال داده بود و این ثروت در دوران جنگ زیادتر شده بود)، ولی آن را به دیگران بخشیده بود. او نه می‌خواست و نه می‌توانست هزینه‌هایی را که ناشران طلب می‌کردند برای انتشار «پاسخهای نهایی»اش بپردازد. البته خواهرش به آسانی می‌توانست به او کمک کند.

مارگارت استونبورو ویتگنشتاین، که پُرترهٔ او یکی از بهترین کارهای گوستاو کلیمت است، بودجه‌ای برای کمک به انتشارِ آثار مؤلفان شایسته در نظر گرفته بود (بعضی از مقاله‌های هان با کمک مالی او منتشر شده بود). اما این کمکِ خواهرانه در نظر ویتگنشتاین تحقیرآمیزتر از آن بود که به آن رضایت دهد. بالاخره پس از گذشتن پنج سال و افزوده شدن پیشگفتاری به قلم برتراند راسل، رساله از چاپ در آمد. در این ضمن ویتگنشتاین معلم مدرسهٔ ابتدایی در یک روستایِ اتریش سفلی شده بود، و در آنجا با کودکان کشاورزان آمرانه و ظالمانه رفتار می‌کرد، همان‌طور که در دوران کیمبریج با برتراند راسل و جان مینارد کینز رفتاری متفرعنانه و تکبرآمیز داشت.

این کتابِ کم‌برگ توجه رایده مایستر را به خود جلب کرد؛ [زیرا به نظرش] واضح بود اثری که مؤلفش دوست راسل بوده، شایستهٔ خوانده شدن است. اما معلوم شد مطالعهٔ آن آسان نیست. حلقه یک سالِ تمام وقت صرف کرد تا کتاب را جمله به جمله مورد بحث قرار دهد. نویرات «بُت‌شکن»[1] آن را متافیزیک نامید ــ و این تُندترین کلمه‌ای بود که در حلقه برای انتقاد به‌کار می‌رفت. بااین‌حال، هان پس از پاره‌ای دشواریهای اولیه نظر مساعد حلقه را نسبت به دیدگاههای این اثر دربارهٔ ریاضیات و منطق کاملاً جلب کرد، و پروفسور اشلیکِ مهربان و مؤدب به همراه تنی چند از دوستان همفکر با قطار به روستای محل سکونت ویتگنشتاین رفت و با حالتی فروتنانه دَرِ خانهٔ پیشوا را زد. اما در باز نشد و آنها ناخشنود بازگشتند. بعداً معلوم شد پیشوا به وین برگشته است. ویتگنشتاین در بدرفتاری با کودکان دبستانی زیاده‌روی کرده بود و مجبور شده بود قبل از اینکه خواستار استعفایش شوند خودش شغل معلمی را رها کند.

بالاخره خواهر ویتگنشتاین میهمانی شامی ترتیب داد تا آن فیلسوف دانشگاهی با برادر تندخویش ملاقات کند. اشلیک سرخوش و شادمان به خانه برگشت. ویتگنشتاین در آن شب با آنکه به زعم خودش حرفی نمانده بود که دربارهٔ فلسفه بزند، مؤدبانه رفتار کرده بود. اصرار اشلیک و دستیارش وایزمن بالاخره او را نرم کرد و پس از چند ماه موافقت کرد که به‌طور منظم با چند عضو برگزیدهٔ حلقه ملاقات کند به‌شرط اینکه بحثها فلسفی نباشد.

در ۱۹۲۷ رایده مایستر به تصدی یک کرسی دانشگاهی در کونیکسبرگ دعوت شد. هلی با سرخوردگی شاهد گزینش کارل منگر، که هنوز ۲۶ سال هم نداشت، به جانشینی وی بود (اتریش دیگر استادان جوان خود را به دانشگاههای ایالاتی نمی‌فرستاد زیرا دیگر ایالات چندانی برای این کشور باقی نمانده بود). منگر آمستردام را با نوعی احساس آسودگی ترک کرد؛ مناسبات او با براوئر بر سر اختلافی در مورد تقدم [در اکتشاف] تیره شده بود. بااین‌حال، منگر و هان براوئر را به وین دعوت کردند. بعضی از اعضای حلقهٔ وین به اصرار از ویتگنشتاین تقاضا کردند در یکی از سخنرانیهای او حضور یابد. هنگامی که، پس از مدتی، لطف کرد و در سخنرانی حضور یافت، هان با آغوش باز از او استقبال کرد و اصرار داشت که در جایی در ردیف جلو بنشیند. ولی او با لحنی نسبتاً تند، و مطابق شیوهٔ تولستوی‌وار خود، اصرار کرد که در یک جای عادی در ردیف پنجم بنشیند. ویتگنشتاین به وضوح مجذوبِ سخنرانی براوئر شد؛ در میان خوشنودیِ همگان، در گردهمایی معمولِ پس از جلسه که طبعاً در قهوه‌خانه تشکیل می‌شد شرکت جست و در آنجا ناباورانه دیدند که دوباره دربارهٔ فلسفه صحبت می‌کند. مانند این بود که دریچهٔ سد را گشوده باشند. معلوم شد حرفی برای او باقی مانده است که بزند. ویتگنشتاین که تولدی دوباره یافته بود به زودی به کیمبریج بازگشت و دیگر هرگز فلسفه را رها نکرد، و اغلب مواضعی می‌گرفت که با مواضع رساله مغایر بود. وی کار انتشار یادداشتهایش را (که می‌خواست پس از مرگش منتشر شود) به گروهی از شاگردان علاقه‌مند و سختکوش خود وا گذاشت.

راه کونیکسبرگ

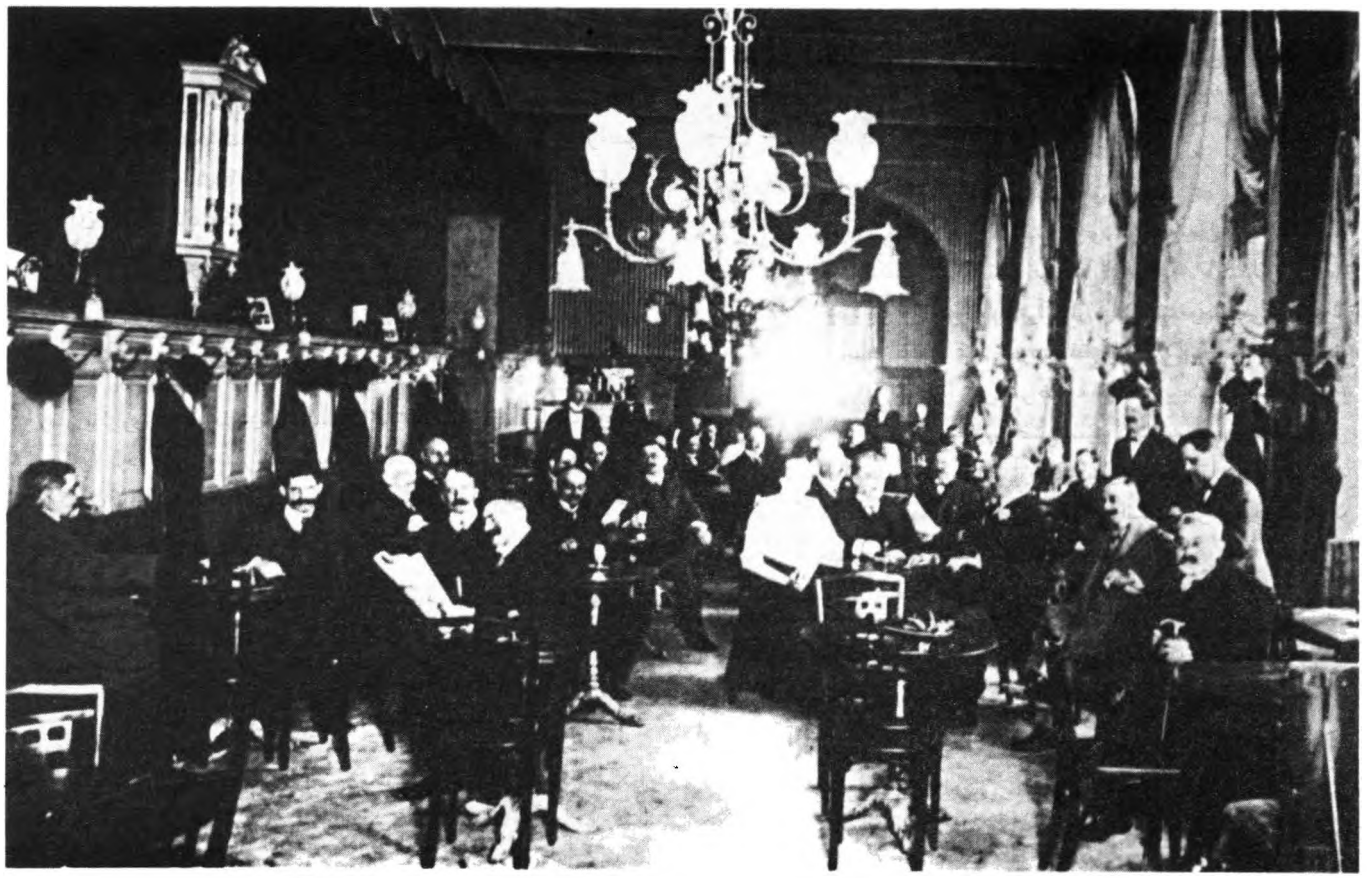
گودلِ جوان هم در سخنرانی براوئر حضور یافته بود. وی علاوه بر آنکه بی‌سروصدا در جلسهٔ عصرهای پنجشنبهٔ حلقه شرکت می‌کرد و منطق ریاضی را به‌طور اختصاصی به کارناپ درس می‌داد، دائماً روی رساله‌اش کار می‌کرد، و کتاب مقدماتیِ تازه انتشاریافتهٔ هیلبرت و آکرمن را (که ضمناً در آن دو بار به کارهای اُلگا خواهر هان ارجاع داده شده بود) به‌دقت مطالعه کرده بود. تا اواسط ۱۹۲۹ گودل چهارمین مسأله از مسائل هیلبرت در سخنرانی بولونیا را حل کرده بود؛ این مسأله عبارت بود از اینکه منطق مرتبهٔ اول کامل است یعنی هر گزارهٔ صادق را می‌توان از اصول موضوع آن استنتاج کرد. (منطق مرتبهٔ اول، این حکم را مجاز می‌دارد که $f(x)$ به‌ازای هر x برقرار است، ولی گفتنِ اینکه $f(x)$ به‌ازای هر f برقرار است مجاز نیست.) هان خوشحال شد و مقالهٔ گودل را با شتاب در مجلهٔ موناتسهفته[1] به چاپ رساند؛ این مجلهٔ ریاضی را فون اشریش بنیان نهاده بود و اکنون ویرتینگر و هان ویراستاران آن بودند.

کنگرهٔ بعدی ریاضیدانان آلمانی قرار بود در کونیکسبرگ برگزار شود. با توجه به حضور رایده مایستر در آنجا (که کتاب مبانی هندسه‌اش را به تازگی به پایان رسانده و آن را به هان تقدیم کرده بود) تشکیل گردهمایی دیگری در کنار این کنگره، یعنی برگزاری اولین کنفرانس بین‌المللی فلسفهٔ ریاضیات، کار دشواری نبود. حلقهٔ وین تصمیم گرفت با تمام قوا در این کنفرانس شرکت کند.

کونیکسبرگ هم زادگاه کانت بوده است و هم زادگاه هیلبرت. شاید قویترین عامل پیوند بین اعضای حلقهٔ وین، مخالفتی بود که با تمام وجود با دیدگاههای کانت داشتند. ولی این بار نوبتِ داوید هیلبرتِ محترم بود که ضربه‌ای بر او وارد شود. در خاطرات روزانهٔ کارناپ چنین آمده است: «۲۶ اوت، ۱۹۳۰، ۶ تا ۸٫۵، در قهوه‌خانهٔ 'کافه رایشسرات' با فیگل، گودل، و بعداً وایزمن. نقشهٔ سفر به کونیکسبرگ با کشتی. اکتشاف گودل: ناتمامیت نظام پرینکیپیا ماتماتیکا» گودل با استفاده از روش قطری‌سازیِ مبتکرانه‌ای، جمله‌ای ساخته

۱. اشاره به روحیهٔ انتقادی نویرات نسبت به نظریات رایج.ـم.

1. Monatshefte



پائوتهای نوایغ: گودل برای نخستین بار در «کافه رایشسرات» قضیهٔ ناتمامیت خود را به اطلاع کارناپ رساند. اعضای حلقهٔ وین معمولاً در قهوه‌خانه‌های مختلف با یکدیگر دیدار می‌کردند؛ محل جلسه‌هایی که پنجشنبه‌ها، هر دو هفته یک بار، تشکیل می‌شد، اتاق سمینار مؤسسهٔ ریاضیات بود. پس از جلسه‌ای که در آن اشلیک، هان، نویرات، و وایزمن دربارهٔ زبان صحبت می‌کردند، گودل نزد منگر اعتراف کرد: «هر چه بیشتر دربارهٔ زبان می‌اندیشم، بیشتر تعجب می‌کنم که مردم اصلاً حرف هم را می‌فهمند».

بود که حاکی از اثبات‌ناپذیری خود بود. این گزاره در یک دستگاه سازگار قابل اثبات نبود، پس صادق بود. در نتیجه، هر دستگاه اصل موضوعی متناهی که آن‌قدر غنی باشد که حساب را در برگیرد، شامل گزاره‌هایی است که صادق‌اند اما در آن دستگاه قابل اثبات نیستند. به این ترتیب، ضربهٔ بسیار شدیدی بر برنامهٔ هیلبرت وارد آمد.

کنفرانس کونیکسبرگ دربارهٔ فلسفهٔ ریاضیات، به این منظور برگزار شده بود که مقابله‌ای بین دیدگاههای راسل، براوئر و هیلبرت صورت گیرد. در این کنفرانس هیچ‌یک از این مردان بزرگ حضور نیافتند ولی نمایندگان برجسته و توانایی داشتند: کارناپ به طرفداری از منطقگرایی، هی‌تینگ به نفع شهودگرایی، و فون نویمان به هواداری از صورتگرایی سخن گفتند. هیلبرت در شهر بود ولی سرگرم آماده کردن سخنرانیش در مراسمی بود که به مناسبت برگزیده شدنش به شهروندی افتخاری کونیکسبرگ برگزار می‌شد. وی که از نتایج گودل بی‌خبر بود، نظر خود را مبنی بر اینکه هیچ مسألهٔ حل‌ناپذیری در ریاضیات وجود ندارد مطرح کرد و سخنانش را با این عبارت پایان داد: «ما باید بدانیم. ما خواهیم دانست.»

در شمارهٔ مخصوصی از مجلهٔ ارکنتنیس[1]، متن سخنرانیهای کارناپ، هی‌تینگ، و فون نویمان و نیز خلاصهٔ بحثی تاریخی که جنبهٔ هیجان‌انگیز این ماجرا را می‌نمایاند، آمده است. در آغاز این مباحثه، هان که ریاست جلسه را به عهده داشت متکلم وحده بود و سخنان مبسوطی دربارهٔ جایگاه ریاضیات در فلسفهٔ تجربه‌گرا ایراد کرد که قویاً در جهت دیدگاه منطقگرایانهٔ راسل (و ویتگنشتاین) بود. پس از آن، کارناپ با این پیش‌فرض که اثباتی از سازگاری یافت شود (!) به طرز مبهمی سعی در تلفیق صورتگرایی و منطقگرایی کرد. بعد مباحثهٔ کوتاهی بین جان فون نویمان و هانس هان دربارهٔ نقش شایستهٔ اصل موضوع تحویل‌پذیری در گرفت و سپس هی‌تینگ استدلالی دربارهٔ سازگاری شهودگرایی و صورتگرایی، باز تحت فرضِ اثبات سازگاری، بیان داشت. در این هنگام بود که گودل وارد بحث شد. نخست نکاتی دربارهٔ نقش محک سازگاری برای نظریه‌های صوری عنوان کرد؛ از این نکات چنین بر می‌آید که وی تصمیم داشته در آن موقع ذکری از قضیهٔ ناتمامیت به میان نیاورد. اما بعد، پس از اینکه فون نویمان مطالبی در وسط سخنان او گفت، از دهانش پرید که گزاره‌های صادقی وجود دارند که قابل اثبات نیستند، بنابراین می‌توان نقیضِ چنین گزاره‌ای را به اصول موضوع افزود و دستگاهی به دست آورد که درست به اندازهٔ دستگاه قبلی سازگار باشد و در عین حال شامل گزاره‌ای باشد که آشکارا غلط است. به این ترتیب، گودل با بیان چند جمله بحث را از نفس انداخت. این شمارهٔ ارکنتنیس با پی‌نوشتی که گودل به درخواست ویراستار نوشته و در آن به توصیف قضیهٔ ناتمامیت خود پرداخته،

1 Erkenntnis

به پایان می‌رسد.

پس از آن مباحثه جان فون نویمان گودل را کنار کشید و او را وادار کرد نتایجش را به تفصیل شرح دهد. وی بلافاصله به اهمیت این قضیه‌ها پی برد و خیلی زود به نتیجهٔ شگفت‌آوری رسید: اگر دستگاهی سازگار از اصول موضوع آن‌قدر غنی باشد که حساب را در برگیرد، سازگاریش را نمی‌توان در درون آن دستگاه ثابت کرد. اما گودل نیز در همین ضمن همین نتیجه را به دست آورده بود. پس سه مسألهٔ باقیمانده از چهار مسألهٔ هیلبرت در کنگرهٔ بولونیا را حل کرده بود، ولی جوابها مخالف آن چیزی بود که هیلبرت انتظار داشت! این ماجرا تحسین و ستایش جان فون نویمان را بر انگیخت. وی فوراً [پذیرش] گودل را به مؤسسهٔ نوبنیاد پرینستن توصیه کرد. منگر هم (که در زمان برگزاری گردهماییهای کونیکسبرگ در ایالات متحده اقامت داشت) همین کار را کرد. در وین، نشریهٔ موناتسهفته با انتشار دستاورد گودل به پیشرفت کار او کمک کرد و به خاطر همین اثر، تأییدیهٔ صلاحیت او برای تدریس، همراه با شرحی به قلم هانس هان، صادر شد. در این شرح آمده است:

> ... یک دستاورد علمیِ درجه اول ... با اطمینان می‌توان پیش‌بینی کرد که این اثر جایگاهی در تاریخ ریاضیات به‌دست خواهد آورد... آقای گودل هم اکنون نیز برجسته‌ترینِ صاحب‌نظر در منطق نمادی و مبانی ریاضیات به‌شمار می‌آید.

وین چند سال کعبهٔ منطق ریاضی بود، و افرادی چون آلفرد تارسکی، ویلارد وان اُرمان کواین، آلفرد ایر[1]، و جان فون نویمان منظماً به آنجا می‌رفتند. گودل چند نوشتهٔ مهم، به فاصلهٔ کوتاهی از یکدیگر، در نشریهٔ منگر به نام ارگبنیسه آینس ماتماتیشن کولوکیومز[2] انتشار داد که سه تا از آنها در پاسخ به مسائلی بود که هان مطرح کرده بود. گرایش کلی این مقاله‌ها، مشروط ساختن دیدگاه شهودگرایانه و تأکید بر عدم کفایت مدلهای متناهی بود. این گرایش با نظرگاه هان کاملاً مطابقت داشت زیرا وی «شهود» را تحقیر می‌کرد و آن را «نیروی عادت که ریشه در تنبلیِ روحی دارد» می‌خواند، و می‌نوشت:

> هیچ اثبات قطعی برای عدم وجود تناقض در نظریهٔ مجموعه‌ها وجود ندارد و بنابراین هیچ اثبات قطعی برای وجود ریاضیِ مجموعه‌های نامتناهی و اعداد نامتناهی وجود ندارد. اما چنین اثباتی برای حسابِ اعداد متناهی و ساده‌ترین بخش منطق نیز موجود نیست ... در اینجا می‌توانیم تقریباً با همان اطمینانی که قائل به وجود ریاضیِ اعداد متناهی هستیم، برای مجموعه‌های نامتناهی و اعداد ترامتناهی کانتور هم وجود ریاضی قائل شویم.

افسونِ ویتگنشتاین

جالب اینجاست که هان هرگز در نوشته‌های فلسفیش به نام گودل اشاره نکرده است؛ ویتگنشتاین هم همین‌طور. به نظر آن دو، کار گودل ریاضی است نه فلسفی. مسائل اساسیِ فلسفهٔ ریاضی به نظر آنها بیشتر به کاربرد ریاضیات در دنیای واقعی مربوط می‌شود تا به تمامیت یا سازگاری، که به عقیدهٔ آنها موضوعات داخلی ریاضیات هستند. ویتگنشتاین به وایزمن گفت:

> آیا محاسباتی که ریاضیدانان در طی قرون کرده‌اند ناگهان با پیدا شدن تناقضی در ریاضیات غلط از آب در می‌آید؟ مسلماً نه.

هان نیز مانند بیشتر ریاضیدانان همین نگرشِ عملگرایانه را داشت و با چنین طرز فکری بود که نوشت:

> از اینکه تاکنون تناقضی [در منطق جدید] دیده نشده، نمی‌توان نتیجه گرفت که هیچ تناقضی وجود ندارد، همان‌طور که شناخته نبودن اُکاپی[1] [زرافهٔ نادر افریقایی] تا سال ۱۹۰۰ دلیل بر عدم وجود این نوع جانور نبود. بر اساسِ اطلاعات موجود می‌توان گفت که اثبات قطعیِ عدم وجود تناقض احتمالاً قابل حصول نیست ... ولی آیا قبول این امر ضربهٔ مهلکی بر دیدگاه منطقگرایانه، که بر طبق آن وجود ریاضی اشیاء کاملاً به عدم وجود تناقض وابسته است، وارد نمی‌آورد؟ به نظر من نه. زیرا در اینجا، مانند هر فضای فکری دیگر، توقع اینکه دانش ما از موضوع قطعیت مطلق داشته باشد توقع زیادی است.

این دیدگاه با اعتقاد هیلبرت کاملاً متفاوت است.

هان در مقام فیلسوف اساساً یک تجربه‌گرا[2]ی سرسخت به مفهومِ هیومی‌اش بود [و عقیده داشت که]: همهٔ دانش ما از دنیای واقعی باید مبتنی بر تجربه باشد:

> من این موضع تجربه‌گرایانه را اتخاذ کرده‌ام نه به این دلیل که آن را از میان دیدگاههای متعدد ممکن برگزیده‌ام بلکه به این دلیل که به نظر من تنها دیدگاه ممکن است، زیرا هر دانشی از جهان واقعی که بر اثر تفکر محض به دست آید ... به نظرم کاملاً رازآمیز است.

ولی به نظر می‌رسد ریاضیات، اطلاعاتی به‌دست می‌دهد که مبتنی بر مشاهده نیست:

> من می‌توانم تصور کنم که فردا سنگی که از بالا رها می‌شود به‌طرف زمین سقوط نکند، اما نمی‌توانم تصور کنم که فردا دو به اضافهٔ دو برابر چهار نباشد. چون قضایای ریاضی را نمی‌توان بنا به تجربه ابطال کرد، نمی‌توان آنها را به تجربه مبتنی نمود.

این مطلب به پرسشی منجر می‌شود که هان آن را پرسش بنیادی می‌نامد:

> دیدگاه تجربه‌گرایانه چگونه با کاربردپذیریِ منطق و ریاضیات در واقعیت جور در می‌آید؟

هان نیز مانند راسل عقیده داشت که ریاضیات بر پایهٔ منطق استوار است. ولی در حالی که معمولاً فرض می‌شد قوانین منطق با کلیترین ویژگیهای اشیاء سروکار دارند، ویتگنشتاین ادعا کرد که این قوانین به‌هیچ‌وجه به اشیاء مربوط نمی‌شوند، بلکه فقط به نحوهٔ صحبت کردن دربارهٔ اشیاء مربوط می‌شوند؛ یا به قول هان:

> منطق چیزی دربارهٔ جهان نمی‌گوید بلکه فقط با شیوهٔ سخن گفتن ما دربارهٔ جهان سروکار دارد، و از این نظر واضح است که وجود منطق با موضع تجربه‌گرایانه کاملاً سازگار است.

1. Ayer

2. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums

1. okapi 2. empiricist

هم گزاره‌های ریاضی و هم گزاره‌های منطقی از نوع «همانگویی»اند یعنی قواعدی هستند برای تبدیل گزاره‌ها به گزاره‌های معادل. هان نوشت:

> زبانْ ترکیباتی از نمادها را به امور مختلف جهان مربوط می‌سازد و نحوهٔ این ارتباط دادن یک‌به‌یک نیست (که در آن صورت کاملاً بیفایده و بی‌معنا می‌بود) بلکه چند به یک است؛ و منطق قواعدی در اختیار ما می‌نهد که بر اساس آنها بتوانیم ترکیبی از نمادها را به ترکیب دیگری تبدیل کنیم که نمایندهٔ همان امری باشد که ترکیب اولی نماینده‌اش بود. این همان است که خصلت همانگویانهٔ منطق نامیده می‌شود.

ولی «همانگویانه بودن» به معنی پیش‌پاافتاده و مبتذل بودن نیست:

> در نظر اول، باور کردن این موضوع مشکل است که تمام ریاضیات، با آن قضایایی که به‌سختی به دست آمده و با آن نتایجی که اغلب شگفت‌انگیز است، قابلِ تحویل و فروکاهش به همانگویی باشد. ولی در اینجا یک نکتهٔ جزئی و ظریف نادیده گرفته می‌شود و آن اینکه ما عالِم مطلق نیستیم.

و در جای دیگر،

> کسی که علمِ مطلق دارد نیازی به منطق ندارد، و ما بر خلاف افلاطون می‌توانیم بگوییم: خداوند هرگز به ریاضیات نمی‌پردازد.

هانِ ریاضیدان درهای [آکادمی] افلاطون را به روی خود گشوده می‌دید، ولی هانِ فیلسوف به محض ورود به مجادله با میزبان خود می‌پرداخت. هان مخالفِ سرسختِ مکتب افلاطونی بود و هر نوع تفکر راسیونالیستی و ایده‌آلیستی را فلسفهٔ مُنکِر جهان[1] می‌دانست که با تجریدات بیمعنی مانند «شیء فی‌نفسه» آشفته و پریشان شده است، و سخت طرفدار فلسفه‌ای تجربه‌گرا و مثبت جهان[2] بود که متکی بر حواس انسان باشد:

> عقیدهٔ ما این است که در فلسفهٔ مُنکر جهان دربارهٔ اهمیت تفکر مبالغه می‌شود. تفکر چیزی نیست جز تبدیل؛ با تفکر به هیچ چیزِ جدیدی نمی‌توان رسید.

هان متفکران آلمانی از کانت تا هایدگر را به هیچ وجه قبول نداشت و ستایندهٔ «رهایی»ای بود که ارمغان برتراند راسل و متفکران انگلیسیِ پیش از او مانند دیوید هیوم، جان لاک، و . . . تا ویلیام اهل اوکام است. ویلیام همان فیلسوفِ قرون وسطاست که تیغ معروفش مفاهیم زائد را سترد. در واقع عنوان نخستین اثر فلسفی هان ــ مقاله‌ای که در ۱۹۳۰ نوشته شد ــ تیغ اوکام بود و در آن مقاله نشان داد که مشکلات مربوط به مفاهیم متعالی و غیرتجربی مانند «ممتنعات»، «کلیات» یا «فضای تهی» فقط ناشی از استفادهٔ بی‌قیدانه از یک زبان نامناسب است:

> اگر نخستین خطایِ فلسفهٔ منکر جهان را مبالغه در اهمیت تفکر بدانیم، دومین خطای بنیادیِ آن مبالغه در اهمیت زبان است . . . زبانْ ابزاری فوق‌العاده ناقص است که دائماً نشانه‌های بَدَویّت نیاکان باستانی ما را آشکار می‌سازد، و [وضعیت آن] مانند [وضعیت] فرد بسیار روشنفکر و آزاداندیشی است که اگر در ترتیبِ نشستنِ دور میزْ نفر سیزدهم باشد، خواه‌ناخواه احساس ناراحتی می‌کند [نشانه‌ای از افکار باستانی را بروز می‌دهد].

این نظر در جمله‌ای که ویتگنشتاین سالها بعد نوشت به زبان موجزی بیان شده است:

> فلسفهٔ مبارزه با افسون‌شدگیِ عقل انسان به‌وسیلهٔ زبان است.

سایر نقل قولهایی که هان کرده در حال و هوایِ تحقیقات فلسفی ویتگنشتاین است (که پس از مرگش انتشار یافت) مثلاً

> اگر کسی نخواهد استنتاج منطقی را بپذیرد، معنیش این نیست که دربارهٔ امور مختلف عقیده‌ای متفاوت با عقیدهٔ من دارد، بلکه این است که نمی‌خواهد دربارهٔ آنها بر طبق همان قواعدی صحبت کند که من به کار می‌برم؛ معنیش این نیست که نمی‌توانم او را متقاعد کنم، بلکه این است که مجبورم از ادامهٔ صحبت با او خودداری کنم، همان‌طور که در هر نوع بازی اگر همبازی من به قواعد دیگری معتقد باشد، نمی‌توانم با او بازی کنم.

ولی اگرچه هان در همهٔ نوشته‌های فلسفیش از ویتگنشتاین نقل قول کرده و هیچ‌گاه از ابراز تحسین و ادای دِین خود نسبت به او خسته نمی‌شده است، ویتگنشتاین چنین کاری در مورد هان نکرده و فقط یک بار در پانوشتی در تذکرات فلسفی نام او را آورده و در آنجاست که استدلالی غریب دربارهٔ نقش دستورالعملهای متناهی را به هان نسبت داده است. این ادعا را، به عنوان مثال، در نظر بگیرید: «من همین حالا بسط ششگانی π را با پرتاب مکرر یک تاس به دست می‌آورم.» این ادعا احتمالاً پس از چند پرتاب اولیه نادرست از آب در می‌آید ولی اصولاً نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که درست از آب در آید زیرا نمی‌توانیم بینهایت بار تاس بریزیم. شهودگرایان با آوردن این‌گونه مثالها صحت قانون طرد شق ثالث را در مورد گزاره‌هایی که شامل مجموعه‌های نامتناهی‌اند، مورد تردید قرار می‌دادند. به‌طورکلی، هم شهودگرایان و هم صورتگرایان اهمیت خاصی برای مجموعه‌ها و فرایندهای متناهی قائل بودند. هیلبرت و براوئر علی‌رغم اختلاف نظرهای حادشان، در این موضوع توافق داشتند که ریاضیات متناهی، اساسیتر از بقیهٔ ریاضیات است. هان با مطرح کردن یک آزمایش ذهنی به مقابله با این اندیشه برخاست. فرض کنید (در عمل) زمان لازم برای یک پرتاب در هر مرحله نصف شود. مثلاً اگر برای پرتاب اول به نیم دقیقه وقت نیاز باشد، در پرتاب دوم به یک چهارم دقیقه، و همین‌طور الی آخر، نیاز خواهد بود. در این صورت، کار فقط یک دقیقه به طول خواهد انجامید. (اخیراً یان استیوارت در جهت تکامل این ایده قدم برداشت و به بررسی این موضوع پرداخت که چگونه می‌توان، در محدودهٔ فیزیک کلاسیک، یک کامپیوتر سریعاً شتاب‌گیرنده طرح کرد که سرعتش را در هر مرحله دو برابر کند. البته ممکن است فیزیک کلاسیک در دنیای ما برقرار نباشد، ولی ما نمی‌توانیم بپذیریم که مسائل منطق صرفاً

1. world-denying philosophy

2. world-affirming empiricist philosophy

تابع شرایط تصادفی فیزیکی باشد.) به مفهومی می‌توان گفت که اهمیت دادن ما به فرایندهای تعیینِ متناهی امری تصادفی است و به خود ما مربوط می‌شود نه به منطق.

این نمونه‌ای است از اصل رواداری در عمل، که نخست منگر آن را به‌صورت دقیق بیان کرد و سپس دیگران، از جمله کارناپ و پوپر آن را پذیرفتند. مضمون این اصل چنین است که هیچ بخشِ ممتازی در ریاضیات وجود ندارد که مستحکمتر یا حقیقیتر یا شهودیتر از بخشهای دیگرش باشد، و اینکه نمی‌توان از یک منطقِ منحصر به فرد یا زبانِ منحصر به فرد سخن گفت، و هر نوع مرزبندی و تمایز بین موضوعات، اختیاری و دلخواه است. هان با همین طرز فکر (یک سال پیش از آنکه گودل به فون نویمان اطلاع داد که سازگاری اصل موضوع انتخاب را با سایر اصول موضوع معمولی نظریهٔ مجموعه‌ها ثابت کرده است) نوشت:

> می‌توانیم اصل موضوع انتخاب را در ریاضیات به‌کار بگیریم («ریاضیات تسرملویی») و یا آنکه از اصل موضوعی استفاده کنیم که حاکی از نقیض آن باشد («ریاضیات ناتسرملویی»). کل مسأله ربطی به واقعیت . . . یا به شهود محض . . . ندارد . . . بلکه به معنایی که برای کلمهٔ «مجموعه» قائل می‌شویم بستگی دارد.

در اوایل دههٔ ۱۹۳۰، فکر ویتگنشتاین بیشتر معطوف به فلسفهٔ ریاضیات بود ولی او ارتباطش را با حلقهٔ وین به نیمهٔ فلسفیِ حلقه محدود کرده بود و از گودل، منگر، و هان دوری می‌جست. احتمالاً احساس می‌کرده است که نمی‌تواند از پیروان ریاضیدان خود همان قدر انتظارِ مجیزگویی داشته باشد که از کسانی مانند وایزمن یا اشلیک. منگر در این مورد ماجرای خاصی را نقل کرده است. ویتگنشتاین در رساله‌اش از این «واقعیتِ ظاهراً بی‌اهمیت» که نمادگذاری منطقی نیاز به پرانتز دارد سخن گفت. اما بعداً، ووکاشیویچ[1] منطقدان لهستانی، بی‌اعتنا به این حکم یک سیستم نمادگذاری طرح کرد که نیازمند به پرانتز نبود. وقتی منگر اعضای حلقه را از این موضوع آگاه کرد، وایزمن بلافاصله شروع به دفاع ناشیانه‌ای از نظر ویتگنشتاین کرد. هان او را از صحبت باز داشت و تقریباً با عصبانیت گفت: «ولی آقای وایزمن، چرا قبول نکنیم که ویتگنشتاین در این مورد آشکارا اشتباه کرده است؟»

سخنرانیهای علمی در رقابت با برنامه‌های اپرا

به‌علاوه، ویتگنشتاین به خاطر فعالیتهایِ «نازل‌ترِ» گروهی که آنها را، در نامه‌ای به وایزمن، «هان و نویرات و دارودسته‌شان» نامید، از حلقهٔ وین فاصله گرفت. این گرایش به سیاست یکی از علتهایی بود که باعث شد گودل، منگر و پوپر، درخشانترین چهره‌های نسل بالنده، همه تا حدی از حلقه کناره بگیرند، هر چند که دین بسیار به آن داشتند. ادعا می‌شد که حلقهٔ وین یک محفل کاملاً خصوصی است ولی بعضی از اعضای آن، به‌خصوص نویرات و هان، احساس می‌کردند که وظیفه‌ای هم در قبال عامه بر عهده دارند که باید انجام دهند. بنابراین انجمنی به‌نام «انجمن ارنست ماخ» تأسیس کردند که کار آن انتشار «جهان‌بینی علمی» بود. این دوره، دورهٔ موسوم به وین سرخ بود که یک حزب «مارکسیست اتریشی» با تمایلات غلیظ روشنفکرانه، به شدت چپگرا ولی قویاً ضدکمونیست، انجمن شهر را اشغال کرده شروع به اجرای برنامهٔ گسترده‌ای در زمینهٔ بهداشت عمومی و آموزش همگانی کرده بود. [ولی] اعضای هیأت علمی دانشگاه و دانشجویان اکثراً فاشیست و یا راستگرایِ مسیحی بودند. بنابراین در آن زمان جوّ دانشکده بسیار ارتجاعیتر از جوّ کلی شهر بود.

اما هان رهبر استادان سوسیالیست، و رئیس انجمن آزاداندیشان بود. (و در عین حال علاقه‌ای شدید، هر چند شکاکانه، به احضار ارواح داشت.) وی یکی از امضاکنندگان بیانیهٔ تأسیس انجمن ارنست ماخ و نایب رئیس این انجمن بود. انجمن برنامه‌ای برای برگزاری پنج یا شش سخنرانی در سال ترتیب داد. بلیط سخنرانیها به قیمتِ بلیط اُپرا به فروش می‌رسید. علی‌رغم بحران شدید اقتصادی، این کار موفقیت‌آمیز بود. این سخنرانیها با عنوانهایی از قبیل «آیا بینهایت وجود دارد؟» یا «بحران شهودگرایی» (دو تا از سخنرانیهای هان) مردم را به خود جذب می‌کرد و تالار بزرگی مملو از جمعیت می‌شد. سخنرانهای دیگر هم شخصیتهای برجسته‌ای از قبیل هرمان مارکِ شیمیدان و ورنر هایزنبرگِ فیزیکدان بودند. قسمتی از درآمدِ به‌دست آمده صرفِ برپا داشتن مجسمه‌ای برگورِ لودویگ بولتسمن شد و قسمت دیگر برای پرداخت حقوقِ دستیاری آلگا تاوسکیِ جوان به‌کار رفت (این خانم بعدها در ادامهٔ کارش در ایالات متحدهٔ آمریکا، با عنوان پروفسور تاوسکی‌ـتاد موقعیت ممتازی پیدا کرد)

سخنرانیهای هان همیشه با دقت و با توجه کامل به جزئیات تهیه می‌شد و سبکی بسیار اختصاصی و شخصی داشت. وی مطالب را بارها و بارها به صورتهای مختلف فرموبندی و بازگویی می‌کرد چنان‌که به نظر می‌رسید اصلاً پیشرفتی [نسبت به نقطهٔ شروع] در کار نیست ولی در آخر جلسه، شنونده از میزان و دامنهٔ موضوعات بحث‌شده تعجب می‌کرد. البته این روش موافق با این اعتقاد هان بود که ریاضیات عبارت است از گفتن یک چیز به شیوه‌های مختلف. این سخنرانیها ظاهراً فوق‌العاده موفقیت‌آمیز بوده است. مثلاً اروین شرودینگر که در سخنرانیهای هان در زمینهٔ حساب وردشها در سال ۱۹۰۷ حضور یافته بود، یادداشتهایش از این جلسات را تا آخر عمر، علی‌رغم تغییر مکانهای بسیار، نگه می‌داشت. سرکارل پوپر هم در زندگینامهٔ خودش نوشته است:

> من بیش از هرکسی از هانس هان چیز آموخته‌ام. سخنرانیهای او از چنان کمالی برخوردار بود که دیگر هرگز نظیرش را ندیده‌ام. هر سخنرانی او یک کار هنری بود: چشمگیر از لحاظ ساختار منطقی، بدون یک کلمهٔ اضافی، در نهایتِ وضوح، و بهره‌مند از بیانی جذّاب و مؤدبانه. موضوع، وگاه مسائل مورد بحث، با شرح مختصر و مهیجی از زمینهٔ تاریخی معرفی می‌شد. همه‌چیز [تا حد امکان] زنده و با روح بود هر چند به خاطر کمال‌گرایی زیاد، اندکی خشک و سرد می‌نمود.

و نیز در جای دیگری نوشته است:

> سخنرانیهای هان، افقهای تازه‌ای، دست کم در برابر دیدگان من، می‌گشود . . . او در مقام معلم و سخنران با دیگران قابل مقایسه نبود.

درس مبتدیان با شرح مبسوطی از منازعهٔ نیوتن و لایب‌نیتس بر سر فضلِ

1. Łukasiewicz

تقدم [در اکتشاف حسابان] آغاز می‌شد و هان در این مورد جداً از نیوتن جانبداری می‌کرد (پوپر تأکید بر این نکته را لازم دیده است که این جانبداری ناشی از تعصب انگلیش‌دوستانه نبوده است). سپس نوبت به بررسی کلی مسائل مطرح‌شده در سیر تکامل آنالیز و پارادوکسهای نظریهٔ اولیهٔ مجموعه‌ها می‌رسید؛ و اینها همه به بحث دربارهٔ مبانی منطقی ریاضیات می‌انجامید. پوپر شرح می‌دهد که چگونه هان مجلد اول پرینکیپیا ماتماتیکا را به شاگردان نشان داد و با شور و حرارت به تأیید دیدگاههای آن پرداخت. گودل هم بی‌تردید همین تجربه را داشته است.

پوپر جوان هیچ علاقه‌ای نداشت که ریاضیدان حرفه‌ای شود. در سال ۱۹۳۰ به تدریس در یک دبیرستان گماشته شد (اصلاحات آموزشی یکی دیگر از هدفهای مورد نظر وین سرخ بود و هان در این جنبش نیز نقش پیشگامی داشت). پوپر هیچ‌وقت به جلسات حلقهٔ وین دعوت نشد ولی از حضورش در جلسات «گردهمایی ریاضی» که منگر به همراه گودل و نوبلینگ آن را برپا کرده بود، به گرمی استقبال شد. در آنجا بعضی ایده‌های پوپر دربارهٔ مبانی نظریهٔ احتمال، توجه و تحسین هان را برانگیخت؛ این ایده‌ها به رهیافت دوست قدیمش فون‌میزس روشنی بسیار می‌بخشید و بعدها آبراهام والد آنها را پیگیری کرد. هان نمونه‌های چاپی منطق اکتشاف پوپر را (که ترجمهٔ انگلیسی آن ۲۵ سال بعد انتشار یافت) خواند، پوپر را به خانه‌اش دعوت کرد، و با تحسین پرشور خود از کتابی که با انتقاد شدید از تجربه‌گرایی منطقیِ حلقهٔ وین را به مبارزه طلبیده بود، مرد جوان را متحیر ساخت.

حلقه از هم می‌پاشد

در این موقع حلقهٔ وین در نظر نسل جوان تا اندازه‌ای پویایی خود را از دست داده بود و رویدادهای تازه در «گردهمایی ریاضی» اتفاق می‌افتاد. البته هان غالباً در هر دو جا حضور می‌یافت، بعدازظهرهای پنجشنبه در حلقه و بعدازظهرهای سه‌شنبه درگردهمایی (چهارشنبه‌ها اغلب در «کافه سانترال» به دوستان هلی می‌پیوست.) این جلسه‌ها به بحثهای علمی بی‌پایان می‌گذشت و فقط تلاش او برای اینکه سیگار برگش را روشن نگه‌دارد، وقفه‌هایی در بحث ایجاد می‌کرد. هان بسرعت به تصویر کلیشه‌ای یک دانشمند مشهور جهانی در ذهن مردم، شباهت پیدا می‌کرد. این تصویر، همان‌طور که سینماروندگان می‌دانند، از جمله شامل داشتن یک دختر زیبا (نورا شهرتی در هنرپیشگی به دست آورده بود)، یک رفتار عجیب و جالب (در مورد هان، علاقه به ادراک ماوراء حسی و احضار ارواح) می‌شد. هان اغلب به کنسرت می‌رفت و با دقت آهنگی را که نواخته می‌شد از روی دفترچهٔ نت تعقیب می‌کرد و (مانند زیگموند فروید) گاه فال ورق می‌گرفت. همسر هان نیز از نقش خود که میزبانیِ «یک سالن» منظم (کلمهٔ «سالن» در آن موقع هنوز به‌کار می‌رفت[1]) و حمایت از دانشمندان جوان بود، لذت می‌برد.

اما به تدریج ابرهای سیاه متراکم می‌شدند. به‌خاطر اضطرابِ ناشی از صعود نازیها در کشور همسایه، آلمان، و گرایشِ روزافزونِ سیاست اتریش به‌سوی ارتجاع، نخستین اعضای حلقه کشور را ترک کردند و به آمریکا رفتند. پاول اهرنفست دوست هان که آن‌همه در توضیح و تبیین آثار بولتسمن کوشیده بود در سال ۱۹۳۳ خودکشی کرد. به دنبال وقوع جنگ داخلیِ کوتاه ولی شدید در فوریه ۱۹۳۴، رژیم فاشیستی-کلیسایی اتریش حزب سوسیالیست را سرکوب کرد. انجمن ارنست ماخ غیرقانونی شد، و قدرت حاکم از در مخالفت با حلقهٔ وین بر آمد. هانس هان که تا آن موقع از لحاظ جسمانی سالم می‌نمود، اکنون به دل‌پیچه‌های شدید دچار می‌شد. در ترم تابستانی، شدت درد گاهی او را وادار می‌کرد درسش را چند دقیقه قطع کند. تشخیص داده شد که غُده‌ای در بدن دارد، و در ماه ژوئن زیر چاقوی جراح جان سپرد.

او تصمیم گرفته بود رسالهٔ خود دربارهٔ آنالیز حقیقی را تا پاییز آن سال به پایان برساند، رساله‌ای که مدت ۲۵ سال مشغول نوشتن و بازنویسی آن بود. نخست قرار شده بود تألیف این کتاب با همکاری آرتر شوئنفلیس صورت گیرد؛ وی همان کسی است که اثرش با عنوان گزارش دربارهٔ مجموعه نقاط که در سال ۱۹۰۰ منتشر شده بود، نقش مهمی در انتشار ایده‌های نو در زمینهٔ آنالیز حقیقی داشت. اما این برنامه متوقف ماند. (یکی از نخستین آثار هان به یادآوری و تصحیح اشتباهات رسالهٔ شوئنفلیس اختصاص داشت). هان در ۱۹۲۱ نخستین جلد آنالیز حقیقی را انتشار داد. در این جلد که ۸۶۵ صفحه داشت آن‌قدر به بحث دربارهٔ مجموعه‌های تحلیلی، رده‌های بر و مفاهیمی از قبیل «از رستهٔ اول بودن در یک نقطهٔ مفروض» پرداخته بود که بحث انتگرال و مشتق را ناچار به جلد دوم موکول کرده بود. هان در شرحی که در آن زمان دربارهٔ زندگی خود نوشت، وعده داد که جلد دوم کتاب به‌زودی منتشر خواهد شد. ولی به جای این کار به بازنویسی جلد اول پرداخت و حاصلِ این بازنویسی، متن کاملاً متفاوتی بود که در سال ۱۹۳۲ انتشار یافت. همان‌طور که گودل در نقدی در موناتسهفته نوشت:

> اثباتها با چنان دقتی و با چنان توجهی به جزئیات عرضه شده‌اند که احتمالاً در کتابهای درسی ریاضیات بی‌نظیر است، و از «صورتگرایی» کامل (به مفهومی که مثلاً در پرینکیپیا ماتماتیکا دیده می‌شود) چندان دور نیست.

هان علی‌رغم اینکه برای تألیف بخش دوم اثرش سخت کار می‌کرد، چاپ آن را به چشم ندید. منگر یادداشتهای هان را نجات داد و در سال ۱۹۴۸، آرتر رُزنتال ترجمهٔ آن را در آمریکا منتشر کرد. این کتاب کار عشق بود، اما این شاهکار هان (که متخصصان آن را همترازِ نظریهٔ مجموعه‌های هاوسدورف و نظریهٔ انتگرالگیری ساک[1] می‌دانستند) به‌خاطر مشکلات مربوط به نحوهٔ انتشارش لطمهٔ بسیار دید: بخش اول به زبان آلمانی و بخش دوم به زبان انگلیسی، و ۱۶ سال تأخیر بین آنها باعث شد کتاب هرگز تأثیری را که شایستهٔ آن بود نداشته باشد.

دولت اتریش تصمیم گرفت کسی را به تصدیِ کرسی هان نگمارد؛ و این نشانهٔ واضحی بود از اینکه قدرت حاکم با حلقهٔ وین بر سر مهر نیست. هم کارل منگر و هم ادوارد هلی که نامزدان طبیعیِ جانشینی هان بودند، از وین رفتند. اشلیک که تصمیم گرفته بود در وین بماند، روی پلکان دانشگاه به ضرب گلولهٔ فلسفه‌خوانی ناکام و آزرده‌خاطر، که مدعی بود دیدگاه اشلیک تهدیدی برای بنیادِ متافیزیکیِ اصول اخلاقیِ اوست، از پا در آمد. همان‌طور که آلفرد اِر نوشت

---

۱. لفظ «سالن»، عمدتاً در قرنهای هفدهم تا نوزدهم، به محافلی که با شرکت دانشمندان و هنرمندان و روشنفکران معمولاً در خانهٔ زنان اشرافیِ سرشناس تشکیل می‌شد، اطلاق می‌گردیده‌ـم.

1. Sak

سنگ گور بولتسمن (شامل مجسمهٔ بالاتنهٔ او) در گورستان مرکزی وین. در روی آن فرمول $S = k \log W$ نقش بسته که k ثابت بولتسمن است. این یادمان در ۱۹۳۴ بنا شد و هزینهٔ آن از درآمد سخنرانیهایی تأمین شد که هان و منگر دربارهٔ مباحثی از قبیل «بحران شهودگرایی» یا «آیا بینهایت وجود دارد؟» برگزار می‌کردند.

> مطبوعات دست راستی رسماً از این عمل ابراز تأسف کردند، اما از نوشته‌های آنها چنین بر می‌آمد که این سرنوشت در انتظار همهٔ استادانی است که از اساس مخالف کلیسا باشند.

وقتی آلمان کشور اتریش یعنی میهنِ پیشوایش آدولف هیتلر را به خود ملحق ساخت، قاتل اشلیک فوراً آزاد شد. در این زمان، باقیماندهٔ اعضای حلقهٔ وین در جاهای مختلف، و بیشتر در پراگ و آمستردام، پراکنده شدند. چنانکه بعداً معلوم شد، این نقاط هم آن‌قدر دور [از خطر] نبودند. همه سرانجام در انگلستان یا ایالات متحدهٔ آمریکا پناه جستند. اتو نویراتِ سرکش همراه با دختر رابده مایستر عرض کانال مانش را با قایقی طی کرد، و گودل و همسرش از راه سیبری و اقیانوس هند از پرینستن سر در آوردند.

اعضای حلقهٔ وین از بلای نازیها جان به در بردند. آنها مثلاً خوش‌شانس‌تر از ریاضیدانان مکتب لهستان بودند که خیلیهایشان به دست نازیها از میان رفتند. ولی دیگر از آن وینی‌هایی که زمانی بهای بلیط اپرا را برای شنیدن سخنانی دربارهٔ منطق یا علوم [تجربی] می‌پرداختند، خبری نبود. پس از جنگ، بازسازی ایرای دولتی که بر اثر بمباران ویران شده بود در اتریش نوینِ دموکراتیک، از بیشترین اولویت برخوردار شد، ولی به اشخاصی مانند پوپر و منگر مؤدبانه گفته شد که دانشگاه وین جایی برای آنها ندارد. اما نکتهٔ مسرت‌انگیز این است که هنوز چند قهوه‌خانهٔ خوب در وین وجود دارد.

ترجمهٔ سیامک کاظمی

چند مرجع

مجموع آثار هانس هان را انتشارات اشپرینگر-فرلاگ، شعبهٔ وین (با ویرایش اشمترر (L.Schmetterer) و کارل زیگموند) منتشر می‌کند. جلد اول آن (با مقدمه‌ای به قلم سر کارل پوپر) در پاییز ۱۹۹۵ از چاپ در می‌آید. خواننده می‌تواند برای مطالعه دربارهٔ زندگی و آثار هان به آثار زیر مراجعه کند

Karl Mayerhofer: Nachruf auf Hans Hahn, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 41 (1934), 221-238.

Karl Menger: Introduction to *Hans Hahn, Empiricism, Logic and Mathematics*, edited by Brian Guiness, Vienna Circle Collection, Kluwer, Dordrecht (1980).

Karl Menger: Reminiscences of the Vienna Circle and the Mathematical Kolloquium, Vienna Circle Collection, Kluwer, Dordrecht (1995).

Rudolf Einhorn: Vertreter der Mathematik und Geometrie an den Wiener Hochschulen 1890-1940. Ph.D. thesis, Technical Univ. Vienna (1985).

* * * * * *

• Karl Sigmund, "A philosopher's mathematician: Hans Hahn and the Vienna Circle", *Math. Intelligencer*, (4) **17** (1995) 16-29.

* کارل زیگموند، مؤسسهٔ ریاضیات دانشگاه وین، اتریش

وقتی راسل به او [یعنی به وینگنشتاین] گفت که او نباید فقط آنچه می‌اندیشد بیان کند بلکه باید برای آن برهان نیز بیاورد، او پاسخ داد که برهانْ زیباییِ اندیشهٔ بیان‌شده را از بین می‌برد. احساسِ او چنان می‌بود که [در صورتِ اقامهٔ برهان] گویی گُلی را با دستهای گل‌آلود می‌آلاید.

نقل از:

Ray Monk. *Ludwig Wittgenstein: The Duty of Genius*, Penguin Books, New York (1990) p.54.

مقالهٔ کلاسیک

آیا می‌توان شکل طبل را شنید؟*

مارک کاتس
ترجمهٔ مجید حسینی

«فیزیک فقط فرصت حل مسأله‌ها را به ما نمی‌دهد . . . ،
فیزیک [همچنین] خود حلّ را به ما عرضه می‌دارد.»
هـ.پوانکاره

پیش از آنکه به شرح عنوان سخنرانی بپردازم و موضوع آن را بیان کنم باید بگویم شیوهٔ ارائهٔ مطالب بیشتر شبیه به گردشی تفریحی خواهد بود تا مسافرتی منظم. قصد ندارم که در زمانی معین به مقصدی خاص برسم، بلکه در بسیاری از مکانها خواهم ایستاد و به نظارهٔ اطراف خواهم پرداخت. امروزه آنچنان کوششی صرف شسته رفته کردن ریاضیات و کاراتر ارائه کردن آن می‌شود که شاید سرپیچیِ تکروانه‌ای از این روند کلی قابل بخشش باشد.

۱. حالا باز می‌گردیم به موضوع و عنوان سخنرانی.

بیش از یک سده است که می‌دانیم اگر پوستهٔ Ωیی را، با مرز ثابت نگاه داشته‌شدهٔ Γ (شکل ۱)، به ارتعاش درآوریم جابجاییِ آن (در جهت عمود بر صفحه‌ای که در ابتدا در آن قرار داشت) یعنی

$$F(x,y;t) \equiv F(\vec{\rho};t)$$

در معادلهٔ موج

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 F$$

صدق می‌کند. c ثابت ویژه‌ای است وابسته به خاصیتهای فیزیکی پوسته و کششی که پوسته را نگاه داشته است.

واحدها را طوری انتخاب می‌کنم که $c^2 = \frac{1}{2}$. به‌ویژه جوابهایِ به شکل

$$F(\vec{\rho};t) = U(\vec{\rho})e^{i\omega t}$$

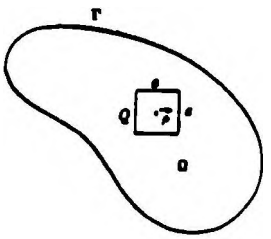
مورد توجه‌اند (هم درنظر ریاضیدانان و هم درنظر موسیقیدانان) زیرا که نسبت به زمان همسازند و در نتیجه نشان‌دهندهٔ تُنهای خالصی هستند که پوسته می‌تواند ایجاد کند. این جوابهای ویژه مُدهای طبیعی نیز نامیده می‌شوند.

برای یافتن این مدهای طبیعی، $U(\vec{\rho})e^{i\omega t}$ را در معادلهٔ موج قرار می‌دهیم و می‌بینیم که U باید در معادلهٔ $\frac{1}{2}\nabla^2 U + \omega^2 U = 0$ با شرط مرزی $U = 0$ روی Γ (مرز Ω) صدق کند و این متناظر است با اینکه مرزِ پوسته ثابت باشد.

باید معنای «$U = 0$ روی Γ» را روشن کنیم؛ برای مرزهایِ به‌اندازهٔ کافی هموار این بدین معناست که وقتی $\vec{\rho}$ به نقطه‌ای از Γ نزدیک می‌شود (از درون Ω)، $U(\vec{\rho}) \to 0$. یکی از مسائل بزرگ فیزیک ریاضیِ سدهٔ نوزدهم این بود که نشان دهند پوسته می‌تواند طیف گسسته‌ای از تُنهای

مارک کاتس (Mark Kac) در لهستان متولد شد و تحقیقات دورهٔ دکتری خود را در آن کشور زیر نظر اشتاینهاوس در ۱۹۳۶ به پایان رساند. در سالهای ۱۹۳۹ تا ۱۹۶۱ در دانشگاه کرنل آمریکا تدریس و تحقیق می‌کرد و در سالهای ۱۹۶۱ تا ۱۹۸۲ استاد دانشگاه راکفلر بود و از سال ۱۹۸۲ تا پایان عمرش (۱۹۸۴) را در دانشگاه کالیفرنیای جنوبی گذراند.

کاتس تحقیقاتی بنیادی در زمینه‌های احتمال و معادلات دیفرانسیل جزئی انجام داده است. وی علاوه بر آثار تحقیقی، چند کتاب درسی و تعدادی مقالهٔ توصیفی نیز نوشته است. دو تا از مقاله‌های او به‌عنوان اثر توصیفی برندهٔ جایزهٔ معروف شوونه (Chauvenet) شده است که مقالهٔ حاضر یکی از آنهاست.



شکل۱

خالص را ایجاد کند، و یا به عبارت دیگر دنبالهٔ گسسته‌ای از ωها چون $\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \omega_3 \leqslant \dots$ موجود است که معادلهٔ

$$\frac{1}{2}\nabla^2 U + \omega^2 U = 0$$
$$U = 0 \text{ ، روی } \Gamma$$

جواب نابدیهی دارد. پوانکاره و بسیاری دیگر برای حل آن تلاش فراوانی کردند.

پاسخ مسأله سرانجام در اوایل قرن حاضر با استفاده از نظریهٔ معادلات انتگرال به‌دست آمد.

هم‌اکنون می‌دانیم، و اگر شما نمی‌دانید فعلاً قبول کنید، که برای ناحیه‌های Ω که توسط خمِ هموارِ Γ احاطه شده‌اند دنباله‌ای از اعداد چون $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots$ موجود است که ویژه‌ـمقدار نامیده می‌شوند و به هر کدام تابعی چون $\psi(\vec{\rho})$ متناظر می‌شود، که ویژه‌ـتابع نام دارد، به‌طوری که

$$\frac{1}{2}\nabla^2 \psi_n + \lambda_n \psi_n = 0$$

و $\psi_n(\vec{\rho}) \to 0$ وقتی (نقطه‌ای از Γ) $\vec{\rho} \to$. متداول است که ψها را طوری انتخاب کنند که

$$\iint_\Omega \psi_n^2(\vec{\rho})\, d\vec{\rho} = 1$$

توجه کنید که $d\vec{\rho}$ را به مفهوم جزء انتگرالگیری به کار می‌برم (مثلاً در مختصات دکارتی، $d\vec{\rho} \equiv dx\, dy$).

۲. محور بحث من مسألهٔ زیر است: فرض کنید Ω_1 و Ω_2 دو ناحیهٔ مسطح باشند که به‌ترتیب توسط خمهای Γ_1 و Γ_2 احاطه شده‌اند و مسائل ویژه‌ـمقدار زیر را در نظر بگیرید

روی Ω_1 ، $\frac{1}{2}\nabla^2 U + \lambda U = 0$	روی Ω_2 ، $\frac{1}{2}\nabla^2 V + \mu V = 0$
با ضابطهٔ	با ضابطهٔ
روی Γ_1 ، $U = 0$	روی Γ_2 ، $V = 0$

فرض کنید به ازای هر n، ویژه‌ـمقدار λ_n برای Ω_1 برابر است با ویژه‌ـمقدار μ_n برای Ω_2. سؤال: آیا ناحیه‌های Ω_1 و Ω_2 به مفهوم هندسهٔ اقلیدسی قابل انطباق‌اند؟

این روایت از مسأله را برای نخستین بار حدود ده‌سال پیش از پروفسور بوخنر شنیدم. اخیراً وقتی آن را برای پروفسور پرس بیان کردم او فوراً گفت: «یعنی منظورت این است که اگر گوشِ مطلق داشته باشی می‌توانی شکلِ طبل را پیدا کنی؟»

حال می‌بینید که «طبل» عنوانِ سخنرانی بیشتر شبیه داریه‌زنگی است (که واقعاً پوسته است) و اگر مسأله را از این تعبیرات عاری کنیم بدین صورت درمی‌آید که اگر تمامی ویژه‌ـمقدارهای مسألهٔ ویژه‌ـمقدار

$$\frac{1}{2}\nabla^2 U + \lambda U = 0 \text{ ، در } \Omega$$
$$U = 0 \text{ ، روی } \Gamma$$

را بدانیم آیا می‌توانیم Ω را مشخص کنیم؟

۳. پیش از آنکه پیشتر روم باید خاطرنشان کنم تا جایی که من اطلاع دارم مسأله هنوز حل نشده است. من فکر می‌کنم نمی‌توان شکل داریه‌زنگی را «شنید» ولی ممکن است اشتباه کنم و حاضر نیستم روی درستی و یا نادرستی آن مبلغ هنگفتی شرط بندی کنم.

هدفم این است که نشان دهم با دانستن تمامی ویژه‌ـمقدارها چه مقدار می‌توان راجع به شکل طبل استنباط کرد، و ارتباط فراوانی را که مسألهٔ ما با بخشهای گوناگون ریاضیات وفیزیک دارد روشن کنم.

خاطرنشان می‌کنم که در طول این مقاله فقط از خواص مجانبی ویژه‌ـمقدارهای بزرگ استفاده می‌شود. ممکن است به نظر آید که بدین صورت مقدار زیادی اطلاعات از بین می‌رود و برخی استدلال کنند که ممکن است بتوان با داشتن اطلاع دقیق از تمامی ویژه‌ـمقدارها شکلِ پوسته را مشخص کرد. ولی اخیراً جان میلنر دو چنبرهٔ غیر قابل انطباق شانزده بعدی ساخته است که عملگرهای لاپلاس‌ـبلترامی آنها دقیقاً ویژه‌ـمقدارهای یکسان دارند. (به یادداشت یک صفحه‌ای او [1] مراجعه کنید).

۴. اولین نتیجهٔ به‌دست آمده دربارهٔ این موضوع، این است که می‌توان مساحتِ Ω را «شنید». این نتیجه‌ای است قدیمی با تاریخچه‌ای هیجان‌انگیز که به اختصار آن را نقل می‌کنم.

در روزهای پایانی اکتبر ۱۹۱۰ از فیزیکدان بزرگ هلندی لورنتس دعوت شد تا رشته سخنرانیهای «ولفسکل» را در گوتینگن ایراد کند. ولفسکل جایزه‌ای برای اثبات و یا رد قضیهٔ آخر فرما تعیین کرده بود و قید کرده بود مادامی که جایزه به کسی اهدا نشده با سود حاصل از این سرمایه از دانشمندان برجسته دعوت شود تا در گوتینگن سخنرانی کنند.

لورنتس پنج سخنرانی تحت عنوان کلی "Alte und neue Fragen der Physik" ــ مسائل کهنه و نو در فیزیک ــ ایراد کرد و در پایان سخنرانی چهارم چنین گفت (با ترجمهٔ آزاد از متن آلمانی اصلی [2]): «در پایان، مسأله‌ای ریاضی هست که شاید مورد توجه ریاضیدانان حاضر در جلسه قرار گیرد. ریشهٔ آن در نظریهٔ تابشِ جینز [3] است.»

«درون محفظه‌ای که سطحی کاملاً منعکس کننده دارد امواج الکترومغناطیسی ایستایی می‌توانند به‌وجود آیند که مشابه‌اند با صداهایی که در لولهٔ ارگ ایجاد می‌شود؛ ما توجه خود را فقط به هارمونیکهای خیلی بالا محدود می‌کنیم. جینز به دنبال یافتن انرژی موجود در بازهٔ فرکانس

1. "Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds" Proc. Nat.Acad.Sc. ,51 (1964) 542.

۲. منظور در متن انگلیسی است.ـم.

3. Jeans

$d\nu$ است. بدین منظور تعداد هارمونیکهای بین فرکانسهای ν و $\nu + d\nu$ رامحاسبه‌می‌کند و این تعداد را در انرژیِ مربوط به فرکانسِ ν ضرب می‌کند، که بنابر قضیه‌ای در مکانیک، آماری برای تمام فرکانسها یکسان است.»

«در اینجاست که مسألهٔ ریاضی مورد نظر پیش می‌آید یعنی اثبات این مطلب که تعداد هارمونیکهای به اندازهٔ کافی بالا که بین ν و $\nu + d\nu$ قرار دارند از شکل محفظه مستقل است و فقط متناسب است با حجم آن. در یکی از پایان‌نامه‌های دانشگاه لیدن این قضیه برای بسیاری از شکلهایِ سادهٔ قابل محاسبه اثبات شده است. شکی نیست که حکم در حالت کلی حتی برای ناحیه‌های چندگانه‌ـهمبند نیز برقرار است. قضیه‌های مشابهی نیز برای دیگر ساختارهای مرتعش نظیر پوسته و تودهٔ هوا و غیره باید برقرار باشد.»

اگر این حدس لورنتس را برحسب پوستهٔ خودمان بیان کنیم به این‌صورت درمی‌آید

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1 \sim \frac{|\Omega|}{2\pi}\lambda$$

$N(\lambda)$ تعداد ویژه‌ـمقدارهای کوچکتر از λ و $|\Omega|$ مساحت Ω است و $\sim$ یعنی

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{|\Omega|}{2\pi}$$

داستانی مشکوک حکایت از آن دارد که هیلبرت پیش‌بینی کرد این قضیه در دوران حیات وی اثبات نخواهد شد. او به اندازهٔ چندین سال اشتباه کرده بود. چون درکمتر از دو سال بعد هرمان وایل، که در سخنرانی لورنتس حضور داشت و به مسأله علاقه‌مند شده بود، آن را حل کرد یعنی ثابت کرد که وقتی $\lambda \to \infty$

$$N(\lambda) \sim \frac{|\Omega|}{2\pi}\lambda$$

وایل نظریهٔ معادلات انتگرال را ــ که استادش هیلبرت فقط چند سال پیش به‌وجود آورده بود ــ استادانه به‌کار برد و اثباتش چون تاجی است درخشان بر سر این نظریهٔ زیبا. بسیاری از پیشرفتهای آتی نظریهٔ معادلات دیفرانسیل و انتگرال (به‌ویژه آثار کورانت و مکتب او) متأثر از گزارش وایل دربارهٔ حدس لورنتس است.

۵. حال به اختصار به مسألهٔ فیزیکی دیگری می‌پردازم که آن‌هم ارتباط نزدیکی با مسألهٔ توزیع ویژه‌ـمقدارهای عملگر لاپلاسی دارد.

می‌توانیم این امر را به‌عنوان اصلی ابتدایی در مکانیک آماری قبول کنیم که اگر دستگاهی از M ذره که به حجمی چون Ω محدود شده توسط دماپایی در دمای T در تعادل باشد آنگاه احتمال یافتن ذراتی معین در $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_M$ (با اجزای حجم $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \ldots, d\vec{r}_M$) برابر است با

$$\frac{\exp\left[-\frac{1}{kT}V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_M)\right] d\vec{r}_1\, d\vec{r}_2 \ldots d\vec{r}_M}{\int_\Omega \cdots \int_\Omega \exp\left[-\frac{1}{kT}V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_M)\right] d\vec{r}_1\, d\vec{r}_2 \ldots d\vec{r}_M}$$

$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_M)$ پتانسیل اندرکنش ذرات است و $k = R/N$ که R «ثابتِ گاز» و N عدد آووگادرو است. فرض متناظر با این در مکانیک آماری کوانتمی برای ذرات یکسان با جرم m که از آمار بولتسمن پیروی می‌کنند بسیار پیچیده‌تر است. نقطهٔ شروع، معادلهٔ شرودینگر است

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_M)\psi = -E\psi$$

($\hbar = \frac{h}{2\pi}$ که h ثابت پلانک است)

با شرطِ مرزیِ $\lim \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_M) = 0$ وقتی حداقل یکی از $\vec{r}_k$ها به مرز Ω نزدیک می‌شود (این شرط مرزی باعث می‌شود که ذرات به Ω محدود شوند.) فرض کنید $E_1 \leqslant E_2 \leqslant E_3 \leqslant \ldots$ ویژه‌ـمقدارها و $\psi_1, \psi_2, \ldots$ ویژه‌ـتابعهای یکهٔ متناظر به آنها باشند. در این‌صورت فرض بنیادی حکم می‌کند که احتمال یافتن ذراتی معین در $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_M$ (با اجزای حجم $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \ldots, d\vec{r}_M$) برابر است با

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-E_s/kT}\psi_s^2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_M)d\vec{r}_1\, d\vec{r}_2 \ldots d\vec{r}_M}{\sum_{s=1}^{\infty} e^{-E_s/kT}}$$

هیچ ذره‌ای نمی‌شناسیم که از آمار بولتسمن پیروی کند. ولی نگران نباشید، این واقعیت تأسف‌آور برای ما اهمیتی ندارد.

حال بحث خود را به حالتِ گازِ ایده‌آل محدود می‌کنم که بنابر تعریف به معنی $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_M) \equiv 0$ است.

از دیدگاه کلاسیک، احتمال یافتن ذراتی معین در $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_M$ به وضوح برابر است با

$$\frac{d\vec{r}_1\, d\vec{r}_2 \ldots d\vec{r}_M}{|\Omega|^M}$$

که $|\Omega|$ حجم Ω است.

از دیدگاه مکانیک کوانتمی پاسخ آن‌چنان صریح نیست. معادلهٔ شرودینگر برای گاز ایده‌آل عبارت است از

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = -E\psi$$

که به‌وضوح معادله‌ای تفکیک‌پذیر است.

حال اگر مسألهٔ ویژه‌ـمقدار ۳ بعدی (به‌جای $3M$ بعدی)

$$\frac{1}{2}\nabla^2\psi(\vec{r}) = -\lambda\psi(\vec{r}) \qquad \vec{r} \in \Omega$$

وقتی $\vec{r} \to \Omega_{\text{مرز}}$ ، $\psi(\vec{r}) \to 0$

را در نظر بگیریم روشن است که E_s و $\psi_s(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_M)$ به‌سادگی برحسب λها و $\psi(r)$های متناظر قابل بیان است.

احتمال یافتن ذراتی معین در $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_M$ عبارت است از

$$\prod_{k=1}^{M} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{\lambda_n \hbar^2}{mkT}\right] \psi_n^2(r_k)}{\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{\lambda_n \hbar^2}{mkT}\right]} d\vec{r}_k$$

حال وقتی $\hbar \to 0$ (یا وقتی $T \to \infty$) باید پاسخ مکانیک کوانتمی

مبدل به پاسخ کلاسیک شود و این حدس القا می‌شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \tau}\psi_n^2(\vec{r}) \sim \frac{1}{|\Omega|}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \tau}$$

وقتی $\tau \to 0$، $\left[\tau = \frac{\hbar^2}{mkT}\right]$

اگر به‌جای محفظهٔ سه‌بعدی واقعی Ω محفظه‌ای دوبعدی در نظر بگیریم، نتیجه تغییری نمی‌کند

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \tau}\psi_n^2(\vec{r}) \sim \frac{1}{|\Omega|}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \tau}, \quad \tau \to 0$$

منتها با این تفاوت که $|\Omega|$ به مفهوم مساحت است و نه حجم.

واضح است که انتظار داریم نتیجه فقط برای $\vec{r}$ در درون Ω برقرار باشد.

اگر نتیجهٔ وایل را قبول کنیم که (در حالت دو بعدی)

$$N(\lambda) \sim \frac{|\Omega|}{2\pi}\lambda \ , \ \lambda \to \infty$$

بنابر قضیه‌ای آبلی فوراً نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{|\Omega|}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \tau} \sim \frac{1}{2\pi\tau} \ , \ \tau \to 0$$

و بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \tau}\psi_n^2(\vec{r}) \sim \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}\, d\lambda$$

با قرار دادن $A(\lambda) = \sum_{\lambda_n<\lambda}\psi_n^2(\vec{r})$ نتیجه را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}\, dA(\lambda) \sim \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}\, d\lambda \ , \ \tau \to 0$$

چون $A(\lambda)$ نانزولی است می‌توانیم قضیهٔ تاوبری‌ـهاردی‌ـلیتلوودـکارامانا را به‌کار بریم و همگی وسوسه می‌شویم که نتیجه بگیریم به ازای هر $\vec{r}$ درون Ω

$$A(\lambda) = \sum_{\lambda_n<\lambda}\psi_n^2(\vec{r}) \sim \frac{\lambda}{2\pi} \ , \ \lambda \to \infty$$

با وجود اینکه این فرمول مجانبی براساس «دلایل فیزیکی» تقریباً «واضح» است تا سال ۱۹۳۴ اثبات نشده بود. در این سال کارلمان موفق به اثبات دقیق آن شد.

در پایان این بخش خوب است مختصری هم دربارهٔ «استراتژی» رهیافتمان بگویم.

روشن است که خواص مجانبی λ_nها به‌ازای nهای بزرگ بیشتر مورد توجه ما هستند. برای یافتن این خواص می‌توانیم سری دیریکلهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}$$

را به‌ازای tهای کوچک بررسی کنیم. بهترین روش این کار نیز بررسی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\psi_n^2(\vec{\rho}) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, dA(\lambda)$$

است و بنابراین به ارتباط متقابل قضیه‌های آبلی و تاوبری که در بالا توصیف شد رهنمون می‌شویم.

۶. به‌نظر می‌رسد شهودِفیزیکی علاوه بر ارائهٔ حدسهای جالب توجه و مبارزطلب برای ریاضیدانان، باید راهی نیز به‌سوی اثبات و تعمیمهای ممکن آن نشان دهد.

ولی نظریهٔ تابشِ جسمِ سیاه و یا مکانیکِ آماریِ کوانتمی چنان دور از شهودِ ساده و آکنده از استقراءهایِ فیزیکیِ جسورانه و پیچیده است که حتی فهم آن برای ریاضیدانان دشوار است تا چه رسد به آنکه به اثباتی دقیق رهنمونشان کند.

خوشبختانه در شرایط [فیزیکی] بسیار مقدماتیتر، مسألهٔ توزیع ویژه‌ـمقدارهای عملگر لاپلاسی بسیار ساده‌تر می‌شود. برهانها به مثابهٔ تعمیمِ طبیعیِ شهودِ فیزیکی پدیدار می‌شوند و تعمیمهایی جالب توجه در دسترس قرار می‌گیرند.

۷. شرایط فیزیکی مورد نظر از آنِ نظریهٔ پخش است که شاخه‌ای دیگر از فیزیک ریاضی سدهٔ نوزدهم است.

«چیز»ی را در نظر بگیرید که در ابتدا در $\vec{\rho}\ (\equiv (x_0, y_0))$ متراکم شده و از طریق ناحیهٔ مسطح Ω، محصور در Γ، پخش می‌شود. همچنین فرض کنید این چیز در مرزْ جذب («خورده») می‌شود.

$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)$، تراکم ماده در $\vec{r}\ (\equiv (x, y))$ در زمان t، در معادلهٔ دیفرانسیل پخش

$$\frac{\partial P_\Omega}{\partial t} = \frac{1}{2}\nabla^2 P_\Omega \qquad \text{(الف)}$$

با شرط مرزی

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \to 0 \quad \text{وقتی } \vec{r} \text{ به نقطه‌ای از مرز نزدیک می‌شود} \qquad \text{(ب)}$$

و شرط اولیهٔ

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \to \delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \quad \text{وقتی } t \to 0 \qquad \text{(پ)}$$

صدق می‌کند. در اینجا $\delta(\vec{r}, \vec{\rho})$ «تابع دلتا»ی دیراک است که «مقدار» آن ∞ است اگر $\vec{r} = \vec{\rho}$ و 0 است اگر $\vec{r} \neq \vec{\rho}$.

شرط مرزی (ب) بیانگر این واقعیت است که مرز جاذب است و شرط اولیهٔ (پ) حاکی است از اینکه در ابتدا تمامیِ «چیز» در $\vec{\rho}$ تراکم یافته است.

باز هم واحدها را طوری انتخاب کرده‌ام که ثابتِ پخش برابر $\frac{1}{2}$ شود.

می‌دانیم که تراکم $P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)$ برحسب ویژه‌ـمقدارهای λ_n و ویژه‌ـتابعهای یکهٔ $\psi_n(\vec{r})$ در مسألهٔ

$$\frac{1}{2}\nabla^2\psi + \lambda\psi = 0 \ , \ \text{در } \Omega$$

$$\psi = 0 \ , \ \text{روی } \Gamma$$

قابل بیان است. در واقع

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\psi_n(\vec{\rho})\psi_n(\vec{r})$$

از دیدگاه شهودی روشن است که، به‌ازای tی کوچک، ذراتِ چیزِ پخش شونده زمانِ کافی برای «احساس کردنِ» تأثیر مرز Γ ندارند. در آغازِ پخش، گویی از فاجعه‌ای که در مرز در انتظارشان است بی‌خبرند.

پس انتظار داریم که به مفهومی تقریبی

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) \to P_\circ(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) \quad \text{وقتی } t \to \circ$$

که $P_\circ(\vec{\rho} \mid \vec{r};t)$ نیز در معادلهٔ پخش

$$\frac{\partial P_\circ}{\partial t} = \frac{1}{2}\nabla^2 P_\circ \qquad \text{(الف ۱)}$$

و شرط اولیهٔ

$$P_\circ(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) = \delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \quad \text{وقتی } t \to \circ \qquad \text{(ب ۱)}$$

صدق می‌کند ولی محدودیت دیگری ندارد.

در واقع محدودیت جزئی دیگری نیز وجود دارد که بدون آن جواب یکتا نیست (واقعیتی در خور توجه که چند سال پیش ویدر[1] آن را کشف کرد). محدودیت این است که $P_\circ \geqslant \circ$ (یا به‌طورکلی‌تر اینکه $P_\circ$ از پایین کراندار باشد).

شرط مشابهی برای P_Ω لازم نیست چون‌که برای پخش در ناحیه‌ای کراندار این نتیجه خودبه‌خود به‌دست می‌آید.

فرمول صریح معروفی برای $P_\circ$ داریم

$$P_\circ(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) = \frac{1}{2\pi t}\exp\left[-\frac{\| \vec{r} - \vec{\rho} \|^2}{2t}\right]$$

که $\| \vec{r} - \vec{\rho} \|$ نشان‌دهندهٔ فاصلهٔ اقلیدسی بین $\vec{\rho}$ و $\vec{r}$ است.

حال می‌توانم با دقت بیشتری اصلِ «احساس نکردن مرز» را بیان کنم که لحظه‌ای پیش توضیح دادم.

ادعا این است که وقتی $t \to \circ$

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\psi_n(\vec{\rho})\psi_n(\vec{r})$$
$$\sim \frac{1}{2\pi t}\exp\left[-\frac{\| \vec{r} - \vec{\rho} \|}{2t}\right] = P_\circ(\vec{\rho} \mid \vec{r};t)$$

که در اینجا $\sim$ به معنای «تقریباً مساوی است با» است. این حرف کمی مبهم است ولی فعلاً آن را به همین صورت باقی می‌گذاریم.

اگر بتوانیم حتی برای $\vec{\rho} = \vec{r}$ نیز به این فرمول اعتماد کنیم نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\psi_n^2(\vec{r}) \sim \frac{1}{2\pi t}$$

و اگر از این هم خوشبینتر باشیم می‌توانیم از رابطهٔ بالا انتگرال بگیریم و با استفاده از شرط

$$\int_\Omega \psi_n^2(\vec{r})\, d\vec{r} = 1$$

نتیجه بگیریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t}$$

فوراً می‌توانیم فرمولهایی را تشخیص دهیم که چند سطر پیش در بررسی گاز ایده‌آل از دید مکانیک آماری کوانتومی دربارهٔ آنها بحث کردیم. اگر قضیهٔ هاردی‌ـ‌لیتلوودـ‌کارامانا را، که پیشتر به‌آن اشاره کردیم به‌کار بریم، قضیه‌های کارلمان و وایل را نتیجه می‌گیریم.

ولی برای این کار باید مجاز باشیم $\sim$ را به معنای «مجانب است با» به کار بریم.

۸. حال کمی هم به ندای وجدانِ ریاضیمان گوش فرا دهیم. آیا بحث ما همانند گذشته به‌دور از دقت ریاضی نیست؟ درست است که پدیدهٔ پخش بسیار شناخته‌شده‌تر از تابشِ جسمِ سیاه و یا آمارِ کوانتمی است، ولی شناخت، حداکثر، آسایش خاطر فراهم می‌کند و آسایش خاطر ممکن است فرسنگها به‌دور از دقتی باشد که ریاضیات می‌طلبد (و معمولاً چنین است).

ببینیم برای اعتبار بخشیدن به این سخنان سست چه می‌توانیم بکنیم. ابتدا خود را از دست چند نکتهٔ فرعی که ممکن است مایهٔ نگرانی شما شوند خلاص کنیم.

عبارتهایی نظیر «$\psi = \circ$ روی Γ» یا «$P(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) \to \circ$ وقتی $\vec{r}$ به مرز Ω نزدیک می‌شود» تعبیرهای گوناگون دارند.

فرض می‌کنم Γ آن‌قدر هموار هست که ابهامی پیش نیاید یعنی

$$P(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) \to \circ \quad \text{وقتی (نقطه‌ای در مرز } \Omega) \to \vec{r}$$

هیچ معنایی جز آنچه می‌گوید ندارد و $\psi = \circ$ روی Γ یعنی

$$\psi \to \circ \quad \text{وقتی (نقطه‌ای در مرز } \Omega) \to \vec{r}$$

به‌طور مشابه $P(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) \to \delta(\vec{r} - \vec{\rho})$ وقتی $t \to \circ$، تعبیر واضحی دارد، یعنی به‌ازای هر مجموعهٔ باز A شامل $\vec{\rho}$

$$\lim_{t\to\circ} \iint_A P(\vec{\rho} \mid \vec{r};t)\, d\vec{r} = 1$$

حال به نکاتی که مناسبت بیشتری دارند می‌پردازم. اگر نظریهٔ ریاضی پخش به هر طریقی متناظر با واقعیت فیزیکی باشد باید نابرابری

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) \leqslant P_\circ(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) = \frac{\exp\left[-\frac{\|\vec{\rho} - \vec{r}\|^2}{2t}\right]}{2\pi t}$$

برقرار باشد. زیرا اگر امکان نابودی ماده (در Γ مرز Ω) وجود داشته باشد، به یقین چیزی که در زمان t در نقطهٔ $\vec{r}$ خواهد بود کمتر از حالتی است که نابودی ماده ممکن نباشد.

حال فرض کنید Q مربعی است که مرکزش $\vec{\rho}$ است و کاملاً در درون Ω است. همچنین فرض کنید مرزش همانند مانعی جاذب عمل می‌کند و $P_Q(\vec{\rho} \mid \vec{r};t)$، $\vec{r} \in Q$، تراکم متناظر در $\vec{r}$ در زمان t است.

به عبارت دیگر P_Q در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{\partial P_Q}{\partial t} = \frac{1}{2}\nabla^2 P_Q \qquad \text{(الف ۲)}$$

1. D. V. Widder

و شرط اولیهٔ

$$P_Q(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) \to \delta(\vec{r}-\vec{\rho}) \quad \text{وقتی} \quad t \to 0 \qquad (\text{پ } ۲)$$

صدق می‌کند. همچنین در شرط مرزی

$$P_Q(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) \to 0 \quad \text{وقتی (نقطه‌ای در مرز } Q) \to \vec{r} \qquad (\text{ب } ۲)$$

صادق است.

باز هم ظاهراً واضح است که

$$P_Q(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) \leqslant P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) \ , \quad \vec{r} \in Q$$

زیرا وقتی‌که چیزِ پخش شونده به مرز Q می‌رسد، تا جایی که به P_Q مربوط است، از بین می‌رود ولی ممکن است سهمی که در P_Ω دارد از بین نرود.

به این دلیل توانسته‌ایم Q را این‌قدر ساده بگیریم که $P_Q(\vec{\rho} \mid \vec{r};t)$ به صراحت مشخص است. به‌ویژه

$$P_Q(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t) = \frac{4}{a^2} \sum_{\substack{m,n \\ \text{اعداد صحیح فرد}}} \exp\left[-\frac{(m^2+n^2)\pi^2}{2a^2}t\right]$$

که a طول ضلع مربع است.

نابرابری‌های

$$P_Q(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) \leqslant P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) \leqslant \frac{\exp\left[-\frac{\|\vec{r}-\vec{\rho}\|^2}{2t}\right]}{2\pi t}$$

به‌ازای هر $\vec{r} \in Q$ برقرارند و از جمله به‌ازای $\vec{r}=\vec{\rho}$. در این حالت نتیجه می‌گیریم

$$\frac{4}{a^2} \sum_{\substack{m,n \\ \text{اعداد صحیح فرد}}} \exp\left[-\frac{(m^2+n^2)\pi^2}{2a^2}t\right] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\psi_n^2(\vec{\rho})\frac{1}{2\pi t}$$

و به سادگی می‌توان ثابت کرد وقتی $t \to 0$، به‌طور مجانبی داریم

$$\frac{4}{a^2} \sum_{\substack{m,n \\ \text{اعداد صحیح فرد}}} \exp\left[-\frac{(m^2+n^2)\pi^2}{2a^2}t\right] \sim \frac{1}{2\pi t}$$

بنابراین به‌طور مجانبی برای $t \to 0$، $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\psi_n^2(\vec{\rho}) \sim \frac{1}{2\pi t}$ و قضیهٔ کارلمان نتیجه می‌شود. اثبات قضیهٔ وایل، فقط کمی مشکلتر است.

اگر روی Q از نابرابری

$$\frac{4}{a^2} \sum_{\substack{m,n \\ \text{اعداد صحیح فرد}}} \exp\left[-\frac{(m^2+n^2)\pi^2}{2a^2}t\right] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\psi_n^2(\vec{\rho})$$

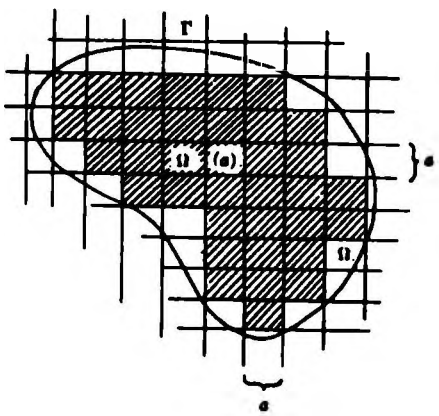
انتگرال بگیریم نتیجه می‌گیریم که

$$4 \sum_{\substack{m,n \\ \text{اعداد صحیح فرد}}} \exp\left[-\frac{(m^2+n^2)\pi^2}{2a^2}t\right] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\iint_Q \psi_n^2(\vec{\rho})\,d\vec{\rho}$$

اکنون Q را همان‌طورکه در شکل ۲ نشان داده شده، با شبکه‌ای متشکل از مربعهایِ به ضلع a می‌پوشانیم، و فقط آنهایی را نگه می‌داریم که درون Ω هستند. فرض کنید $N(a)$ تعداد این مربعها و $\Omega(a)$ اجتماع تمامی آنها باشد. داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} = \sum_{n=1}^{\infty}\iint_\Omega \psi^2(\vec{\rho})\,d\vec{\rho} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\iint_{\Omega(a)} \psi_n^2(\vec{\rho})\,d\vec{\rho} \geqslant 4N(a) \sum_{\substack{m,n \\ \text{اعداد صحیح فرد}}} \exp\left[-\frac{(m^2+n^2)\pi^2}{2a^2}t\right]$$

و با انتگرالگیری از رابطهٔ $P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t) \leqslant 1/2\pi t$ روی Ω نتیجه می‌گیریم $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \leqslant |\Omega|/2\pi t$.



شکل۲

با توجه به اینکه $N(a)a^2 = |\Omega(a)|$، حاصل عملیات اخیر را به‌صورت نابرابری

$$|\Omega|\frac{4}{a^2} \sum_{\substack{m,n \\ \text{اعداد صحیح فرد}}} \exp\left[-\frac{(m^2+n^2)\pi^2}{2a^2}t\right] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \leqslant \frac{|\Omega|}{2\pi t}$$

بیان می‌کنیم.

از آنجا که (قبلاً اشاره کردیم که)

$$\lim_{t \to 0} 2\pi t\frac{4}{a^2} \sum_{\substack{m,n \\ \text{اعداد صحیح فرد}}} \exp\left[-\frac{(m^2+n^2)\pi^2}{2a^2}t\right] = 1$$

به سادگی نتیجه می‌گیریم

$$|\Omega(a)| \leqslant \liminf_{t\to 0} 2\pi t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \leqslant \limsup_{t\to 0} 2\pi t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \leqslant |\Omega|$$

چون با انتخاب aی به‌دلخواه کوچک، می‌توان $|\Omega(a)|$ را به‌دلخواه به $|\Omega|$ نزدیک کرد، باید $\lim_{t\to 0} 2\pi t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} = |\Omega|$. یا به عبارت دیگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} \quad , \quad t \to 0$$

۹. آیا اکنون دقت را به کمال رسانده‌ایم؟ کاملاً نه. چون با اینکه نابرابریهای

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \leqslant \frac{\exp\left[-\frac{\|\vec{r}-\vec{\rho}\|^2}{2t}\right]}{2\pi t}$$

و

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \geqslant P_Q(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \quad , \quad \vec{r} \in Q$$

بر مبنای شهود کاملاً واضح‌اند ولی باید ثابت شوند. روشی که من برای این کار برگزیده‌ام شاید ساده‌ترین روش نباشد و به این علت آن را انتخاب کرده‌ام که موضوع فیزیکی دیگری را نیز نشان دهم.

از اواین سالهای این سده، از رهگذار آثار اینشتین و اسمولوخوفسکی[1]، می‌دانیم که پخش چیزی نیست جز تجلیِ درشت‌نمودِ حرکت براونیِ میکروسکوپی. تحت فرضهای فیزیکی مناسب، می‌توان $P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)$ را بدین صورت تعبیر کرد که برابر است با چگالیِ احتمالِ یافتن ذرهٔ براونی آزادی، در $\vec{r}$ در زمان t به شرط آنکه سفر نامنظمش را در $t = 0$ از $\vec{\rho}$ آغاز کرده باشد و هنگامی‌که به مرز Ω می‌رسد جذب شود.

اگر تعداد زیادی (مثلاً N) ذرهٔ براونی آزاد و مستقل مسیر حرکت خود را از $\vec{\rho}$ آغازکنند آنگاه

$$N \iint_A P(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)\, d\vec{r}$$

متوسطِ تعدادِ این ذرات است که در لحظهٔ t در A یافت می‌شود. چون درصدِ خطای آماری از مرتبهٔ $1/\sqrt{N}$ است، نظریهٔ پخشِ پیوسته، هنگامی‌که N بزرگ است تقریبی عالی است.

در اوایل دههٔ ۱۹۲۰ نوربرت وینر این دیدگاه را بسیار عمیقتر کرد. او به‌جای اینکه مسأله را به‌صورت مسأله‌ای در آمارِ ذرات در نظر بگیرد آن را به‌صورت مسأله‌ای در آمارِ مسیرها در نظر گرفت. در اینجا بدون اینکه وارد جزئیات شوم به‌اختصار آنچه را که برای فهمیدن این مطلب لازم است مرور می‌کنم.

مجموعهٔ تمامی خمهای پیوستهٔ $\vec{r}(\tau)$، $0 \leqslant \tau < \infty$، را که از مبدأ دلخواه O آغاز می‌گردند در نظر بگیرید. فرض کنید $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ مجموعه‌هایِ باز و $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ لحظه‌های مرتب زمان باشند. طبق نظریهٔ اینشتین-اسمولوخوفسکی لازم بود که (با واحدهای مناسب):

$$\text{Prob.}\{\vec{\rho} + \vec{r}(t_1) \in \Omega_1, \vec{\rho} + \vec{r}(t_2) \in \Omega_2, \ldots, \vec{\rho} + \vec{r}(t_n) \in \Omega_n\} = \int_{\Omega_1} \ldots \int_{\Omega_n} P_0(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t_1) P_0(\vec{r}_1 \mid \vec{r}_2; t_2 - t_1) \ldots P_0(\vec{r}_{n-1} \mid \vec{r}_n; t_n - t_{n-1})\, d\vec{r}_1 \ldots d\vec{r}_n$$

1. Smoluchowski

که مانند گذشته

$$P_0(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) = \frac{1}{2\pi t} \exp\left[-\frac{\|\vec{r}-\vec{\rho}\|^2}{2t}\right]$$

وینر نشان داده است که می‌توان روی فضای تمامی خمهای پیوستهٔ $\vec{r}(\tau)$ که از مبدأ سرچشمه می‌گیرند اندازه‌ای کاملاً جمعی ساخت طوری که مجموعهٔ خمهای $\vec{\rho} + \vec{r}(\tau)$ که در زمانهای $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ به‌ترتیب در مجموعه‌های باز Ω_1، Ω_2، ...، Ω_n قرار دارند اندازه‌اش با فرمول اینشتین-اسمولوخوفسکی معین گردد که در بالا آورده شد.

مجموعهٔ خمهایی با ضابطهٔ $\vec{\rho} + \vec{r}(\tau) \in \Omega$، $0 \leqslant \tau \leqslant t$، و $\vec{\rho} + \vec{r}(t) \in A$ (A مجموعه‌ای باز) اندازه‌پذیر است و می‌توان نشان داد که اگر مرز Ω به‌قدر کافی هموار باشد، این اندازه برابر است با

$$\int_A P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)\, d\vec{r}$$

این گزاره‌ای نابدیهی است و نباید متعجب شویم که فوراً نابرابریهایی را که در سطرهای پیش برای دقیق کردنِ اصل «احساس نکردن مرز» لازم داشتیم، نتیجه می‌دهد.

در واقع، خواننده بدون شک درمی‌یابد که نابرابریهای مورد نظر نتیجهٔ این واقعیت‌اند که اگر مجموعه‌های $\mathcal{A}$، $\mathcal{B}$، $\mathcal{C}$ به‌گونه‌ای باشند که

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$$

آنگاه $\text{meas.}\mathcal{A} \leqslant \text{meas.}\mathcal{B} \leqslant \text{meas.}\mathcal{C}$.

پیش از آنکه جلوتر برویم نکته‌ای را یادآور می‌شوم. مجموعهٔ خمهایِ با ضابطهٔ

$$\vec{\rho} + \vec{r}(t) \in A \ , \ 0 \leqslant \tau \leqslant t \ , \ \vec{\rho} + \vec{r}(\tau) \in \Omega$$

اندازه‌پذیر است حتی اگر مرز Ω کاملاً نامنظم باشد. اندازه را می‌توان باز هم به‌صورت $\int_A P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)\, d\vec{r}$ نوشت و می‌توان نشان داد که در درون Ω، $P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)$ در معادلهٔ پخش $\partial P_\Omega/\partial t = \frac{1}{2}\nabla^2 P_\Omega$ صدق می‌کند و همچنین در شرط اولیهٔ

$$\lim_{t\to 0} \int_A P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)\, d\vec{r} = 1$$

به‌ازای تمامی مجموعه‌های باز A که $\vec{\rho} \in A$، صادق است.

ولی دیگر معلوم نیست که چگونه شرط مرزی

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \to 0 \quad , \quad \vec{r} \to \Gamma \quad \text{وقتی}$$

را تعبیر کنیم.

این مشکل باعث می‌شود که در نظریهٔ کلاسیکِ پخش مرزهای به اندازهٔ کافی هموار را در نظر بگیرند. تعبیر احتمالیِ $P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)$ تعریفی طبیعی برای جواب تعمیم یافتهٔ مسألهٔ مقدار مرزیِ مورد نظر فراهم می‌کند.

۱۰. حال مطمئنیم که می‌توانیم مساحت طبل را بشنویم و ممکن است چنین به نظر آید که کوشش فراوانی کرده‌ایم برای به‌دست آوردن چیزی اندک.

هم‌اکنون به شما نشان می‌دهم که رهیافتی را که به‌کار بردیم می‌توان تعمیم داد تا نتیجه‌های بیشتری به‌دست آورد ولی برای آنکه پیچیدگیهای کاملاً هندسیِ خاصی پیش نیایند بحث را به طبلهای محدب محدود می‌کنم.

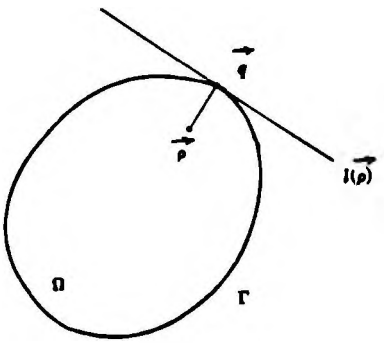
اولین موفقیت ما با معرفی اصلِ احساس نکردن مرز به‌دست آمد. ولی اگر $\vec{\rho}$ به Γ مرز Ω نزدیک باشد آنگاه ذرات پخش‌شونده که حرکت خود را از $\vec{\rho}$ آغاز می‌کنند تا حدودی تحت تاثیر Γ قرار می‌گیرند.

فرض کنید $\vec{q}$ نزدیکترین نقطهٔ Γ به $\vec{\rho}$ است و $l(\vec{\rho})$ خط راستی است که عمود است بر خط واصل $\vec{\rho}$ و $\vec{q}$ (شکل ۳ را ملاحظه کنید). بنابراین ذرهٔ پخش شونده‌ای که حرکت خود را از ρ آغاز می‌کند برای مدت کوتاهی Γ را به شکل خط راست $l(\vec{\rho})$ می‌بیند.

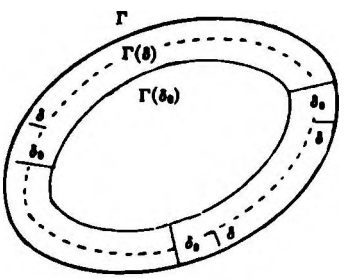
با زبانی تا حدودی خودمانی و تصویری می‌توان گفت که به‌ازای t ی کوچک، ذره فرصتی برای احساس کردن انحنای مرز ندارد.

اگر این اصل معتبر باشد می‌توانم (به‌ازای tی کوچک) $P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r};t)$ را با $P_{l(\vec{\rho})}(\vec{\rho} \mid \vec{r};t)$ تقریب بزنم که $P_{l(\vec{\rho})}(\vec{\rho} \mid \vec{r};t)$ نیز در معادلهٔ پخش

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2}\nabla^2 P$$



شکل۳



شکل۴

با شرط اولیهٔ $P \to \delta(\vec{\rho} - \vec{r})$ وقتی $t \to 0$ صدق می‌کند ولی شرط مرزی عبارت است از

وقتی $\vec{r}$ به نقطه‌ای از $l(\vec{\rho})$ نزدیک می‌شود ، $P_{l(\vec{\rho})}(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) \to 0$

در نهایتِ خوشبینی انتظار خواهیم داشت که با تقریب خوبی

$$\int_\Omega P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t)d\,\vec{\rho} \sim \int_\Omega P_{l(\vec{\rho})}(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t)d\,\vec{\rho}$$

می‌دانیم که

$$P_{l(\vec{\rho})}(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t) = \frac{1 - e^{-2\delta^2/t}}{2\pi t}$$

که در اینجا؛ (کوتاهترین فاصلهٔ $\vec{\rho}$ تا Γ) $= \| \vec{q} - \vec{\rho} \| = \delta$. بنابراین (امیدواریم!)

$$\iint_\Omega P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t)d\,\vec{\rho} = \sum_{n=1} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{1}{2\pi t}\int_\Omega e^{-2\delta^2/t}d\,\vec{\rho}$$

$|\Omega|/2\pi t$ همان دوست قدیمی ماست و بنابراین فقط می‌ماند که به‌طور مجانبی (وقتی $t \to 0$) انتگرال $\int_\Omega e^{-2\delta^2/t}d\,\vec{\rho}$ را محاسبه کنیم. برای این کار خم $\Gamma(\delta)$ را در نظر بگیرید که تشکیل می‌شود از نقاطی در Ω که «فاصلهٔ» آنها از Γ برابر δ است.(شکل ۴ را ملاحظه کنید)

$\Gamma(\delta)$ به‌ازای δهایی که به قدر کافی کوچک‌اند خوشتعریف (و حتی محدب) است و انتگرال ما عمدتاً از δهای کوچک ناشی می‌شود.

اگر $L(\delta)$ نشان دهندهٔ طول $\Gamma(\delta)$ باشد آنگاه داریم

$$\int_\Omega e^{-2\delta^2/t}d\,\vec{\rho} = \int_0^{\delta_0} e^{-2\delta^2/t}L(\delta)d\delta + (\text{چیزی کوچکتر از } |\Omega|e^{-2\delta_0^2/t})$$

و بنابراین با نادیده گرفتن جمله‌ای که مرتبهٔ کوچکیِ نمایی دارد (وهمچنین جمله‌های مرتبهٔ t) نتیجه می‌گیریم

$$\int_\Omega e^{-2\delta^2/t}d\,\vec{\rho} \sim \sqrt{t}\int_0^{\delta_0/\sqrt{t}} e^{-2x^2}L(x\sqrt{t})dx \sim \sqrt{t}L\int_0^\infty e^{-2x^2}dx = \frac{L}{4}\sqrt{2\pi t}$$

که $L = L(0)$ طول Γ است.

سرانجام به فرمول زیر می‌رسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \qquad \text{به‌ازای } t \to 0$$

و در نتیجه می‌توانیم طول محیط طبل را نیز «بشنویم».

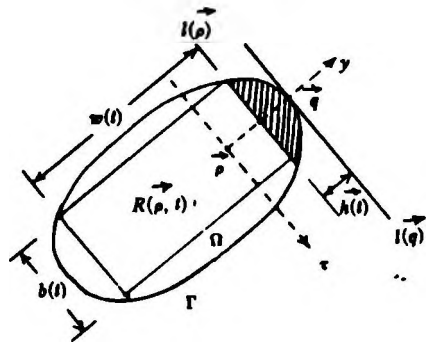
فقط چند سال پیش بود که فرمول مجانبی بالا توسط ریاضیدان سوئدی اوکه پلشی‌یل [۲] با استفاده از رهیافتی کاملاً متفاوت به‌دست آمد.

شایان ذکر است که حالا می‌توانیم ثابت کنیم اگر تمامی فرکانسهای طبلی برابر فرکانسهای‌طبلی دایره‌شکل باشد آنگاه خود آن طبل باید دایره شکل باشد. این نتیجه‌ای است فوری از نابرابریِ‌کلاسیکِ برابر-محیطی که می‌گوید $L^2 \geqslant 4\pi|\Omega|$، و تساوی فقط برای دایره برقرار است.

بنابراین دانستنِ ارتفاعِ نتها کافی است برای اینکه تشخیص دهیم طبل دایره شکل است یا نه!

۱۱. آیا می‌توان بازهم استدلال شهودی را دقت بخشید؟ در واقع چنین کاری شدنی است. ابتدا نابرابری

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t) \leqslant P_{l(\rho)}(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t) = \frac{1}{2\pi t} - \frac{1}{2\pi t}e^{-2\delta^2/t}$$



شکل۵

را به‌کار می‌بریم که فقط شکل بهبود یافتهٔ نابرابری $P^*_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t) \leqslant ۱/۲\pi t$ است که قبلاً آن را ثابت کردیم و نابرابری اخیر را هم می‌شود به همان روش اثبات کرد.

سپس به برآورد نقصانی دقیقی برای $P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t)$ نیاز داریم و یافتن آن مقداری مشکلتر است. همان‌گونه که در شکل ۵ نشان داده شده مستطیل $R(\vec{\rho},t)$ را «محاط» می‌کنیم و $h(t)$، ارتفاع قطعهٔ سایه‌دار، کمی بعد تعیین می‌شود.

فرض کنید $b(t)$ آن ضلع R باشد که در راستای قاعدهٔ قطعه است و ضلع دیگر آن $w(t)$ باشد. از شکل معلوم است که محور y ضلعهایی از مستطیل را که موازی محور xاند به دونیم می‌کند.

حال $P_R(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t)$ را در نظر بگیرید. شاید این نمادگذاری گمراه کننده باشد زیرا چنین القاء می‌کند که با مسألهٔ مقدار مرزیی سروکار داریم که در آن، مرز در طول زمان تغییر می‌کند. ولی واقعیت چنین نیست. چیزی که در نظر داریم چنین است: t را در نظر بگیرید و $P_{R(t)}(\vec{\rho} \mid \vec{r};t)$ را که بی‌ابهام تعریف شده بیابید و در نهایت قرار دهید $\tau = t$. حاصل برابر است با $P_R(\vec{\rho} \mid \vec{r};t)$ که آن را می‌توان به شکل مناسب زیر توصیف کرد

$$P_R(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t) = \frac{۱}{۲\pi t} \left\{\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{۲b^۲}{t}n^۲\right] - \exp\left[-\frac{۲b^۲}{t}(n+\frac{۱}{۲})^۲\right]\right)\right\} \times \left\{\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{۲w^۲}{t}n^۲\right] - \exp\left[-\frac{۲w^۲}{t}(n+\frac{\bar{\delta}}{w})^۲\right]\right)\right\}$$

که $\bar{\delta} = \delta - h(t) = \| \vec{q} - \vec{\rho} \| - h(t)$. حالا قرار دهید $h(t) = \epsilon\sqrt{t}$ و با فرض اینکه $l(\vec{\rho})$ واقعاً مماس برخم است (که در یک خم محدب چنین است مگر حداکثر در تعداد شمارایی نقطهٔ استثنایی $\vec{q}$) داریم

$$\lim_{t\to ۰}\frac{b(t)}{h(t)} = \lim_{t\to ۰}\frac{b(t)}{\epsilon\sqrt{t}} = \infty$$

و در نتیجه

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{۲b^۲}{t}n^۲\right] - \exp\left[-\frac{۲b^۲}{t}(n+\frac{۱}{۲})^۲\right]\right) = ۱+o(۱)$$

ولی این کاملاً کافی نیست و به تقریب قویتر زیر نیاز داریم

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{۲b^۲}{t}n^۲\right] - \exp\left[-\frac{۲b^۲}{t}(n+\frac{۱}{۲})^۲\right]\right) = ۱+o(\sqrt{t})$$

برای مثال اگر انحناء در $\vec{q}$ موجود باشد به یقین وضعیت این‌گونه است زیرا نتیجه می‌گیریم که $h(t) \sim b^۲(t)$ و در این‌صورت جملهٔ $o(\sqrt{t})$ برآوردی بس بزرگ خواهد بود. شرطهایِ منظم بودن بسیار خفیفی در تقریباً همهٔ نقاط $\vec{q}$ تقریب $o(\sqrt{t})$ را تضمین می‌کنند. بدون اینکه به بحث دربارهٔ این شرطها بپردازیم فقط فرض می‌کنیم مرز آن‌گونه است که حداقل $o(\sqrt{t})$ را تضمین کند.

چون $w(t)$ وقتی $t \to ۰$ از پایین کراندار است همچنین داریم

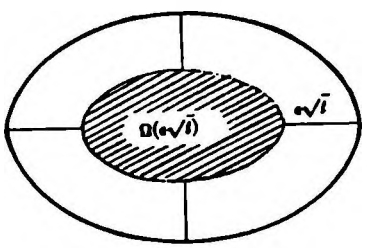
$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{۲w^۲}{t}n^۲\right] - \exp\left[-\frac{۲w^۲}{t}(n+\frac{\bar{\delta}}{w})^۲\right]\right) =$$

جمله‌هایِ با مرتبهٔ کوچکیِ نمایی + $۱ - e^{-۲\bar{\delta}^۲/t}$

کارمان تقریباً تمام شده است. می‌نویسیم

$$\sum_{n=۱}^{\infty}e^{-\lambda_n t} = \int_\Omega P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t)d\,\vec{\rho} > \int_{\Omega(\epsilon\sqrt{t})} P_R(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t)d\,\vec{\rho}$$
$$= \frac{۱+o(\sqrt{t})}{۲\pi t}\int_{\Omega(\epsilon\sqrt{t})}(۱ - e^{۲\bar{\delta}^۲/t} +$$
$$\text{(جمله‌هایِ با مرتبهٔ کوچکیِ نمایی)})d\,\vec{\rho}$$

(رک. شکل ۶).



شکل۶

پس به غیر از جمله‌هایی که کوچکی آنها از مرتبهٔ نمایی است، و ضریب $۱ + o(\sqrt{t})$، انتگرالِ

$$\int_{\Omega(\epsilon\sqrt{t})}(۱ - e^{-۲\bar{\delta}^۲/t})d\,\vec{\rho}$$

را داریم که همانند گذشته می‌توان دید که به‌طور مجانبی برابر است با

$$|\Omega(\epsilon\sqrt{t})| - \frac{L}{۴}\sqrt{۲\pi t}$$

و در اینجا از جمله‌های مرتبهٔ t و جمله‌هایِ با مرتبهٔ کوچکیِ نمایی صرف‌نظر کرده‌ایم. چون به‌طور مجانبی داریم $|\Omega(\epsilon\sqrt{t})| \sim |\Omega| - L\epsilon\sqrt{t}$، می‌توانیم نابرابری

$$\sum_{n=۱}^{\infty}e^{-\lambda_n t} > \frac{|\Omega|}{۲\pi t} - \frac{(L+\epsilon')}{۴}\frac{۱}{۲\pi t}$$

را به‌دست آوریم. ϵ' رابطهٔ ساده‌ای با ϵ دارد. چون ϵ' را می‌توان به دلخواه کوچک کرد فرمول مجانبی

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$$

نتیجه می‌شود.

۱۲. اگر استراتژی کلی ما برای پرداختن به مسأله درست باشد باید بتوانیم کار را ادامه دهیم و در نقطه‌های بسیار نزدیک به یک، مرز هموار، مرز را به‌طور موضعی با دایره‌های انحنای مناسبی جایگزین کنیم.

نتیجه‌ای از آنِ پلئی‌یل قویاً این نکته را القا می‌کند که برای ناحیه‌ای ساده‌ـهمبند و بامرز هموار (یعنی بدون گوشه و انحناء در هر نقطه موجود است) داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} + \frac{1}{6}$$

متأسفانه من نمی‌توانم این نتیجه را به‌دست آورم به این دلیل زجرآور که نمی‌توانم عبارت به‌دردخوری برای $P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{\rho}; t)$ اگر Ω دایره باشد، پیدا کنم.

به‌جای اینکه به‌خاطر این وضعیت غمناک خود را به ناامیدی بسپارم بقیهٔ این سخنرانی را به طبلهای چندضلعی اختصاص می‌دهم یعنی طبلهایی که مرزشان چندضلعی است. این بررسی نشان می‌دهد که بدون هیچ شکی وجود جملهٔ ثابت در بسطِ مجانبیِ ما مدیون انحنای کلیِ مرز است.

۱۳. پیش از آنکه پیشتر روم به عبارتی برای $P_{S(\theta_0)}(\vec{\rho} \mid rv; t)$ نیاز دارم که $S(\theta_0)$ گوه‌ای نامتناهی به زاویهٔ θ_0 است. به‌عبارت دیگر $P_{S(\theta_0)}$ جواب

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2}\nabla^2 P$$

است با شرطِ اولیهٔ معمولِ $P_{S(\theta_0)}(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \to \delta(\vec{\rho} - \vec{r})$ وقتی $t \to 0$، و این شرط که وقتی $\vec{r}$ به نقطه‌ای از هرکدام از ضلعهای زاویهٔ θ_0 نزدیک می‌شود، صفر شود.

این مسأله‌ای است بسیار قدیمی و بسیار کلاسیک، و اگر $\theta_0 = \frac{\pi}{m}$ (m صحیح) می‌شود با روشِ معمولِ تصویرها حلش کرد. برای حالتی که m ناصحیح باشد زومرفلد[1] روشی ابداع کرد که گویی روش تصویرها را به رویهٔ ریمانی تعمیم می‌دهد. کمی بعد، به عبارت دقیقتر در ۱۸۹۹، کارسلاو[2] رهیافتی مقدماتیتر ارائه کرد که در آن $P_{S(\theta_0)}(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)$ با انتگرالِ مسیریِ مناسبی نشان داده می‌شود. کارسلاو انتگرال را به سری نامتناهی توابع بسل تبدیل می‌کند ولی برای مقصود ما بهترین کار این است که در مقابل وسوسهٔ [استفاده از] توابع بسل مقاومت کنیم و انتگرال را به شکل دیگری تبدیل کنیم. از جزئیات درمی‌گذرم (با وجود اینکه بعضی از آنها بسیار آموزنده‌اند) و فقط نتیجهٔ پایانی را بیان می‌کنم.

1. Sommerfeld 2. H.S. Carslaw

قرار دهید

$$v(\alpha) = (1/2\pi t) \sum_{\substack{\theta-\alpha-\pi<2k\theta_0 \\ <\theta-\alpha+\pi}} \exp\left[-\frac{r^2 - 2r\rho\cos(\theta-\alpha-2k\theta_0) + \rho^2}{2t}\right] - \sin\left(\frac{\pi^2}{\theta_0}\right)\frac{\exp\left[-\frac{r^2+\rho^2}{4t}\right]}{4\pi\theta_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{r\rho}{t}\cosh y\right]}{\cosh\left\{\frac{\pi}{\theta_0}y + \frac{i\pi}{\theta_0}(\theta-\alpha)\right\} - \cos\frac{\pi^2}{\theta_0}} dy$$

جمع $\sum$ روی kهایی است که در نابرابریِ زیر علامت جمع صدق می‌کنند و $\vec{\rho} = (\rho, \alpha)$ و $\vec{r} = (r, \theta)$.

در این‌صورت

$$P_{S(\theta_0)}(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) = v(\alpha) - v(-\alpha)$$

توجه کنید که اگر $\theta_0 = \frac{\pi}{m}$، با m صحیح، انتگرالِ پیچیده حذف می‌شود زیرا که ضریبِ پشتِ آن، یعنی $\sin\frac{\pi^2}{m} = \sin \pi m$، صفراست؛ آنچه که در عبارت حاصل برای $v(\alpha) - v(-\alpha)$ باقی می‌ماند مجموعه‌ای است از جمله‌هایی که به سادگی می‌توان آنها را به‌عنوان جملاتی که از روش تصویرها به‌دست می‌آیند باز شناخت.

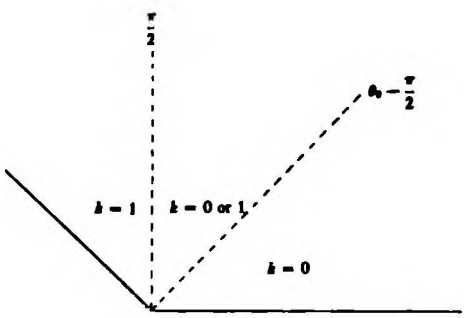
اکنون فرض‌کنیم $\pi/2 < \theta_0 < \pi$ و ببینیم در این حالت $P_S(\vec{\rho} \mid \vec{\rho}; t)$ چیست. وقتی‌که در عبارتی که برای $v(\alpha)$ داریم قراردهیم $\theta = \alpha$ نابرابری تحت علامت $\sum$ تبدیل می‌شود به $-\pi < 2k\theta_0 < \pi$ و فقط $k = 0$ مجاز است. در $v(-\alpha)$ نابرابری تبدیل می‌شود به $2\alpha - \pi < 2k\theta_0 < 2\alpha + \pi$ و انتخاب k به α بستگی دارد. می‌بینیم که

$0 < \alpha < \theta_0 - \frac{\pi}{2}$ ، فقط $k = 0$ مجاز است

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \theta_0$ ، فقط $k = 1$ مجاز است

ولی برای $\theta_0 - \pi/2 < \alpha < \pi/2$ هم $k = 0$ و هم $k = 1$ مجاز است.(شکل ۷ را ببینید)

حالا قرار می‌دهیم $\vec{r} = \vec{\rho}$ (پس $\rho = r$) و به‌تفصیل عبارتهایی را که برای $P_{S(\theta_0)}(\vec{\rho} \mid \vec{\rho}; t)$ داریم در این سه قطاع می‌نویسیم. برای



شکل۷

$$0 < \alpha < \theta_0 - \pi/2$$

$$P_S(\vec{\rho} \mid \vec{\rho}; t) = \frac{1}{2\pi t} - \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}(1-\cos 2\alpha)\right]}{2\pi t} - \sin\left(\frac{\pi^2}{\theta_0}\right)\frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}\right]}{4\pi\theta_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}\cosh y\right]}{\cosh\frac{\pi}{\theta}y - \cos\frac{\pi^2}{\theta}}dy + \sin\left(\frac{\pi^2}{\theta_0}\right)\frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}\right]}{4\pi\theta_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}\cosh y\right]}{\cosh\left\{\frac{\pi}{\theta}y - 2\pi i\frac{\alpha}{\theta}\right\} - \cos\frac{\pi^2}{\theta}}dy$$

برای $\pi < \alpha < \theta_0$

$$P_S(\vec{\rho} \mid \vec{\rho}; t) = \frac{1}{2\pi t} - \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}(1-\cos 2\theta_0 - \alpha)\right]}{2\pi}$$

همان دو انتگرال بالایی +

و در نهایت برای $\theta_0 - \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$P_S(\vec{\rho} \mid \vec{\rho}; t) = \frac{1}{2\pi t} - \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}(1-\cos 2\alpha)\right]}{2\pi t} - \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}(1-\cos 2\theta_0 - \alpha)\right]}{2\pi t}$$

باز هم همان دو انتگرال بالایی +

باید توجه کنیم که $r^2(1-\cos 2\alpha)$ و $(r^2(1-\cos 2(\theta_0-\alpha))$ برابر است با $2\delta^2$ که δ فاصلهٔ $\vec{\rho}$ است تا یکی از ضلعهای گوه.

۱۴. برای اینکه موضوع کمی ساده‌تر شود فرض می‌کنیم که طبلِ چندضلعیْ محدب است و تمامی زاویه‌ها منفرجه‌اند.

در هر رأس عمودهایی بر ضلعهای چندضلعی رسم می‌کنیم و در نتیجه N قطاعِ سایه‌دار به‌دست می‌آوریم (N تعداد ضلعها و رأسهای چندضلعی است.)

حالا فرض کنید ρ نقطه‌ای در Ω باشد. چیزهایی که از $\vec{\rho}$ پخش می‌شوند مرز را یا به شکلِ خط راست و یا اگر $\vec{\rho}$ نزدیک رأسی باشد به شکل گوه‌ای نامتناهی «می‌بینند».

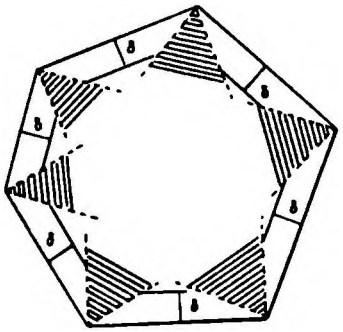
همچنین می‌شود گفت که در نظر ذرهٔ پخش شونده، مرز چون نزدیکترین گوه است و در نتیجه می‌شود به‌جای $P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{\rho}; t)$، $P_{S(\theta)}(\vec{\rho} \mid \vec{\rho}; t)$ را قرار داد که $S(\theta_0)$ نزدیکترین گوه به $\vec{\rho}$ است.

هر $P_S(\vec{\rho} \mid \vec{\rho}; t)$ جملهٔ $\frac{1}{2\pi t}$ را دارد و پس از انتگرالگیری روی Ω جملهٔ $\frac{|\Omega|}{2\pi t}$ را نتیجه می‌دهد. همچنین هر $P_S(\vec{\rho} \mid \vec{\rho}; t)$ شامل دو انتگرال است که پیچیده به نظر می‌آیند و باید روی گوه محاسبه شوند.

خوشبختانه حاصل دومین انتگرال برابر صفر است و اولی پس از انتگرالگیری روی $S(\theta_0)$ برابر است با

$$-\frac{1}{8\pi}\left(\sin\frac{\pi^2}{\theta_0}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+\cosh y)\left(\cosh\frac{\pi}{\theta}y - \cos\frac{\pi^2}{\theta}\right)}$$

این فقط سهم یک گوه است؛ برای به‌دست آوردن سهم کل گوه‌ها باید روی همهٔ گوه‌ها مجموعیابی کنیم.



شکل ۸

بنابراین سهم کل گوه‌ها برابر است با

$$-\frac{1}{8\pi}\sum_\theta\left(\sin\frac{\pi^2}{\theta_0}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+\cosh y)\left(\cosh\frac{\pi}{\theta}y - \cos\frac{\pi^2}{\theta}\right)}$$

در نهایت اگر $\vec{\rho}$ درون قطاع سایه‌دار گوهٔ $S(\theta_0)$ باشد با انتگرالگیری روی قطاع به‌دست می‌آوریم

$$-\int_{\theta-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_0^{\infty}\left\{\frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}(1-\cos 2\alpha)\right]}{2\pi t} + \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}(1-\cos 2\theta_0-\alpha)\right]}{2\pi t}\right\} r dr = -\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\cot\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right)$$

و سهم کل قطاعهای سایه‌دار برابر است با $-\frac{1}{2}1/2\pi\sum_\theta \cot(\theta_0 - \pi/2)$.

به‌سادگی می‌شود دید که سهم بقیهٔ قسمتها برابر است با

$$-\frac{1}{2\pi t}\int_0^{\infty}\left(L - 2\delta\sum_\theta \cot(\theta_0 - \frac{\pi}{2})\right)e^{-2\delta^2/t}d\delta = -\frac{L}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\sum_\theta \cot\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right)$$

در نهایت برای طبل چندضلعی داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} - \frac{1}{8\pi}\sum_\theta\left(\sin\frac{\pi^2}{\theta_0}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+\cosh y)\left(\cosh\frac{\pi}{\theta}y - \cos\frac{\pi^2}{\theta}\right)}$$

که هر θ_0 در نابرابری $\pi/2 < \theta_0 < \pi$ صدق می‌کند. اگر چندضلعی N ضلع داشته باشد و اگر $N \to \infty$ به‌طریقی که هر θ_0 به π میل کند آنگاه جملهٔ ثابت نزدیک می‌شود به

$$\frac{2\pi}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+\cosh y)^2} = \frac{1}{6}$$

این نتیجه باید اعتقاد ما را به اینکه برای طبلهای ساده‌ـهمبندِهموارْ این ثابتْ عمومی و برابر $\frac{1}{6}$ است، تقویت کند.

۱۵. در طبلهای چندگانه‌ـهمبند چه اتفاقی می‌افتد؟

اگر طبل و سوراخها چندضلعی باشد پاسخ به سادگی به‌دست می‌آید. فقط نیاز داریم به $P_{S(\theta_0)}(\vec{\rho} \mid \vec{\rho}; t)$ به‌ازای $\pi < \theta_0 < 2\pi$ که به‌سادگی از فرمول کلی که در بالا آورده شد به‌دست می‌آید.

در نزدیک سوراخها، ذره‌های پخش شونده گوه‌های مقعر «می‌بینند» ولی چیزی در اصل عوض نمی‌شود.

اگر تمام چندضلعیها به خمهای هموار نزدیک شوند ثابت به $\frac{1}{6}(1-r)$ نزدیک می‌شود که r تعداد سوراخهاست. بنابراین طبیعی است حدس بزنیم که برای طبلی هموار با r سوراخ هموار داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} + (1-r)\frac{1}{6}$$

و بنابراین می‌شود چندگانه‌ـهمبندی طبل را «شنید»!

البته می‌شود در این باره اندیشید که آیا به‌طورکلی می‌توان ثابتِ اویلرـپوانکاره را شنید یا نه، و همه‌جور سؤالهای جالب توجه دیگر نیز مطرح کرد.

همان‌گونه که مطالعهٔ ما بر روی طبلهای چندضلعی نشان می‌دهد، ساختارِ جملهٔ ثابت کاملاً پیچیده است، زیرا خصوصیتهای متری و توپولوژیک را ترکیب می‌کند. باید دید که آیا می‌شود این خصوصیتها را از هم جدا کرد یا نه.

مراجع

1. M. Kac, On some connections between probabillity theory and integral equations, Proc. Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1957, pp. 189-215.
2. A.Pleijel, A study of certain Green's functions with applications in the theory of vibrating membranes, Arkiv för Matematik, **2** (1954) 553-569

******

• Mark Kac, "Can one hear the shape of a drum?", *Am. Math. Monthly*, (4)**73**(1966) 1-23.
این مقاله را نویسنده به جورج یوجین اولنبک (George Eugene Uhlenbeck) تقدیم کرده است.

طبلهای همصدا•

جاناتان چپمن*
ترجمهٔ مجید حسینی

۱. مقدمه

در سال ۱۹۶۶ کاتس [۷] این سؤال را مطرح کرد که «آیا می‌توان شکل طبل را شنید؟» یعنی اگر فرکانسهایی را که طبل با آنها ارتعاش می‌کند بدانیم آیا می‌توانیم شکل آن را معین کنیم؟ از دیدگاه ریاضی این سؤال متناظر است با مسألهٔ زیر. اگر u جابه‌جایی پوستهٔ D از موقعیت متوسطش باشد آنگاه u در روابط زیر صدق می‌کند

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{در } D، \qquad (۱)$$

$$u = 0 \quad \text{روی } \partial D، \qquad (۲)$$

اگر با استفاده از جداسازی متغیرها، $u(x,y,t) = \psi(t)\phi(x,y)$، در جستجوی جواب برآییم نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\phi_{xx} + \phi_{yy}}{\phi} = \frac{\psi_{tt}}{\psi} = \text{ثابت} = \lambda \text{ مثلاً}$$

بنابراین

$$u = \sin(\sqrt{\lambda} t)\phi(x,y) \qquad (۳)$$

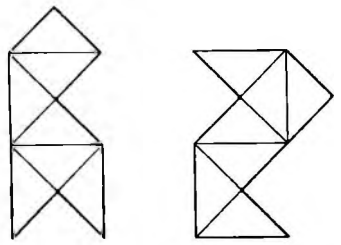
که

$$\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0 \quad \text{در } D، \qquad (۴)$$

$$\phi = 0 \quad \text{روی } \partial D، \qquad (۵)$$

مسأله، مسألهٔ ویژه‌ـمقدارهاست: جوابِ ناصفرِ ϕ فقط برای مقدارهای ویژه‌ای از λ که ویژه‌ـمقدار نام دارند موجود است. مجموعهٔ ویژه‌ـمقدارها طیفِ ویژه‌ـمقدارها نام دارد و در این حالت گسسته است. با توجه به رابطهٔ (۳) می‌بینیم که ویژه‌ـمقدارهای λ، مربعِ فرکانسهای ارتعاش‌اند و به هر ویژه‌ـجواب می‌توان به شکلِ موجی ایستاده، روی حوزهٔ D نگریست. جوابِ کلیِ (۱) و (۲) برهنهشی[1] است از این جوابهای ویژه.

1. superposition



تصویر۱

سؤالِ کاتس این است که: آیا دو حوزه که طیفِ ویژه‌ـمقدارشان یکی است (ویژه‌ـمقدارها با احتساب چندگانگی[1] شان شمرده می‌شوند) الزاماً قابل انطباق‌اند؟

ثابت شده است که ویژه‌ـمقدارها برخی ویژگیهای D را مشخص می‌کنند، مثلاً مساحت و محیط و تعدادِ مؤلفه‌های همبند آن را [۷]. با وجود این، پاسخِ سؤال [کاتس] منفی است. تصویر ۱ مثالی را از دو حوزه با طیفِ ویژه‌ـمقدار یکسان نشان می‌دهد که گوردون و دیگران [۵] آن را عرضه کرده‌اند ([۶] را نیز ملاحظه کنید.)

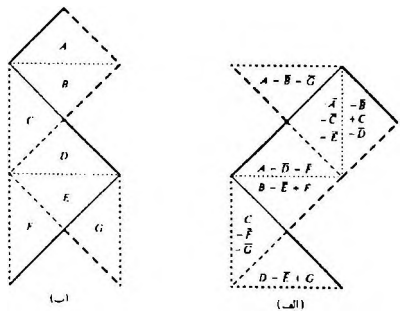
برهانی ساده بر یکی بودن ویژه‌ـمقدارها توسط برنارد [۳] داده شده است (همچنین [۱ و ۲] را ملاحظه کنید) وی نگاشت نشان داده شده در تصویر ۲ را می‌سازد که هر ویژه‌ـتابعِ حوزهٔ اول را به روی ویژه‌ـتابعی از حوزهٔ دوم با همان ویژه‌ـمقدار A، می‌نگارد. در اینجا $A + B$ یعنی اینکه برای یافتن مقدار تابع در آن مثلث، مقدار تابع را در نقطه‌های متناظر در مثلثهای A و B جمع می‌کنیم. برای کمک به روشن شدن اینکه مثلثها چگونه باید بر هم منطبق شوند از نوعهای مختلفِ خط برای ضلعهای آنها استفاده کرده‌ایم. در برخی حالتها ضروری است که مثلث را حولِ خطِ تقارنش باز تابانیم و این را با $\bar{A}$ نمایش داده‌ایم. فقط تابعِ صفر به تابعِ صفر نگاشته می‌شود و در نتیجه هر ویژه‌ـتابعِ مسألهٔ ویژه‌ـمقدار اول متناظر است با ویژه‌ـتابعی از مسألهٔ ویژه‌ـمقدار دوم، با همان ویژه‌ـمقدارِ λ. بنابراین هر ویژه‌ـمقدارِ مسألهٔ اول، ویژه‌ـمقداری از مسألهٔ دوم است (با همان چندگانگی). نگاشتی مشابه از ویژه‌ـتابعهای مسألهٔ دوم به ویژه‌ـتابعهای مسألهٔ اول نشان می‌دهد که هر ویژه‌ـمقدارِ مسألهٔ دوم ویژه‌ـمقداری از مسألهٔ اول است و بنابراین دو حوزه همطیف‌اند.

در این مقاله، با استفاده از تا کردنِ کاغذ، تعبیری برای ترانهش[2] جوابی از مسألهٔ اول به جوابی از مسألهٔ دوم به دست می‌دهیم. بدین‌گونه می‌توانیم بسیاری حوزه‌های همطیفِ جدید بسازیم و در آن زمره است مثالی ساده که در آن ویژه‌ـمقدارها به‌صراحت محاسبه می‌شوند. توجه کنید که اخیراً بیوسر و دیگران [۴] روش ترانهش را برای ساختن مثالهای جدیدی از حوزه‌های مسطحِ همطیف به‌کار برده‌اند.

۲. تا کردنِ کاغذ

حوزه‌ای را که به‌صورت برشی از کاغذ مشخص شده و نیز تابعی را که روی مرز حوزه صفر است، در نظر بگیرید. کاغذ را تا کرده حوزه‌ای جدید می‌سازیم. تابعی به‌نام ترانهاده روی حوزهٔ جدید تعریف می‌کنیم که مقدارش برابر است با جمعِ مقدارهای تابعِ اصلی در نقطه‌هایی که روی هم قرار می‌گیرند با این

1. multiplicity 2. transposition

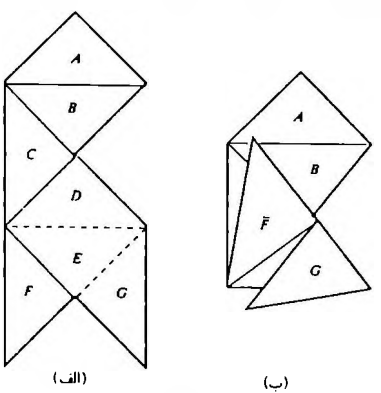


تصویر۲

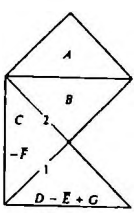
قرارداد که اگر کاغذ وارونه شود به‌جای جمع کردن، مقادیر را کم می‌کنیم. این تابع حتماً روی مرز حوزهٔ جدید صفر است زیرا که بر روی هر تایِ کاغذ و هر ضلع صفر است. ساختنِ شکلهایی که در آتیه می‌آیند، با تا کردنِ کاغذ، ممکن است برای خواننده سودمند باشد.

مثلاً حوزه‌ای را که در تصویر ۲ الف نشان داده شده و تابعی را که روی مرز این حوزه صفر است در نظر بگیرید. مثلثها را از جلو با A تا G و از پشت با $\bar{A}$ تا $\bar{G}$ مشخص می‌کنیم و حوزه را همان‌طور که در تصویر ۳ نشان داده‌شده تا می‌زنیم (نقطه‌چین نشان‌دهندهٔ تایِ کاغذ است). در این‌صورت تابعی روی حوزهٔ نشان داده شده در تصویر ۴ به دست می‌آوریم که روی مرز صفر است.

اکنون چندین نسخهٔ حوزهٔ اولیهٔ D را تا می‌کنیم تا حوزه‌های D_1 و D_2 و غیره را بسازیم و اینها را به هم می‌چسبانیم تا حوزهٔ جدید D^* را بسازیم و روی این حوزه ترانهاده را برابر مجموعِ ترانهاده‌ها روی D_1 و D_2 و غیره تعریف می‌کنیم. حال اگر بتوانیم حوزه‌های D_1 و D_2 و غیره را طوری به هم بچسبانیم که مشتق اول ترانهاده پیوسته باشد آنگاه عملاً ویژه‌ـتابعی از



تصویر۳



تصویر۴

حوزهٔ جدید D^* ساخته‌ایم.[1]

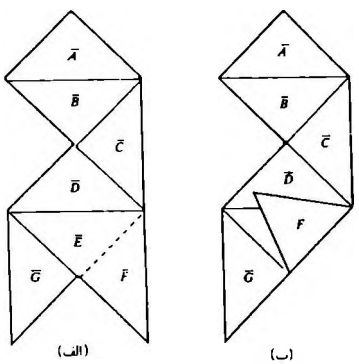
برای اینکه مشتقِ اولِ ترانهاده پیوسته باشد کافی است که

الف) هر تا در راستای ضلعی بیرونی از شکلِ جدید باشد.

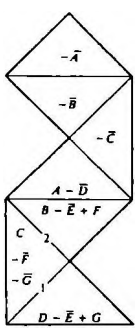
ب) هر یالِ نسخهٔ شکلِ اول که در شکل نهایی قرار می‌گیرد باید همجوار بازتابش باشد بر نسخه‌ای از شکل اول که به آن چسبیده است.

مثلاً مشتقِ اولِ ترانهاده در طول خطهای (۱) و (۲) در تصویر (۴) ناپیوسته است. ولی اگر همان شکل اولیهٔ طبل را که مانند تصویر ۵ تا شده اضافه کنیم، آنگاه پیوستگیِ مشتق اول در راستای خطهای (۱) و (۲) تضمین می‌شود (تصویر ۶) گرچه مشتقِ اول حالا در امتداد خطهای دیگر ناپیوسته است. توجه کنید که پیوستگیِ خودِ تابعِ ترانهاده حتمی است زیرا که تابعِ اولی در روی مرزِ هر مؤلفه صفر است.

تصویر ۷ نشان می‌دهد که برای مثالی که در مقدمه آورده شد، چگونه تکّه‌ها با یکدیگر جفت می‌شوند. برای به‌دست آوردن شکلهایی که در تصویر ۷ پ نشان داده شده، سه نسخهٔ شکل اولیه (تصویر ۲ الف) در امتدادِ خطوط نقطه‌چینِ تصویر ۷ الف تا شده‌اند (تصویر ۷ ب نمایی سه‌بعدی است که نشان می‌دهد هر تکّه پیش از آنکه پهن شود چگونه به نظر می‌رسد). سپس این شکلها روی هم قرار می‌گیرند تا شکل نشان داده در تصویر ۲ ب را بسازند (نقطه‌چینها در تصویر ۷ پ مکان هر مؤلفه را در شکل جدید نشان می‌دهد).

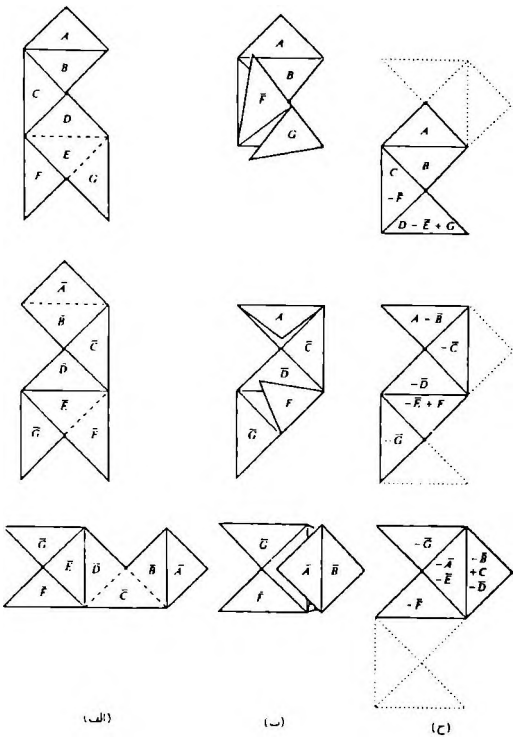


تصویر۵



تصویر۶

۱. تابع حاصل یک‌بار مشتق‌پذیر است و، مگر احتمالاً روی درزها، در ویژه‌ـمعادله صدق می‌کند. چنین تابعی جواب ضعیفی از معادله است و در نتیجه، بنابر منظم بودن جوابهای معادله‌های بیضوی، جوابی قوی است. در این مورد رک.
G. Folland, Introduction to PDE, PUP, 1976
به‌ویژه نتیجهٔ ۲۸.۶ را پیاپی به‌کار برید و بعد نتیجهٔ ۱۰.۶ را، تا ببینید که تابع ترانهاده به‌راستی ویژه‌ـتابع است.

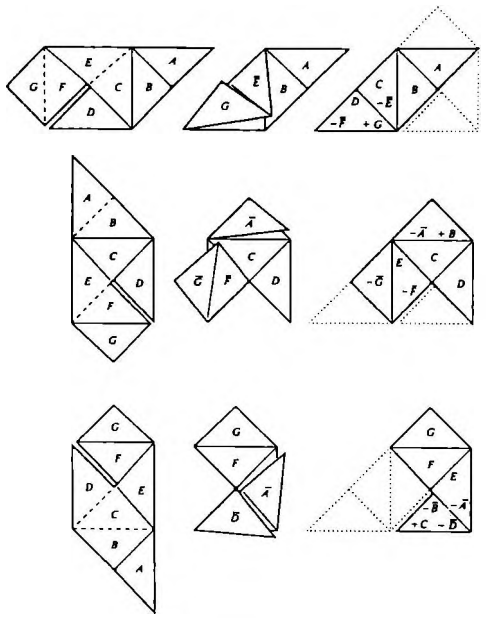


تصویر۷

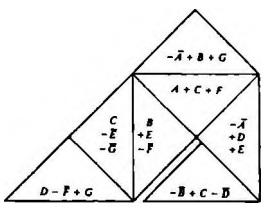
در تصویرهای ۸ و ۹ مثال دیگری از حوزه‌های همطیف و ترانهشِ جوابی روی یک حوزه بر جوابی روی حوزهٔ دیگر داده شده است. برشهای موجود در شکلها را باید بدین‌صورت تعبیر کرد که پهنای صفر دارند و برای روشن شدن مطلب نشان داده شده‌اند.

چون روشِ ساختنِ تابع ترانهش فقط به تا کردن در امتداد ضلعهای مثلث وابسته است، لزومی ندارد که مثلثها قائم‌الزاویه باشند. موضوع مهم این است که مثلثهای همجوار با یک خط تا وقتی که کاغذ تا می‌شود روی هم قرار گیرند. اگر به شکلهای تصویر ۲ بدین‌صورت بنگریم که این شکلها با سلسله‌ای از بازتابهایِ حول اضلاع مثلث به دست می‌آیند آنگاه چیزی که مهم است نه شکل A بلکه سلسله بازتابهایِ حول ضلعهاست. مثلث دلخواه دیگری را به‌جای A در تصویر ۱۰ الف در نظر بگیرید و همان سلسله بازتابها را انجام دهید تا به شکل جدیدی برسید. اکنون همان مثلث را در وضعیت ت در تصویر ۱۰ ب قرار دهید، با همان جهت، و همان سلسله بازتابهایی را که ۱۰ ب را از مثلث قائم‌الزاویهٔ l به‌وجود می‌آورد انجام دهید. دو شکلی که به دست می‌آید همطیف‌اند چون همانند گذشته همان نگاشتی که ویژه‌تابعهای یک حوزه را به روی حوزهٔ دیگر می‌نگارد در اینجا به‌کار می‌رود. مثلاً اگر مثلثی را که در تصویر ۱۱ الف نشان داده شده به‌عنوان «بلوک ساختمانی» بنیادی به‌کار بریم در می‌یابیم که حوزه‌های نشان داده در تصویر ۱۱ ب همطیف‌اند.

لازم نیست که مثلث متساوی‌الساقین باشد. اگر مثلثی را که در تصویر ۱۲ الف دیده می‌شود به‌عنوان «بلوک ساختمانی» بنیادی در نظر بگیریم می‌بینیم که حوزه‌های نشان داده شده در شکل ۱۲ ب همطیف‌اند.



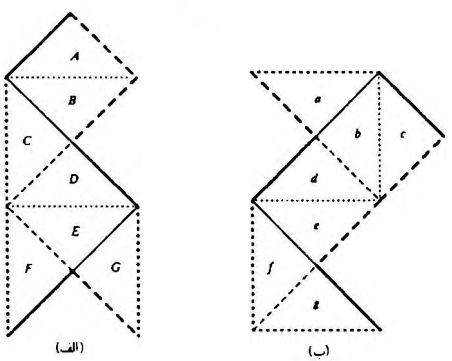
تصویر۸



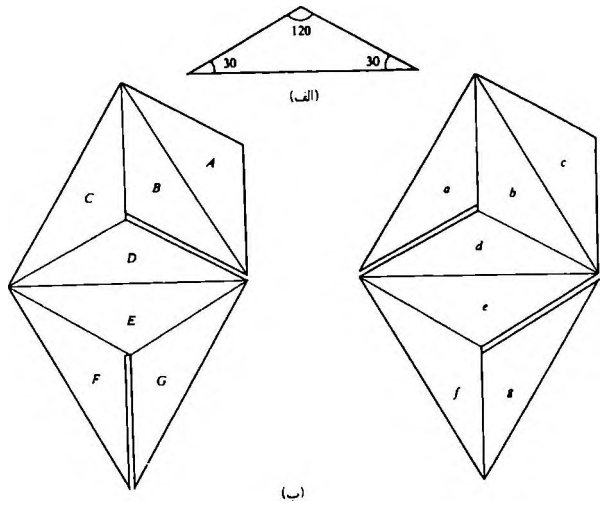
تصویر۹

بنابر همین ملاحظات، حتی لازم نیست که شکل اولیه‌مان مثلث باشد. هر شکلی که حداقل سه ضلع داشته باشد، برای منظور ما مناسب است. کافی است سه یال انتخاب کنیم که نمایندهٔ سه ضلعِ مثلث باشند و شکل را حول آنها باز بتابانیم. اگر همان الگوی بازتابی را به‌کار بریم که طبق آن، شکلهای تصویر ۲ از مثلث قائم‌الزاویه به‌وجود می‌آیند باز هم طبلهای همطیف در شکلهایمان به‌دست می‌آوریم. در مثالِ تصویر ۱۳ برای این منظور از مربع استفاده می‌شود.

در واقع شکلِ اولیهٔ آغازکار هر قدر شما بخواهید می‌تواند پیچیده باشد. برای ساختنِ شکلهایی متفاوت، شکلهایی را که قبلاً از مثلث و مربع و غیره ساختید در نظر بگیرید و هر دو شکل را تا کنید تا جایی که فقط (مثلاً) یک



تصویر۱۰

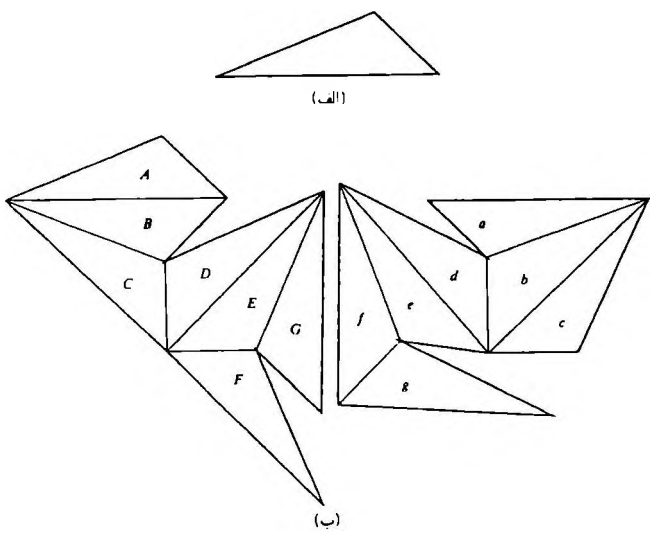


تصویر۱۱

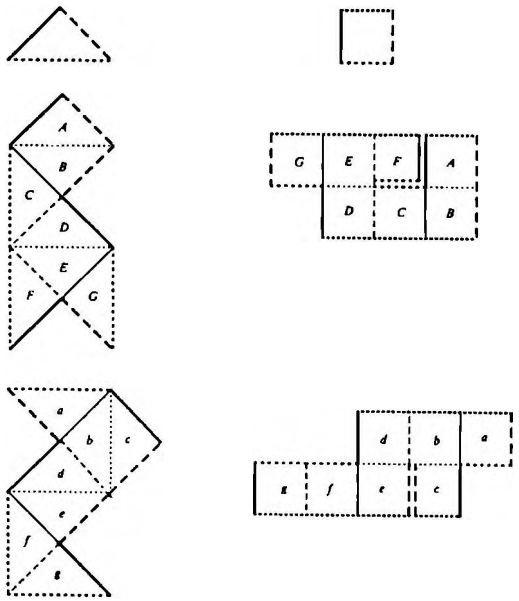
مثلث باقی بماند. دو مثلث حاصل را بر روی یکدیگر قرار دهید (به‌طوری که خطهای پر و نقطه‌چین و خط‌چین منطبق شوند). حالا مانند موقعی که عروسک کاغذی می‌سازید، شکلها را ببُرید. وقتی تای کاغذ را باز می‌کنید شکلهایی که به‌دست می‌آیند باز هم ویژه‌ـمقدارهای یکسان دارند زیراکه مانند گذشته همان تناظر یک به یک بین جوابها برقرار است. توجه کنید که برش کاغذ یکپارچه خواهد بود اگر و فقط اگر روی هر یال، پاره‌خطی نابریده موجود باشد.

تصویر ۱۴ مثال ساده‌ای را نشان می‌دهد. این حوزه‌های همطیف را نیز گوردون و دیگران کشف کرده‌اند. همان‌طور که در تصویر ۱۵ نشان داده شده شکلهای غریبتری نیز می‌توان ساخت.

با این روش می‌توان مثال ساده‌تری از طبلهایِ با ویژه‌ـمقدارهای یکسان ساخت که در آن، ویژه‌ـمقدارها به‌طور صریح قابل محاسبه باشند. نخستین مثالی را که آوردیم در نظر بگیرید که همان‌طور که در تصویر ۱۶ الف دیده می‌شود تا شده و در امتداد یک یال بریده شده است. در این‌صورت طبلهایی که به‌دست می‌آیند همانند تصویر ۱۶ ب هستند. با دور انداختنِ مثلثِ تنهایِ



تصویر۱۲



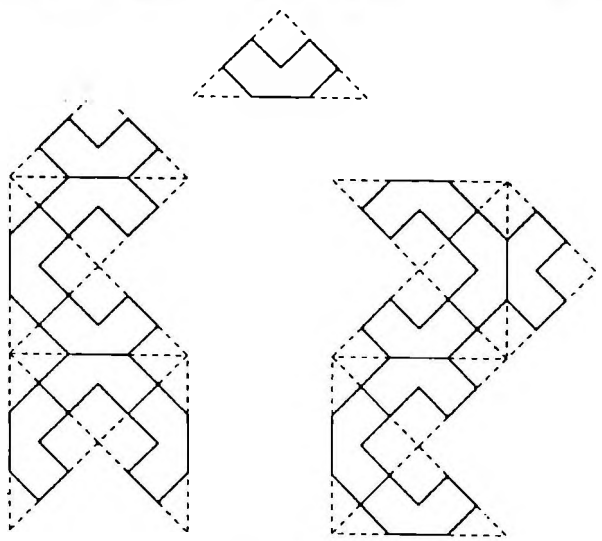
تصویر۱۳

کوچکی که در هر طبل یک بار ظاهر می‌شود حوزه‌هایی را که تصویر ۱۷ نشان داده به دست می‌آوریم. طیف هر کدام از حوزه‌های ناهمبندِ تصویر ۱۷ برابر است با اجتماع طیفهای هر کدام از مؤلفه‌ها (چندگانگی هر ویژه‌ـمقدار برابر است با مجموع چندگانگی‌هایش در مؤلفه‌ها) زیراکه هر مؤلفه به‌طور مستقل ارتعاش می‌کند. ویژه‌ـتابعهای مستطیلی با طول a و پهنای b عبارت‌اند از

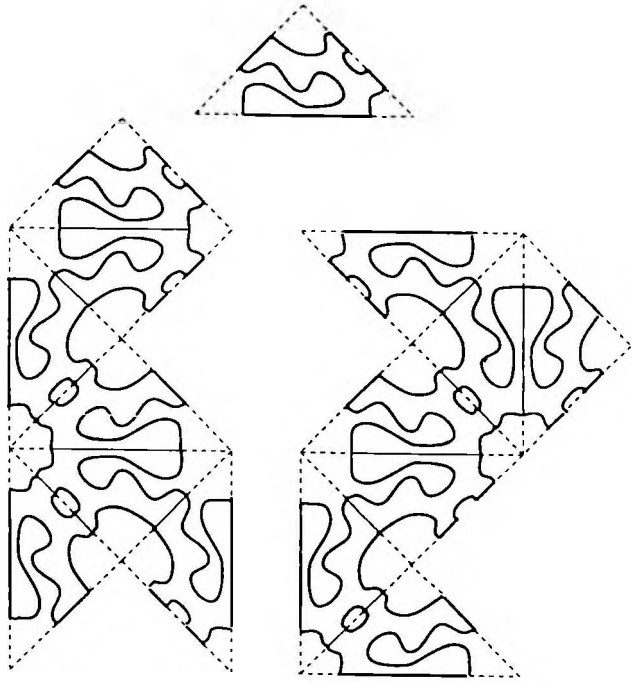
$$\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b} \qquad (\text{صحیح } n\ ,m)$$

با ویژه‌ـمقدار متناظر $\lambda = \pi^2((n/a)^2 + (m/b)^2)$. برای مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی که طولِ ضلعهای کوتاهش c است ویژه‌ـتابعها عبارت‌اند از

$$\sin\frac{i\pi x}{c}\sin\frac{j\pi y}{c} - \sin\frac{j\pi x}{c}\sin\frac{i\pi y}{c} \qquad (i > j \text{ و } j\ ,i \text{ صحیح})$$



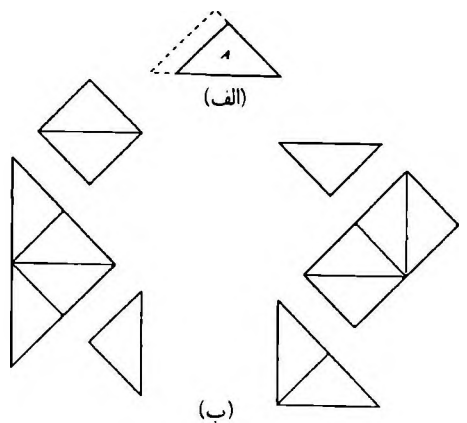
تصویر۱۴



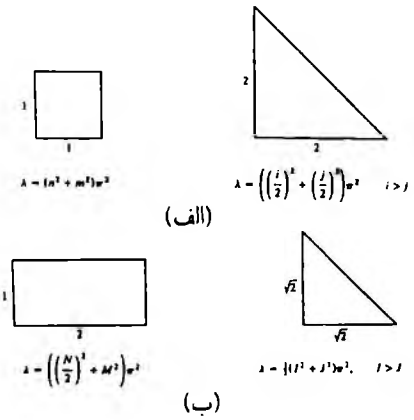
تصویر۱۵

با ویژه‌ـمقدارِ متناظر $\lambda = \pi^2((i/c)^2 + (j/c)^2)$. بنابراین می‌بینیم که ویژه‌ـمقدارهای هر حوزه همان‌طورند که در تصویر ۱۷ نشان داده شده. اکنون نشان می‌دهیم که تلفیق ویژه‌ـمقدارهای دو حوزهٔ تصویر ۱۷ الف یکسان است با تلفیق ویژه‌ـمقدارهای دو حوزهٔ تصویر ۱۷ ب.

برای N زوج قرار می‌دهیم $N = 2n$ و $M = m$. در این‌صورت $(N/2)^2 + M^2 = n^2 + m^2$. وقتی N فرد است قرار می‌دهیم $i = \max(N, 2M)$ و $j = \min(N, 2M)$. در این‌صورت داریم $(N/2)^2 + M^2 = (i/2)^2 + (j/2)^2$ و $i > j$. بدین‌صورت مسألهٔ ویژه‌ـمقدارهایی که در آنها یکی از i و j فرد و دیگری زوج است حل می‌شود. اگر قرار دهیم $i = I + J$ و $j = I - J$ آنگاه $(I^2 + J^2)/2 = (i/2)^2 + (j/2)^2$ و $i > j$. با این کار مسألهٔ



تصویر۱۶



تصویر۱۷

ویژه‌ـمقدارهایی که در آنها یا i و j هر دو فرد و یا هر دو زوج‌اند حل می‌شود.

در پایان توجه کنید که اگر شرط مرزی

$$u = 0 \quad \text{روی } \partial D،$$

تبدیل شود به

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{روی } \partial D،$$

همین روش کاراست، به‌شرط آنکه قراردادمان را تغییر دهیم و مثلثهای بازتابیده را به‌جای کم کردن، اضافه کنیم. در نتیجه تمامی حوزه‌های همطیفی که قبلاً یافتیم با این شرطِ مرزیِ جدید نیز همطیف‌اند.

مراجع

1. Berard, P., Transplantation et Isospectralite I, *Math. Ann.*, 292, 547-559 (1992).
2. _____, Transplantation et Isospectralite II, *Math. Ann.*, to appear.
3. _____, Domaines plans isospectraux a la Gordon-Webb-Wolpert: Une preure terra a terra, Preprint.
4. Buser, P., Conway, J., Doyle, P. and Semmler, K-D., Some planar isospectral domains, Preprint.
5. Gordon, C., Webb, D. and Wolpert, S., Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds, *Invent. Math.*, 110, 1-22 (1992).
6. _____, You cannot hear the shape of a drum. *B. Am. Math. S.*, 27(1), 134-138 (1992).
7. Kac, M., Can one hear the shape of a drum?, *Am. Math. Monthly*, 73, 4, 1-23 (1966).

* * * * * *

• S. J. Chapman, "Drums that sound the same", *Amer. Math. Monthly*, (2) **102** (1995) 124-138.

* جاناتان چپمن، مؤسسهٔ ریاضیات دانشگاه آکسفرد، انگلستان

jchapman@vax.ox.ac.uk

نشر ریاضی، سال ۷، شمارهٔ ۲، صص ۵۶-۵۸

مسأله

بیستمین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی

مسابقهٔ ریاضی دانشجویی که از سال ۱۳۵۲ همه‌ساله (به استثنای سالهای تعطیل دانشگاهها به‌خاطر انقلاب فرهنگی) توسط انجمن ریاضی ایران همزمان با کنفرانسهای ریاضی سالیانه برگزار می‌شد، در بیستمین دورهٔ خود نظام جدیدی پیدا کرد و از ۲ تا ۴ اسفند ۱۳۷۴ به‌صورت یک گردهمایی مستقل دانشجویی در دانشگاه صنعتی شریف برگزار شد. حدود ۱۰۰ دانشجو از بیش از ۳۰ دانشگاه در تیمهای ۳ نفره به رقابت پرداختند. آزمون در دو جلسهٔ سه ساعته در دو روز متوالی برگزار شد و در هر جلسه ۳ مسأله به شرکت‌کنندگان در مسابقه داده شد. ارزشیابی و تصحیح اوراق بلافاصله بعد از هر مسابقه زیر نظر کمیتهٔ علمی منتخب انجمن ریاضی ایران شروع شد و نتایج هر تیم در روز پایانی به‌طور محرمانه در اختیار سرپرست آن تیم قرار گرفت و پس از رسیدگی به اعتراضهای مطرح‌شده، نتیجهٔ قطعی با تعیین رتبهٔ ۶ نفر اول اعلام شد. حائزین رتبه‌های اول تا ششم به‌ترتیب عبارت بودند از: کیوان ملاحی (دانشگاه صنعتی شریف)، حسین مواساتی (دانشگاه صنعتی شریف)، امید نقشینه ارجمند (دانشگاه صنعتی شریف)، علیرضا امینی

مسابقه‌های ریاضی در جهان و در ایران

دامنه‌های کوه المپ [اولومپوس] در یونان باستان آوردگاه مسابقاتی بود که به نام این کوه، المپیك نامیده می‌شد و طی قرنها، هر چند سال یک‌بار برگزار می‌شد تا مدعیان در آن به رقابت بپردازند. این رقابتها نه تنها در زمینه‌های ورزشی بلکه در علوم و فلسفه و هنرها نیز انجام می‌شد. اما پس از آن دوران کمتر نشانه‌ای از وجود آوردگاهی برای صاحبان اندیشه می‌توان یافت، تا یکی دو قرن اخیر که فعالیتهای علمی ماهیتی نوین پیدا کرد و مسابقه‌های علمی جایگاه ویژه‌ای یافت.

از لحاظ ترتیب تاریخی، سال ۱۸۹۴ شاید نقطهٔ آغاز مسابقات علمی عصر جدید باشد. در این سال مسابقهٔ اتووش به‌نام بارون لوراند اتووش[1] به‌صورت یک مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در مجارستان شروع شد. مسائل این مسابقه به‌خاطر سادگی مفاهیم به‌کار گرفته‌شده، هنوز هم جذاب است. پس از آن در سال ۱۹۲۳ مسابقهٔ ریاضیات دورهٔ دوم دبیرستان، باز هم در مجارستان، برقرار شد که دانش‌آموزان سالهای آخر دبیرستان حق شرکت در آن را داشتند. در سال ۱۹۴۹ این مسابقه به مسابقهٔ ژوزف کورشاك[2] تبدیل شد که دانش‌آموزان سالهای آخر دبیرستان و دانشجویان سال اول دانشگاه می‌توانستند در آن شرکت کنند.

پس از مجارستان، کشور رومانی از پیشتازان مسابقه‌های ریاضی است. در این کشور اولین مسابقهٔ ریاضی در سال ۱۹۰۲ برگزار شد ولی از سال ۱۹۵۰ این رشته مسابقات گسترش بیشتری پیدا کرد و المپیاد ریاضی نامیده شد. قبل از آن‌هم در سال ۱۹۳۴ در لنینگراد و ۱۹۳۵ در مسکو یک مسابقهٔ محلی ریاضی را المپیاد نامیده بودند و پس از آن رفته‌رفته در کشورهای مختلف مسابقاتی تحت عنوان المپیاد ریاضی شکل گرفت، مثلاً در ۱۹۴۹: بلغارستان و لهستان، در ۱۹۵۱: چکسلواکی، در ۱۹۶۲: هلند، در ۱۹۶۵: انگلستان، در ۱۹۶۶: آفریقای جنوبی، در ۱۹۶۷: شوروی، در ۱۹۶۹: کانادا، در ۱۹۷۰: استرالیا، و در ۱۹۷۲: آمریکا.

در کشورهای دیگر هم مسابقات ریاضی شکل گرفت هر چند که مشخصاً «المپیاد» نامیده نشد؛ از جمله، در ۱۹۶۱: آلمان [دمکراتیک]، در ۱۹۶۲: سوئد، ویتنام، یوگسلاوی، در ۱۹۶۳: مغولستان، در ۱۹۶۵: فنلاند، در ۱۹۶۹: یونان، در ۱۹۷۰: آلمان [فدرال]، و در ۱۹۷۱: کوبا.

در سال ۱۹۵۹، رومانی پیشگام راه‌اندازی المپیاد بین‌المللی ریاضیات[3] شد و از ۷ کشور اروپای شرقی برای شرکت در این المپیاد دعوت کرد که ۶ کشور این دعوت را پذیرفتند و اولین المپیاد از ۲۰ الی ۳۰ ژوییهٔ ۱۹۵۹ در بخارست برگزار شد. کم‌کم کشورهای دیگر نیز به المپیاد بین‌المللی پیوستند و این مسابقه، که هر سال در یک کشور برگزار می‌شود، در حال حاضر معتبرترین مسابقهٔ بین‌المللی دانش‌آموزی است.

در سال ۱۹۸۰ المپیاد برگزار نشد ولی در آن سال اولین اساسنامه و تشکیلات المپیاد تعیین گردید. در آغاز هر تیم شرکت‌کننده در المپیاد از ۸ دانش‌آموز تشکیل می‌شد، بعد آن را به ۴ دانش‌آموز تقلیل دادند و بالاخره تعداد اعضای هر تیم، ۶ دانش‌آموز تعیین گردید. هر تیم را ۲ الی ۳ نفر سرپرست همراهی می‌کنند که این سرپرستان اعضای هیأت داوران بین‌المللی نیز هستند؛ هر کشور یک رأی دارد، و رئیس هیأت داوران از کشور میزبان است. هیأت داوران طرح سؤال و نظارت بر ارزشیابی را عهده‌دار است.

کیوان ملاحی (دانشگاه صنعتی شریف)، حسین مواساتی (دانشگاه صنعتی شریف)، امید نقشینه ارجمند (دانشگاه صنعتی شریف)، علیرضا امینی هرندی (دانشگاه اصفهان)، ابراهیم سامعی (دانشگاه شهید بهشتی)، محمد نورالهی (دانشگاه شهید باهنر).

این مسابقه را از جهات گوناگونی می‌توان بررسی کرد. از دیدگاه کمّی حضور ۱۰۰ دانشجو از نقاط مختلف کشور شایان توجه است و اگر به یاد آوریم که در سال ۱۳۶۴ فقط ۲۲ دانشجو در مسابقه شرکت داشتند (درحالی‌که در آن دوره تیمهای ۵ نفره در مسابقه شرکت می‌کردند) اهمیت این تعداد بیشتر مشخص می‌شود. شرکت گسترده‌تر دانشجویان در این مسابقه، که به ارتباط و تبادل اطلاعات بین گروههای مختلف دانشجویی از سراسر کشور می‌انجامد، بس مغتنم است.

مسألهٔ قابل بررسی دیگر، تعداد اعضای تیم هر دانشگاه است که موجب بحثهای زیادی شده است. قبلاً تعداد اعضای هر تیم ۵ نفر بود و در پایان مسابقه حائزین رتبه‌های اول تا پنجم معرفی می‌شدند. اما از دورهٔ نوزدهم تعداد اعضای تیمها به ۳ نفر کاهش یافته و حائزین رتبه‌های اول تا ششم معرفی می‌شوند. کاهش تعداد اعضای تیمها با این استدلال صورت گرفته است که با تعداد قبلی، رتبه‌های بالا صرفاً در اختیار یک، یا دو دانشگاه قرار می‌گرفت و محروم شدن اکثریت دانشگاهها از کسب مقام موجب بی‌رونقی مسابقه می‌شد. ولی در مقابل چنین استدلال می‌شود که این محدودیت، بازدارندهٔ رشد و شکوفایی دانشجویان علاقه‌مند است و هر چه میدان این مسابقه بازتر باشد امکان اینکه استعدادهای ناشناخته در گوشه و کنار کشور فرصت ظهور یابند و به شکوفایی برسند، بیشتر می‌شود. این نکته نیز مطرح می‌شود که آزادیِ شرکت در مسابقه موجب می‌گردد دانشجویان بااستعدادی از سایر رشته‌ها اعم از مهندسی و غیره جذب ریاضیات و ریاضی‌خوانی شوند. به اعتقاد ما نیز این محدودیت زیان‌آور است و باز بودن میدان، قطعاً به علاقه‌مندی، رشد، و ارتقای علمیِ عدهٔ بیشتری خواهد انجامید. مسألهٔ رتبه‌بندی را هم با مکانیسمهای مختلفی می‌توان حل کرد از جمله با نوعی رده‌بندی وسیعتر مثلاً اعلام ۳ نفر اول به‌عنوان حائزین رتبهٔ اول، ۵ نفر بعدی رتبهٔ دوم، و بالاخره ۱۰ نفر بعدی به‌عنوان حائزین رتبهٔ سوم و اهدای لوح تقدیر و جایزه به این عده، که باعث خواهد شد عدهٔ بیشتری مشمولِ تقدیر و تشویق شوند، و یا از طریق اعلام نفرات برترِ مناطق مختلف کشور و یا نفر اول هر دانشگاه.

ولی مهمترین مسأله، سؤالهای مسابقه است. باید توجه داشت که طرح سؤال برای مسابقه با طرح سؤال برای امتحان درسی یا آزمون ورودی کارشناسی ارشد کاملاً متفاوت است. در آزمونهای درسی آوردن سؤالاتی از همهٔ مواد درسی ضروری است ولی در مسابقه، هر چند سطح سؤالات رعایت نوعی از حدود را طلب می‌کند، ولی نباید پایبندی به ریز مواد درسی خاصی وجود داشته باشد و اصل، شناسایی استعدادها و قدرت خلاقیت شرکت‌کنندگان است. اگر با توجه به این اصل به بررسی سؤالات مسابقه‌های ریاضی دانشجویی و به‌ویژه مسابقهٔ بیستم بپردازیم به نتیجهٔ چندان خشنودکننده‌ای

مسابقه در دو روز متوالی برگزار می‌شود و در هر روز سه مسأله به دانش‌آموزان داده می‌شود که چهار ساعت برای پاسخگویی فرصت دارند و ارزش هر سؤال ۷ نمره است. به نصف شرکت‌کنندگان مدال داده می‌شود و مدالها به نسبت ۱، ۲، ۳ به ترتیب طلا، نقره، و برنز است. همچنین به کسانی که حداقل یک مسأله را به‌طور کامل حل کرده و به مدال دست نیافته باشند، دیپلم افتخار داده می‌شود. رده‌بندی رسمی نتایج به‌صورت انفرادی است نه تیمی، ولی معمول شده است که با در نظر گرفتن مجموع نمرات هر تیم، نوعی رده‌بندیِ غیررسمی تیمی هم انجام می‌شود. در سال گذشته بیش از ۷۰ کشور در المپیاد بین‌المللی ریاضیات شرکت داشتند.

مسابقات دانش‌آموزی درکشور ما نیز رفته‌رفته جایگاه ویژه‌ای یافته است. **اولین مسابقهٔ** ریاضی دانش‌آموزی در فروردین ۱۳۶۲ بین دانش‌آموزان برگزیدهٔ سرتاسر کشور برگزار شد؛ قبل از آن‌هم کوششهای پراکنده‌ای در این راه انجام شده بود. برای اولین بار در سال ۱۳۶۶ تیمی ازکشورمان به المپیاد اعزام شد. اکنون پس از **گذشت بیش از ده** سال از برگزاری مسابقات و شرکت در المپیادهای جهانی، مسابقات **دانش‌آموزی**، نظم ویژه‌ای پیدا کرده است: در مرحلهٔ کشوری بیش از بیست هزار نفر شرکت‌کننده وجود دارد؛ برگزیدگان این مرحله (حدود ۴۰ نفر) در دورهٔ ویژه‌ای شرکت می‌کنند و از بین آنان اعضای تیم شرکت‌کننده در المپیاد بین‌المللی برگزیده می‌شوند.

مسابقات ریاضی دانشجویی نیز در سطح جهان متداول است ولی نسبت به مسابقات دانش‌آموزی، بیشتر جنبهٔ «محلی» دارد. در بسیاری از کشورها و دانشگاههای جهان همه‌ساله مسابقات ریاضی دانشجویی برگزار می‌شود ولی شاید معتبرترین آنها مسابقهٔ ریاضی پاتنم[4] است که در آمریکای شمالی توسط انجمن ریاضی آمریکا با پشتیبانی مالی خانوادهٔ پاتنم برگزار می‌شود. شرکت‌کنندگان در این مسابقه دانشجویان دورهٔ کارشناسی دانشگاههای ایالات متحده و کانادا هستند که یا به‌طور تیمی از طرف دانشگاه یا مدرسهٔ عالی خود، و یا به‌صورت انفرادی در مسابقه شرکت می‌جویند. نتایج مسابقه نیز هم به‌صورت تیمی و هم به‌صورت انفرادی اعلام می‌شود. امتحان در دو جلسهٔ سه ساعته برگزار می‌شود و در هر جلسه ۶ مسأله مطرح می‌شود. مسائل در زمینه‌های: حساب دیفرانسیل و انتگرال (مقدماتی و پیشرفته)، جبر (ماتریسها، و نظریهٔ معادلات)، معادلات دیفرانسیل مقدماتی، هندسه (تحلیلی، مسطحه، و فضایی)، و ترکیبیات مقدماتی مطرح می‌شود. مسائل پاتنم به خاطر دشواریشان و در عین حال سادگی ایده‌ها شهرت زیادی دارند.

در ایران نیز به همت انجمن ریاضی ایران مسابقهٔ ریاضی دانشجویی برگزار می‌شود که بیستمین دورهٔ آن در سال گذشته برگزار شد.

اگر روزی دامنه‌های کوه المپ آوردگاه صاحبان اندیشه بود، اکنون شاید وقت آن رسیده باشد که شبکهٔ اینترنت آوردگاهی به وسعت جهان بگستراند و مسابقه‌ای جهانی را با شرکت همهٔ جوانان مشتاق، امکان‌پذیر گرداند.

1.Baron Loránd Eötvos 2.Józef Kürschák

3.International Mathematical Olympiad (IMO)

4.William Lowell Putnam

نخواهیم رسید. ضمناً قبل از برگزاری این مسابقه اعلام شده بود که دو مسألهٔ آنالیز، دو مسألهٔ جبر، یک مسألهٔ نظریهٔ اعداد، و یک مسألهٔ توپولوژی داده می‌شود، با این تأکید که مسائل نظریهٔ اعداد و توپولوژی به تکنیکهای ویژه نیاز نخواهد داشت و به معلومات عمومی متکی است. ولی در مجموعهٔ سؤالات مسابقه فقط ۳ مسألهٔ جبر و ۳ مسألهٔ آنالیز دیده می‌شد. این عامل نیز به ایجاد محدودیت در طرح سؤالات مناسب کمک کرده و باعث شده بود سؤالات چندان جنبهٔ «مسابقه‌ای» نداشته باشند. در مسابقه‌های معروف خارجی، از جمله در مسابقهٔ پاتنم، مسائلی که مطرح می‌شود در اکثر موارد مسائلی «ناب» از دید مسابقه‌ای است، مسائلی دشوار و پیچیده بر اساس ایده‌های ساده، مسائلی که می‌تواند استعدادها را شناسایی کند و خلاقیتها را بر انگیزد.

در مجموع، برگزاری این مسابقه از طرف انجمن ریاضی ایران را باید مغتنم شمرد و امید داشت که مسابقه از همهٔ جنبه‌ها مسیر پیشرفت و تکامل را طی کند. اما علاوه بر ضرورتِ بازترکردن میدان مسابقه برای شرکت آزادانهٔ مشتاقان و داوطلبان، کمیتهٔ علمی مسابقه باید هر چه بیشتر تقویت و پشتیبانی شود تا با دیدگاهی نو به طرح و ارائه مسائل مسابقه بپردازد چه در غیر این‌صورت، یعنی در صورت فقدان نوگرایی در طرح مسائل، خطر درجا زدن و بی‌رونقی مسابقه دور از تصور نیست.

ی. ت.

مسأله برای حل

مسأله سرچشمهٔ جوشان ریاضیات و موجب شادابی و سرزندگی محیط علمی است. علاقه‌مندان می‌توانند حل مسائلی را که هر شماره در این ستون چاپ می‌شود تا سه ماه پس از انتشار برای نشر ریاضی ارسال دارند. راه‌حلهای برگزیده همراه با ذکر نام حل‌کنندگان در شمارهٔ بعدی درج خواهد شد. نشر ریاضی از دریافت مسائل پیشنهادی نیز استقبال می‌کند. مسائل انتخاب‌شده به‌نام طرح‌کنندگان در نشر ریاضی چاپ خواهد شد.

مسألهٔ ۱ یک جایگشت π روی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را همفاصله می‌نامیم اگر یک عدد ثابت $k \neq ۰$ موجود باشد که به‌ازای هر $i \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$ داشته باشیم $|\pi(i) - i| = k$. تعداد جایگشتهای همفاصله برای $n = ۱۰۰$ و $n = ۱۰۱$ را پیدا کنید.

مسألهٔ ۲ تابع $S(m,n)$ روی اعداد صحیح غیر منفی به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$S(۰,۰) = ۱ \qquad (۱)$$

$$S(۰,n) = S(m,۰) = ۰ \qquad m,n \geqslant ۱ \qquad (۲)$$

$$S(m+۱,n) = mS(m,n) + (m+n)S(m,n-۱) \qquad (۳)$$

ثابت کنید که $\sum_{n=۱}^{m} S(m,n) = m^m$.

مسألهٔ ۳ فرض کنید A و B دو ماتریس ارمیتی و مثبتِ معین باشند. می‌نویسیم $A \geqslant B$، اگر $A - B$ نیز ارمیتی و مثبت معین باشد. ثابت کنید

$$A^{-۱} + B^{-۱} \geqslant ۴(A+B)^{-۱}$$

ی. ت.

دو مسأله از سی‌وهفتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

روزهای ۲۰ و ۲۱ تیرماه ۱۳۷۵ روزهای مسابقهٔ سی‌وهفتمین المپیاد ریاضی بود. در هر روز دانش‌آموزان شرکت‌کننده در المپیاد طبق معمول به ۳ مسأله پاسخ دادند. یکی از مسائل روز دوم بیش از حد دشوار بود به‌طوری‌که فقط معدودی از ۴۲۳ نفر شرکت‌کننده در المپیاد موفق به‌حل آن شدند و به‌قولی بیشترین «صفرها» در تاریخ المپیاد را دانش‌آموزان از این مسأله گرفته‌اند. نگاهی به‌صورت این مسأله خالی از لطف نیست:

فرض کنیم $ABCDEF$ یک شش ضلعی محدب باشد به‌طوری‌که AB موازی ED، BC موازی EF، و CD موازی AF باشد. همچنین فرض کنیم R_A، R_C، R_D به‌ترتیب شعاع دوایر محیطی مثلثهای ABF، CBD و DEF باشند و p محیط شش ضلعی باشد. ثابت کنید:
$R_A + R_C + R_D \geqslant \frac{۱}{۲}p$

یکی دیگر از مسائل روز دوم نیز جالب توجه است:

فرض کنیم n، p، و q اعدادی صحیح و مثبت باشند و $n > p + q$. همچنین فرض کنیم $x_۰, x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ اعدادی صحیح باشند که در شرایط زیر صدق کنند:

الف) $x_۰ = x_n = ۰$

ب) به‌ازای هر i که $۱ \leqslant i \leqslant n$، داریم $x_i - x_{i-۱} = p$ یا $x_i - x_{i-۱} = -q$.

نشان دهید یک زوج مرتب (i,j) وجود دارد که $i < j$ و $(i,j) \neq (۰,n)$ به‌طوری‌که $x_i = x_j$.

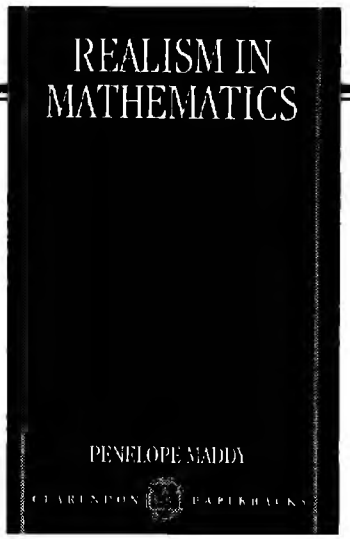
راه حل ارائه شده توسط طراح این مسأله نیز دشوار و دور از ذهن می‌نمود ولی تعداد زیادی از دانش‌آموزان شرکت‌کننده در المپیاد این مسأله را از راههای متفاوتِ بدیع و جالبی حل کردند. علاقه‌مندان هم می‌توانند برای حل این دو مسأله زورآزمایی کنند، این گوی و این میدان.

کتاب

در این شماره، بخش کتاب تنوع و گسترش یافته و شامل نقد مقاله و نقد متون نسبتاً تخصصی هم شده است. امیدواریم این روال را در شماره‌های آینده ادامه دهیم.

واقعگرایی در ریاضیات*

موریس هرش*
ترجمهٔ شاپور اعتماد



***Realism in mathematics*, Penelope Maddy, Oxford University Press (1993), ix + 204 pp.**

۱. واقعگرایی در ریاضیات

ریاضیات همیشه به‌نحو خطرناکی نزدیک به سواحل متافیزیک حرکت کرده است.

شانکر[1]

احکام ریاضی وقتی به واقعیت مربوط‌اند قطعی نیستند و وقتی قطعی‌اند به واقعیت مربوط نیستند.

اینشتین

واقعیت فقط یکی از مدلهاست.

دیوار نوشتی در تالار اوانس
(ساختمان بخش ریاضی) دانشگاه برکلی

ما ریاضیدانان حرفه‌ای وقت چندانی صرف مسائل فلسفی نمی‌کنیم. به جای آنکه وقت خود را با گمانپردازی دربارهٔ معنای این مسائل تلف کنیم ترجیح می‌دهیم به اصل مطلب بپردازیم. با وجود این، هرکدام از ما گهگاه ــ لااقل محض اینکه بگوییم پرسش [از ماهیت ریاضیات] بی‌معناست یا زیادی سخت است ــ با خود گفته‌ایم واقعاً ریاضیات دربارهٔ چیست؟

اعداد چیستند؟ حقیقت ریاضی چیست؟ به چه معنا عدد ۳، یا π، یا $2^{\aleph}$ وجود دارد؟ آیا اگر حیاتی در جهان وجود نداشت باز هم این اعداد وجود داشتند؟ آیا قضیهٔ اعداد اول همچنان صادق می‌بود؟ آیا می‌توانستیم بگوییم که فرضیه‌های پیوستار قطعاً یا صادق‌اند یا کاذب؟

خانم پنلوپ مدی استاد فلسفهٔ دانشگاه کالیفرنیا در اروایِن، در مقدمهٔ کتابش می‌گوید:

> ریاضیدانان با آنکه بیشتر از هریک از ما از انواع و اقسام حقایق ریاضی مطلع‌اند، درمورد ماهیت این حقایق غالباً به فهم متعارفِ «طبیعی» متوسل می‌شوند. آنان به خود و همکارانشان به چشم محققانی نگاه می‌کنند که کارشان کشف ویژگیهای حوزه‌های متنوع و جذاب واقعیت ریاضی است: کار متخصصان نظریهٔ اعداد مطالعهٔ اعداد است، کار هندسه‌دانان مطالعهٔ فضاهای خوشرفتارِ معینی است، متخصصان نظریهٔ گروهها به مطالعهٔ گروهها می‌پردازند، متخصصان نظریهٔ مجموعه‌ها هم کارشان مطالعهٔ مجموعه‌هاست، و قس علی‌هذا.

مدی به این دیدگاه عرفی [یا مبتنی بر فهم متعارف] «واقعگرایی ماقبل فلسفی» می‌گوید: ریاضیات عبارت است از علمِ موجوداتی معین ــ مانند

1. S. G. Shanker

اعداد، مجموعه‌ها، توابع، و غیره ــ که واقعاً وجود دارند، درست به‌همان‌گونه که علوم فیزیکی عبارت از مطالعهٔ اشیای فیزیکی متعارف است؛ و احکام ریاضی چون دربارهٔ واقعیت‌اند یا صادق‌اند یا کاذب.

اما همان‌طور که مدی می‌گوید گرفتاریِ این طرز تفکرِ صاف و ساده این است که به محض اینکه بخواهیم آن را توضیح دهیم با پرسشهای عذاب‌آور و خلاف انتظاری روبه‌رو می‌شویم. این موجودات چه هستند، و کجا هستند؟ اگر آنها بنا به قول افلاطون فاقد مکان و موقعیت در فضا و زمان هستند دیگر چگونه ممکن است اصلاً چیزی در مورد آنها بدانیم؟

وقتی ریاضیدانان با چنین معضلات فلسفی بغرنجی روبه‌رو می‌شوند بسیاری از آنها به موضع صوری انگاری پوچگرایانه[1]ای عقب‌نشینی می‌کنند که حقیقتاً هیچ‌کدام از ما به آن باور ندارد! «کار ما فقط بازی بی‌معنا با نمادهایی پوچ و بی‌معنی است.»

این «موضعگیری دوگانه» فرقی به حال ریاضیدان نمی‌کند، ولی امری نیست که مورد قبول فیلسوف باشد. هدف مدی این است که «روایت معینی از دیدگاه ماقبل فلسفی ریاضیدان به دست دهد و از آن دفاع کند.» به‌این ترتیب قصد نهایی کتاب توجیه روایتی از واقعگرایی ریاضی است.

قول به وجود عینی اشیای ریاضی افلاطون‌گرایی خوانده می‌شود. اما موضع فلسفی مدی بسیار دور از افلاطون‌گرایی به معنای دقیق آن است. یعنی [دور از] این نظریه که موجودات ریاضی صور ایده‌آل یا آرمانیِ ابدی و ازلی هستند که کاملاً خارج از فضا و زمان فیزیکی واقع‌اند و اینکه حقایق ریاضی احکام پیشینیی [مقدم بر تجربه] و یقینی و ضروری هستند. درست به‌عکس، مدی وجود عینی مفاهیم ریاضی را بر مبنای نسبت تنگاتنگ میان ریاضیات و علم توجیه می‌کند: از آنجا که فیزیک دربارهٔ امور واقعی است و ریاضیات برای پیشبرد فیزیک ضرورت تام دارد، ریاضیات هم دربارهٔ امور واقعی است و مبنای علم ما به واقعیت ریاضی، به اشیایی چون مجموعه‌ها، چیزی جز دستگاه سلسله اعصاب ما نیست.

۲. واقعگرایی علمی

نباید بیش از حد لزوم به تعداد عناصر افزود.
ویلیام اوکام

مدی پس از بحث دربارهٔ مشکلاتِ جدی صورتگرایی، منطقگرایی، قراردادگرایی[2]، و رد شهودگرایی به این اعتبار که «کار فیلسوف ریاضیات توصیف و تبیین ریاضیات است و نه اصلاح آن»، به واقعگرایی ریاضی می‌پردازد. وی حرف خود را با بحث دربارهٔ دیدگاه کواین در مورد واقعگرایی علمی و معرفت‌شناسی طبیعیگرایانه آغاز می‌کند.

ما باور خود را به وجود اشیای دور از ذهن و موجودات نظریِ مشاهده‌ناپذیر علوم، مانند الکترون و کوارک، یا دمای پلوتون، چگونه توجیه می‌کنیم؟ یا اصلا چرا به وجود عینی اشیای فیزیکی باور داریم؟ چون این قبیل مفروضات جزئی از علم به‌عنوان بهترین نحوهٔ شناخت ما از جهان مادی به‌شمار می‌آید، و «جزئی از بهترین نظریه بودن، طبعاً بهترین توجیه هر باوری است . . . آیا در مورد تأییدشده‌ترین موجودات فرضیِ[3] بهترین نظریهٔ ما، می‌تواند توجیهی بهتر از این واقعیت وجود داشته باشد که آنها تأییدشده‌ترین موجودات فرضیِ بهترین نظریهٔ علمی ما هستند؟»

ولی حتی اگر واقعگرایی علمی را بپذیریم، توجیه واقعگرایی ریاضی مستلزم اثبات پیوند میان علوم فیزیکی و ریاضیات است. در اینجا، مدی استدلالِ استوار بر «اجتناب‌ناپذیری» را که کواین و پاتنم اقامه کرده‌اند، اقتباس می‌کند: چون علم بدون ریاضیات غیر قابل تصور است، «ما به‌نحوی ملزم به قبولِ وجود اشیای ریاضی هستیم چون وجود آنها برای بهترین نظریهٔ ما در مورد جهان اجتناب‌ناپذیر است و ما هم چنین نظریه‌ای را می‌پذیریم»

مدی متذکر می‌شود که افلاطون‌گراییِ ناشی از استدلال کواین و پاتنم کاملاً با استدلال افلاطونی تفاوت دارد. درحالی‌که افلاطون معتقد بود که معرفت ریاضی مقدم بر تجربه و امری یقینی و ضروری است، رهیافت کواین و پاتنم به‌هیچ‌وجه به چنین نتایجی منجر نمی‌شود: اگر ریاضیات امری عینی است چون در بطن نظریهٔ علمی قرار دارد، به‌هیچ‌وجه نمی‌توان آن را امری مقدم بر تجربه به‌شمار آورد. به همین ترتیب یقینی یا ضروری بودن آن هم چندان اساس محکمی ندارد.

ولی مشکل اساسیتر این است که نظریهٔ کواین-پاتنم فقط در مورد آن بخشی از ریاضیات صدق می‌کند که در علم کاربرد دارد؛ در مورد بخش اعظم «ریاضیات بی‌کاربرد»، که به نظر نمی‌آید برای علم اجتناب‌ناپذیر باشد حرفی نمی‌زند. کواین فقط آن بخش از ریاضیات را عینی قلمداد می‌کند که در علوم فیزیکی مورد نیاز است، به اضافهٔ چیزهایی از قبیل «پیامدهای نامتناهی» که به دلیلِ نوعی ملاحظات معطوف به سادگی مطرح می‌شوند. ولی مدی متذکر می‌شود که ریاضیدانان «نه تنها تمایلی ندارند بلکه فکر هم نمی‌کنند که توجیه ادعاهای آنها منوط به نتیجهٔ آزمایشهای فیزیکی است». ما ریاضیدانان هم راههایی برای توجیه روشها و نتایج خود داریم، مانند اثبات، استناد به قرائن شهودی، استدلالهایِ مبتنی بر قابل قبول بودن یک امر، و دفاع مبتنی بر پیامدها.

افزون بر این، مدی ایراد دیگری هم می‌گیرد. به اعتقاد او ریاضیاتی که کواین و پاتنم آن را توجیه می‌کنند فقط در سطوح نسبتاً نظری وارد نظریه‌پردازی علمی می‌شود. برای توجیه «۴ = ۲ + ۲» یا «اجتماع مجموعهٔ اعداد زوج و مجموعهٔ اعداد فرد عبارت است از مجموعهٔ همه اعداد»، نیازی به فیزیک نداریم. به قول چارلز پارسن نظریهٔ کواین-پاتنم «دقیقاً خودآشکاریِ ریاضیات مقدماتی را تبیین‌نشده رها می‌کند.»

در اینجا مدی از کورت گودل استمداد می‌طلبد. به نظر گودل بنیادیترین اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها «خود را به اعتبار صدقشان بر ما تحمیل می‌کنند». وی معتقد بود که

> منطق و ریاضیات نیز (همانند فیزیک) بر مبنای اصول موضوعی با مضمون واقعی بنا شده‌اند که نمی‌توان آنها را «توجیه کرد» . . . . فرض [وجود مجموعه‌ها] همان قدر مشروع است که فرض وجود اشیای فیزیکی، و به همان اندازه دلیل و شاهد برای وجود آنها در دست است. وجود مجموعه‌ها همان قدر برای دستیابی به یک نظامِ قابل قبولِ ریاضی ضروری است که وجود اشیای فیزیکی برای یک نظریهٔ قابل قبولِ در باب ادراکات حسی.

1. nihilistic formalism 2. conventionalism 3. posits

اما گودل حتی برای حقایق ریاضیِ خلاف شم ما نیز، با قیاس آنها با واقعیتهای فیزیکی دربارهٔ موجودات مشاهده‌ناپذیر، عینیت قائل می‌شد. وی در مورد راههای متفاوتی که می‌توان برای توجیه اصل موضوع جدیدی مورد استفاده قرار داد معتقد بود که حتی اگر چنین اصلی فاقد بداهت شهودی باشد باز هم می‌توانیم صدق آن را بنا به همان دلایلی که نظریهٔ فیزیکی جاافتاده‌ای را می‌پذیریم، قبول کنیم: به دلیل کارایی آن در اثبات نتایج تصدیق‌پذیر، به‌دست‌آوردن نتایج جدید، و پرتو افکندن بر نتایج قدیم.

مدی با ترکیب آرای کواین و پاتنم و گودل به نوعی افلاطون‌گراییِ تلفیقی می‌رسد:

> در این تلفیق، به اقتباس از نظریهٔ کواین-پاتنم، اساس کار بر استدلالهایِ مبتنی بر اجتناب‌ناپذیری قرار می‌گیرد؛ و به اقتباس از گودل، این امر پذیرفته می‌شود که باید آشکال صرفاً ریاضی بداهت را به رسمیت شناخت و مسئولیت تبیین آنها را به گردن گرفت. با این کار مشکل اصلی نظریهٔ کواین-پاتنم ــ یعنی عدم تطابق آن با کار روزمرهٔ ریاضی ــ و مشکل نظریهٔ گودل ــ یعنی فقدان استدلال صاف و ساده‌ای برای [توجیه] حقایق ریاضی ــ رفع می‌شود.

با وجود این، همچنان مشکل دیگری به‌جا می‌ماند و آن این است که اگر قرار باشد که «شهود ریاضی» پایه و اساس معرفت‌شناسی ریاضیات را تشکیل دهد ــ چنان‌که ادراک برای فیزیک چنین نقشی را ایفا می‌کند ــ آنگاه محتاج نظریه‌ای در باب آن هستیم. هر چه باشد ما در مورد منشأ زیست‌شناختی تواناییهای ادراکی خود اطلاعات زیادی داریم ــ ولی شهود ریاضی از کجا سرچشمه می‌گیرد؟

۳. بنیاد عصب‌شناختیِ شهود ریاضی

> شهود متضمن این امر است که معنا یا اهمیت یا ساختار مسأله‌ای بدون توسل آشکار به ابزارهای نظام تحلیلی خاصی درك شود. به کمك شهود است که به‌سرعت فرضیه‌هایی صورتبندی می‌شوند یا مقایسه‌های جالبی بین ایده‌هایی که هنوز ارزششان دانسته نشده است انجام می‌گیرد. شهود قبل از اثبات، کار خود را انجام می‌دهد؛ در حقیقت کار روشهای تحلیل و اثبات چیزی نیست جز آنکه نتایج شهود را امتحان و بررسی کنند.
>
> برونر[1]

> بدون شك نظریهٔ ریاضیی که پایه و اساس نظام علمی قدرتمند و موفقی ــ به انضمام مشاهدات تجربی مهم و متعدد ــ را تشکیل می‌دهد صرفاً به دلیل «شهودی» بودنش پذیرفته نشده است . . .
>
> هیلری پاتنم

دومین فصل از پنج فصل این کتاب، «ادراک و شهود» نام دارد. مسألهٔ اصلی این فصل این است که موجودات ریاضی از دید افلاطون‌گرایی سنتی اشیایی مجرد هستند: در نتیجه این پرسش پدید می‌آید که چگونه ممکن است چیزی دربارهٔ آنها دانست؟ در اینجا توجه ما از مسائل وجودشناختی ــ اینکه چه اشیای ریاضی وجود دارند؟ ــ به مسائل معرفت‌شناختی ــ اینکه چگونه به حقایق ریاضی پی می‌بریم؟ ــ معطوف می‌شود. «فرد افلاطون‌گرا باید توضیحی به ما بدهد و آن اینکه چگونه و چرا اقوال سالووی[1] دربارهٔ مجموعه‌ها شاخصهای قابل اعتمادی برای حقایق مربوط به مجموعه‌ها به‌شمار می‌آیند.»

مدی در اینجا قول هارتری فیلد[2] نامگرا [نومینالیست [3]] را که منکرِ اجتناب‌ناپذیری ریاضیات برای فیزیک است نقل می‌کند. بنابر نظریهٔ افلاطونی به معنای دقیق کلمه، موجودات ریاضی هیچ نسبت فضا-زمانی با ما ندارند، و در هیچ اندرکنش فیزیکی با ما یا چیزهایی که ما مشاهده می‌کنیم واقع نمی‌شوند؛ آنها هم مستقل از ذهن‌اند هم مستقل از زبان. در نتیجه فیلد می‌پرسد چگونه است که «باورهای ما دربارهٔ این موجوداتِ دور [از ذهن] این‌قدر با واقعیتهای مربوط به آنها تطابق دارد؟ . . . اگر تبیین این امر علی‌الاصول محال به نظر می‌رسد، دراین‌صورت باور به موجودات ریاضی، به‌رغم دلایل ممکن ما برای چنین باوری، بی‌اساس است . . . .»

مدی وعده می‌دهد که به‌جای این روایت «لاهوتی[4]» از اعیان ریاضی، «آنها را به جهانی که می‌شناسیم بیاورد و در معرض دستگاه شناختی [ادراکی] متعارف ما قرار دهد.»

به دنبال این وعده حاشیهٔ مفصلی در باب فلسفه، روان‌شناسی، و عصب‌شناسی ادراک می‌آید که هدف از آن توجیه این ادعای اساسی مدی است که «ما مجموعه‌ها را می‌توانیم ادراک کنیم و ادراک هم می‌کنیم، و این توانایی ما عملاً مثل توانایی ما در ادراک اشیای فیزیکی رشد می‌کند.» مدی بحث خود را در زمینهٔ فیزیولوژی ادراک، تا حد زیادی بر مبنای فرضیه‌های عصب‌شناختی هِب[5] در کتاب سازمان رفتار (۱۹۴۹) انجام می‌دهد. هب معتقد بود که یادگیری، حافظه، بازشناسی الگو[6]، و کارها و فعالیتهای شناختی دیگر همه از طریق تعدیل ساختار موجود در دستگاه سلسله اعصاب انجام می‌گیرد.

> وقتی آکسون سلول A به اندازهٔ کافی به سلول B نزدیک باشد که آن را تحریک کند و مکرراً یا دائماً در شلیک به آن نقش ایفا کند، نوعی فرایند رشد از طریق تغییرات متابولیسمی در یک یا هر دو سلول به وقوع می‌پیوندد که بر اثر آن، کارایی A، به‌عنوان یکی از سلولهایی که به B شلیک می‌کند، افزایش می‌یابد.

به اعتقاد هب چنین فرایندهایی به تشکیل مجتمعهای سلولی که مجموعه‌ای از نورونهای متصل به هم و تقویت‌کنندهٔ اثر خود هستند، منجر می‌شود. چنین مجتمعهای سلولی به اعتبار تواناییشان در دادن پاسخهایِ قابل اعتمادِ آنی به همان محرکهایی که در ابتدا باعث تشکیل آنها شده بود نوعی بازنماییِ بخشی از جهان خارج در دستگاه عصبی به‌شمار می‌آیند. ادراکها و افکار پیچیده با فعالیت همزمان مجتمعهای چندسلولی متناظرند ــ یا آنکه صرفاً

1. J. S. Bruner

1. Solovay 2. Hartry Field

۳. فرد نامگرا قائل به وجود عینی امور یا موجودات ریاضی نیست.

4. unworldly 5. D. O. Hebb 6. pattern recognition

همان هستند.*

هب همچنین معتقد بود که مجتمعهای سلولی با یکدیگر مجتمعهایی از مراتب بالاتر تشکیل می‌دهند. مدی بر این اساس می‌گوید که در دستگاه سلسله اعصاب ما مجتمعهایی سلولی از مراتب بالاتر وجود دارد که با مجموعه‌های خاصی متناظرند، و حتی مجتمعی سلولی از مرتبهٔ بالاتر وجود دارد که با مفهومی کلی که ما از مجموعه در نظر داریم متناظر است.

> به این ترتیب ساختار این مجتمعِ مجموعه‌ایِ کلی منشأ باورهای گوناگونِ شهودی ما در باب مجموعه‌هاست؛ برای مثال باور به اینکه مجموعه‌ها دارای خواص عددی‌اند، یا آنکه چنین خواص عددی با جابه‌جایی عضوها تغییر نمی‌کنند ... و این آرای شهودی پایه و اساس غالب اصول موضوع اصلی نظریهٔ علمی ما را در باب مجموعه‌ها تشکیل می‌دهد.

این مطلب در حکم پایه و اساس معرفت‌شناختی برای «واقعگراییِ نظریهٔ مجموعه‌ای»[1] مدی است. بنابر چنین دیدگاهی مفاهیم و آرای ما در باب مجموعه‌ها دیگر از عالم مُثُل افلاطونی به‌نحوی غیر قابل فهم سرچشمه نمی‌گیرند بلکه منشأ آنها رخدادهای فیزیکی معینی ــ یعنی تغییراتی در سیناپسها و تشکیل مسیرهایی در دستگاه سلسله اعصاب ــ است. مدی معتقد است که برای خط، منحنی و سایر ساختارهای ریاضیِ پیوسته و هندسی نیز می‌توان تبیینهای مشابهی ارائه کرد.

۴. اعداد

> به‌نظر من اعداد صحیح در خارج از [ذهن] ما وجود دارند، وجودی که همچون وجود سدیم یا پتاسیم، ضرورت از پیش‌تعیین‌شده‌ای دارد.
>
> شارل ارمیت

> عدد مگر چیست که آدمی می‌تواند آن را بشناسد؟ و آدمی مگر چیست که می‌تواند عدد را بشناسد؟
>
> وارن مک‌کالک

مدی در فصل سوم توجه خود را به اعداد معطوف می‌کند. در روایتهای صوری نظریهٔ مجموعه‌ها رسم بر این است که اعداد به کمک مجموعه‌هایی معینْ مشخص شوند. تسرملو اعداد طبیعی را به کمک این دنباله مشخص می‌کرد: ۰، {۰}، {{۰}}، ... درحالی‌که فون نویمان دنبالهٔ ۰، {۰}، {{۰}، {۰}}، ... را برای اعداد طبیعی به‌کار می‌برد. آیا یقیناً فرقی نمی‌کند که کدام‌یک را انتخاب کنیم؟ شاید در مورد مقاصد ریاضی چنین باشد. ولی اگر انتخابی طبیعی در کار نباشد، هیچ شقی نمی‌تواند مبنای فلسفی رضایت‌بخشی برای مفهوم عدد واقع شود. برای مثال، این دو دنباله خواص متفاوتی از لحاظ نظریهٔ مجموعه‌ها دارند؛ هر کدام از اعداد تسرملو بعد از نخستین عدد، تک‌عضوی است درحالی‌که اعداد فون نویمان چنین نیستند. ایرادی که ممکن است وارد شود این است که در مورد این دنباله‌ها چنین خواصی زائدند؛ و مسألهٔ فلسفیِ قابل طرح هم دقیقاً همین است، یعنی اینکه چرا اعداد خواص زائد دارند. بر مبنای ملاحظات مشابهی نکتهٔ دیگری مطرح می‌شود و آن اینکه ما اصلاً نمی‌خواهیم اعداد حقیقی را هم توسط مجموعه‌ها مشخص کنیم.

بنابر چنین استدلالی که نخستین بار بناسراف آن را اقامه کرده است [۴]، اعداد نه تنها مجموعه نیستند بلکه اصولاً هیچ نوع شیئی نیستند؛ چون اشیا دقیقاً فاقد آن کلیتی هستند که اعداد باید از آن برخوردار باشند.

فرگه معتقد بود که اعداد مفهوم‌اند، اما مدی با این حرف هم مخالفت می‌کند. همچنین کانتور فکر می‌کرد که اعداد طبیعی موجودات متمایزی هستند که از مجموعه‌ها «انتزاع می‌شوند» و ددکیند می‌گفت که اعداد حقیقی به پرشها «نسبت داده می‌شوند». اما مدی می‌گوید که آنان این فرایندهای «انتزاع کردن» و «نسبت دادن» را تبیین نکرده‌اند.

اما واقعگرایی متضمن این است که اعداد چیزی باشند. جواب مدی به این مسأله این است که اعداد خواص مجموعه‌ها هستند. درست همان‌گونه که، مثلاً، جرم یکی از خواص اشیای فیزیکی است که در فیزیک مورد مطالعه قرار می‌گیرد، «عدد» نیز یکی از خواص مجموعه‌هاست که در ریاضیات مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همان‌گونه که اشیای فیزیکی برحسب جرم با یکدیگر قابل قیاس‌اند، مجموعه‌ها را نیز می‌توان به کمک عدد با یکدیگر قیاس کرد:

> اُردینالهای فون نویمان چیزی جز مقیاس اندازه‌گیری نیستند، مقیاسی که اندازهٔ عددی مجموعه‌ها برحسب آن با یکدیگر مقایسه می‌شود. با مطالعهٔ اردینالهای فون نویمان اطلاعاتی دربارهٔ اعداد به دست می‌آوریم چون اُردینالها دنبالهٔ متعارفی تشکیل می‌دهند که به خواص اعداد مصداق می‌بخشند. اینکه اُردینالهای فون نویمان را انتخاب کنیم یا اُردینالهای تسرملو را، عین آن است که از میان دو خط‌کش مختلف که هر دو برحسب متر اندازه می‌گیرند، یکی را انتخاب کنیم.

حال که اعداد طبیعی خواص مجموعه‌ها هستند، اعداد حقیقی چیستند؟ در اینجا حرف مدی ناروشنتر است. وی متذکر می‌شود که بر خلاف آنچه در ابتدا به نظر می‌رسد پرسش «اعداد حقیقی چیستند؟» و پرسش «اعداد طبیعی چیستند؟» کاملاً با هم مشابه نیستند، زیرا در حالی که مدلهای فون نویمان و تسرملو برای اعداد طبیعی از دید نظریهٔ مجموعه‌ها خواص اضافی متفاوتی دارند،

> همهٔ مدلهایی که بر مبنای نظریهٔ مجموعه‌ها در مورد اعداد حقیقی ارائه شده است فقط به کشف خاصیت ضمنی واحدی کمک کرده‌اند، خاصیتی که میان همهٔ پدیده‌های متفاوتی که به کمک این اعداد اندازه‌گیری شده‌اند مشترک است، یعنی همان خاصیت پیوستگی. به این ترتیب، اگر پاسخ مناسبی به پرسش «اعداد حقیقی چیستند؟» وجود داشته باشد ... این پاسخ مناسب عبارت است از: اعداد حقیقی، خاصیتِ [امر] پیوستگی است.

باید پذیرفت که این حرف عجیبی است، و با این نتیجه‌گیری که اعداد طبیعی خواص مجموعه‌ها هستند خیلی اختلاف دارد. منشأ این اختلاف در این

* آرای هب در آن شاخهٔ مستقل هوش مصنوعی که به شبکه‌های عصبی شهرت دارد، گسترش همه‌جانبه یافته است. برای ملاحظهٔ شرح و مروری بر این تحولات به مرجعهای [۱] و [۲] این مقاله مراجعه کنید.

1. set-theoretic realism

است که ما در مورد اعداد طبیعی شهودِ نسبتاً بنیادی داریم، شهودی که از مدتها قبل از تحقیقات صوری ما وجود داشته است. در مورد اعداد حقیقی از چنین شهودی برخوردار نبوده‌ایم، اما در مورد پیوستگی بوده‌ایم، ولی این درست همان مفهومی است که باید تبیین شود. درست به همین دلیل اعداد حقیقی را ساختیم. همه‌چیز تا اینجا روشن به نظر می‌رسد، ولی موقعیت وجودشناختی اعداد حقیقی همچنان در تاریکی می‌ماند.

در این فصل به بحث دربارهٔ خواص نیز پرداخته شده است. خواص به‌عنوان مقوله‌ای میانی در نظرگرفته شده است که «تقریباً میان محمولات ــ که از طریق یکسانی معنا [هم‌معنایی] مشخص می‌شوند ــ و مجموعه‌ها ــ که از طریق یکسانی عضویت [یکی بودن اعضا] مشخص می‌شوند ــ جای دارند . . .» این فصل با بحث پیرامون اعداد فرگه، که «گردایه‌هایی هستند که مجموعه نیستند»، و تمایز میان مجموعه‌ها و رده‌ها پایان می‌پذیرد. با آنکه این مطالب برای نظریه‌پردازی مدی در مورد واقعگرایی ریاضی ضرورتی ندارند طرح آنها برای روایت تاریخی او از نظریهٔ مجموعه‌ها در فصل بعد مناسبت دارد.

۵. اصول موضوع

> اصل موضوعی کردن و جبری کردن ریاضیات، پس از پنجاه سال، باعث شده تعداد بسیار زیادی از متون ریاضی غیر قابل خواندن باشد به‌طوری که خطر از دست رفتن کامل ارتباط [ریاضیات] با فیزیک و علوم طبیعی پیش آمده است.
>
> ولادیمیر ایگورویچ آرنولد

> همهٔ این نزاعها بر سر بینهایت چیزی جز بلندپروازی بچه مدرسه‌ایها نیست.
>
> توماس هابز

افلاطون‌گرایی گودلی بر دو اصل استوار است. مدی اصل اول را مبنی بر اینکه واقعیتِ ریاضیات مقدماتی بر اساس شهود ریاضی ما توجیه می‌شود در فصل سوم بررسی می‌کند. در فصل چهارم، به بررسی اصل دوم می‌پردازد: توجیه اصول موضوع غیرشهودیتر بر اساس قدرت تبیین‌کنندگی آنها.

وی قبل از آنکه به مکتب اصل موضوعی بپردازد خیلی خلاصه به مسألهٔ ریاضیی می‌پردازد که کانتور را به وضع نظریهٔ مجموعه‌ها هدایت کرد: توصیف مجموعهٔ نقاط روی خطی که در آن سری فوریه همگرا نیست. این مسأله باعث می‌شود که وی به سراغ مکاتبات کانتور با ددکیند و سلسله مراتبهای نظریهٔ مجموعه‌ایِ بورل، لبگ، بِر، لوزین، و سوسلین برود. با خواندن این ماجرا به وضوح می‌توان دید چگونه مسائل ریاضی راهنمای پیشرویِ مکتب اصل موضوعی بودند.

مدی پس از آراستن صحنهٔ تاریخی توجه خود را به نزاعی که دراواین دههٔ این قرن در مورد اصل موضوع انتخاب درگرفته بود معطوف می‌کند و آن را در چشم‌انداز افلاطون‌گراییِ تلفیقی به این‌گونه می‌نگرد:

> بهترین نظریهٔ ما در مورد جهان متضمن حساب و آنالیز است، و بهترین نظریهٔ ما در مورد حساب و آنالیز متضمن نظریهٔ مجموعه‌ها به انضمام، لااقل، اصل انتخاب مشروط است. در خارج از قلمرو این نظریهٔ خالص کواین-پاتنمی، فردی که معتقد به افلاطون‌گراییِ تلفیقی است همان استدلالهای درونْ‌ریاضی را می‌یابد که گودل پیشنهاد کرده بود.

بسیاری از ریاضیدانان اصل انتخاب را بر این اساس توجیه می‌کردند که ریاضیات به آن نیاز دارد و علاوه بر آن، بسیاری از اثباتها را ساده می‌کند. مدی به جنبهٔ طنزآمیز این ماجرا اشاره می‌کند که با آنکه بر، بورل، و لبگ هر سه شدیداً مخالف این اصل جدید بودند خودشان در واقع اشکال گوناگونی از آن را ناخودآگاهانه بارها به‌کار برده بودند. از این‌رو آثارشان مقوِم استدلالی بود که تسرملو بر اساس اجتناب‌ناپذیری [اصل]انتخاب اقامه کرده بود.

این دعوای خصمانه بر سر مشروعیت [اصل] انتخاب از اختلاف میان دو تصور متفاوت از مجموعه سرچشمه می‌گرفت: در یک سو رهیافت منطقی فرگه قرار داشت که مبتنی بر مصداق یک مفهوم و تقسیم همه‌چیز به دو گروه طبق این یا آن قاعدهٔ معین بود. در سوی دیگر، رهیافت ریاضی کانتور قرار داشت که طبق آن، هر مجموعهٔ جدیدی طبق روشهای معینی از مجموعه‌های موجود ساخته می‌شود، که این به «سلسله مراتب تکرری مجموعه‌ها»ی تسرملو منجر می‌شود. می‌توانیم این دو رهیافت را به‌ترتیب رهیافت «از بالا به پایین» و رهیافت «از پایین به بالا» بخوانیم. بر، بورل، و لبگ که به تناظرهای داخواهانه به دیدهٔ ظن می‌نگریستند، برای بررسی توابع از رهیافت «از پایین به بالا» استفاده می‌کردند.

مدی مطالبی هم از یک سلسله نامه که میان این سه نفر آنالیزدان و مخالفشان آدامار مبادله شده، نقل می‌کند. در سال ۱۹۰۵، به دنبال استفادهٔ تسرملو از [اصل] انتخاب برای اثبات اصل خوشترتیبی، لبگ به آدامار می‌نویسد

> تمام دعوا بر سر این است (و این هم موضوع جدیدی نیست): آیا می‌توان وجود شیئی ریاضی را بدون تعریف آن اثبات کرد؟ .. به اعتقاد من ما فقط زمانی می‌توانیم نظام مستحکمی بسازیم که بپذیریم اثبات وجود هر شیء بدون تعریف آن محال است.

به چنین اصل معقولی چه کسی می‌توانست ایراد بگیرد؟ شخص آدامار! او می‌پذیرد که تسرملو راهی برای به دست دادن نگاشت لازم برای تابع انتخاب نداشته، اما تأکید می‌کند که مسألهٔ تعیین، امری کاملاً متمایز از مسألهٔ وجود است: «وجود . . . واقعیتی است مثل هر واقعیت دیگر.» امروزه اکثر ریاضیدانان موضع آدامار را در طرفداری از اصل انتخاب قبول دارند.

بحث بعدی در این فصل دربارهٔ چند مسألهٔ حل‌نشده در نظریهٔ مجموعه‌هاست، مانند فرضیهٔ پیوستار (که کانتور آن را می‌پذیرفت ولی گودل نمی‌پذیرفت). مدی چشم‌اندازهای گوناگون حل و فصل چنین مسائلی را به کمک «نظریه‌های رقیب» ــ که هر کدام با اضافه کردن اصل موضوع جدیدی به اصول موضوع متعارف یا استاندارد حاصل می‌شود ــ بررسی می‌کند.

او بعد از بحث نسبتاً تخصصی در مورد اینکه چه چیزی به کمک چه اصولی اثبات‌پذیر است، حرف جالبی در این‌باره می‌زند که چرا واقعگرایی تلفیقی به او کمک کرده است تا از «اطلاق شأن شهودی» به یک سلسله دلایل پیشنهادی برای توجیه اصل کاردینالهای بزرگ «سر باز زند»: به گفتهٔ مدی

دلیلش این است که «به اعتقاد من آنها از هر چیزی که به نحو موجهی قابل تحویل به یک بنیاد عصب‌شناختی و ادراکی باشد فراتر می‌روند . . . .»...

مدی پس از بررسی برخی از نظامهای اصل موضوعیِ رقیب یکدیگر [به‌عنوان چارچوب درخور] برای نظریهٔ مجموعه‌ها ــ که همهٔ آنها نمی‌توانند صادق باشند چون به نتایج مخالفی در مورد فرضیهٔ پیوستار می‌رسند ــ به طرح این مسأله می‌پردازد که کدام نظام محتملتر است که صادق باشد. این مسأله‌ای نیست که بتوان آن را از طریق اثبات صوری حل و فصل کرد، به این دلیل که انتخابِ اصولی که بتوان آنها را مبنای اثبات قرار داد، خودِ مسأله است. و در ضمن دیگر نمی‌توانیم روی این حرف قدیمی هم حساب کنیم که ما فقط اصولی را می‌پذیریم که بدیهی باشند، چون حتی اصول پذیرفته‌شدهٔ ZFC (یعنی نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو-فرنکل به اضافهٔ اصل انتخاب) «از چنین شأنی برخوردار نیستند» [پس]:

> به وضوح تبیین جدیدی از معرفت ما به اصول موضوع و نقش استدلالهای ریاضی غیرقیاسی[1] به‌عنوان شواهد صدق مورد نیاز است . . . . اما قبل از آنکه بتوانیم این پرسش را پاسخ گوییم که کدام اصلِ نامزدشده بهتر از بقیه از پشتیبانی چنین استدلالهایی برخوردار است، باید به پرسش مقدمتری بپردازیم مبنی بر اینکه آیا اصلاً چنین استدلالهایی اعتبار دارند، و اگر دارند چرا. ما باید بتوانیم توضیح دهیم که چگونه، چرا، و تا چه اندازه چنین استدلالهایی می‌توانند شواهدی برای صدق نتایجشان قلمداد شوند. تنها در آن موقع است که می‌توانیم تعیین کنیم کدام یک از آنها شاهد بهتری به‌شمار می‌آید.

نویسنده در فصل آخر به دفاع از واقعگراییِ نظریهٔ مجموعه‌ای باز می‌گردد و حملات نامگرایانی چون فیلد و چیهارا[2] را نقل می‌کند و پاسخ می‌گوید و افلاطون‌گرایی خود را با مونیسم، فیزیکالیسم و ساختارگرایی مقایسه می‌کند. نویسنده نشان می‌دهد که وجه مشترک، همهٔ این فلسفه‌های رقیبِ یکدیگر با واقعگرایی ریاضی عبارت است از این مسأله که چگونه می‌توان مدعیات نظامهای اصل موضوعی متفاوت را براساس روشهای غیرقیاسی ارزیابی کرد.

۶. صدق در ریاضیات

> به اعتقاد من دقیقاً
> ۱۵,۷۴۷,۷۲۴,۱۳۶,۲۷۵,۰۰۲,۵۷۷,۶۰۵,۶۵۳,۹۶۱,
> ۱۸۱,۵۵۵,۴۶۸,۰۴۴,۷۱۷,۹۱۴,۵۲۷,۱۱۶,۷۰۹,۳۶۶,
> ۲۳۱,۴۲۵,۰۷۶,۱۸۵,۶۳۱,۰۳۱,۳۹۶
> پروتون، و به همین تعداد الکترون در عالم وجود دارد.
> سر آرتر ادینگتن

طبعاً از چنین کتابی انتظار می‌رود که به‌نحوی با مسألهٔ صدق در ریاضیات دست و پنجه نرم کند: آیا هر حکم ریاضی یا صادق و یا کاذب است؟ اگر پاسخ مثبت است در آن صورت [این پرسش پدید می‌آید که] وقتی می‌گوییم فلان حکم ریاضی «صادق» است، در حالی‌که، فعلاً هیچ اثباتی برایش وجود ندارد، منظور ما چیست؟

اگر تجریدات ریاضی را به‌نحوی از انحا با جهان فیزیکی گره نزنیم پاسخ این پرسشها فقط به اعتقاد شخصی بستگی دارد. ولیْ مسألهٔ صدق برای واقعگرایی ریاضی مشکل خاصی پدید نمی‌آورد: ریاضیات دربارهٔ چیزهایی است که وجود دارند و مستقل از توانایی ما در شناخت آنها، همان هستند که هستند. هر حکم ریاضی دربارهٔ، مثلاً، اعداد حقیقی یا صادق است یا کاذب، و کار ما کشف همین مطلب است، ولی موفقیت یا شکست ما در این امر فرقی به حال صدق و کذب [این حکم] نمی‌کند. هر حکم ریاضی فقط و فقط وقتی صادق است که با واقعیت ریاضی مطابقت داشته باشد، همین و بس. منظور این نیست که اصلاً مسأله‌ای دربارهٔ صدق در ریاضیات وجود ندارد؛ چرا وجود دارد ولی به‌عنوان بخشی از این مسألهٔ فلسفی بزرگتر که: کدام احکام صادق‌اند؟

بنا بر واقعگراییِ نظریهٔ مجموعه‌ای، امری چون فرضیهٔ پیوستار در واقعیت یا صادق است یا کاذب. از آنجا که در تعیین این امر، شهود چندان کمک نمی‌کند، کار فرد واقعگرا جستجو و یافتن دستگاهی اصل موضوعی است که به حقیقت منجر شود.

ولی نکته دیگری هم هست که در کتاب مورد بحث قرار نگرفته است. گزاره‌ای که امروز معنادار به نظر می‌آید ممکن است با تحول علم معلوم شود علی‌الاصول پاسخ‌ناپذیر است (و در نتیجه از نظر علمی پرسشی بی‌معنا قلمداد شود)، یا آنکه معلوم شود که بر فرض غلطی در مورد واقعیت استوار است، یا آنکه اصلاً پرسش بی‌ربطی است. بارها اتفاق افتاده است که برنامه‌های تحقیقاتی عظیمی به این‌صورت به شکست انجامیده‌اند.

این امر در شاخه‌های گوناگون علم مکرراً به وقوع پیوسته است. در قرن گذشته مهمترین مسأله در زیست‌شناسی کشف ماهیت نیروی حیات بود، و در فیزیک کشف ماهیت اِتِر. امروزه دیگر طرح پرسش در مورد نحوهٔ تعیین همزمان موضع و اندازهٔ حرکت الکترون، یا دربارهٔ رخدادهای همزمان در کهکشانهای بسیار دور، یا در مورد مشخصات فروپاشی اتم بعدی یک نمونهٔ رادیم، معنایی ندارد. زمانی بود که بنابر علم موجود فقط پنج سیاره وجود داشت، بعد این پنج شد شش . . . گاهی اوقات عکس آنچه انتظار می‌رود به وقوع می‌پیوندد، چنانکه رؤیای منسوخ کیمیاگران در مورد تبدیل عناصر، از طریق فروپاشی رادیواکتیو و انفجار هسته‌ای تحقق پذیرفت.

در ریاضیات هم وقایع مشابهی اتفاق افتاده است:

- قبل از فیثاغورس اینکه هر نسبتی [عددی] گویاست یک حقیقت ریاضی به‌شمار می‌آمد.
- تغییر دیدگاه در مورد صدق و کذب اصل موضوع توازی اقلیدس را پس از قرون متمادی در نظر گیرید، و ضمناً به یاد داشته باشید که تا همین گذشتهٔ نه چندان دور، هندسه فقط یک مبحث اصل موضوعی صرف نبود، بلکه بهترین توصیف علمی ما از فضای فیزیکی به‌شمار می‌آمد.
- از زمان باستان تا اواخر قرن هفدهم همواره بحث پرشوری در مورد خط جریان داشته است که آیا خط از بینهایت کوچک تشکیل شده است یا از اجزای تقسیم‌ناپذیر.
- قضایای ناتمامیت گودل برنامهٔ هیلبرت را برای اثبات تمامیت و سازگاری ریاضیات در نطفه خفه کرد.

1. non-demonstrative 2. C. Chihara

• بینهایت کوچکها که برای یک قرن در ریاضیات بی‌اعتبار شده بودند، از طریق ابداع (یا کشف؟) آنالیز نااستانده توسط رابینسن، اعتبار خود را باز یافتند.

البته مختاریم به هر حکمی که از نظر علمی یا ریاضی فعلاً بی‌معنا قلمداد شده است، چنانچه قبول داشتن آن مایهٔ آسودگی خاطرمان باشد، باور داشته باشیم؛ ولی این امر تصمیمی شخصی است، و (فعلاً) غیر قابل توجیه علمی است ــ درست مانند آن است که به گزارهٔ «روح در غدهٔ صنوبری واقع است» ارزش صدق نسبت داده شود. اما کسی که بخواهد چنان باوری را به دیگران منتقل سازد باید توضیح دهد که معنایش چیست. [برای مثال]، اگر به من بگویید که این حکم صادق است ــ با آنکه هنوز اثبات‌ناپذیر است ــ که در بسط اعشاری π به‌ازای هر n، $n!$ رقم ۷ پشت سر هم وجود دارد، آنگاه باید منظور خود را از کاربرد [لفظ] «صادق» توضیح دهید.

معنی این حرف چه خواهد بود که بگوییم در زمانی در آینده، قضاوت ما در مورد فرضیهٔ پیوستار بر مبنای بهترین نظریهٔ ریاضی و علمیمان این خواهد بود که این فرضیه بی‌معنا و بی‌ربط است؟ البته گفتن چنین حرفی کار آسانی نیست، چون چنان اتفاق نظری بر معرفت جدیدی که فعلاً ناموجود است استوار خواهد بود. اما چند حالت قابل تصور است:

(الف) [ممکن است] ناهنجاریهای جدید و نگران‌کننده‌ای در دل نظریهٔ مجموعه‌ها کشف شود که ما را متقاعد کنند که برای معنادار شدن مجموعه‌ها توسل به این یا آن شکل از اصالت ساختار[1] مطلقاً ضروری است.

(ب) [ممکن است] عصب‌شناسان و روانشناسان به اندازهٔ کافی در مورد مجتمعهای سلولی و شناخت، علم پیدا کنند که بتوانند از نظر علمی به یقین بگویند که امکان ندارد فعالیتی در سلسله اعصاب متناظر با صدق یا کذب فرضیهٔ پیوستار وجود داشته باشد.

(ج) [امکان دارد که] نوعی دلایل سطح بالاتر نظری یا فرارشته‌ای[2] ما را قانع کنند که فرضیه پیوستار با نظرهای بسیار مقبولی در مورد واقعیت ریاضی تعارض دارد.

تمایل شخصی من به حالت (ب) است. اما به‌رغم فقدان چنین کشفیات زیست‌شناختی همچنان معتقدم که به احتمال زیاد توانایی ما در وضع تعاریف ریاضی دیگر فراتر از آن رفته است که تواناییهای مجتمعهای سلولی ما منجر به کشف واقعیتی در مورد فرضیهٔ پیوستار شود.

از نظر کسی که به واقعگرایی در ریاضیات معتقد است، حقیقت در مورد موجودات ریاضی درست به همان اندازهٔ حقیقت در مورد موجودات فیزیکی مسأله‌برانگیز است، ولی نه بیشتر. نظریه‌های ریاضی فعلی ما، مثل نظریه‌های فیزیکی ما، به‌تقریب درست‌اند؛ ولی دلیلی وجود ندارد که فکر کنیم این نظریه‌ها بی‌عیب‌اند یا هر پرسشی که امروز معنادار است همیشه معنادار خواهد ماند.

۷. نتایج

به اعتقاد من مشکلاتی که امروزه فلسفه در مورد ریاضیات کلاسیک با آنها مواجه است مشکلات واقعی نیستند؛ و معتقدم که تفاسیر فلسفی که از این‌سو و آن‌سو ارائه شده است تفاسیر غلطی هستند، [و در حقیقت] «تفسیر فلسفی» تنها چیزی است که ریاضیات به آن نیازی ندارد.

هیلری پاتنم

پروفسور مدی مبنای فلسفیِ دقیق و روشنی برای این احساس شهودیِ ریاضیدانان حرفه‌ای که ریاضیات دربارهٔ چیزهای واقعی است، ارائه کرده است. او با پذیرش استدلال کواین و پاتنم در این مورد که لااقل برخی از موجودات ریاضی واقعی‌اند چون [وجود آنها] برای فیزیک اجتناب‌ناپذیر است، همچنین نظر گودل را هم مبنی بر اینکه ما صاحب نوعی قوهٔ شهود ریاضی هستیم اقتباس می‌کند و آن را بر یک سلسله مکانیسمهای نظری ولی معقولِ عصب‌شناختی استوار می‌کند.

به نظر وی ما علاوه بر توانایی ادراک اشیای فیزیکی منفرد می‌توانیم مجموعه‌های آنها را هم به‌مثابهٔ مجموعه درک کنیم. تغییرات مختلف در مسیرهای عصبی ما به ما امکان می‌دهند تا به ادراکاتی شهودی دربارهٔ مجموعه‌ها و اعمال بنیادی مربوط به آنها برسیم، مثل ادراکاتی که دربارهٔ طول و خواص دیگر اشیای فیزیکی پیدا می‌کنیم. اعداد اصلی (یا کاردینالها) مجموعه نیستند بلکه خواص مجموعه‌ها به‌شمار می‌آیند. دستگاه اعداد حقیقی هم چارچوبی است که به‌منظور تبیین ادراکات شهودی ما در مورد پیوستگی ساخته شده است.

اما به محض اینکه به بخشهای نظریتر نظریهٔ مجموعه‌ها پا می‌گذاریم دیگر شهود برای توجیه واقعگرایی ریاضی کفایت نمی‌کند. در اینجا به «استدلالهای غیرقیاسی» نیاز داریم تا به کمک آنها بتوانیم اصول موضوع دور از ذهنی را توجیه کنیم یا بتوانیم به اعتبار شواهد ناشی از پیامدهای اثبات‌پذیر دو نظام اصل موضوعی، معقولیت دو نظام را بسنجیم و یکی را انتخاب کنیم. مدی در انتها می‌گوید:

> آنچه در اینجا ارائه شد قدم کوچکی در راستای چنان طرحی است. قدم بعدی، یعنی ارزیابی این شواهد، کاری است که پرداختن به آن جرأت می‌خواهد، ولی حرف من این بوده است که کسی که به واقعگرایی مبتنی بر نظریهٔ مجموعه‌ها معتقد است نه به تنهایی، بلکه همراه با جمع برجسته‌ای از متفکران با این مسأله مواجه می‌شود، متفکرانی که هر کدام نمایندهٔ بخشی از طیف وسیع فلسفه‌های ریاضی رقیب یکدیگر ــ از جمله ساختارگرایی، اصالت موجهات، و روایت معینی از نامگرایی ــ هستند.

من خواندن این کتاب اندیشمندانه و اندیشه‌برانگیز را به همه ریاضیدانانِ صاحب طبع فلسفی توصیه می‌کنم.

* * * * * *

• Morris W. Hirsch, *Bull. Amer. Math. Soc.* (*N.S.*), (1) **32** (1995) 137-148.

* موریس هرش، دانشگاه کالیفرنیا در برکلی، آمریکا

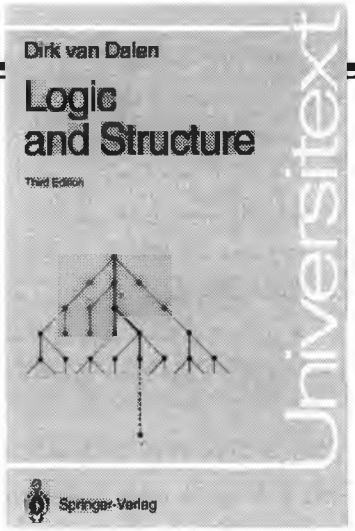
hirsch@math.berkeley.edu.

1. constructivism 2. extrinsic

نشر ریاضی، سال ۷، شمارهٔ ۲، صص ۶۶-۶۷

منطق و ساخت

محمد اردشیر*



***Logic and Structure*, Dirk van Dalen, third edition, Springer-Verlag (1994), viii+216 pp.**

ویراستِ سوم کتاب منطق و ساخت نوشتهٔ دیرک فان دالن با اضافه شدن فصل ۶، یعنی اثبات قضیهٔ نرمالسازی[1]، به‌کتاب مناسبی برای تدریس منطق ریاضی در دانشکده‌های ریاضی تبدیل شده است.

کتاب «مناسب» برای درس منطق ریاضی چه ویژگیهایی باید داشته باشد؟ جواب دادن به این سؤال مشکل است. تعیین مناسب بودن یا مناسب نبودن یک کتاب به عوامل زیادی بستگی دارد، اما مهمترین آنها را می‌توان به قرار زیر برشمرد:

۱. سلیقهٔ مدرس؛ ۲. توانایی علمی مدرس؛ ۳. «فرهنگ» منطق در جامعهٔ دانشگاهی؛ ۴. زمینهٔ دانش ریاضی و ارتباط با دیگر بخشهای علوم (مثلاً علوم نظری کامپیوتر)؛ ۵. روش تعلیمی مناسب؛ ۶. موضوعات مطرح‌شده در کتاب؛ ۷. نحوهٔ طرح موضوعات در کتاب؛ ۸. . . .

با توجه به شرایط فوق، بسیار بعید به نظر می‌رسد که یک کتاب بیگانه برای تدریس در دانشگاههای ایران کاملاً مناسب باشد. باید کتاب نویی با توجه به همهٔ شرایط و سنت منطقی دیرینهٔ ایران نگاشته شود. اما تا آن زمان از بین کتب متعدد در زمینهٔ منطق ریاضی مقدماتی، کتاب فان دالن کتاب مناسبی برای تدریس در درس منطق ریاضی است.

مطرح شدن دو موضوع خاص در کتاب فان دالن، آن را از سایر کتب مقدماتیِ منطق ریاضی متمایز کرده است. این دو عبارت‌اند از نظریهٔ برهان[2] و منطق شهودگرایانه[3]. کمتر کتاب مقدماتی در منطق می‌توان سراغ گرفت که این دو باب را داشته باشد. دلایل گوناگونی ممکن است علت این امر باشد؛ از جمله اینکه نظریهٔ برهان تا چندی پیش مبحثی حاشیه‌ای در منطق تلقی می‌شد. در چند سال اخیر به‌خاطر کاربرد نظریهٔ برهان در علوم نظری کامپیوتر، منطقدانان به کاوش در وجوه مختلف آن پرداخته‌اند. همین توجیه برای منطق شهودگرایانه نیز تا حدودی صادق است، به‌علاوه اینکه طرفداران منطق شهودگرایانه، به علت مبانی فلسفی خاصی که این منطق دارد، «در اقلیت‌اند». فرصت را مغتنم می‌شمارم و مختصری دربارهٔ این دو موضوع می‌گویم.

نظریهٔ برهان چیست؟

مثل همیشه ارائهٔ یک تعریف رسا برای بیان ماهیت یک علم با مشکلات توأم است. اما به قول ژیرار، نظریه‌پرداز برهان، نکات زیر را می‌توان به‌عنوان نکات ممیزهٔ نظریهٔ برهان در نظر گرفت[1]:

۱. نظریهٔ برهانْ قلب منطق است. نظریهٔ برهان منطقِ منطق است. این تعریف به‌طور ضمنی دلالت می‌کند که نظریهٔ برهان بخشی از منطق است که در آن، همان مسائل منطقی (هستی‌شناسانه[2]) که اجداد ما سعی در حل آنها داشته‌اند، هنوز مورد سؤال‌اند.

۲. نظریهٔ برهانْ مطالعهٔ وجه «درونی» منطق است، یعنی منطق از نظر نحو[3]. نظریهٔ برهانْ مدلسازی ریاضیِ حرکت غیرصوریِ فکرِ ریاضیدانان برای حل مسائل ریاضی است. این اولین ایدهٔ گنتسن[4] برای صورتبندی دستگاه استنتاج طبیعی[5] بود.

۳. موضوع کلی نظریهٔ برهانْ رابطهٔ بین اشیاء متناهی و نامتناهی است که به بیان دقیقتر به دو صورت است:

(الف) نمایش اشیاء (نامتناهی) ریاضی به‌وسیلهٔ ساختمانهای نحوی (متناهی)

(ب) اثبات احکامی دربارهٔ اشیاء (نامتناهی) به‌وسیلهٔ براهین (متناهی)

نکتهٔ آخر در باب نظریهٔ برهان اینکه مطالعهٔ وجه «درونی» منطق مستلزم آن نیست که نظریه‌پرداز از وجه «بیرونی» منطق، یعنی نظریهٔ مدلها و سمانتیک زبان غافل باشد (آیا می‌توان غافل بود؟)، بلکه از رهیافت شهودی آن نیز بهره می‌برد. من وجه «درونی» منطق را که در نظریهٔ برهان غالب است صورت «لاهوتی» منطق می‌دانم و نظریهٔ مدلها را صورت «ناسوتی» منطق می‌خوانم.

1. normalization 2. proof theory
3. intuitionistic logic

1. J. Y. Girard, *Proof Theory and Logical Complexity*, Bibliopolis, Napoli (1987).
2. ontological 3. syntax 4. Gentzen
5. natural deduction

دومین بخشی که کتاب فان دالن را از سایر کتب مقدماتی منطق متمایز می‌کند، فصلی کوتاه راجع به منطق شهودگرایانه است. شرح سادهٔ منطق شهودگرایانه کار چندان آسانی نیست. در جامعهٔ ما، حتی در بین آنهایی که آشنایی مختصری با شهودگرایی دارند، بدفهمیهای اساسی در این زمینه وجود دارد. کتاب منطق و ساخت که به‌وسیلهٔ یکی از رهبران این مکتب نوشته شده، می‌تواند در رفع این بدفهمیها بسیار مفید افتد. گرچه به سبب خصلت مقدماتی بودن کتاب، بحثهای اساسی منطق شهودگرایانه از قلمرو آن خارج است، ولی مفاهیم بنیادی برهان ساختنی[1] و اختلاف آن با برهان کلاسیک و تعبیر برهانی ادوات منطقی، معروف به تعبیر استاندارد براوئر-کولموگروف-هی‌تینگ[2]، به زبانی ساده بیان شده است و نحوهٔ کاربرد آن در توجیه بعضی قوانینِ منطقی نشان داده شده است.

حال به بررسی تفصیلی فصول مختلف کتاب می‌پردازیم. کتاب منطق و ساخت ۶ فصل دارد.

فصل اول به منطق گزاره‌ها می‌پردازد. در این فصل نظریهٔ مدلهای منطق گزاره‌ها و نظریهٔ برهان آن بر اساس استنتاج طبیعی بیان شده است. قضیهٔ تمامیتِ گودل اثبات می‌شود و تمام بودن ادوات منطقیِ منطق گزاره‌ها به نحو مطلوبی نشان داده می‌شود.

موضوع فصل دوم، منطق محمولات مرتبهٔ اول است. علاوه بر معرفی مفهوم صدق، مثالهای فراوانی از شاخه‌های مختلف ریاضی آورده شده که توانایی زبان منطق مرتبه اول را در بیان احکام آنها نشان می‌دهد.

فصل سوم راجع به تمامیت منطق محمولات مرتبه اول و موارد استعمال آن است. قضایای معمول لوونهایم-اسکولم (افزایشی و کاهشی)[3]، مدلهای غیراستاندارد، اصل‌پذیری متناهی دستگاهها، توابع اسکولم، نظریهٔ مقدماتی مدلها و بعضی موارد استعمال آنها در جبر مطرح شده است.

فصل چهارم، فصلی کوتاه در منطق مرتبه دوم است.

فصل پنجم به منطق شهودگرایانه اختصاص یافته است. در این فصل ریاضیات ساختنی[4] معرفی می‌شود و اختلاف منطق کلاسیک و منطق شهودگرایانه به زبانی ساده بیان می‌شود. تعبیر (نفی دوگانه)[5] گودل و گنتسن از منطقِ کلاسیک در منطق شهودگرایانه تعریف می‌گردد و رابطهٔ آنها با استفاده از تعبیر مذکور ثابت می‌شود. برای منطق شهودگرایانه، به دلیل سادگی در بیان و سنت، سمانتیک کریپکی[6] انتخاب شده و تمامیت منطق محمولات مرتبهٔ اولِ شهودگرایانه نسبت به مدلهای کریپکی (البته با «فرا ریاضیات[7]» کلاسیک) با استفاده از روش هنکین[8]، یعنی ساختن مدلها با ثوابت، ثابت می‌شود. در این فصل همچنین نظریهٔ مقدماتی مدلها برای منطق شهودگرایانه آورده شده و بعضی موارد استعمال آنها ذکر می‌گردد.

1. constructive proof

2. Brouwer-Kolmogorov-Heyting

3. Löwenheim-Skolem (upward, downward)

4. constructive mathematics

5. double negation translation

6. Kripke

7. metamathematics

8. Henkin

فصل آخر به اثبات قضیهٔ نرمالسازی، یعنی قلب نظریهٔ برهان اختصاص دارد. در این فصل هم به منطق کلاسیک و هم به منطق شهودگرایانه پرداخته می‌شود. گرچه همهٔ لمهای مربوط به قضیهٔ اصلی ثابت نمی‌شود، ولی خواننده می‌تواند به آسانی آنها را دنبال کند و دریابد. بعضی از موارد استعمال مهم قضیهٔ نرمالسازی نیز اثبات می‌گردد.

به نظر من این کتاب هم برای درس منطق ریاضیِ دورهٔ کارشناسی و هم به‌عنوان اولین درس منطق ریاضی در دورهٔ کارشناسی ارشد مناسب است. برای هر یک از اهداف مذکور در نظر داشتن شرایط زیر مفید است:

۱. برای دورهٔ کارشناسی، می‌توان از فصلهای ۵ و ۶ صرف‌نظر کرد و به‌جای آن روی فصول ۱ و ۲ و ۳ بیشتر تکیه کرد. مدرس می‌تواند این کار را با اضافه کردن تمرینات مناسب از کتب دیگر انجام دهد.

۲. برای دورهٔ کارشناسی ارشد، مطالب بیشتری در قسمتهای مختلف، چه به‌عنوان موضوعات جدید و چه به‌عنوان تمرین، بسته به سلیقه مدرس، می‌توان گنجاند.

در خاتمه، کتاب دارای اغلاط چاپی است. فهرستی از آنها را (که شامل همهٔ آنها نیست ولی شامل مواردی است که ممکن است خواننده را دچار سردرگمی کند) در تابلو زیر می‌آوریم.

ص. 24		سطرهای ۹-۱۶ حذف شود
ص. 31	+۲۴	(n) به (a_n) تبدیل شود
ص. 57	+۱۰	$< 2; -; 0 >$
ص. 64		در لم 2.3.13 عبارت "in the scope of" تبدیل شود به "bound by"
ص. 65		همان تصحیح بالا در لم 2.3.15
ص. 74	+۶	$(\varphi[x/z])[\bar{a}\ /x]$
	+۷	$(\varphi[y/z])[\bar{a}\ /y]$
ص. 78		بندهای تمرین 9 از (i) تا (v) شماره‌گذاری شود.
ص. 104	+۴	"A theory T"
	−۱۶	"Propositional Logic P′"
ص. 107	−۱۲	پس از "$\varphi(t)$" بیاید "$\Longleftrightarrow T_m \vdash \varphi(t)$"
ص. 112	+۲	در اثبات قضیهٔ 3.2.3 κ تبدیل شود به κ'
ص. 142	+۲	اندیس بالای * به اندیس بالای sk تبدیل شود
	+۴	اندیس بالای $sk*$ به sk تبدیل شود
	+۶	"Theorem" به "Definition" تبدیل شود

* * * * * *

* محمد اردشیر، دانشگاه صنعتی شریف

ardeshir@rose.ipm.ac.ir

مسألهٔ کاپلانسکی•

تامس یخ

***An introduction to independence for analysts*, H. G. Dales and W. H. Woodin, London Mathematical Society lecture note series, vol. 115, Cambridge University Press (1987), xiii + 241 pp.**

هدفِ اعلام‌شدهٔ این کتابْ توضیحِ روشِ اظهار[1] برای آنالیزدانان است. کاری که کتاب انجام می‌دهد عرضهٔ شرحی خودکفا از کاربردی از اظهار در مورد مسأله‌ای در جبرِ باناخ است. برای منطقدانانْ این کتاب فرصتِ مغتنمی فراهم می‌آورد تا با بعضی مسائل و روشهای آنالیزِ تابعی آشنا شوند.

تاریخِ مسألهٔ بحث‌شده در این کتاب به اثرِ ۱۹۴۸ ایروینگ کاپلانسکی باز می‌گردد. این پرسش مطرح شد که آیا ساختارِ جبریِ $C(X)$ ساختارِ توپولوژیکِ آن‌را معین می‌کند یا نه. به بیان دقیقتر: فرض کنید X یک فضای هاؤسدرفِ فشرده باشد، و $C(X)$ را مجموعهٔ همهٔ توابعِ پیوستهٔ مختلط‌مقدار روی X بگیرید. مجموعهٔ $C(X)$ (با اعمالِ نقطه‌ای) یک جبرِ جابه‌جایی است و یک نُرمِ $|f| = \sup\{|f(x)|\}$، نرمِ یکنواخت، دارد. (چون متریکِ تعریف‌شده توسطِ این نرمْ کامل است، $C(X)$ یک جبرِ باناخ است.) پرسشْ این است که آیا هر نرمِ جبری روی $C(X)$ با نرمِ یکنواختْ معادل است یا نه.

چون هر نرمِ کامل روی $C(X)$ با نرمِ یکنواختْ معادل است، پرسشْ این می‌شود که آیا جبرِ $C(X)$ نرمی ناکامل می‌پذیرد یا نه. به‌سادگی ثابت می‌شود که هر نرمِ ناکامل روی $C(X)$ متناظر است با یک همریختی از جبرِ $C(X)$ به توی یک جبرِ باناخِ دیگر که (به‌عنوان نگاشتی از یک فضای متریک به فضای متریکِ دیگر) پیوسته نیست. پس مسأله این است که آیا همریختیِ ناپیوسته‌ای از $C(X)$ به توی یک جبرِ باناخ وجود دارد یا نه.

عاقبت در ۱۹۷۶ دیلز[2] و استِرلی[3] با مفروض گرفتنِ فرضیهٔ پیوستار همریختیهای ناپیوسته‌ای ساختند. این ساختْ در کتاب عرضه نشده است، پس بگذارید تنها به مسألهٔ وجود نداشتنِ این‌گونه همریختیها بپردازم.

جبرِ c_0 متشکل است از همهٔ دنباله‌های حقیقی‌مقداری که به صفر می‌گرایند. کارهای دههٔ ۱۹۶۰ باده[4]، کرتیس[5]، و جانسن این شرطِ لازم و کافی را برای وجودِ یک همریختیِ ناپیوسته به دست داد: یک فراپالایهٔ U روی $\mathbb{N}$ و یک همریختیِ غیربدیهی از c_0/U به توی یک جبرِ باناخِ رادیکال وجود دارد.

۱. با توجه به معنایی شهودی که از تعریف نسبت forcing و حکم p forces φ بر می‌آید، در مقابل "forcing" واژهٔ «اظهار» را به‌کار برده‌ایم ـ شاپور اعتماد و غلامرضا برادران خسروشاهی [در ترجمهٔ کتابی با عنوان فارسی منطق ریاضی چیست؟] «سبب شدن» اصطلاح کرده‌اند.

2. G. Dales 3. G. Esterle 4. W. Bade
5. P. Curtis

ساده‌سازیِ نهاییِ مسأله از ژودین است و یک شرطِ لازمِ صرفاً مجموعه‌نگَریک[1] به دست می‌دهد. فرض کنید f و g توابعی در $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ باشند. می‌نویسیم $f <_F g$ اگر، غیر از تعدادی متناهی، به‌ازای هر n، $f(n) < g(n)$. اگر g تابعی باشد که به بینهایت گراید، مجموعهٔ همهٔ fهایی را که $f(n)$ به صفر می‌گراید و $g(n) - f(n)$ نیز چنین است (و لذا $f <_F g$) با $\langle g\rangle$ نشان می‌دهیم. اگر U فراپالایه‌ای روی $\mathbb{N}$ باشد آنگاه $(\langle g\rangle/U, <_U)$ زیرمجموعه‌ای از فراپالایهٔ $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/U, <_U)$ است (و مجموعه‌ای خطیْ‌مرتب است). فرض کنید که (به‌ازای یک فضای هاؤسدرفِ فشردهٔ X) همریختیِ ناپیوسته‌ای از $C(X)$ به توی یک جبرِ باناخ وجود داشته باشد. در این صورت یک تابعِ غیرنزولیِ بیکرانِ g در $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$، یک فراپالایهٔ غیربدیهیِ U روی $\mathbb{N}$، و یک نگاشتِ نشاننده از $(\langle g\rangle/U, <_U)$ به توی $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, <_F)$ وجود دارد.

در پیِ تقریرِ ژودین از شرطِ لازم که در بالا ذکر شد، سالووی[2] ثابت کرد که مدلی برای ZFC هست که در آن شرطِ ژودین برقرار نیست. پس وجودِ همریختیهای ناپیوسته در نگرهٔ مجموعه‌ها اثبات‌ناپذیر است. بعداً ژودین اثباتِ دیگری برای استقلال یافت، که در این کتاب عرضه شده است.

خواننده‌ای که با اظهار آشنا باشد در دنبال کردنِ اثباتِ استقلالْ هیچ مشکلی نخواهد داشت: مدل، تظریفِ مدلِ (اظهار مکرری) برای اصل موضوعِ مارتین (MA) است. در واقع MA در مدلِ ژودین برقرار است. به بیانی بسیار تقریبی، خودِ ساختْ فصلهای ۶ و ۸ کتاب را به خود اختصاص داده است؛ فصلهای ۴، ۵، و ۷ «درآمدی به استقلال برای آنالیزدانان»، و فصلهای ۱، ۲، و ۳ درآمدی به آنالیز برای منطقدانان است. توصیه می‌کنم که منطقدانان (که احتمالاً خوانندگانِ معرفیِ من آنان‌اند) کتاب را بخوانند؛ امیدوارم آنالیزدانان نیز چنین کنند.

ترجمهٔ ک. ل.

******

• Thomas Jech, *The Journal of Symbolic Logic*, **55** (1990), 361-362.

۱. set-theoretic؛ معادلِ پیشنهادیِ واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار [تألیفِ مشترکِ انجمن ریاضی ایران و مرکز نشر دانشگاهی] برای 'theory'، «نظریه» است، که تقید به استفاده از آن در موردِ واژه‌هایی چون 'set-theoretic' و 'ring-theoretical' به دشواری می‌انجامد. با استفاده از «نگره» به جای «نظریه» و با به‌کار گرفتن پسوندِ پهلویِ «ـنیک» می‌توان این مشکل را حل کرد و مثلاً این دو واژه را به ترتیب به «مجموعه‌نگریک» و «حلقه‌نگریکانه» برگرداند. پسوندِ «ـنیک» در فارسیْ پیشینهٔ کاربرد طولانی دارد (مثلاً در واژه‌های «تاریک» و «نزدیک»)، و در روزگارِ ما صاحب‌نظرانی چون پرویز خانلری، میرشمس‌الدین ادیب‌سلطانی، محمدرضا شفیعی کدکنی، و داریوش آشوری آن را برای ساختنِ واژه‌های نو به‌کار بسته‌اند. اصطلاح «مجموعه‌نگریک» ساختهٔ آقای دکتر ادیب‌سلطانی است و مترجمْ از کمکِ ایشان سپاسگزار است.

2. Solovay

چند کاربردِ منطق در جبر*

اولریخ فِلْگْنِر

Saharon Shelah. Infinite abelian groups, Whitehead problem and some constructions. *Israel journal of mathematics*, vol. 18 (1974), pp. 243-256.

Saharon Shelah. A compactness theorem for singular cardinals, free algebras, Whitehead problem and transversals. Ibid., vol. 21 (1975), pp. 319-349.

Saharon Shelah. Whitehead groups may be not free, even assuming CH, I. Ibid., vol. 28 (1977), pp. 193-204.

Saharon Shelah. Whitehead groups may not be free, even assuming CH, II. Ibid., vol. 35 (1980), pp. 257-285.

Saharon Shelah. On uncountable abelian groups. Ibid., vol. 32 (1979), pp. 311-330.

Shai Ben-David. On Shelah's compactness of cardinals. Ibid., vol. 31 (1978), pp. 34-56 and p. 394.

Howard L. Hiller and Saharon Shelah. Singular cohomology in *L*. Ibid., vol. 26 (1977), pp. 313-319.

Howard L. Hiller, Martin Huber, and Saharon Shelah. The structure of *Ext*$(A,\mathbb{Z})$ *and* $V = L$. *Mathematische Zeitschrift*, vol. 162 (1978), pp. 39-50.

Saharon Shelah. The consistency of *Ext*$(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$. (1981), pp. *Israel journal of mathematics*, vol. 39 74-82.

این سلسلهٔ مهمی از مقالات است که در آنها روشهای مجموعه‌نِگَریک[1] در نگرهٔ گروههای آبلی به‌کار بسته شده است. شش مقالهٔ نخست بیشتر به شرایطی برای κ ـ آزاد بودن[2]، مثلاً بر حسبِ $\mathrm{Ext}(G,\mathbb{Z})$، و سه مقالهٔ آخر به‌نحوِ کلیتری به ساختارِ گروهِ $\mathrm{Ext}(A,B)$ پرداخته‌اند. بنابراین مطالعهٔ گروهِ توسیعها، $\mathrm{Ext}(A,B)$، وجهِ مشترکِ هر نه مقاله است.

اگر A زیرگروهی از گروهِ آبلیِ G باشد و $B = G/A$، آنگاه G را توسیعی از A توسطِ B می‌خوانند. توسیعِ G با A و B و یک به اصطلاحْ عاملْ‌مجموعه[1]ی (به مفهومِ مطرح‌شده توسطِ اُ. شرایر[2]) $f : B \times B \to A$ کاملاً مشخص می‌شود. دو عامل‌مجموعه را که گروههای آبلیِ A ـ یکریختی ایجاد کنند معادل می‌خوانند. $\mathrm{Ext}(B,A)$ مجموعهٔ همهٔ رده‌های هم‌ارزیِ این‌گونه است و خودْ گروهی آبلی است، که گروهِ توسیعهای A توسطِ B خوانده می‌شود. آشکارا $\mathrm{Ext}(B,A) = \{0\}$ به این معناست که $G = A \oplus B$ تنها گروهِ آبلیی است که توسیعی از A توسطِ B است.

اگر $\mathrm{Ext}(B,A) = \{0\}$ به‌ازای همهٔ Aها برقرار باشد، آنگاه B لزوماً آزاد ـ آبلی است. آیا در این مورد اختیارِ $\mathbb{Z}$ به‌عنوانِ یگانه محک برای آزاد بودنِ B کافی است؟ این مسألهٔ ژایتهد است که در ۱۹۵۲ مطرح شده است: آیا $\mathrm{Ext}(B,\mathbb{Z}) = \{0\}$ ایجاب می‌کند که B آزاد ـ آبلی باشد؟ ستاین[3] در ۱۹۵۱ نشان داده است که پاسخْ مثبت است مشروط بر اینکه B شمارا باشد. حالتِ $|B| = \aleph_1$ در مقالهٔ نخست بررسی شده است. شِلاه ثابت می‌کند که مسألهٔ ژایتهد از اصولِ موضوعِ معمولِ نگرهٔ مجموعه‌ها مستقل است. در واقع از $\mathrm{ZF} + V = L$ نتیجه می‌شود که هر گروهِ آبلیِ B از مرتبهٔ $\aleph_1$ که در $\mathrm{Ext}(B,\mathbb{Z}) = \{0\}$ صدق کند آزاد ـ آبلی است (این حتی در مورد گروههای آبلیِ ناشمارا با عدد اصلیِ بقاعده[4] نیز درست است). اما از اصل موضوعِ مارتین، MA، و $2^{\aleph_0} \neq \aleph_1$ نتیجه می‌شود که گروه آبلیِ Bای از مرتبهٔ $\aleph_1$ هست که $\mathrm{Ext}(B,\mathbb{Z}) = \{0\}$ ولی B آزاد ـ آبلی نیست. این قضایا معلوم می‌کند که شرطِ جبریِ $\mathrm{Ext}(B,\mathbb{Z}) = \{0\}$ تنها در جنبِ مفروضاتی در موردِ اندازهٔ عالَمِ مجموعه‌نگریکِ V (یعنی اینکه این عالَمْ «دراز» است یا «چاق») است که به تمامی معنا می‌یابد. می‌خواهم این را با کمی تفصیلِ بیشتر توضیح دهم.

فرض کنید B گروه آبلیِ غیرآزادی از مرتبهٔ $\aleph_1$ باشد. می‌خواهیم گروهِ آبلیِ Cای بسازیم که $\mathbb{Z} \subset C$ و $B \cong C/\mathbb{Z}$، ولی C جمعِ مستقیمِ $\mathbb{Z} \oplus B$ نباشد. پس، اگر $\pi : C \to B$ نشانهٔ همریختیِ (متعارفِ) پوشا باشد، آنگاه باید هیچ «همریختیِ شکافنده» $\sigma : B \to C$ای وجود نداشته باشد که $\pi\sigma = \mathrm{id} \restriction B$. C مرتبهٔ $\aleph_1$ خواهد داشت و لذا می‌تواند در تعدادِ $\aleph_1$ مرحله ساخته شود. اما در حینِ ساختن باید مطمئن شویم که همهٔ $2^{\aleph_1}$ نگاشت از B به توی C قابلیتِ همریختیِ شکافنده بودن را از دست می‌دهند. چون $\aleph_1 < 2^{\aleph_1}$، به نظر ممکن نمی‌رسد عملِ ساختنی از نوعِ «در هر مرحله یک همریختیِ شکافنده را از بین ببرید» انجام داد. نکته این

1. factor set 2. O. Schreier 3. K. Stein
4. regular

۱. به پانوشت ۱ در ستون دوم صفحهٔ ۶۸ نگاه کنید.

2. κ-freeness

است که با استفاده از اصلِ ترکیباتیِ پنسین، $\diamondsuit\omega_1$، می‌توان اوضاع را طوری ترتیب داد که چنین شیوه‌ای واقعاً کارا باشد!

در مقالهٔ نخستِ شِلاه این مطلبْ حل‌ناشده ماند که آیا $V = L$ مسألهٔ ژایتهد را در موردِ گروههای آبلیِ ناشمارای Bای هم که $|B|$ عدد اصلیِ تکینی باشد حل می‌کند یا نه. این مسأله در مقالهٔ دومِ شلاه حل شده است. در اینجا نویسنده مفهومِ مجردی از آزاد بودن و آزاد بودنِ نسبی (آزاد بودن روی یک زیرساختار) را معرفی می‌کند. قضیهٔ فشردگیِ عنوانْ در حالتِ خاصِ گروههای آبلی می‌گوید که اگر B گروهی آبلی با مرتبهٔ λ باشد که λ عدد اصلیِ تکینی است، و اگر همهٔ زیرگروههای با عدد اصلیِ کمترْ آزاد ـ آبلی باشند، آنگاه خودِ B آزاد ـ آبلی است. اثبات با استقرایی نسبتاً پیچیده انجام می‌شود و متضمنِ زیرساختارهای بنیادیِ عالمهای مجموعه‌نگریک است. سپس از $V = L$ نتیجه می‌شود که هر گروه آبلی ناشمارای B (با مرتبهٔ بقاعده یا تکین) که در $\mathrm{Ext}(B,\mathbb{Z}) = \{0\}$ صدق کند آزاد ـ آبلی است.

مقالهٔ دومِ شلاه حاوی کاربردهای دیگری از قضیهٔ فشردگیِ او، مثلاً در موردِ قاطعها، اعدادِ رنگی، و گرافها، نیز هست. کاربردهای دیگری در موردِ گونه‌های ترتیبی[1]ای که اجتماعِ تعداد شمارایی خوشترتیبی نیستند در مقالهٔ شای بن‌دیوید عرضه شده است. این مقاله حاویِ چند قضیهٔ استقلال در مورد فشردگی برای اعداد اصلیِ بقاعده نیز هست.

پرسشی طبیعی این است که آیا مسألهٔ ژایتهد را می‌توان تنها بر پایهٔ فرضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ پیوستار (GCH) حل کرد یا نه. این پرسش در مقاله‌های سوم و چهارمِ شلاه بررسی شده است، که در آنها او مسألهٔ ژایتهد را به یک مسألهٔ صرفاً ترکیباتیِ «رنگ‌آمیزیِ دستگاههای نردبانی»[2] تحویل می‌کند. اگر δ عدد ترتیبیِ حدیی باشد و اگر η_δ ωـ دنباله‌ای صعودی با حدِ δ باشد، آنگاه (با به‌کار گرفتنِ اصطلاحِ اِکلوف[3]) η_δ را یک نردبان روی δ می‌خوانیم. اگر S مجموعه‌ای دلخواه از اعدادِ ترتیبیِ حدی باشد، دستگاهی نردبانی روی S یک خانوادهٔ فهرست‌شدهٔ $\eta = \{\eta_\delta | \delta \in S\}$ است که هر η_δ یک نردبان روی δ است. شِلاه اصلِ ذیل را معرفی می‌کند که می‌گوید که دستگاههای نردبانیِ رنگ‌شده یک [تابعِ] یکنواخت‌ساز دارند. (UCLS): یک زیرمجموعهٔ مانای هم‌مانا[4] از ω_1 و یک دستگاهِ نردبانیِ $\eta = \{\eta_\delta | \delta \in S\}$ روی S وجود دارد که به‌ازای هر خانوادهٔ فهرست‌شدهٔ $c = \{c_\delta | \delta \in S\}$ از توابعِ $c_\delta : \omega \to 2 = \{0,1\}$، یک تابعِ $f : \omega_1 \to 2$ هست که $S \subseteq \{\alpha \in \omega_1 | (\exists n_\alpha \in \omega)(\forall n \geqslant n_\alpha) f(\eta_\alpha(n)) = c_\alpha(n)\}$. خانوادهٔ c را می‌توان یک رنگ‌آمیزیِ η انگاشت و f را یک یکنواخت‌سازِ آن رنگ‌آمیزی. در مقالهٔ سومِ شلاه (بخشِ I) با روشِ اظهارِ مکرر[5] نشان داده شده است که UCLS با ZF + GCH سازگار است، اما هنوز شبیهِ $\mathrm{MA} + 2^{\aleph_1} \neq \aleph_1$ است و از $V = L$ خیلی دور است. به‌ویژه از UCLS نتیجه می‌شود که یک گروه آبلیِ Bی صادق در $\mathrm{Ext}(B,\mathbb{Z}) = \{0\}$ وجود دارد که آزاد ـ آبلی نیست. مقالهٔ چهارم (بخش II) حاویِ بررسیِ روشمندانه‌ای از دستگاههای نردبانیِ دارای خاصیتِ یکنواخت‌سازی، چند تعمیم، و کاربردهای دیگری در نگرهٔ گروههای آبلی است.

در مقالهٔ پنجم که دربارهٔ گروههای آبلیِ ناشماراست، تعدادی از مسائلِ مطرح‌شده توسطِ نونکه[1] حل شده است. به‌ویژه شلاه، با فرضِ $\mathrm{MA} + 2^{\aleph_1} \neq \aleph_1$، نشان می‌دهد که گروههای ژایتهد (یعنی گروههای Bای که در $\mathrm{Ext}(B,\mathbb{Z}) = \{0\}$ صدق می‌کنند) دقیقاً گروههای $\aleph_1$ـ هم‌تفکیک‌پذیر[2]اند (یعنی گروههای Bای که در $\mathrm{Ext}(B,\mathbb{Z}^{(\omega)}) = \{0\}$ صدق می‌کنند). به‌علاوه، او، با فرضِ $V = L$، ثابت می‌کند که گروههای به‌طور موروثیْ تفکیک‌پذیر (یعنی گروههای آبلیِ G با این خاصیت که هر زیرمجموعهٔ متناهیِ هر زیرگروهِ دلخواهِ H از G در جمعوندِ مستقیمِ آزادی از H مشمول است) دقیقاً گروههای آزاد ـ آبلی‌اند.

در مقالهٔ هفتم دربارهٔ همانستگیِ تکینْ نوشتهٔ هیلر و شِلاه، نشان داده شده است که تحت فرضِ $V = L$ هیچ گروه آبلیِ Gای نیست که $|\mathrm{Ext}(G,\mathbb{Z})| = \aleph_0$. نتیجه می‌شود که، تحتِ $V = L$، هیچ فضای توپولوژیکِ X و هیچ عدد صحیحِ $n \geqslant 2$ وجود ندارد که $H^n(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}$، که در آن $H^n(-,\mathbb{Z})$ همانستگیِ تکینِ معمولی با ضرایبِ صحیح را نشان می‌دهد.

این قضایا در مقالهٔ هشتم نوشتهٔ هیلر، هوبر، و شلاه تعمیم داده شده است؛ در این مقالهٔ ساختارِ $\mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z})$ به‌ازای گروههای آبلیِ بی‌تابِ A بررسی شده است. در این حالتْ $\mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z})$ یا بدیهی (یعنی $\{0\}$) است یا یک گروهِ تقسیم‌پذیر و لذا مجموعِ مستقیمی از، مثلاً، $\nu_0(A)$ نسخه از $\mathbb{Q}$ و $\nu_p(A)$ نسخه از گروهِ شبه‌دوریِ پروفر[3] $Z(p^\infty)$. قضیهٔ اصلی می‌گوید که، تحتِ $V = L$، $\nu_0(A)$ یا 0 است (اگر A آزاد ـ آبلی باشد) یا به شکلِ 2^κ (اگر A آزاد ـ آبلی نباشد) و به‌ازای همهٔ اعدادِ اولِ p، $\nu_p(A) \leqslant \nu_0(A)$.

مقالهٔ آخر، نوشتهٔ شلاه، حاوی این قضیهٔ نسبتاً شگفت‌انگیز است که این مطلب با ZF + GCH سازگار است که به‌ازای گروه آبلیِ بی‌تابِ Aای، $|\mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z})| = \aleph_0$. به عبارتِ دقیقتر، نشان داده شده است که به‌ازای هر گروه آبلیِ تقسیم‌پذیرِ شمارای نامتناهیِ دلخواهِ K، این مطلب با ZFC + GCH سازگار است که گروه بی‌تابِ آبلیِ Aای هست که $\mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z}) \cong K$. اثبات در دو مرحله انجام می‌شود. در مرحلهٔ نخستْ دستگاههای نردبانی و اظهار برای ساختِ یک گروهِ بی‌تابِ آبلیِ G به‌کار گرفته می‌شود که $\mathrm{Ext}(G,\mathbb{Z})$ شامل K باشد. در مرحلهٔ دومْ اعضای نامطلوبِ $\mathrm{Ext}(G,\mathbb{Z})$ با استدلالی که از اظهارِ مکرر استفاده می‌کند «کشته» می‌شوند.

ترجمهٔ ک. ل.

• Ulrich Felgner, *The Journal of Symbolic Logic*, **51** (1986), 1068-1070.

1. order types 2. coloring ladder systems 3. P. Eklof
4. stationary, co-stationary 5. iterated forcing

1. R. J. Nunke 2. $\aleph_1$-coseparable 3. Prüfer

از انتشارات گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر

مرکز نشر دانشگاهی

آشنایی با اقتصادسنجی
اسکار لانگه
ترجمهٔ محمدحسین طوفانی نژاد

آشنایی با تاریخ ریاضیات (دوجلد)
هاورد و. ایوز
ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل

آشنایی با تحقیق در عملیات (جلداول)
حمدی طه
ترجمهٔ محمد باقر بازرگان

آشنایی با توپولوژی و آنالیز نوین
ج. ف. سیمونز
ترجمهٔ اسدالله نیکنام

آشنایی با دانش کامپیوتر
توماس بارتی
ترجمهٔ ابراهیم نقیب‌زادهٔ مشایخ،
داریوش موسوی‌زاده

آشنایی با فرایندهای تصادفی
هوئل، پورت، استون
ترجمهٔ محمدحسین افقهی

آشنایی با منطق ریاضی
هربرت ب. اندرتون
ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی،
محمدرجبی طرخورانی

آشنایی با نظریهٔ اعداد
ویلیام و. آوامز، اری جوئل گولدشتین
ترجمهٔ آدینه محمد نارنجانی

آشنایی با نظریهٔ گروهها
والتر لدرمن
ترجمهٔ محمدحسین بیژن‌زاده

آمار ریاضی
جان فروند، راناد والپول
ترجمهٔ علی عمیدی، محمد قاسم وحیدی اصل

آمار کاربردی
جان نتر، ویلیام واسرمن، ویتمور
ترجمهٔ علی عمیدی

آمار مقدماتی (دو جلد)
تامس اچ. ووناکات، راناد جی. ووناکات
ترجمهٔ محمدرضا مشکانی

آمار ناپارامتری کاربردی
کنوور
ترجمهٔ سیدمقتدی هاشمی پرست

آموزش تدریس ریاضیات دبیرستانی
اتو س. بسلر، جان ر. کولب
ترجمهٔ جواد همدانی‌زاده

آنالیز عددی مقدماتی به شیوهٔ الگوریتمی
سموئل د. کونت، کارل دوبور
ترجمهٔ سراج‌الدین کاتبی

آنالیز مختلط و کاربردهای آن
ریچارد ا. سیلورمن
ترجمهٔ علی عمیدی، خلیل پاریاب

استنباط آماری ناپارامتری
جین دیکنسن گیبنز
ترجمهٔ عبدالرحیم شهلایی، علی عمیدی

اصول آماری در طرح آزمایشها (دو جلد)
ب. واینر
ترجمهٔ زهرهٔ سرمد، مهتاش اسفندیاری

اصول آنالیز حقیقی
ربرت جی بارتل
ترجمهٔ جعفر زعفرانی

اعداد مختلط
والتر لدرمان
ترجمهٔ علی‌اکبر مهرورز

برنامه‌نویسی سیستم برای کامپیوترهای شخصی (PC) (دوجلد)
مایکل تیشر
ترجمهٔ امیر صادقی

تابع گاما
امیل آرتین
ترجمهٔ سعید ذاکری

تحقیقی در آثار ریاضی ابوریحان بیرونی (تحریری نوین از بیرونی نامه)
ابوالقاسم قربانی

تحلیل واریانس و طرح آزمایشها
د. دوگه، م. ژیرو
ترجمهٔ علی مشکانی

توابع متغیر مختلط
د. ا. تال
ترجمهٔ مجید محمدزاده

توپولوژی، نخستین درس
جیمز ر. مانکرز
ترجمهٔ یحیی تابش، ابراهیم صالحی،
جواد لآلی، نادر وکیل

جبر
روژه گودمان
ترجمهٔ محمدرضا سلطانپور،
وهاب داورپناه

جبر خطی
مایکل اونان
ترجمهٔ علی‌اکبر محمدی حسن‌آبادی

جبر خطی
کنت هافمن، ری‌کنزی
ترجمهٔ جمشید فرشیدی

جبر ماتریسها برای علوم زیستی و کاربردهای آماری آن
س. سیرل
ترجمهٔ جلال داودزاده

حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد اول)
تام م. آپوستل
ترجمهٔ علیرضا ذکائی، مهدی رضائی دلفی،
علی‌اکبر عالم‌زاده، فرخ فیروزان

حساب دیفرانسیل وانتگرال (برای رشته‌های بازرگانی، زیست‌شناسی و علوم اجتماعی)
د. ج. کرودیس، س. م. شلی، ب. و. ویلر
ترجمهٔ ابوالقاسم لاله

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی
(دو جلد، جلد اول در دو قسمت)
جورج توماس، راس فینی
ترجمهٔ مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، علی کافی

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی
(دو جلد، هر جلد در دو قسمت)
لوئیس ایتهلد
ترجمهٔ مهدی بهزاد، محسن رزاقی، سیامک کاظمی، اسلام ناظمی

روشهای آنالیز حقیقی
ریچارد گولد برگ
ترجمهٔ محمدعلی پورعبدالله‌نژاد، باقر نشوادیان

روشهای بنیادی اقتصاد ریاضی
آلفاسی. شیانگ
ترجمهٔ مجید کوپاهی

ریاضیات مهندسی پیشرفته
اروین کرویت‌سیگ
ترجمهٔ عبدالله شیدفر، حسین فرمان

زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی، از سدهٔ سوم تا سدهٔ یازدهم هجری
ابوالقاسم قربانی

سری فوریه
ی. ن. اسندون
ترجمهٔ بتول جذبی

طراحی منطقی دستگاههای رقمی
آرتور د. فریدمن
ترجمهٔ فرهاد صاحبان، شهلا طباطبایی

علم و هنر شبیه‌سازی سیستمها
رابرت شانون
ترجمهٔ علی‌اکبر عرب‌مازار

فرمولهای ریاضی
آ. گ. تسیپکین، گ. گ. تسیپکین
ترجمهٔ و. روگوف

کاشانی نامه (احوال و آثار غیاث‌الدین جمشید کاشانی)
ابوالقاسم قربانی

مبانی اقتصادسنجی
یان کستا
ترجمهٔ کامبیز هژبر کیانی

مبانی ریاضیات
ایان استیوارت، دیوید تال
ترجمهٔ محمد مهدی ابراهیمی

مبانی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
ایان اسندون
ترجمهٔ مرتضی شفیعی موسوی، علی کدخدایی

مبانی نظریهٔ تصمیم
برنارد و. لیندگرن
ترجمهٔ عبدالرحمن ستاره‌زادهٔ آذری، علی عمیدی

مبانی نظریهٔ صف
دانلدگراس، کارل م. هریس
ترجمهٔ غلامحسین شاهکار

متغیرهای مختلط و کاربرد آنها
روئل و. چرچیل، جیمز و. براون، راجرف. ورهی
ترجمهٔ امیر خسروی

معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها
جرج ف. سیمونز
ترجمهٔ علی‌اکبر بابائی، ابوالقاسم میامئی

معماری سیستمهای کامپیوتری
م. موریس مانو
ترجمهٔ امیر صادقی

مفاهیم و روشهای آماری (دو جلد)
گوری ک. باتاچاریا، ریچارد ا. جانسون
ترجمهٔ مرتضی ابن شهرآشوب، فتاح میکائیلی

مقدمات معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی
ویلیام ا. بویس، ریچاردک. دیپریما
ترجمهٔ محمدرضا سلطانپور، بیژن شمس

نخستین درس در جبر مجرد
جان ب. فرالی
ترجمهٔ مسعود فرزان

نخستین درس در جبر مجرد
ف. ج. هیگینز
ترجمهٔ محمدرضا رجب‌زادهٔ مقدم

نخستین گامها در آنالیز عددی
هوسکینگ، جویس، ترنر
ترجمهٔ اسماعیل بابلیان، میرکمال میرنیا

نظریهٔ آمار
برنارد م. ولیندگرن
ترجمهٔ ابوالقاسم بزرگ‌نیا

نظریهٔ اعداد
ت. ه. جکسن
ترجمهٔ اکبر حسنی

نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها
پ. ر. هالموس
ترجمهٔ عبدالحمید دادالله

نظریهٔ گالوا
پاوامن مورتی و همکاران
ترجمهٔ محمدتقی دیبایی

نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربرد آنها
شووینگ تی. لین، یو-فنگ. لین
ترجمهٔ عمید رسولیان

نظریهٔ مقدماتی احتمال و فرایندهای تصادفی
کان لای چانگ
ترجمهٔ ابوالقاسم میامئی، محمدقاسم وحیدی اصل

نظریهٔ نمونه‌گیری
پرویز شیرانی

نظریهٔ و کاربردهای آنالیز عددی
ج. م. فیلیپس، پ. ج. تیلر

واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار
انجمن ریاضی ایران با همکاری مرکز نشر دانشگاهی

هندسهٔ جبری مقدماتی
مایاز رید
ترجمهٔ رحیم زارع نهندی

هندسهٔ دیفرانسیل مقدماتی
بارت اونیل
ترجمهٔ بیژن شمس، محمدرضا سلطانپور

هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی
ماروین جی. گرینبرگ
ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها

NASHR-E RIYĀZI

A Mathematics Journal
of
Iran University Press

Volume 7, Number 2

Nashr-e Riyāzi is published by Iran University Press, twice a year. The main objectives of the journal are to present:

-new advances in mathematics;
-cultural, philosophical, and historical aspects of mathematics, as well as its applications;
-educational problems of mathematics, specifically those concerning higher education in Iran.

Some of the articles in each issue are written by Iranian mathematicians, and some are translations of expository articles selected from foreign sources.

The annual subscription rates including air mail postage are: Middle East £ 18, Europe & Asia £ 20, North America & Far East £ 25.

To subscribe, please send your name, address, and a check to Iran University Press, 85 Park Avenue, Tehran 15134, Iran.

ISSN 1015-2857

مرکز نشر دانشگاهی از سری کتابهای پیش‌دانشگاهی منتشر کرده است

- اشنایی با رمزگشایی به روش ریاضی
  آبراهام سینکوف
- اشنایی با نابرابریها
  بکن‌باخ، بلمن
- ابتکارهایی در ریاضیات
  راس هانسبرگر
- اعداد: گویا و گنگ
  ایوان نیون
- المپیادهای ریاضی بین‌المللی (جلد اول)
  گراینژر سموئل
- المپیادهای ریاضی بین‌المللی (جلد دوم)
  مری کلمکین
- تبدیلهای هندسی (جلد اول)
  ای.م.یاگلم
- تبدیلهای هندسی (جلد دوم)
  ای.م.یاگلم
- تبدیلهای هندسی (جلد سوم)
  ای.م.یاگلم
- حساب دیفرانسیل و انتگرال چیست؟
  و.و.سویر
- دانستنیهای اعداد بزرگ
  فلیپ ج.دیویس
- ریاضیات انتخاب یا چگونه بدون شمارش بشماریم؟
  ایوان نیون
- کسرهای مسلسل
  کارل.د.اولدز
- گراف و کاربردهای آن
  آیستن آر
- گزیده‌هایی از نظریهٔ اعداد
  اویستن اور
- مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا (جلد اول)
  چارلز ت.سالکیند
- مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا (جلد دوم)
  چارلز ت. سالکیند
- مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا (جلد سوم)
  سالکیند، ارل
- مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا (جلد چهارم)
  آرتینو، گاگلیون، شل
- مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان (جلد اول)
  یوژف کورشاک
- مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان (جلد دوم)
  یوژف کورشاک
- معماهای ابوالهول
  مارتین گاردنر
- نابرابریهای هندسی
  نیکولاس.د.کازارینوف
- نخستین مفاهیم توپولوژی
  جین، استیناد
- نظریهٔ اعداد
  ت.ه.جکسن
- نقش ریاضیات در علوم
  ام.ام.شیفر، ال باودن