سپهر

سال ۷، شمارهٔ ۱

بسم‌الله الرحمن الرحیم

نشر ریاضی

مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

شمارهٔ ۸۵ خیابان پارک خیابان دکتر بهشتی، تهران ۱۵۱۳۴

نقل مطالب با ذکر مأخذ مجاز است

بهای این شماره ۲۰۰۰ ریال؛ حق اشتراک سالانه برای داخل کشور ۴۰۰۰ ریال.
(برای دانشجویان با ۳۰٪ تخفیف)

وجه اشتراک به حساب شمارهٔ ۹۰۰۰۹ بانک ملی شعبهٔ خیابان پارک تهران به نام مرکز نشر دانشگاهی واریز شود.

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر شش ماه یک بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجّه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی پژوهان فارسی زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چهارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبک مقاله‌های چاپ‌شده در ***نشر ریاضی*** باشد. به همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حک و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ شدهٔ در ***نشر ریاضی*** باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۷، شمارهٔ ۱

تاریخ انتشار: آبان ۱۳۷۴

شمارهٔ پیاپی: ۱۳

nashriaz@rose.ipm.ac.ir

مدیر مسؤول: سیاوش شهشهانی

- **هیأت ویراستاران:**

یحیی تابش
عطاءالله تقاء
سیاوش شهشهانی
سیامک کاظمی
امیدعلی کرمزاده
کاوه لاجوردی

- **مشاوران این شماره:**

محمد باقری، محمدهادی شفیعیها، پدرام صفری (آمریکا)، علی عمیدی، سعید قهرمانی (آمریکا)، همایون معین، منوچهر وصال

- **دستیار فنی:** زهرا دلاوری
- **طراح و صفحه‌آرا:** آزاده اصغری
- **ناظر چاپ:** علی صادقی
- **حروفچینی:** مرکز نشر دانشگاهی
  صدیقه مسعودی، نوشین شاهنده
- **لیتوگرافی:** امیر
- **چاپ و صحافی:** منفرد

فهرست

روی جلد

مینیاتوری از یک کتاب متعلق به قرن دهم هجری
منجمان در حال کار با ابزارهای نجومی
به‌مناسبت درج مقالهٔ «گوشه‌هایی از 'گوشه‌ها'»

گزارش

در این شماره اخبار تکان‌دهنده‌ای در سطح اثبات قضیهٔ آخر فرما یا حتی روش جدید پارامتری کردن ساختارهای هموارِ خمینه‌های چهاربعدی به‌وسیلهٔ ویتن نداریم. ولی این شماره یکی از شماره‌های معدود *نشر ریاضی* است که دو (۱ < ۲) مقالهٔ تألیفیِ توصیفی دارد. تصادفاً در عنوان هر دو مقالهٔ کلمهٔ «موج» ظاهر شده است ولی قرابت دو مقاله تقریباً در همین جا خاتمه می‌یابد. مقالهٔ اول دربارهٔ تعمیمی از تابعهای همساز است که در سالهای اخیر در داخل و خارج ریاضیات کاربردهایی یافته است. در مقالهٔ دوم، یکی از تکنیکهای موفق برای پی‌بردن به وجود موج شوک و بررسی آن، مرور می‌شود.

در گذشته کوشش کرده‌ایم و همچنان کوشش می‌کنیم که ریاضیدانان ایرانی را به نوشتن مقاله‌های توصیفی ترغیب کنیم، و در این راستا حتی گاه مقاله‌هایی چاپ کرده‌ایم که از استاندارد مورد نظرمان برخوردار نبوده‌اند. نوشتن مقالهٔ توصیفیِ ریاضی کار ساده‌ای نیست ولی مسألهٔ بغرنجتر این است که این کار ظاهراً برای بسیاری از ریاضیکاران کشورمان اصلاً مقولهٔ شناخته‌شده‌ای نیست. در سالهای اخیر به سبب تشویقِ (به‌حق) امانتداری در ترجمه و پرهیز از اقتباسها و گردآوریهای بی‌اسلوب که زمانی به غلط به‌عنوان تألیف مطرح می‌شدند، مقولهٔ تألیف تقریباً به کلی از صحنهٔ نوشتار ریاضی حذف شده است؛ و این در حالی است که از یک سو ترجمهٔ کتاب و مقاله از ارج و منزلت مطلوب برخوردار است و از سوی دیگر نوشتن مقالات تحقیقاتی از واجبات ارتقای مقام و برخوردارشدن از امتیازات هیأت علمی دانشگاهی به‌شمار می‌آید.

اکنون که این دو نوع فعالیت تدریجاً از شاخصهای کیفی استواری بهره‌مند می‌شوند، می‌توان و باید باب تألیف کتاب و مقالات توصیفی را مجدداً ــ و این بار به‌طرز درست و مناسب ــ گشود و برزخ پدید آمده میان ترجمه و پژوهش را پر کرد.

تألیف مقالهٔ توصیفیِ ریاضی، مقوله‌ای مستقل و کاملاً متمایز از نگارش مقالهٔ تحقیقاتی است. مقالهٔ تحقیقاتی عموماً برای متخصصان نوشته می‌شود و باید حاوی گزاره‌های جدیدی در جهت پیشبرد دانش موردنظر باشد. مقالهٔ توصیفی برای گروه عامتری نوشته می‌شود ولی نوعِ رقیق‌شدهٔ مقاله تحقیقی هم نیست. مقالهٔ توصیفی ایده‌آل، جریان یا مبحث ریاضیِ مهمی را که قبلاً فقط متخصصان از آن آگاهی داشته‌اند به جمع بزرگتری معرفی می‌کند. چنین مقاله‌ای باید از مفاهیم آشنا برای مخاطب شروع کند و تدریجاً خواننده را به مرزهای دانش موجود برساند. لازم نیست هر خواننده‌ای هر آنچه را در مقالهٔ توصیفی آمده است به‌طور کامل درک کند یا از ریزه‌کاریهای فنیِ دستیابی به نتایج ذکرشده مطلع گردد، ولیکن لازم است که گروه به‌نسبت وسیعی دانش آموخته بتوانند اصول کلی مطالب را درک کنند و به اهمیت موضوع و ارتباط احتمالی آن با تخصصهای دیگر واقف شوند. بدین‌ترتیب، مقالهٔ توصیفی با جزوهٔ درسی مناسب برای یک درس پیشرفته هم تفاوت دارد. یادداشتهای یک یا چند جلسه از یک درس پیشرفته (هرچند هم موفق) معمولاً یک مقالهٔ توصیفی مناسب را تشکیل نمی‌دهند. تجربه نشان می‌دهد که بهترین مقالات توصیفی را سرآمدترین محققان که از ذوق نوشتن نیز توشه‌ای داشته باشند به تحریر در می‌آورند چه فقط این گروه هستند که از دیدگاهی رفیع بر خطوط اصلی تحقیقات جاری و جایگاه آن در کل دانش ریاضی اشراف دارند.

شاید بهترین راه برای شناساندن روش تألیف مقالات توصیفی ارائهٔ الگوهای موفق این سبک باشد. از این‌رو از این شماره بر آن شدیم که بخشی به نام «مقالات کلاسیک» در مجله دایر کنیم. ایدهٔ تأسیس این بخش از آغاز شکل‌گرفتن مجلهٔ *نشر ریاضی* مطرح بود و چند نمونه از این مقالات نیز در شماره‌های پیشین ارائه شدند، مقالاتی نظیر «مسألهٔ پیوستار کانتور چیست» نوشتهٔ گودل (سال ۲، شمارهٔ ۱) و «از مثلث تا خمینه» اثر چرن (سال ۲، شمارهٔ ۳). در این شماره، ترجمهٔ مقالهٔ «برخی کاربردهای توپولوژی در جبر» اثری جاودانه از هاینتس هوپف را که بیش از چهل سال پیش نگاشته شده است به مناسبت صدمین سالگرد تولد وی می‌آوریم. هرچند سبک نگارش این مقاله از بعضی جهاتِ ظاهری چندان امروزی نیست، ولی شیوهٔ سادهٔ برخورد با موضوع و غنای مطالب ارائه شده می‌تواند سرمشقی برای علاقه‌مندان به نگارش مقالات توصیفی باشد.

از آغاز تأسیس *نشر ریاضی* بر این هدف بوده‌ایم که مجله سرشت و شخصیت ویژهٔ خود را بیابد و به یک جُنگ ترجمه تبدیل نشود (در عین حال که منکر سودمندی انتشار این‌گونه جُنگها نیستیم). برای دستیابی به این هدف، مجله به تألیفات خوب نیازمند است. امیدواریم در آینده شاهد افزایش نسبت تألیف به ترجمه باشیم.

* * * * * *

این روزها همه جا صحبت از شبکه‌های کامپیوتری و اینترنت است. این جریان هم‌اکنون تغییراتی غیرقابل بازگشت در شیوه‌های اطلاع‌رسانی و ارتباط ایجاد کرده و در آینده ممکن است این شیوه‌ها را از ریشه دگرگون کند. *نشر ریاضی* قصد دارد در طی چند شماره این پدیدهٔ همه‌گیر را با عطف توجه به اثرات آن بر جامعهٔ ریاضی جهانی به خوانندگان معرفی کند. در این شماره یک مقالهٔ عمومی در آشنایی با شبکهٔ کامپیوتری آورده‌ایم و نیز ترجمهٔ مقاله‌ای را چاپ کرده‌ایم که در آن پیش‌بینی شده است در آیندهٔ نه‌چندان دور، مجلات تحقیقاتی (ریاضی) به‌صورت امروزی به فراموشی سپرده خواهند شد و نشریات الکترونیک جایگزین آنها خواهند گردید. بعضی ویراستاران مجله بر آن بودند که روی جلد مجله تصویری مربوط به شبکه‌های کامپیوتری بیاوریم، ولی این پیشنهاد با مخالفت سرسختانهٔ یکی از ویراستاران خالص‌اندیش روبه‌رو شد که معتقد است روی جلد *نشر ریاضی* باید از اصالت ریاضی برخوردار باشد. از این‌رو تصویری روی جلد آورده‌ایم که هم به ریاضیات مرتبط است و هم حال و هوای بومی دارد. این تصویر که عده‌ای از منجمان دورهٔ اسلامی را در حال کار در رصدخانه نشان می‌دهد، قرار است

حاکی از موضوع نقد کتاب این شماره (نقد کتاب برگرن در مورد ریاضیات دورهٔ اسلامی) باشد، چه طبق رده‌بندی فارابی (رک. صفحهٔ ۵۰، شمارهٔ ۱ و ۲ی سال ۶) علم نجوم نیز از جمله رشته‌های علم ریاضی است ولی همکار ریزبین ما اشاره می‌کند که در نقد کتاب مورد بحث صریحاً ذکر شده که مؤلف کتاب به بررسی آثار نجومی ریاضیدانان دورهٔ اسلامی نپرداخته است!
س.ش.

درگذشت چرچ

آلونزو چرچ (Alonzo Church) منطقدان نامدار امریکایی در بیستم مرداد ۱۳۷۴ در ۹۲ سالگی درگذشت. چرچ در سال ۱۹۰۳ در شهر واشینگتن متولد شد و در ۱۹۲۷ از دانشگاه پرینستن دکترا گرفت، و تا ۱۹۶۷ در همین دانشگاه، و پس از آن تا ۱۹۹۰ در دانشگاه کالیفرنیا در لوس‌آنجلس استاد بود. استیون کلی‌نی (۱۹۰۹ـ۱۹۹۴) و جان بارکلی راسر (۱۹۰۷ـ۱۹۸۹) از معروفترین شاگردانِ اویند. او از نخستین سالِ انتشارِ *جورنال آو سیمبولیک لاجیک* (۱۹۳۶) تا سال ۱۹۷۹ از ویراستاران آن بود.

چرچ آغازگرِ پژوهش در حسابِ λ (λ-calculus) و از پدیدآورندگانِ نظریهٔ توابعِ بازگشتی است. قضایای چندی نام «چرچ[...]» بر خود دارند، از جمله اینکه منطقِ محمولاتِ مرتبهٔ اول و حسابِ پئانو تصمیم‌ناپذیرند.

سبب دیگرِ جاودانگیِ نامِ چرچ در منطق ریاضی، *برنهادهٔ چرچ* (Church's thesis) است که بازگشتی‌بودن را تقریرِ ریاضیِ مناسبی از مفهومِ شهودیِ محاسبه‌پذیری اعلام می‌کند: *هر تابعِ محاسبه‌پذیر بازگشتی است*، یا، به زبانی فنّیتر، *با تابعی بازگشتیِ هم‌مصداق است*. در تأیید برنهادهٔ چرچ (که حکمی غیرریاضی است) شواهدی وجود دارد، برای نمونه اینکه کوششهای مستقل برای صوری ساختنِ مفهوم محاسبه‌پذیری (مثلاً رهیافتهای چرچ و تورینگ) همگی به مفاهیمی انجامیده‌اند که با بازگشتی‌بودنْ معادل‌اند. امروزه، شصت سال پس از آنکه چرچ این حکم را عرضه کرد و به دفاع از آن پرداخت، توافقِ کلی بر موجه‌بودنِ آن است.
ک.ل.

درگذشت دکتر قینی

دکتر محمدعلی قینی استاد پیشین ریاضیات دانشگاه تهران در مردادماه سال جاری درگذشت. ایشان در سال ۱۳۰۰ در یزد متولد شد و دیپلم ریاضی را در همان شهر و لیسانس ریاضی را از دانشگاه تهران (با کسب رتبهٔ اول) گرفت. پس از مدتی در بلژیک درجهٔ فوق‌لیسانس آمار و دکتری مکانیک گرفت و بعد از بازگشت به میهن، علاوه بر تدریس ریاضیات در دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران و برخی دانشگاههای دیگر، سمتهایی نیز در زمینهٔ مدیریت آموزشی به‌عهده گرفت. دکتر قینی در سال ۱۳۵۸ بازنشسته شد ولی تا سال ۱۳۷۰ به فعالیتهای آموزشی خود ادامه داد. از ایشان کتابهایی هم در زمینهٔ ریاضیات، و به‌خصوص آمار و احتمال، به یادگار مانده است.

اهدای جایزه به کاکستر

مؤسسهٔ جدیدالتأسیس فیلدز کانادا و مرکز تحقیقات ریاضیات (Centre de Recherches Mathématiques) آن کشور جایزهٔ مشترکی تدارک دیده‌اند که برای اولین‌بار به دانلد کاکستر هندسه‌دان معروف اهدا شد. آثار متنوع کاکستر که بسیاری از آنها از هندسهٔ شهودی الهام گرفته، بر شاخه‌های گوناگونی از ریاضیات اثر گذاشته است. از جمله کارهای کاکستر می‌توان بررسی تقارنهای فضای n بعدی، بسته‌بندی کرات (sphere packings) در فضای n بعدی، رده‌بندی گروههای لی، و تحقیقات وی در انواع هندسه‌های نااقلیدسی را نام برد. کاکستر در سال

احیای تحقیقات هشترودی

از اواخر قرن نوزدهم، رابطهٔ میان هندسهٔ افکنشی [تصویری] و آنالیز مختلط مشهود بوده است. یکی از ابتداییترین تجلّیات این ارتباط، یکریختیِ گروه تبدیلات همدیس گوی واحد با گروه تبدیلات افکنشیِ خط افکنشی است. شادروان محسن هشترودی در سال ۱۹۳۷ با تعریف و بررسی نوعی التصاق (connexion) به تعمیمی از هندسهٔ افکنشی دست یافت که در آن، آبررویه‌هایی در فضای مختلط n بعدی، موسوم به خانوادهٔ سِگره (Segre) نقش ابررویه‌های فضای افکنشی را ایفاء می‌کنند [۲]. اخیراً چرن، هندسه‌دان شهیر معاصر، و ریاضیدان دیگری در مقاله‌ای که در مجلهٔ *ماتماتیشه آنالن* به‌چاپ رسانده‌اند [۱] به تعمیم کار هشترودی پرداخته و به کمک آن تعمیمی از قضیهٔ نگاشت ریمان را در ابعاد بالا ثابت کرده‌اند. نگارندگان مقاله التصاق مورد استفادهٔ خود را **التصاق هشترودی** (Hachtroudi Connection) نام نهاده‌اند.

* * * * * *

1. Shiing-Shen Chern, Shanyu Ji, "Projective geometry and Riemann's mapping problem", *Math. Ann.* **302** (1995) 582-600.
2. M. Hachtroudi, *Les espaces d'éléments à connexion projective normale*, Hermann, Paris (1937).

سرانجام قضیهٔ آخرفرما

Annals of Mathematics, **142** (1995), 443-551

Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem

By ANDREW WILES*

For Nada, Clare, Kate and Olivia

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Pierre de Fermat

Introduction

An elliptic curve over $\mathbf{Q}$ is said to be modular if it has a finite covering by a modular curve of the form $X_0(N)$. Any such elliptic curve has the property that its Hasse-Weil zeta function has an analytic continuation and satisfies a functional equation of the standard type. If an elliptic curve over $\mathbf{Q}$ with a given j-invariant is modular then it is easy to see that all elliptic curves with the same j-invariant are modular (in which case we say that the j-invariant is modular). A well-known conjecture which grew out of the work of Shimura and Taniyama in the 1950's and 1960's asserts that every elliptic curve over $\mathbf{Q}$ is modular. However, it only became widely known through its publication in a paper of Weil in 1967 [We] (as an exercise for the interested reader!), in which, moreover, Weil gave conceptual evidence for the conjecture. Although it had been numerically verified in many cases, prior to the results described in this paper it had only been known that finitely many j-invariants were modular.

In 1985 Frey made the remarkable observation that this conjecture should imply Fermat's Last Theorem. The precise mechanism relating the two was formulated by Serre as the ε-conjecture and this was then proved by Ribet in the summer of 1986. Ribet's result only requires one to prove the conjecture for semistable elliptic curves in order to deduce Fermat's Last Theorem.

*The work on this paper was supported by an NSF grant.

روگرفتِ صفحهٔ اول مقالهٔ اندرو وایلز در اثبات قضیهٔ آخرفرما، که سرانجام همراه با مقالهٔ مشترک وایلز و ریچارد تیلر در مجلهٔ *آنالز آو متمتیکس* (***Annals of Mathematics***) به‌چاپ رسید. شماره‌ای از جلد ۱۴۲ (سال ۱۹۹۵) این مجله به این دو مقاله اختصاص یافته است (رک. *نشر ریاضی*، سال ۶، شمارهٔ ۱ و ۲، صفحهٔ اولِ «گزارش»).

۱۹۰۷ در لندن متولد شد و از سال ۱۹۳۶ که به سمت استادی دانشگاه تورنتوی کانادا منصوب شد، درکشورکانادا مقیم گردیده است. او جوایز متعددی در طول زندگی علمی خود دریافت کرده و از هفت دانشگاه درجهٔ دکتری افتخاری گرفته است.

بیست‌وششمین کنفرانس ریاضی کشور

این کنفرانس در تاریخ ۸ تا ۱۱ فروردین ماه جاری در دانشگاه شهید باهنر کرمان با شرکت بیش از هزار تن از استادان، دانشجویان، و دبیران ریاضی کشور و چند میهمان خارجی برگزار شد. برنامهٔ علمی کنفرانس شامل سخنرانیهای عمومی و تخصصی و چهار کارگاه آموزشی در زمینهٔ آنالیز عددی، ریاضیات فازی، هندسه، و آموزش ریاضیات بود. نکتهٔ شایان ذکر این است که متن کامل سخنرانیها در هنگام ثبت نام شرکت‌کنندگان در اختیار آنها قرار می‌گرفت. در این گردهمایی، از چهار تن از پیشکسوتان ریاضیات کشور، آقایان دکتر جواد بهبودیان، دکتر محمد هادی شفیعیها، پرویز شهریاری، و ابوالقاسم قربانی، تجلیل شد. میزگردی دربارهٔ نظام جدید آموزش دبیرستانی، نمایشگاه کتاب، تورهای مسافرتی، و برنامهٔ تئاتر و کنسرت، از جمله برنامه‌های کنفرانس بود.

طبق معمول همه ساله، مجمع عمومی انجمن ریاضی ایران و مسابقهٔ ریاضی دانشجویی نیز در جوار کنفرانس برگزار شد. نتایج این مسابقه که نوزدهمین مسابقهٔ ریاضی کشور بود به قرار زیر است:

اول: امیر جعفری (دانشگاه صنعتی شریف) و علی لشگری فغانی (دانشگاه صنعتی اصفهان)

دوم: فاطمه آیت‌الله‌زاده شیرازی (دانشگاه تهران) و محمدرضا رئوفی (دانشگاه صنعتی اصفهان)

سوم: رضا ناصر عصر (دانشگاه صنعتی شریف)

چهارم: حسین مواساتی (دانشگاه صنعتی شریف)

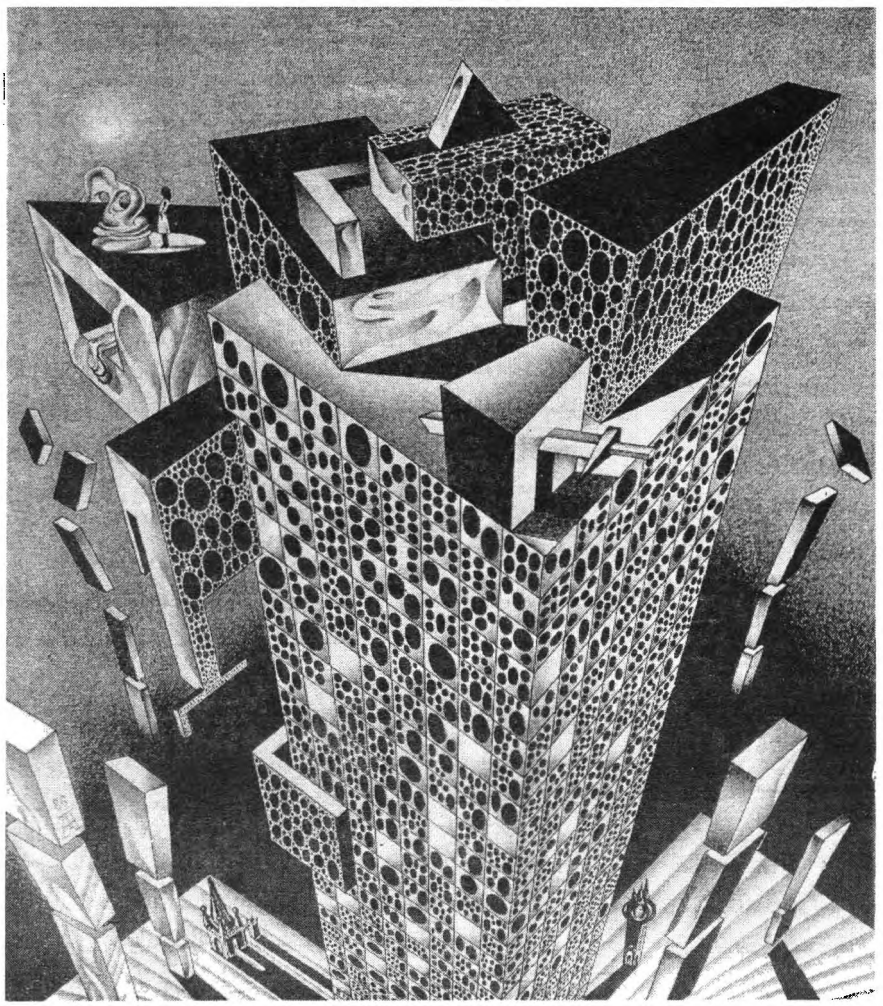
پنجم: احمد مجیری (دانشگاه صنعتی اصفهان)

سی‌وششمین المپیاد ریاضی

سی‌وششمین المپیاد ریاضی در اوایل تابستان سال جاری در کشور کانادا برگزار شد. تیم شش نفرهٔ ایران در این دوره به مقام هشتم دست یافت. اعضای تیم عبارت بودند از:

محمدعلی آبام از تهران، مدال برنز؛ محمد جواهری از کامیاران (کردستان)، مدال نقره؛ حسین زیوری از تهران، مدال نقره؛ رضا صادقی از مشهد، مدال طلا؛ کیوان ملاحی از تهران، مدال نقره؛ مریم میرزاخانی از تهران، مدال طلا.

شایان ذکر است که مریم میرزاخانی با کسب حداکثر ثمرهٔ ممکن (۴۲ از ۴۲) به مدال طلا دست یافته است.



تصویری انتزاعی از شهر مدرن. نقاشی از آناتولی فومنکو ریاضیدان روس. توجه کنید که ارقام عددهای π و e روی دو وجه برج با دایره‌ها نشان داده شده‌اند. تصویر از کتاب فومنکو به‌نام *Mathematical Impressions* از انتشارات انجمن ریاضی آمریکا (۱۹۹۰) برداشته شده است.

نشر ریاضی، سال ۷، شمارهٔ ۱، صص ۶ ـ ۱۴

موجنگاشتها یا نگاشتهای همسازِ خمینه‌های لورنتسی

ع. شادی تحویلدارزاده*

۱. مقدمه

با تابعهای همساز در درسهای توابع مختلط و معادلات دیفرانسیل جزئی آشنا شده‌اید. تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را *همساز* می‌نامند در صورتی‌که $\Delta f = 0$ که در آن، Δ عملگر لاپلاس است یعنی $\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n^2}$. می‌توان مفهوم عملگر لاپلاس را به خمینه‌های ریمانی تعمیم داد و توابع همساز روی خمینه‌های ریمانی را در نظر گرفت. در این‌صورت، همساز بودن f در واقع معادل می‌شود با آنکه f نقطهٔ بحرانی انتگرال دیریشلهٔ $D(f) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla f|^2 dx$ باشد.

حال فرض کنید (M^m, g) و (N^n, h) دو خمینهٔ ریمانی و U نگاشتی از M به N باشد. یکی از ساده‌ترین کمیتهای ناوردای هندسی که می‌توان ساخت عبارت‌است از ردّ پسکش[1] h تحت U:

$$L = Tr_g U^* h = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha U^a \partial_\beta U^b h_{ab}$$

با انتگرالگیری از لاگرانژی L روی M می‌توان تابعکی کنشی به شکل زیر تعریف نمود

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_M L\, d\mu_g$$

نقاط بحرانی این تابعک را نگاشتهای همساز می‌نامند. U یک نقطهٔ بحرانی است هرگاه وردش $\mathcal{A}$ در U برابر صفر باشد

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta U} = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mathcal{A}(U + \varepsilon\delta U) = 0 \qquad \forall \delta U : M \overset{C^\infty}{\to} N$$

باید توجه کرد که برد نگاشت U یک فضای خطی نیست بلکه یک خمینه است؛ بنابراین در تعریف وردش فوق باید دقت بیشتری کرد چراکه $U + \varepsilon\delta U$ بی‌معنی است. چاره آن است که با استفاده از قضیهٔ نش-موزر[2] خمینهٔ N را در یک فضای اقلیدسی E با بعد بالاتر به‌طور طولپا بنشانیم و سپس برای تعریف نقطهٔ بحرانی کنش $\mathcal{A}$ به یکی از دو ترفند زیر متوسل شویم: یا نگاشت وردش‌یافتهٔ $U + \varepsilon\delta U$ را پیش از جایگزینی در $\mathcal{A}$ با استفاده از افکنش قائم هموار π_N که در یک همسایگی لوله‌ای[1] N قابل تعریف است به روی خمینهٔ N بازگردانیم، و یا اصلاً با استفاده از دستگاه مختصات تعریف‌شده روی فضای محیط E، نگاشت همساز را به‌عنوان یک مسالهٔ وردشی مقید تعریف کنیم [۴]. در هر صورت دیده می‌شود که معادلات اویلر-لاگرانژ برای نقاط بحرانی تابعک $\mathcal{A}$ عبارت‌اند از

$$\Delta_M U^i + {}^N\Gamma^i_{jk}\partial_\alpha U^j \partial^\alpha U^k = 0 \qquad (1)$$

که در آن Δ_M عملگر لاپلاس-بلترامی است: $\Delta_M = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}g^{ij}\partial_j)$، و ${}^N\Gamma^i_{jk}$ نمادهای کریستوفل برخاسته از متریک h برای خمینهٔ N می‌باشند. رابطهٔ (۱) نشان‌دهندهٔ دستگاهی از معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی با جملهٔ غیرخطی درجهٔ دوم برحسب گرادیان نگاشت مجهول است. می‌بینیم که غیرخطی بودن این معادلات منشأ هندسی دارد و فی‌المثل اگر خمینهٔ هدف N تخت باشد جملهٔ غیرخطی برابر با صفر خواهد بود.

نگاشتهای همساز را از سی سال پیش تاکنون ریاضیدانانِ بسیاری در رشته‌های آنالیز، هندسه و توپولوژی بررسی کرده‌اند و امروزه نتایج بسیاری دربارهٔ وجود و یگانگی، همواری، طبقه‌بندی تکینه‌های ممکن، بعد هاوسدورف زیر مجموعه‌های تکین، ساختمان هندسی و توپولوژیک جوابها و فضاهای تشکیل‌شده از جوابها در دست است [۵].

خمینهٔ $m+1$بعدی $\mathcal{M}$ را که مجهز به متریک لورنتسی g باشد خمینهٔ *لورنتسی* می‌خوانند. متریک g را *لورنتسی* می‌نامند هرگاه به‌عنوان یک فرم درجهٔ دومِ تعریف‌شده روی کلاف مماس $T\mathcal{M}$ دارای شاخص یک و یا علامت $(-,+,\cdots,+)$ باشد. اگر در مطالب بالا به‌جای خمینهٔ ریمانی M^m خمینهٔ لورنتسی $\mathcal{M}^{m+1}$ را بگذاریم خواهیم دید که کلیهٔ مفاهیم بالا باز هم قابل تعریف‌اند. نقاط بحرانی تابعک کنش حاصل را موجنگاشت می‌خوانیم چراکه در اینجا عملگر دالامبری $\Box_{\mathcal{M}}$ ظاهر می‌شود که بیضوی نیست بلکه هذلولوی است و در حالت خاص $\mathcal{M} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$

1. pullback 2. Nash-Moser

1. tubular neighbourhood

و $g = \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$ که $(\mathcal{M}, g)$ فضای مینکوفسکی خوانده می‌شود، داریم $\Box_{\mathcal{M}} = \partial_t^2 - \Delta_{\mathbb{R}^m}$ که همان عملگر موج است و دستگاه معادلات حاصل دستگاهی از معادلات موج خواهد بود

$$\partial_t U^i - \Delta U^i + {}^N\Gamma^i_{jk}\partial_\alpha U^j \partial^\alpha U^k = 0 \qquad (2)$$

در مقایسه با نگاشتهای همساز، موجنگاشتها تقریباً ناشناخته‌اند. نخستین‌بار در اوایل دهۀ شصت دو فیزیکدان نامی، گلمان و لِوی، مدلی برای برهمکنش پایونها (ذرات π) به‌نام مدل سیگما ارائه کردند که در آن میدان مزونی مورد بحث به‌جای آنکه مقادیر خود را در $\mathbb{R}^3$ (متناظر با سه نوع مختلف ذرۀ π) اختیار کند و بنابراین به نظریۀ خطی میدانها منجر شود، مقادیر خود را در $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ اختیار می‌کرد و در نتیجه میدانی بود غیرخطی [۶]. زمانی که توجه ریاضیدانان به این مدل جلب شد بیش از پانزده سال از ارائۀ آن گذشته بود و طی این مدت اولاً معلوم شد که پایونها ذراتی بنیادی نیستند و ثانیاً با رونق گرفتن نظریه‌های پیمانه‌ای در فیزیک، مدل گِلمان-لِوی که ناوردای پیمانه‌ای نیست به‌تدریج از چشم فیزیکدانان افتاد.

اما این اصلاً بدان معنی نیست که امروزه بررسی موجنگاشتها بی‌فایده باشد. از یک‌سو درست همان‌طور که نگاشتهای همساز به‌دلیل سادگی و طبیعی بودن (یعنی هندسی بودن) تعریفشان توجه بسیاری از ریاضیدانان را در رشته‌های آنالیز، هندسه، توپولوژی و فیزیک ریاضی به‌خود جلب کرده بودند، موجنگاشتها نیز به‌عنوان ساده‌ترین میدانهای هندسیِ غیرخطیِ قابل تعریف روی فضا-زمان طبعاً همین ویژگی را دارند. از سوی دیگر امروزه شواهد محکمی در دست داریم که نشان می‌دهند این نظریه سنگ بنایی است برای پی‌بردن به اسرار گرانش و نسبیت عام. برای مثال، نسبیت‌پژوهان از مدتها پیش می‌دانستند [۱۰] که معادلات اینشتین را که مجهول آنها g متریک لورنتسی فضا-زمان است می‌توان با اختیار کردن یک دستگاه مختصات خاص که به‌نام مختصات همساز و یا مختصات موجی مشهور است به‌صورت زیر درآورد

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta g + g^{-1}(\partial g)^2 = 0$$

در جملۀ غیرخطی این سیستم هذلولوی، مشتقات اول متریک مجهول با توان دو ظاهر می‌شوند ــ درست مانند موجنگاشتها ــ با این تفاوت که معادلۀ اخیر به‌دلیل وجود ضرایب وابسته به g برای مشتقات مرتبۀ دوم، شبه‌خطی است در حالی‌که معادلۀ موجنگاشت نیمه‌خطی است و در نتیجه بررسی آن آسانتر است. از این دیدگاه، برای درکِ درستِ جوابهای معادلات اینشتین ابتدا باید مسالۀ موجنگاشتها را حل کرد. علاوه بر این اخیراً ثابت شده است [۱] که معادلات اینشتین تحت فرض وجود یک تقارن خاص برای فضا-زمان دقیقاً به معادلات یک موجنگاشت تحویل‌پذیرند که خمینۀ هدف آن همه‌جا دارای انحنای [خمیدگی] منفی است. موجنگاشتها همچنین در نظریۀ یانگ-میلز (به‌صورت جوابهای پیمانه‌ای محض) و در نظریۀ الاستودینامیک نسبیتی ظاهر می‌شوند.

از آنجایی که دستگاه معادلات موجنگاشت یک دستگاه هذلولوی است، مسالۀ مناسب برای آن مسالۀ کوشی است که در آن یک ابررویۀ فضاگونۀ Σ معین می‌شود و تحدید نگاشت U و مشتق زمانی آن به Σ به‌عنوان داده‌های آغازی تجویز می‌گردند

$$U|_\Sigma = U_0, \qquad \frac{\partial U}{\partial t}|_\Sigma = U_1 \qquad (3)$$

و مسأله عبارت است از یافتن نگاشت Uیی که در (۲) و (۳) صدق کند.

۲. قوانین پایستگی و براوردهای انرژی

همچون همۀ نظریه‌های میدان لاگرانژی، موجنگاشتها نیز دارای تانسور انرژی-تکانه هستند. این تانسور را می‌توان با وردش گرفتن از تابعک کنش $\mathcal{A}$ نسبت به متریک فضا-زمان به‌دست آورد

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} L\sqrt{-g}dx \\
\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta g} &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}}L\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} d\mu_g
\end{aligned}$$

و در نتیجه $T = Uh - \frac{1}{2}Lg$ و یا

$$T_{\mu\nu} = h_{ab}(\partial_\mu U^a \partial_\nu U^b - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\alpha U^a \partial^\alpha U^b)$$

ثابت می‌شود که هرگاه U یک نقطۀ بحرانی انتگرال کنش $\mathcal{A}$، یعنی یک موجنگاشت باشد، داریم $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$. بسیاری از قوانین پایستگی موجنگاشتها از این رابطه به‌دست می‌آیند. برای ملاحظۀ این مطلب فرض کنید X یک میدان برداری هموارِ تعریف‌شده روی خمینۀ $\mathcal{M}$ باشد و قرار دهید $P^\mu = T^\mu{}_\nu X^\nu$. آنگاه داریم

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu P^\mu &= \nabla_\mu(T^\mu{}_\nu X^\nu) = \nabla^\mu T_{\mu\nu}X^\nu + T^{\mu\nu}\nabla_\mu X_\nu \\
&= 0 + \frac{1}{2}T^{\mu\nu}(\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu) \\
&= \frac{1}{2}T^{\mu\nu}\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} \qquad (\text{مشتق لی در جهت } X : \mathcal{L}_X)
\end{aligned}$$

حال اگر X یک میدان برداری کیلینگ، یعنی مولد تقارنی پیوسته برای $\mathcal{M}$، باشد داریم $L_X g_{\mu\nu} = 0$ و در نتیجه $\nabla_\mu P^\mu = 0$. یعنی P یک بردار با واگرایی صفر است و در نتیجه طبق قضیۀ گاوس با انتگرالگیری از این رابطه روی D ناحیۀ مابین دو ابررویۀ Σ_1 و Σ_2 (و فرض صفر بودن داده‌های آغازی در بینهایت) خواهیم داشت

$$0 = \int_D \nabla_\mu P^\mu = \int_{\partial D} P\cdot n d\sigma = \int_{\Sigma_2} P\cdot n_2 d\sigma_2 - \int_{\Sigma_1} P\cdot n_1 d\sigma_1$$

بدین‌ترتیب به‌ازای هر میدان کیلینگ، یعنی به‌ازای هر تقارن $\mathcal{M}$، یک کمیت پایسته به‌دست می‌آید. این امر در واقع تجلی قضیۀ کلی نوتر است.

به‌عنوان مثال فرض کنید $\mathcal{M}$ فضای مینکوفسکی $\mathbb{R}^{m,1}$ باشد. در واقع از حالا به بعد برای سادگی، خمینۀ دامنه را فضای مینکوفسکی تصور می‌کنیم. فرض کنید (x, t) مختصات سراسری روی $\mathcal{M}$ باشد: $x = (x^1, \cdots, x^m)$ و نیز فرض کنید $X = \partial_t$ که مولد انتقال زمانی است. دیده می‌شود که کمیت پایستۀ متناظر با این تقارن عبارت‌است از

$$E(U, T) = \frac{1}{2}\int_{t=T} |\frac{\partial U}{\partial t}|_h^2 + |\nabla_x U|_h^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^m\times\{T\}} h_{ab}(\partial_t U^a\partial_t U^b+\sum_{i=1}^{m}\partial_i U^a\partial_i U^b)dx$$

کمیت فوق را انرژی موجنگاشت U در زمان T می‌خوانیم. قانون پایستگی انرژی بیان می‌کند که برای هر t_1 و t_2 در $\mathbf{R}$

$$E(U,t_1)=E(U,t_2)$$

نکتهٔ دیگری که در مورد تانسور انرژی‌ـتکانه شایان توجه است این است که هرگاه m، بعد فضایی خمینهٔ $\mathcal{M}$، برابر یک باشد، ردّ این تانسور صفر خواهد بود

$$tr_g T=tr_g U^*h-\frac{1}{2}L\ tr_g g=L-\frac{1}{2}L(m+1)=L\frac{1-m}{2}$$

بی‌رد بودن تانسور انرژی‌ـتکانه بدین معنی است که نظریهٔ موجنگاشتها در بعد $m=1$ یک نظریهٔ میدان همدیس است: فرض کنید X یک میدان برداری همدیس باشد، در این‌صورت $L_X g_{\mu\nu}=\Omega g_{\mu\nu}$ و بنابراین براساس محاسبهٔ پیشین اگر $P^\mu=T^\mu{}_\nu X^\nu$ آنگاه $\nabla_\mu P^\mu=\frac{\Omega}{2}T^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=0$ و این خود نشان‌دهندهٔ وجود قوانین پایستگی بیشتری برای موجنگاشتها (متناظر با بعد گروه نگاشتهای همدیس فضاـزمان) در این بعد می‌باشد.

در واقع شطح نشان داده است [۱۱] که در بعد $m=1$ اثبات وجود و یگانگی جوابهای سراسرْ هموار برای مسألهٔ کوشی (۲ـ۳) با استفاده از این خاصیت بی‌رد بودن $T_{\mu\nu}$ بسیار ساده است زیرا در این حالت داریم

$$T_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} e & p\\ p & e\end{pmatrix}\qquad e=\frac{1}{2}(|U_t|^2+|U_x|^2)\qquad p=U_t.U_x$$

و بنابراین رابطهٔ $\nabla^\mu T_{\mu\nu}=0$ نتیجه می‌دهد که

$$\begin{cases}-\partial_t e+\partial_x p=0\\ -\partial_t p+\partial_x e=0\end{cases}$$

و در نتیجه $\partial_t^2 e-\partial_x^2 e=0$ یعنی e در یک معادلهٔ موج خطی یک‌بعدی صدق می‌کند و بنابر براوردهای شناخته‌شده برای این معادله می‌توان اندازهٔ e را به‌طور نقطه‌ای کنترل کرد که بلافاصله C^1 بودن موجنگاشت U را نتیجه می‌دهد. با مشتق گرفتن از معادلهٔ موجنگاشت و به‌کار بردن براوردهای انرژی برای معادلهٔ موج حاصل، همواری بیشتر نتیجه می‌شود. بدین ترتیب مسالهٔ همواری سراسری در زمانِ جواب مسالهٔ کوشی برای موجنگاشتها در بعد $m=1$ حل شده است و هیچ‌گونه قید و شرطی برای اندازهٔ داده‌های آغازی در هیچ نُرم تابعی وجود ندارد. خواهیم دید که این امر در ابعاد بالاتر به هیچ‌وجه صادق نیست و در واقع در بعد $m=2$ هنوز هیچ قضیهٔ کلی در مورد همواری سراسری در زمان موجنگاشتها موجود نیست، همچنانکه هیچ مثال ناقض نیز که امکان بروز تکینگی را برای داده‌های هموار اثبات کند پیدا نشده است. لازم به توضیح است که وجود، یگانگی و همواری یک جواب موضعی مسالهٔ کوشی برای کلیهٔ معادله‌های موج نیمه‌خطی با داده‌های آغازیِ به‌قدر کافی هموار، مدتها پیش اثبات شده است [۱۲] و می‌توان نشان داد که هرگاه داده‌های کوشی برای چنین معادله‌ای در زمان $t=0$ تجویز شوند عدد مثبت T^* وجود دارد چنانکه بازهٔ $(0,T^*)$ بزرگترین بازهٔ زمانی است که در داخل آن، جواب معادله هموار باقی می‌ماند. به‌عبارت دیگر T^* که آن‌را *طول عمر* جواب می‌خوانند زمان بروز نخستین تکینه در جواب معادله است. متأسفانه اثباتهای موجود بجز در چند مورد خاص نشان نمی‌دهد که T^* که طبیعتاً به داده‌های آغازی بستگی دارد، دقیقاً به کدام نُرم تابعی این داده‌ها وابسته است و این خود یکی از مسائل حل‌نشده در زمینهٔ معادلات موج غیرخطی است. روشن است که اگر بتوان نشان داد که T^* تنها به *انرژی* داده‌های آغازی بستگی دارد، از آنجا که انرژی کمیتی است پایسته، اثبات وجود جواب موضعی در زمان را می‌توان بینهایت بار تکرار کرد و به یک جواب سراسری دست یافت، ولی در حال حاضر صحت امر فوق در حالت کلی مورد تردید است.

پرسش دیگری که در همین زمینه می‌توان کرد و احتمال دستیابی به جواب آن بیشتر است، این است که اگر انرژی داده‌های آغازی بسیار ناچیز باشد آیا می‌توان وجود یک جواب سراسر هموار را اثبات کرد یا خیر. به‌عبارت دیگر آیا می‌توان عدد کوچک $\varepsilon>0$ را که تنها به خواص هندسی خمینهٔ هدف N بستگی داشته باشد چنان یافت که هرگاه انرژی یک جفت دادهٔ آغازی هموار (U_0,U_1) یعنی

$$E_0=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2}|U_1|^2+|\nabla U_0|^2$$

کمتر از ε باشد آنگاه مسالهٔ کوشی برای موجنگاشت $U:\mathbf{R}^{2,1}\to N$ دارای جوابی یگانه و سراسرْ هموار باشد. از آنجا که این امر برای داده‌هایِ باانرژیِ دقیقاً صفر به‌وضوح صادق است، مسأله اخیر در واقع خوش‌طرح بودن مسألهٔ کوشی دوبعدی برای موجنگاشتها در فضای تابعی $H^1\times L^2$ را در معرض تردید قرار می‌دهد. علی‌رغم تلاش گروهی از متخصصان رشتهٔ معادلات دیفرانسیل، پرسش اخیر نیز تاکنون بی‌پاسخ مانده است.

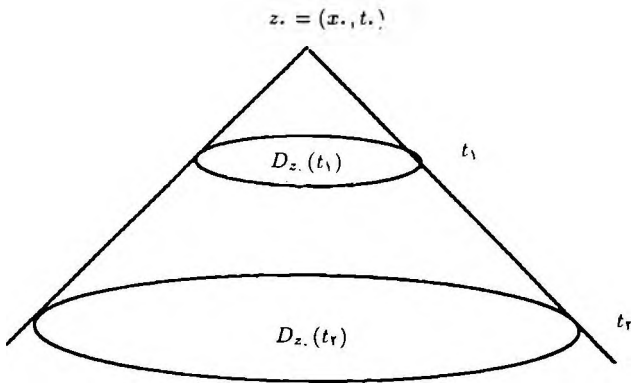
قانون پایستگی انرژیْ صورتی موضعی نیز دارد که با محدود کردن استدلال گذشته به مخروط نوری منتشره از یک نقطهٔ خاص در فضاـزمان به‌دست می‌آید: فرض کنید $z_0=(x_0,t_0)$ نقطه‌ای در فضاـزمان و K_{z_0} مخروط نوریِ گذشته‌سویِ منتشره از این نقطه باشد

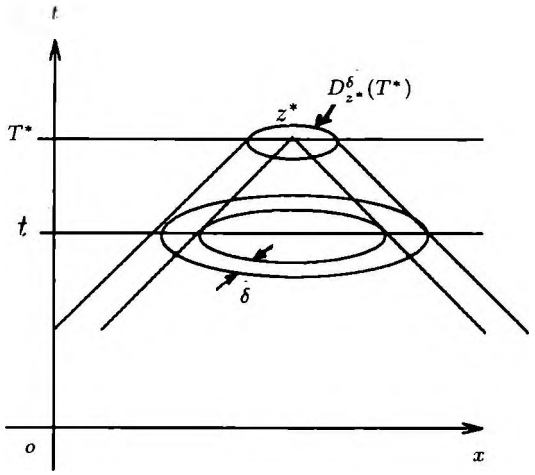
$$K_{z_0}=\{(x,t)|t\le t_0,|x-x_0|\le t_0-t\}$$

فصل مشترک ابرصفحهٔ $t=T$ با این مخروط را به $D_{z_0}(T)$ نمایش می‌دهیم: $D_{z_0}(T)=\{(x,T)|\ |x-x_0|<t_0-T\}$ و تعریف می‌کنیم

$$E_{z_0}(U,T)=\frac{1}{2}\int_{D_{z_0}(T)}|U_t|^2+|\nabla U|^2dx$$

یعنی $E_{z_0}(U,T)$ انرژی حمل‌شده توسط قرص $D_{z_0}(T)$ است. صورت موضعی قانون پایستگی انرژی چنین است که برای هر t_1 و t_2 با ضابطهٔ $t_2<t_1<t_0$، داریم $E_{z_0}(U,t_1)\le E_{z_0}(U,t_2)$ برای به‌دست آوردن این رابطه کافی است انتگرالگیری پیشین را روی مخروط نوری ناقص مابین t_1 و t_2 انجام دهیم و قضیهٔ گاوس را به‌کار بریم. دیده می‌شود که جملهٔ مرزی ناشی از انتگرالگیری روی سطح جانبی این مخروط همواره نامنفی است و در نتیجه انرژی حمل‌شده توسط قرص بالایی $D_{z_0}(t_1)$ همواره نابیشتر از قرص پایینی $D_{z_0}(t_2)$ خواهد بود. (شکل زیر).





پرسشی که اکنون مطرح می‌گردد این است که اگر t را از پایین به‌سمت t_0 میل دهیم، آیا انرژی حمل‌شده توسط قرص $D_{z_0}(t)$ که براساس مطالب بالا تابعی است ناافزایشی، به‌سمت صفر میل خواهد کرد یا اینکه کران پایین مثبتی خواهد یافت. روشن است که شرط لازم برای همواری نگاشت U در نقطهٔ z_0 این است که شق دوم که آن‌را پدیدهٔ *تمرکز انرژی* می‌خوانیم روی ندهد.

حال بیایید فرض کنیم در حالتی خاص و با گذاشتن شرطهایی هندسی بر روی خمینهٔ هدف N موفق شده‌ایم برای دو پرسش اخیر پاسخی مثبت بیابیم. به‌عبارت دیگر فرض کنید که تحت شرایطی، دو گزارهٔ زیر برای مسألهٔ کوشی (۲ـ۳) صادق باشند:

۱) داده‌های باانرژی کمتر از ε_0، جوابی سراسرْ هموار به‌دست می‌دهند؛
۲) انرژی موضعی در هیچ نقطه‌ای تمرکز نمی‌یابد.

نشان می‌دهیم که با تلفیق دو گزارهٔ بالا به‌سادگی می‌توان وجود و یگانگی جوابی سراسرْ هموار در زمان برای این مسألهٔ کوشی را ثابت کرد، با فرض اینکه داده‌های آغازی دارای انرژی متناهی (و نه لزوماً کوچک) باشند. ابتدا از قضیهٔ وجود و یگانگی جواب موضعی شروع می‌کنیم. بنابر این قضیه، هرگاه داده‌های کوشی در زمان $t = 0$ تجویز شوند، جوابی یگانه برای مسألهٔ کوشی وجود دارد که تا زمان $t = T^*$ هموار باقی می‌ماند. پس فرض کنید نخستین تکینه در نقطهٔ $z^* = (x^*, T^*)$ روی دهد. بنابر گزارهٔ (۲) داریم $E^*_z(U,t) \xrightarrow[t \nearrow T^*]{} 0$. پس برای tهای به‌قدر کافی نزدیک T^* داریم $E^*_z(U,t) < \varepsilon_0/2$. از طرف دیگر روشن است که می‌توان قرص $D^*_z(t)$ را فقط کمی بزرگتر کرد، مثلاً به‌اندازهٔ $\delta > 0$، چنانکه انرژی حمل‌شده توسط قرص بزرگتر $D^{\delta}_{z^*}(t)$ کمتر از ε_0 باشد. این امر ناشی از آن است که انتگرال تعریف‌کنندهٔ انرژی موضعی به‌طور پیوسته به ناحیهٔ انتگرالگیری بستگی دارد. حال از قانون کاهش انرژی موضعی استفاده می‌کنیم. دیده می‌شود که انرژی حمل‌شده توسط قرص $D^{\delta}_{z^*}(T^*)$ باید کمتر از ε_0 باشد. پس بنابر گزارهٔ (۱) اگر از نزدیکی زمان T^* شروع کنیم باید جوابی هموار برای مسأله داشته باشیم، و این مغایر با فرض تکینه بودن z^* است. پس تکینهٔ نخستین نمی‌تواند بروز کند و در نتیجه جواب مسألهٔ کوشی ناگزیر از هموار ماندن در همهٔ زمانهاست. (شکل در ستون مقابل)

حال به شرح شرایطی می‌پردازم که تحت آنها گزاره‌های (۱) و (۲) صادق هستند. اینها نتایجی است که من به اتفاق همکارانم شطح و کریستودولو در سالهای اخیر به‌دست آورده‌ایم. نکته این است که ما تنها با فرض وجود نوعی تقارن در مساله موفق به اثبات این گزاره‌ها شده‌ایم و در نتیجه مسالهٔ موجنگاشتهای غیرمتقارن همچنان حل‌نشده باقی مانده است.

۳. تقارن و یکسانوردی[1]

به‌طور کلی تقارن برای یک نگاشت U مابین دو خمینهٔ M و N به چه معنی است؟ فرض کنید خمینهٔ M دارای گروهی چون G از تبدیلات طولپا باشد که روی آن عمل می‌کنند. G را اصطلاحاً *گروه تقارن* M می‌خوانیم. همین‌طور فرض کنید خمینهٔ N دارای گروه تقارن H باشد. نگاشت پیوستهٔ $U : M \to N$ را *یکسانورد* می‌خوانیم هرگاه همریختی جبری نابدیهی $\rho : G \to H$ موجود باشد چنانکه برای هر $x \in M$ و هر $g \in G$ داشته باشیم

$$U(gx) = \rho(g)U(x)$$

و اگر رابطهٔ بالا به‌ازای همریختی بدیهی $\rho(g) \equiv e$ صادق باشد نگاشت U را *ناوردا* می‌خوانیم. پس نگاشت یکسانورد U مدار یک نقطهٔ x در M تحت گروه G را به مدار نقطهٔ $U(x)$ تحت زیرگروه $\rho(G)$ از H می‌نگارد، و نگاشت U ناورداست اگر روی مدار هر نقطه‌ای در M تحت G مقداری ثابت داشته باشد. روشن است که ناوردا بودن نگاشت U نیازی به متقارن بودن خمینهٔ هدف N ندارد.

به‌عنوان مثالی از یکسانوردی در مورد موجنگاشتها فرض کنید M فضای ۱ + ۲ بعدی مینکوفسکی و $G = SO(2)$ گروه دورانهای فضایی این خمینه باشد. همچنین فرض کنید N کرهٔ دوبعدی S^2 با متریک استاندارد و $H = SO(3)$ گروه تقارنهای آن باشد. همریختی $\rho_l : G \to H$ را که در آن l یک عدد صحیح است به شکل زیر تعریف می‌کنیم $\rho_l(g) = g^l$. پس ρ_0 همریختی بدیهی است. می‌پرسیم آیا موجنگاشتی به‌صورت $U : \mathbb{R}^{2,1} \to S^2$ می‌تواند وجود داشته باشد که ρ_lـیکسانورد

1. equivariance

باشد یعنی $U(gx,t) = g^l U(x,t)$ ؟ از آنجا که معادلات موجنگاشتْ یک دستگاه معادلات تحوّلی[1] است باید دید که آیا این یکسانوردی تحت تحول در زمان پایسته است یا خیر. با استفاده از قوانین پایستگی موجنگاشتها می‌توان نشان داد که هرگاه جفت داده‌های کوشی $(U_\circ, U_1)$ یکسانورد باشند یعنی $U_\circ(gx) = g^l U_\circ(x)$ و $U_1(gx) = g^l U_1(x)$ آنگاه U نیز در طول عمر خود یکسانورد باقی خواهد ماند. بنابراین با اتخاذ یک فرض مناسب می‌توان به‌دنبال جوابهای خاص یکسانورد برای مسالهٔ موجنگاشت گشت. به‌سادگی دیده می‌شود که فرض مناسب به‌شکل زیر است

$$U(x,t) = e^{Alx/|x|} u(|x|,t) \qquad (۴)$$

که در آن A ماتریس ۳ × ۳ی پادمتقارنی است که بدون کاستن از کلیت موضوع می‌توان آن‌را برابر با

$$\begin{pmatrix} \circ & -1 & \circ \\ 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

گرفت و u برداری است واحد در $\mathbb{R}^3$. با جایگزینی فرض یکسانوردی (۴) در معادلات موجنگاشت می‌بینیم که دستگاه مزبور به دستگاه معادلات زیر برای نگاشت u تحویل می‌شود که در آن $r = |x|$.

$$u_{tt} - u_{rr} - \frac{1}{r} u_r + (|u_t|^2 - |u_r|^2) u = \frac{l^2}{r^2}(A^2 u + |Au|^2 u) \qquad (۵)$$

حالت ناوردای مسأله که متناظر با جایگزینی $l = \circ$ در معادلهٔ بالاست به حالت *تقارن کروی* شهرت دارد. در این حالت موجنگاشت U در زمان t تنها به قدرمطلق بردار مکان x بستگی دارد و نه جهت آن.

با افزودن فرض متقارن بودن داده‌های کوشی، قضایای زیر را در باب همواری سراسری موجنگاشتها داریم.

قضیهٔ یک. *فرض کنید خمینهٔ ریمانی N در شرط زیر صدق کند*
$(C1)$ یک کنج سراسری یکامتعامد از میدانهای برداری هموار Ω_A، تعریف‌شده روی N، وجود دارد که توابع ساختاری آن، e^C_{AB}، که طبق رابطهٔ زیر تعریف می‌شوند همگی کراندار باشند: $[\Omega_A, \Omega_B] = e^C_{AB}\Omega_C$.
در این‌صورت، $\varepsilon_\circ > \circ$ وجود دارد چنانکه مسألهٔ کوشی برای موجنگاشت U که داده‌های آغازی آن $(U_\circ, U_1)$ دارای تقارن کروی بوده و انرژی آنها کمتر از $\varepsilon_\circ$ باشد دارای جوابی یگانه و ناوردا و هموار سراسری است [۳].

توضیح دربارهٔ شرط $(C1)$: از آنجا که وجود چنین کنجی از میدانهای برداری معادل با توازی‌پذیری خمینهٔ N است، ممکن است شرط فوق به‌نظر بسیار محدودکننده برسد ولی درواقع چنین نیست. می‌توان نشان داد که اگر خمینهٔ nبعدی N فشرده باشد می‌توان آن‌را به‌طور کلاً ژئودزیک در خمینهٔ دیگری چون $\bar{N}$ با بعد $2n$ نشاند به‌طوری که $\bar{N}$ در شرط فوق صدق کند. در این‌صورت با استفاده از این حقیقت که ترکیب یک نگاشت همساز با یک نگاشتِ کلاً ژئودزیک، خودنگاشتی است همساز، می‌بینیم که شرط فوق را می‌توان به‌سادگی برقرار کرد.

1. evolution equations

قضیهٔ دو. *فرض کنید خمینهٔ ریمانی N در شرط زیر صدق کند*
$(C2)$ اگر $K_{AB}(s,p)$ فرم بنیادین دوم متعلق به کرهٔ ژئودزیک به‌شعاع s حول نقطهٔ p در N و λ و Λ به‌ترتیب کوچکترین و بزرگترین مقدار ویژهٔ K_{AB} باشند آنگاه دو ثابت مثبت c و C وجود دارند چنانکه برای هر $s > \circ$ و هر $p \in N$ داریم

$$s\lambda \geq c \quad , \quad s\Lambda \leq C(1+s)$$

در این‌صورت برای جواب مسألهٔ کوشی برای موجنگاشت U که داده‌های آغازی آن $(U_\circ, U_1)$ دارای تقارن کروی باشند امکان تمرکز انرژی موضعی در یک نقطه وجود ندارد [۳].

توضیح دربارهٔ شرط $(C2)$: دیده می‌شود که شرط $(C2)$ صادق است هرگاه خمینهٔ N همه‌جا دارای انحنای [خمیدگی] نامثبت و کراندار از پایین باشد. ولی این شرط به‌خودی خود چیزی در مورد انحنا نمی‌گوید. چراکه فرم بنیادین دوم تنها به مشتقات اول متریک ریمانی بستگی دارد. بنابر نیمهٔ اول این شرط، فرم بنیادین دوم K_{AB} مثبت و معین است و بنابراین خمینهٔ N دارای نقطه‌های مزدوج نیست. در صورت لزوم، با صعود به خمینهٔ پوششی کامل $\bar{N}$ برای N می‌توان نقاط برشی را نیز حذف نمود. در این‌صورت نگاشت نمایی $\exp_p$ در هر نقطهٔ p یک وابرریختی [دیفئومورفیسم] خواهد بود و $(C2)$ بیانگر این است که خمینهٔ $\bar{N}$ محدبِ ژئودزیکی است. لازم به یادآوری است که تحدب خمینهٔ هدف شرطی کافی برای همواری نگاشتهای همساز، یعنی معادل بیضوی مسالهٔ موردبحث ماست.

قضیهٔ سه. *فرض کنید خمینهٔ ریمانی N^n دارای تقارن دورانی است، بدین معنی که دستگاه مختصات سراسری $(\varphi,\theta) \in \mathbb{R} \times S^{n-1}$ روی N وجود دارد چنانکه عنصر طول N در این مختصات به‌شکل زیر است*

$$ds^2 = d\varphi^2 + G^2(\varphi)\, \gamma_{AB}\, d\theta^A d\theta^B$$

که در آن γ_{AB} متریک استاندارد برای کرهٔ S^{n-1} است و G تابعی است هموار و فرد، $G(\circ) = \circ$ و $G'(\circ) = 1$. در این‌صورت، اولاً $\varepsilon_\circ > \circ$ وجود دارد چنانکه مسألهٔ کوشی برای موجنگاشت U که داده‌های آغازی آن $(U_\circ, U_1)$، lـیکسانورد باشند و انرژی آغازین آن کمتر از $\varepsilon_\circ$ باشد، دارای جوابی lـیکسانوردِ یگانه و هموار سراسری است. ثانیاً هرگاه تابع G در شرط زیر صدق کند جواب مسألهٔ کوشی برای U که داده‌های آغازی آن $(U_\circ, U_1)$، lـ یکسانورد بوده و انرژی آنها متناهی باشد هرگز دچار تمرکز انرژی موضعی نخواهد شد [۱۲، ۱۳، ۱۴]

$$\forall s > \circ, \qquad G(s) + sG'(s) > \circ \ : \ (G) \text{ شرط}$$

توضیح دربارهٔ شرط (G): این شرط که نخستین بار توسط گریلاکیس [۷] عنوان شد از شرط تحدب ژئودزیک ضعیفتر است چراکه هرگاه خمینهٔ ریمانی N دارای تقارن دورانی باشد تحدب آن معادل با این است که $G'(s) > \circ$، ولی خمینهٔ N می‌تواند محدب نباشد و در عین حال در شرط گریلاکیس صدق کند. قضیهٔ فوق نشان می‌دهد که با فرض این‌گونه تقارنها تحدب ژئودزیک شرط لازم برای همواری سراسری نیست.

۴. بروز تکینه

مسألهٔ موجنگاشت در ابعاد بالاتر از دو به اصطلاح «فرابحرانی» است و نمی‌توان انتظار داشت که مسائل کوشی در حالت کلی دارای جواب سراسرْ هموار باشند. مثال ناقض زیر نشان می‌دهد که با شروع کردن از یک دادهٔ آغازی کاملاً هموار در مدت زمانی متناهی می‌توان تکینه‌ای برای موجنگاشت $U:\mathbb{R}^{3,1}\to S^3$ ایجاد کرد ([۱۱] و [۱۵]). دستگاه معادلات چنین موجنگاشتی را با استفاده از مختصات نشانده در $\mathbb{R}^4$ می‌توان چنین نوشت

$$\Box U+(|U_t|^2-|\nabla U|^2)u=0,\ |U|=1,\ U\in\mathbb{R}^4$$

حال کافی است شرایط زیر را در زمان $t=-1$ در نظر بگیریم

$$\begin{cases}U(x,-1)=\phi(x)\\ U_t(x,-1)=x^i\partial_i\phi(x)\end{cases}$$

که در آن $\phi:\mathbb{R}^3\to S^3\subset\mathbb{R}^4$ به‌شکل زیر است

$$\phi(x)=\left(\frac{2x}{1+|x|^2},\frac{1-|x|^2}{1+|x|^2}\right)$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که جواب این مسألهٔ کوشی عبارت‌است از

$$U(x,t)=\phi(\frac{x}{-t})$$

و بنابراین U در زمان $t=0$ دچار تکینگی می‌شود بدین صورت که اگر $t\nearrow 0$، مشتقات فضایی U در $x=0$ به‌سمت بینهایت میل می‌کنند.

نگاشتی از فضای مینکوفسکی با مختصات (x,t) را که در واقع تنها به $\frac{x}{t}$ بستگی داشته باشد *خودمانند*[1] می‌خوانیم. مثال ناقض فوق را می‌توان به قضیهٔ زیر تعمیم داد.

قضیهٔ چهار. *فرض‌کنید خمینهٔ ریمانی سه‌بعدی N دارای عنصر طولی به‌شکل زیر باشد*

$$ds^2=d\varphi^2+G^2(\varphi)\,\partial_{AB}\,d\theta^A d\theta^B$$

که در آن γ_{AB} متریک استاندارد S^2 و G ثابتی است هموار و فرد، $G(0)=0$ و $G'(0)=1$. همچنین فرض‌کنید عدد $R>0$ وجود دارد چنانکه $G''(R)\neq 0$ و $G'(R)=0$. در این‌صورت مسألهٔ کوشی برای موجنگاشت $U:\mathbb{R}^{3,1}\to N$ دارای خانواده‌ای از جوابهاست که در مدت زمان متناهی دچار تکینگی از نوع خودمانند می‌گردند [۱۳].

اثبات قضیهٔ فوق بدین شکل است که قرار می‌دهیم $w=\frac{x}{|x|}$. بنابراین $w\in S^2$ و حال فرض زیر را برای موجنگاشتی چون $U:(\varphi,\theta):\mathbb{R}^{3,1}\to N$ در نظر می‌گیریم

$$\varphi=\varphi(|x|,t),\qquad \theta=\theta(w)$$

1. self-similar

سیستم معادلهٔ موجنگاشت حکم می‌کند که θ به‌عنوان نگاشتی از S^2 به S^2 یک نگاشت چندجمله‌ای همساز باشد، یعنی تحدید نگاشتی باشد از $\mathbb{R}^3$ به $\mathbb{R}^3$ که هر مؤلفه آن یک چندجمله‌ای همگن همساز از درجهٔ l باشد [۸]. چنین نگاشتی دارای چگالی انرژی ثابت است یعنی $|\nabla_\omega\theta|^2\equiv l(l+1)$. از طرف دیگر تابع φ باید در معادلهٔ زیر صدق کند

$$\varphi_{tt}-\varphi_{rr}-\frac{2}{r}\varphi_r+\frac{k}{r^2}f(\varphi)=0$$

که در آن $k=l(l+1)$ و $f(\varphi)=G(\varphi)G'(\varphi)$.

حال فرض می‌کنیم نگاشت φ خودشبیه باشد یعنی $\varphi=\varphi(r/t)$. در این‌صورت φ جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل عادی خواهد بود $\varphi''+\frac{2}{\rho}\varphi'-\frac{k}{\rho^2(1-\rho^2)}f(\varphi)=0$. این معادله دو جواب بدیهی دارد: $\varphi\equiv 0$ و $\varphi\equiv R$. به‌سادگی دیده می‌شود که یک جواب هموار نابدیهی برای این معادله باید دارای این مقادیر مرزی باشد: $\varphi(1)=R$ و $\varphi(0)=0$. اثبات وجود چنین جوابی با روش مستقیم وردشی و از طریق مینیمم‌سازی تابعکی صورت می‌گیرد که معادلهٔ فوق، معادلهٔ اویلر-لاگرانژ برای نقاط بحرانی آن باشد

$$E[\psi]=\frac{1}{2}\int_0^1\psi'^2+\frac{k}{\rho^2(1-\rho^2)}G^2(\varphi)\qquad\rho^2d\rho$$

ولی به‌دلیل وجود تکینگی $\rho=1$ در مخرج ابتدا «بازبهنجارش[1]» تابعک مزبور لازم می‌آید

$$\tilde{E}[\psi]=\frac{1}{2}\int_0^1\psi'^2+\frac{k}{\rho^2(1-\rho^2)}[G^2(\psi)-G^2(R)]\qquad\rho^2ds$$

نشان داده می‌شود که $\tilde{E}$ مقدار مینیمم خود را روی فضای تابعی H^1 با مقادیر مرزی داده‌شده اختیار می‌کند. سپس با استفاده از اصل ماکسیمم همواری جواب را به اثبات می‌رسانیم.

به‌همین طریق جستجو برای یافتن موجنگاشتهای خودشبیه در ابعاد بالاتر از سه، $m\geq 4$، منجر به حل معادلهٔ زیر می‌شود

$$\theta''+\left(\frac{m-1}{\rho}+\frac{(m-3)\rho}{1-\rho^2}\right)\theta'-\frac{k}{\rho^2(1-\rho^2)}f(\theta)=0 \qquad (6)$$

دیده می‌شود که برای $m\neq 3$ مساله پیچیده‌تر از سابق است چراکه از روی معادله نمی‌توان مقدار θ را به‌ازای $\rho=1$ حدس زد بلکه تنها یک شرط لازم برای همواری به‌دست می‌آید: $(m-3)\theta'(1)=kf(\theta(1))$.

همین‌طور با مشتقگیری متوالی از این معادله و جایگزینی $\rho=1$ شرطهای لازم دیگری برای همواری θ می‌توان به‌دست آورد. دیده می‌شود که هرگاه m عددی فرد باشد شرطهای فوق‌الذکر یک دستگاه جبری بسته برای مقادیر θ و مشتقات آن تا مرتبهٔ $\frac{m-3}{2}$ در نقطهٔ $\rho=1$ به‌دست می‌دهند که برای kی به‌اندازهٔ کافی بزرگ دارای جواب است، و بدین ترتیب با استفاده از روشهای کلاسیک نظریهٔ معادلات دیفرانسیل عادی می‌توان وجود جوابی هموار و نابدیهی برای معادلهٔ بالا را ثابت کرد [۲]. اما اگر m زوج باشد این

1. renormalization

روش دیگر کارساز نیست. در واقع برای $m = ۲$ از قبل می‌دانیم که معادلهٔ (۶) دارای جواب داخواه مانیست (چنانکه گفتیم در بعد $m = ۲$ هیچ مثالی از بروز تکینه برای موجنگاشتها نداریم.)

حال می‌خواهم چندکلمه‌ای دربارهٔ حالت $m = ۴$ این مسأله و برنامه‌ای که برای حل‌کردن آن دارم عنوان کنم. معادلهٔ (۶) را می‌توان به‌صورت یک دستگاه دینامیکی هموار در $\mathbb{R}^۳$ درآورد: ابتدا آن‌را به‌شکل یک دستگاه معادلات درجهٔ اول درمی‌آوریم

$$\begin{cases} \theta' = \eta \\ \eta' = \frac{k}{\rho^۲(۱-\rho^۲)} f(\theta) - \frac{m-۱-۲\rho^۲}{\rho(۱-\rho^۲)}\eta \\ \rho' = ۱ \end{cases}$$

و سپس با یک تعویض متغیرْ تکینه‌های $\rho = ۰$ و $\rho = ۱$ را رفع می‌کنیم (ترفند کانلی)

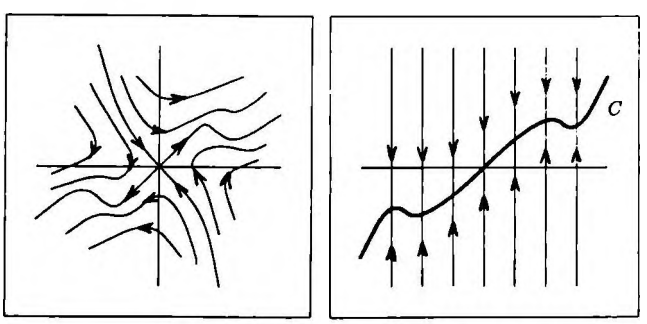
$$\begin{cases} \dot\theta = \eta\rho(۱-\rho^۲) \\ \dot\eta = \frac{k}{\rho} f(\theta) - (m-۱-۲\rho^۲)\eta \\ \dot\rho = \rho(۱-\rho^۲) \end{cases}$$

که در اینجا مشتقگیری نسبت به متغیر جدید t است چنانکه $\frac{d}{dt} = \rho(۱-\rho^۲)\frac{d}{d\rho}$. بالاخره با قراردادن $x = \eta\rho$ از دست آخرین مزاحم در مخرج نیز خلاص می‌شویم

$$\begin{cases} \dot\theta = x(۱-\rho^۲) \\ \dot x = kf(\theta) + x(\rho^۲ - m + ۲) \\ \dot\rho = \rho(۱-\rho^۲) \end{cases}$$

دستگاه فوق دارای سه صفحهٔ ناوردای $\rho = -۱$، $\rho = ۰$ و $\rho = ۱$ است و کلاً نسبت به انعکاس در صفحهٔ $\rho = ۰$ نیز متقارن است. بنابراین کافی است توجه خود را به بازهٔ $۰ \le \rho \le ۱$ محدود کنیم. حال m را مساوی ۴ قرار می‌دهیم. در این‌صورت تحدید نمای فاز[1] این دستگاه به صفحات ناوردای $\rho = ۰$ و $\rho = ۱$ به‌شکل زیر است

$$\rho = ۰ \begin{cases} \dot\theta = x \\ \dot x = kf(\theta) - ۲x \end{cases} \qquad \rho = ۱ \begin{cases} \dot\theta = ۰ \\ \dot x = kf(\theta) - x \end{cases}$$



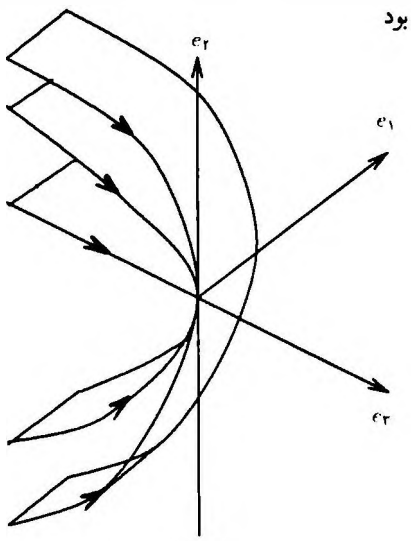
$\rho = ۰$ $\qquad$ $\rho = ۱$

1. phase potrait

می‌بینیم که جواب موردنظر برای معادلهٔ (۶) در اینجا یک اتصال هتروکلینیک [دگرتخت] از نقطهٔ $(۰,۰,۰)$ روی صفحهٔ $\rho = ۰$ به نقطه‌ای نامعلوم روی خم C است با معادلهٔ $x = kf(\theta)$ در صفحهٔ $\rho = ۱$. نکته اینجاست که خم C برای دستگاه فوق کاملاً جاذب است یعنی کلیهٔ مسیرهایی که صفحهٔ $\rho = ۰$ را ترک می‌کنند سرانجام روی C خواهند نشست ولی با نگاه‌کردن به مقادیر ویژهٔ قسمت خطی سیستم در $\rho = ۱$ می‌بینیم که اغلب این مسیرها با مماس‌شدن بر صفحهٔ $\rho = ۱$ به خم C می‌رسند و در نتیجه به‌عنوان جواب معادلهٔ اصلی ما در نقطهٔ $\rho = ۱$ دارای تکینه‌اند. این مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ متناظر با آنها در نقطهٔ $(a, kf(a), ۱)$ به‌شرح زیرند

$$\begin{aligned} \lambda_۱ &= ۰ & e_۱ &= (۱, kf'(a), ۰) \\ \lambda_۲ &= -۱ & e_۲ &= (۰, ۱, ۰) \\ \lambda_۳ &= -۲ & e_۳ &= (-kf(a), kf(a)(kf'(a)+۲), -۱) \end{aligned}$$

و بنابراین تصویر فاز قسمت خطی دستگاه در همسایگی این نقطه به شکل زیر خواهد بود



$\rho = ۱$

و از آنجا که $\frac{\lambda_۲}{\lambda_۳} = \frac{۱}{۲}$، در طول کلیهٔ مسیرهای منتهی به نقطهٔ $(a, kf(a), ۱)$، بجز یکی، داریم $x \sim C\sqrt{۱-\rho}$ و برای مسیر استثنایی داریم $x \sim C(۱-\rho)$. بنابراین، جواب موردنظر ما جزء مسیرهای استثنایی است. برای مجزا کردن این مسیرهای استثنایی از سایر مسیرها، به‌جای x مختص دیگری اختیار می‌کنیم که در واقع یک همسایگی کوچک خم C را می‌شکافد. قرار می‌دهیم

$$v = \frac{kf(\theta) - x}{۱-\rho^۲}$$

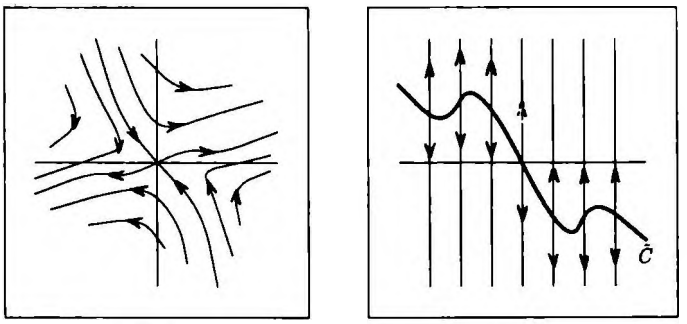
و در مختصات جدید داریم

$$\begin{cases} \dot\theta = [kf(\theta) - v(۱-\rho^۲)](۱-\rho^۲) \\ \dot v = (۲\rho^۲ - ۱)v + (kf'(\theta)+۱)[kf(\theta) - v(۱-\rho^۲)] \\ \dot\rho = \rho(۱-\rho^۲) \end{cases}$$

تحدید نمای فاز این دستگاه به صفحات ناوردای $\rho = ۰$ و $\rho = ۱$ به‌گونهٔ زیر است

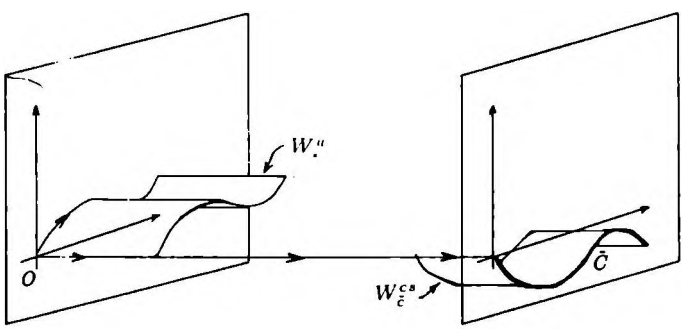
$$\rho = ۰ \begin{cases} \dot{\theta} = kf(\theta) - v \\ \dot{v} = -v + (kf'(\theta) + ۱)(kf(\theta) - \dot{v}) \end{cases}$$

$$\rho = ۱ \begin{cases} \dot{\theta} = ۰ \\ \dot{v} = v + (kf'(\theta) + ۱)kf(\theta) \end{cases}$$



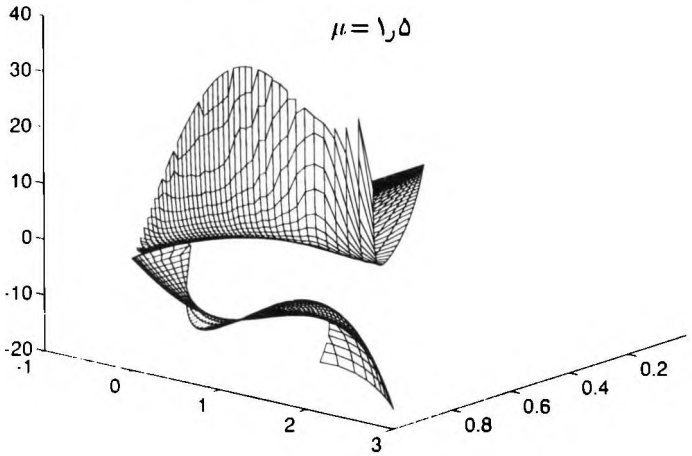
$\rho = ۰$ $\rho = ۱$

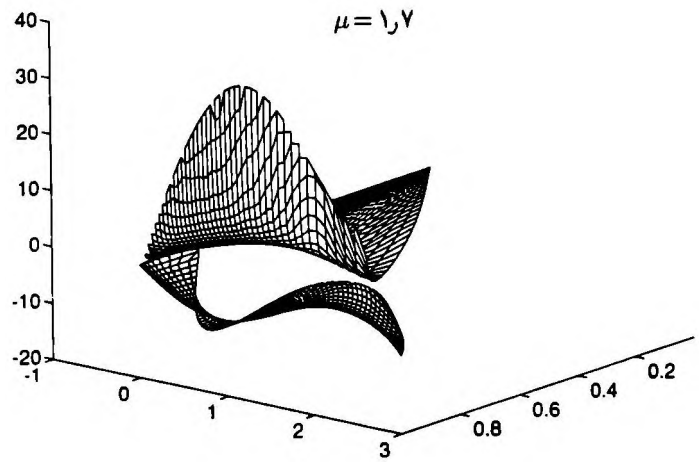
و بنابراین دیده می‌شود که در مختصات جدیدٔ نقاط واقع بر خم ناوردای $\tilde{C}$ نقاط زینی هستند و نه چاهکی. حال می‌توانیم برنامهٔ پیشین خود را مبنی بر یافتن اتصالی هتروکلینیک بین نقطهٔ $(۰,۰,۰)$ و نقطه‌ای نامعلوم روی خم $\tilde{C}$ به‌اجرا گذاریم: با محاسبهٔ مقادیر ویژهٔ قسمت خطی دستگاه حول $\rho = ۰$ و $\rho = ۱$ می‌بینیم که یک خمینهٔ ناپایدار دوبعدی $W^u_۰$ برای نقطهٔ $(۰,۰,۰)$ و یک خمینهٔ مرکزی-پایدار دوبعدی $W^{cs}_{\tilde{c}}$ برای خم $\tilde{C}$ می‌توان ساخت و وجود اتصال هتروکلینیک موردنظر معادل با این است که دو رویهٔ مزبور یکدیگر را در طول مسیری (بجز مسیر $\theta = v = ۰$ که متناظر با جواب بدیهی معادله است) قطع کنند.

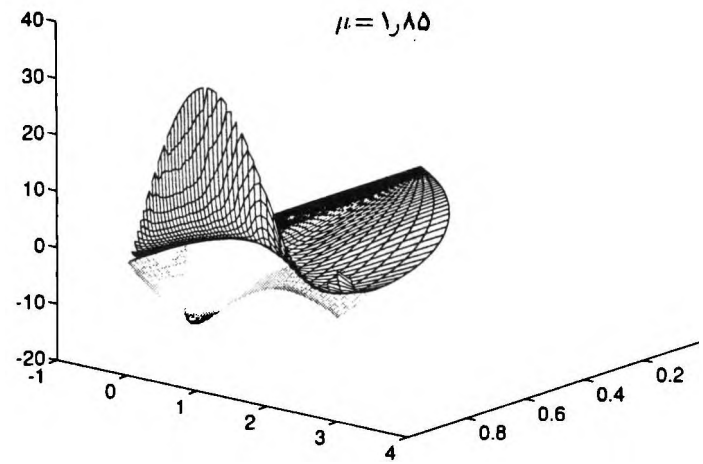


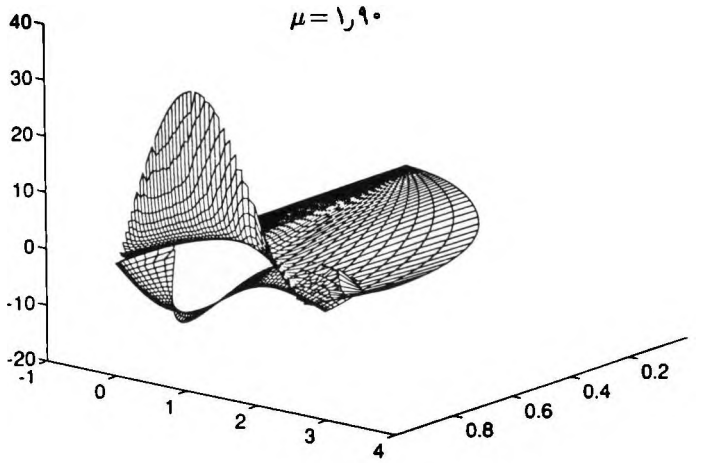
$$W^u \begin{cases} \lambda_۱ = -l - ۲ \\ \lambda_۲ = l \\ \lambda_۳ = ۱ \end{cases} \qquad W^{cs} \begin{cases} \lambda_۱ = ۱ \\ \lambda_۲ = ۰ \\ \lambda_۳ = -۲ \end{cases}$$

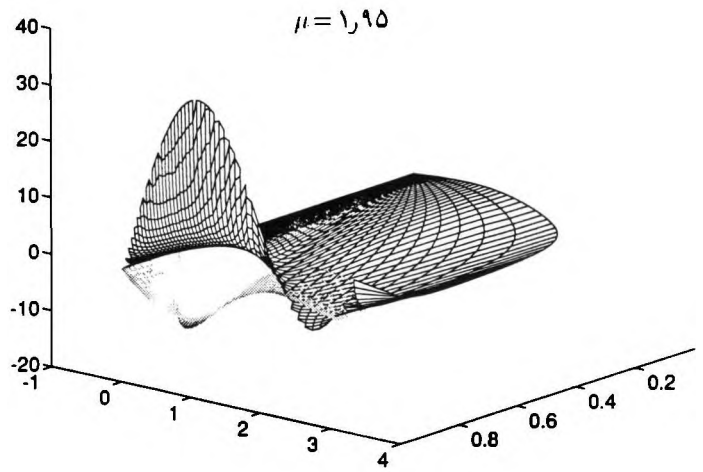
در پایان، نتایج آزمایشهای عددیِ انجام‌گرفته روی دستگاه بالا را به‌اطلاع خوانندگان می‌رسانم. برای این آزمایشها جملهٔ غیرخطی f را به این شکل در نظر گرفته‌ایم: $f(x) = x - \mu x^۳ + x^۵$ و پارامتر μ را بین ۱٫۵ تا ۲ تغییر داده‌ایم. همچنین $l = ۱$ و در نتیجه $k = ۲$ اختیار شده‌اند. محاسبات عددی مربوطه و رسم رویه‌ها در سه بعد همگی توسط برنامهٔ MATLAB انجام گرفته‌اند. دیده می‌شود که برای $\mu < ۱٫۸$ دو خمینهٔ ناوردای فوق‌الذکر یکدیگر را اصلاً قطع نمی‌کنند و برای $\mu > ۱٫۹$ این دو خمینه یکدیگر را در دو جا قطع می‌کنند که متناظر با وجود دو جواب نابدیهی برای معادلهٔ (۶) است. شکل رویه‌ها به‌ازای چند مقدار μ در زیر و در صفحهٔ بعد دیده می‌شود.

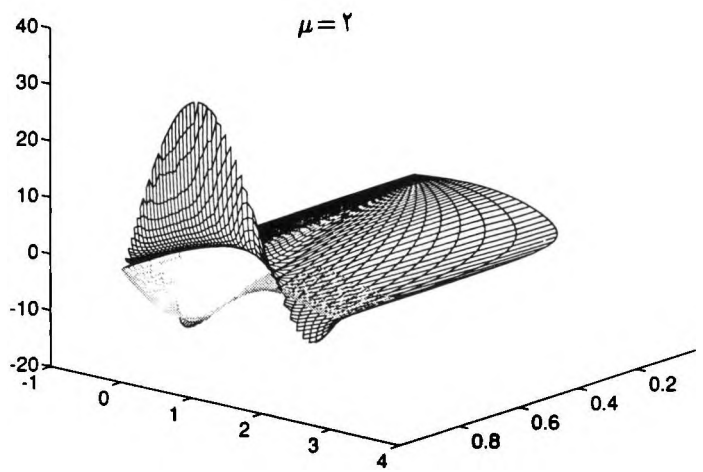












مراجع

1. B.K. Berger, P. Chrusciel, and V. Moncrief, "On asymptotically flat space-times with G_2-invariant Cauchy surfaces", submitted to *Annals of Physics*.
2. T. Cazenave, J. Shatah, and A. Tahvildar-Zadeh, "Harmonic maps of the hyperbolic space and development of singularities in wave maps and Yang-Mills fields", *manuscript in preparation* (1995).
3. D. Christodoulou and A. Tahvildar-Zadeh, "On the regularity of spherically symmetric wave maps", *Comm. Pure Appl. Math.*, **46** (1993) 1041-1091.
4. J. Eells and L. Lemaire, "A report on harmonic maps", *Bull. London Math. Soc.*, **10** (1978) 1-68.
5. J. Eells and L. Lemaire, "Another report on harmonic maps", *Bull. London Math. Soc.*, **20** (1988) 382-524.
6. M. Gell-Mann and M. Levy, "The axial vector current in beta decay", *Nuovo Cimento*, **16** (1960) 705-726.
7. M. Grillakis, "Classical solutions for the equivariant wave map in 1+2- dimensions", *preprint* (1991).
8. H. Karcher and J.C. Wood, "Nonexistence results and growth properties for harmonic maps & forms", *J. Reine Angew. Math.*, **353** (1989) 165-180.
9. T. Kato, "Nonlinear equations of evolution in Banach spaces", *Proc. Sympos. Pure Math.*, (2) **45** (1986) 9-23.
10. C.W. Misner, "Harmonic maps as models for physical theories", *Phys. Rev. D.*, (12) **18** (1978) 4510-4524.
11. J. Shatah, "Weak solutions and development of singularities in the $SU(2)\sigma$-model", *Comm. Pure. Appl. Math.*, **41** (1988) 459-469.
12. J. Shatah and A. Tahvildar-Zadeh, "Regularity of harmonic maps from the Minkowski space into rotationally symmetric manifolds", *Comm. Pure Appl. Math.*, **XLV** (1992) 947-971.
13. J. Shatah and A. Tahvildar-Zadeh, "On the Cauchy problem for equivariant wave maps", *Comm. Pure Appl. Math*, **47** (1993) 719-754.
14. J. Shatah and A. Tahvildar-Zadeh, "On the stability of stationary wave maps", *preprint* (1994).
15. N. Turok and D. Spergel, "Global texture and the microwave background", *Phys. Rev. Lett.*, (23) **64** (1990) 2736-2739.

* * * * * *

* ع. شادی تحویلدارزاده، دانشگاه پرینستن، آمریکا

نشر ریاضی، سال ۷، شمارهٔ ۱، صص ۱۵ـ۲۰

ساختار موج شوک در دینامیک سیالات

مجید محمودزادهٔ نیکنام

بین فیزیک و ریاضیات از دیرباز پیوندهای مختلفی وجود داشته است و این دو علم تأثیراتِ بسیار در یکدیگر گذاشته‌اند. مثلاً سریهای فوریه، نظریهٔ توزیع برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی، و ... ابتدا در قالب فیزیکی مطرح شده‌اند و سپس به‌صورت دقیق ریاضی بیان گشته‌اند.

بررسی پدیدهٔ شوک نیز از همین موارد است. این پدیده در فیزیک به وجود کمیاتی که تغییرات ناگهانی دارند وابسته است. مثلاً وقوع انفجار یک نوع شوک است. بررسی شوک و یا به‌عبارت دیگر بررسی کمیات ناپیوسته در فیزیک در مباحث مختلفی مطرح می‌شود. یکی از این مباحث دینامیک گازهاست. بررسی گازها در میدانهای مغناطیسی در حضور میدان الکتریکی خارجی، به‌اختصار MHD[1] یا MFD[2] نامیده می‌شود.

در این مقاله می‌خواهیم به‌طورکلی دربارهٔ جنبهٔ ریاضی «وجود ساختار برای موج شوک» و به‌طور اخص دربارهٔ «وجود ساختار برای موج شوک در محیط MFD» بحث کنیم.

۱. مفهوم شرطِ «وجود ساختار برای موج شوک»

معادله دیفرانسیل جزئی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0 \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \qquad (1)$$

که در آن $u(x,t)$ تابع مجهول معادله است، u_t یعنی $\frac{\partial u}{\partial t}$، و $u(x,0) = u_0(x)$ شرط آغازی است. در معادلهٔ (۱) داریم $u(x,t) \in \mathbb{R}^n$ و به‌ازای زیرمجموعهٔ باز Ω از $\mathbb{R}^n$، $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ یک تابع C^1 است و $u_0 : \mathbb{R} \to \Omega$ دارای انتگرال لبگ می‌باشد. این نوع معادلات در فیزیک از قوانین بقا نتیجه می‌شوند و عموماً توابع فیزیکیِ جواب آنها دارای ناپیوستگیهای ذاتی هستند. این امر باعث می‌شود که در حالت کلی، معادلهٔ (۱) جواب کلاسیک (مشتقپذیر) نداشته باشد. به‌همین دلیل برای آن، جواب ضعیف تعریف می‌شود.

۱. مخفف magnetohydrodynamics

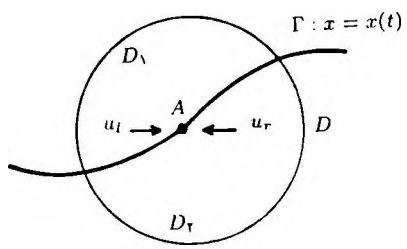
۲. مخفف magnetofluid dynamics

تعریف (جواب ضعیف). فرض کنیم در معادلهٔ (۱)، تابع $u_0(x)$ انتگرالپذیر (لبگ) باشد. در این‌صورت تابع انتگرالپذیر $u(x,t)$ را یک *جواب ضعیف* معادلهٔ (۱) گوییم هرگاه برای هر تابع $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با محمل[1] فشرده داشته باشیم

$$\iint_{t \geq 0} (\phi_t u + \phi_x f(u))dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x,0)dt = 0$$

اولین سؤالی که مطرح می‌شود، ارتباط بین جواب ضعیف و جواب کلاسیک معادلهٔ (۱) است. در واقع اگر معادلهٔ (۱) دارای جوابی کلاسیک باشد، آن جواب یک جواب ضعیف نیز خواهد بود. برعکس اگر تابع $u_0(x)$ یک تابع C^1 باشد و تابع C^1ی مانند $u(x,t)$ یک جواب ضعیف معادلهٔ (۱) باشد، آنگاه $u(x,t)$ یک جواب کلاسیک آن معادله نیز هست. برای ملاحظهٔ اثبات به [۲۰، صص ۲۴۶ـ۲۴۷] رجوع کنید. بر این اساس، می‌توان جواب ضعیف را تعمیم طبیعی جواب کلاسیک تصور کرد. (به تابلو صفحهٔ بعد نگاه کنید).

دومین سؤالی که می‌توان مطرح کرد، این است که جوابهای ضعیف چگونه‌اند و یا چه خصوصیاتی دارند؟ در پاسخ به این سؤال، در مورد برخی جوابهای ضعیف که روی خمهای هموار ناپیوستگی جهشی دارند مطالب زیر را می‌توان ذکر کرد. فرض کنیم $u(x,t)$ یک جواب ضعیف معادلهٔ (۱) باشد که در یک گوی D حول نقطهٔ $A = (x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ تعریف شده است. همچنین فرض کنیم خم هموار Γ در صفحهٔ xt به معادلهٔ $x = x(t)$، که از نقطهٔ A می‌گذرد، این گوی را به دو ناحیهٔ ساده‌ـهمبند مانند D_1 و D_2 تقسیم کند و تابع $u(x,t)$ در هریک از دو ناحیهٔ D_1 و D_2 جواب کلاسیک معادلهٔ (۱) بوده روی خم Γ دارای ناپیوستگی جهشی باشد (شکل ۱).



شکل ۱

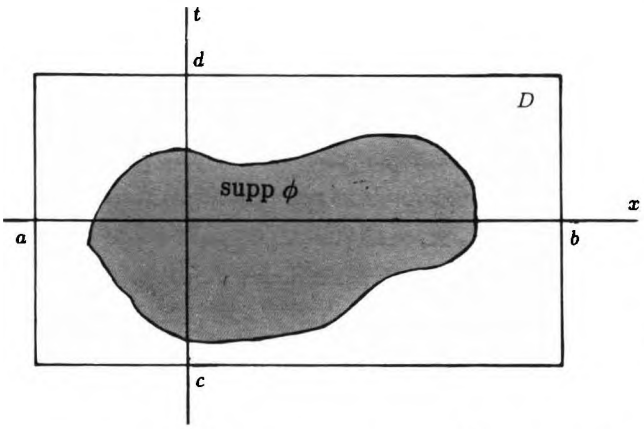
1. support

رابطهٔ جوابهای کلاسیک و جواب ضعیف

فرض کنیم در معادلهٔ (۱) تابع $u(x,t)$ یک جواب کلاسیک (یا مشتقپذیر) باشد. در این‌صورت داریم

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

همچنین تصور کنیم که $\phi : \mathbb{R}^2 \to R$ تابعی با محملِ مشمول در مستطیل $D = \{(x,t) : a < x < b, c < t < d\}$ باشد. محمل ϕ(suppϕ) در شکل دیده می‌شود. داریم



$$\phi\, u_t + \phi \cdot (f(u))_x = 0$$

پس

$$\int\int_{t\geq 0} (\phi u_t + \phi \cdot (f(u))_x)\, dA = 0$$

$$\int_a^b \int_0^d (\phi u_t) dt\, dx + \int_0^d \int_a^b \phi \cdot (f(u))_x\, dx\, dt = 0 \quad (*)$$

اکنون با به‌کارگیری انتگرالگیری جزءبه‌جزء خواهیم داشت

$$\int_a^b \int_0^d (\phi u_t) dt\, dx = \int_a^b \left\{ (\phi u)_0^d - \int_0^d \phi_t u dt \right\} dx = -\int_a^b \int_0^d \phi_t u dt\, dx$$
$$- \int_a^b \phi(x,0) u(x,0) dx = -\int\int_{t\geq 0} (\phi_t u) dt\, dx - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(x,0) dx$$

و نیز

$$\int_0^d \int_a^b \phi \cdot (f(u))_x\, dx\, dt = \int_0^d \left\{ (\phi f(u))_a^b - \int_a^b \phi_x f(u) dx \right\} dt$$
$$= -\int_0^d \int_a^b \phi_x f(u) dx\, dt = -\int\int_{t\geq 0} \phi_x f(u) dx\, dt$$

با استفاده از (*) و دو رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود که

$$-\int\int_{t\geq 0} (\phi_t u) dt\, dx - \int_{\mathbb{R}} \phi(x,0) u_0(x) dx - \int\int_{t\geq 0} (\phi_x f(x)) dx\, dt = 0$$

که از آن به‌سادگی نتیجه می‌گیریم

$$\int\int_{t\geq 0} (u_t \phi + \phi_x f(u)) dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x,0) u_0(x) dx = 0$$

در واقع هر جواب کلاسیک معادلهٔ (۱)، در رابطهٔ مطرح‌شده در تعریف جواب ضعیف، برای هر ϕ با محمل فشرده، صدق می‌کند.

آیا خم Γ تحت شرایط فوق می‌تواند هر خمِ همواری باشد؟ پاسخ منفی است. درواقع اگر قرار دهیم $\frac{dx}{dt} = s$ و $u_l = \lim_{x \to x(t)^-} u(x,t)$ و $u_r = \lim_{x \to x(t)^+} u(x,t)$ آنگاه باید داشته باشیم

$$s(u_l - u_r) = f(u_l) - f(u_r) \qquad (۲)$$

در اثبات لزوم برقراری تساوی (۲) که به «شرط پرش»[1] معروف است، از قضیهٔ گرین در صفحه استفاده شده است. این اثبات را می‌توانید در [۲۰، ص ۲۴۷] ببینید. تساوی (۲) در دینامیک گازها یک شرط کلاسیک است و شرط رنکین-هوگونیو[2] نامیده می‌شود.

سؤال دیگری نیز در اینجا مطرح می‌شود: «آیا جوابهای ضعیف در حالت کلی یکتا هستند؟» پاسخ این سؤال منفی است. بنابراین تشخیص جواب فیزیکی در حالت کلی با یافتن جوابهای ضعیف امکان‌پذیر نیست. لذا لازم است ضابطه‌ای برای یافتن جواب فیزیکی در میان جوابهای ضعیف ارائه شود. برگر[3] در سال ۱۹۴۰ معادلهٔ $u_t + uu_x = 0$، $u(x,t) \in \mathbb{R}$ را در ارتباط با مسألهٔ تلاطم[4] به‌دست آورد. بعدها این معادله به‌نام خود او معروف شد. برای بررسی معادلهٔ برگر، هوپف برای اولین بار در سال ۱۹۵۰ در [۱۳] معادلهٔ $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ را در نظر گرفت. μ در اینجا ضریب چسبندگی نامیده می‌شود. او سعی کرد جوابهای معادلهٔ برگر را به‌عنوان حد جوابهای معادلهٔ فوق هنگامی که $\mu \to 0$ بررسی کند. این روش بعدها به «روش چسبندگی» معروف گشت. در سال ۱۹۵۹ گلفاند در مقالهٔ مهم خود [۱۰] این روش را به‌طور کامل مورد بحث قرار داد و پایه‌های ریاضی آن را محکم ساخت. در سالهای ۱۹۷۰-۱۹۷۳ کانلی و اسموار در پنج مقالهٔ مشترک خود [۳-۷] دربارهٔ استفاده از این روش و توسعهٔ آن به محیطهای مختلف فیزیکی مطالبی بیان کردند. در نهایت، روش چسبندگی با به‌کارگیری برخی تقریبهای فیزیکی به پیدایش شرط «وجود ساختار برای موج شوک» منجر شد. برقراری این شرط، تضمین‌کنندهٔ وقوع فیزیکی شوک خواهد بود.

در محیط فیزیکی خاصی که معادلهٔ (۱) مدل آن است، اثر پارامترهای چسبندگی یا لزجی در قالب ماتریسی مانند B در معادلهٔ دیفرانسیل عادی زیر ظاهر می‌شود

$$B\frac{dv}{dt} = f(v) - f(u_r) - s(v - u_r) \qquad v \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (۳)$$

حال برای وقوع فیزیکی شوک در نقطهٔ A در شکل (۱) کافی است که معادلهٔ (۳) دارای یک مدار متصل‌کننده از نقطهٔ ساکن u_l به نقطه ساکن u_r باشد [۲۰]. توجه می‌کنیم که u_r و u_l نقاط ساکن معادلهٔ (۳) هستند یعنی طرف راست معادله به‌ازای این مقادیر v صفر می‌شود. این مطلب برای $v = u_r$ واضح است و برای $v = u_l$ از این فرض که جواب $u(x,t)$ در شرط پرش (۲) صدق می‌کند، نتیجه می‌گردد. از طرفی مدار متصل‌کننده برای معادلهٔ (۳) از نقطهٔ u_l به u_r به‌معنی تابعی مانند $x(t)$ است که در معادلهٔ (۳) صدق کند و حدود زیر نیز برقرار باشند

$$\lim_{t \to -\infty} v(t) = u_l \quad \& \quad \lim_{t \to +\infty} v(t) = u_r$$

1. jump condition 2. Rankine-Hugoniot 3. J. Burgers
4. turbulence

اکنون در صورت وجود مدار متصل‌کنندهٔ فوق گوییم موج شوک *دارای ساختار است* و در غیر این‌صورت گوییم موج شوک ساختار نمی‌پذیرد. برای بررسی بیشترِ دلایل فیزیکیِ وقوع موج شوک در صورت وجود ساختار برای آن، به [۲۰، فصل ۱۵، بخش c] رجوع نمایید.

پس از مطرح شدن شرط «وجود ساختار برای موج شوک» شناسایی وجود یا عدم وجود مدارهای متصل‌کننده برای دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی ضروری شد. کانلی در دههٔ ۱۹۷۰ نظریهٔ «مجموعه‌های ناوردای منزوی»[1] و شاخص تعمیم‌یافتهٔ مُرس[2] برای آنها را مطرح ساخت. این شاخص که تعمیم طبیعی شاخص مُرس بود به‌نام خود او یعنی شاخص کانلی نامگذاری شده است. پس از طرح شاخص کانلی، یکی از روشهای رایج و قوی برای اثبات وجود مدارهای متصل‌کننده به‌دست آمد. در زیر خلاصه‌ای از مطالب مربوط به شاخص کانلی را بیان می‌کنیم.

۲. شاخص کانلی

(دستگاه) معادله(های) دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}^n \\ &f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, f \in C^1(\Omega) \end{aligned} \qquad (۴)$$

که در اینجا Ω زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^n$ است.

طبق قضایای بنیادی معادلات دیفرانسیل، برای $x \in \Omega$ داده شده، بازهٔ (باز) ماکسیمال D_x در $\mathbb{R}$ وجود دارد که بر آن بازه، جوابی چون $\phi : D_x \to \Omega$ با شرط آغازی $\phi(0) = x$ تعریف شده است. در این نوشته، $\phi(t)$ را به $x.t$ نمایش می‌دهیم و نیز به‌ازای $J \subset D_x$، از نماد $x.J$ برای نمایش مجموعهٔ $\{x.t | t \in J\}$ استفاده می‌کنیم. منظور از مدار x، که به $O(x)$ نمایش داده می‌شود، مجموعهٔ $x.D_x$ است. این مدار را *کامل* می‌نامیم در صورتی‌که $D_x = \mathbb{R}$.

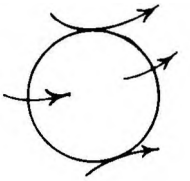
تعریف (همسایگی منزوی‌ساز)[3]. فرض کنیم N بستار یک مجموعهٔ باز در $\mathbb{R}^n$ است و برای هر $P \in \partial N$، tی متعلق به $\mathbb{R}$ یافت می‌شود که $P.t \notin N$، آنگاه N را یک *همسایگی منزوی‌ساز* برای (۴) می‌نامیم.

تعریف (بلوک منزوی‌ساز)[4]. فرض کنیم B بستار یک مجموعهٔ باز در $\mathbb{R}^n$ باشد و برای هر $P \in \partial B$، ε مثبتی یافت شود که داشته باشیم $P.(0,\varepsilon) \cap B = \phi$ یا $P.(-\varepsilon, 0) \cap B = \phi$. در این صورت B را یک *بلوک منزوی‌ساز* برای معادلهٔ (۴) می‌نامیم. اگر B یک بلوک منزوی‌ساز باشد منظور از مجموعهٔ خروجی آن مجموعهٔ زیر است که آن را با b^+ نمایش می‌دهیم

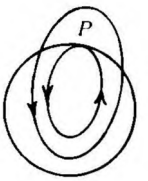
$$b^+ = \{P \in \partial B | \exists \varepsilon > 0 \ :\ P.(0,\varepsilon) \cap B = \phi\}$$

مثال. فرض کنیم در شکل (۲)، خمها نمایانگر مدارهای یک دستگاه معادلات

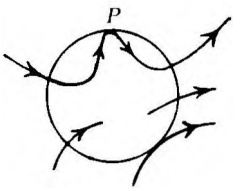
1. isolated invariant sets 2. Morse index
3. isolating neighbourhood 4. isolating block



الف) بلوک منزوی‌ساز است



(ب) همسایگی منزوی‌ساز نیست

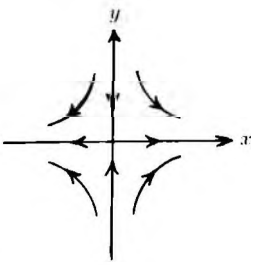


(پ) همسایگی منزوی‌ساز است

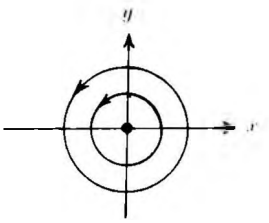
شکل ۲

دیفرانسیل در صفحه باشند. در این‌صورت، گوی شکل (پ) یک همسایگی منزوی‌ساز است ولی یک بلوک منزوی‌ساز نیست. این امر به جهت وجود نقطهٔ P روی مرز گوی است. گوی شکل (ب) یک همسایگی منزوی‌ساز نیست، و این هم به‌خاطر وجود نقطهٔ P است. همچنین گوی شکل (الف) یک بلوک منزوی‌ساز و در نتیجه یک همسایگی منزوی‌ساز خواهد بود.

تعریف (مجموعهٔ ناوردا)[1]. $I \subset \Omega$ را برای معادلهٔ (۴) *ناوردا* می‌نامیم هرگاه اجتماعی از مدارهای کامل معادله باشد.



(الف) $\{\circ\}$ ناوردای منزوی است



(ب) $\{\circ\}$ ناوردای منزوی نیست

شکل ۳

1. invariant set

تعریف (مجموعهٔ ناوردای منزوی). مجموعهٔ ناوردای I را منزوی می‌نامیم هرگاه در یک همسایگی منزوی‌ساز خود، ماکسیمال باشد. به‌بیان دیگر، باید همسایگیِ منزوی‌ساز N از I وجود داشته باشد چنانکه در N، هیچ زیرمجموعهٔ شامل I و بزرگتر از آن ناوردا نباشد.

مثال. در شکل (۳)، در قسمت (الف)، $\{\circ\}$ یک مجموعهٔ ناوردای منزوی است. در قسمت (ب)، مجموعهٔ $\{\circ\}$ ناوردا هست ولی ناوردای منزوی نیست.

تعریف (شاخص کانلی). فرض کنیم I یک مجموعهٔ ناوردای منزوی و B یک بلوک منزوی‌ساز آن برای معادلهٔ (۴) باشد. آنگاه اگر b^+ مجموعهٔ خروجی B باشد، ردهٔ هوموتوپی فضای خارج‌قسمت $\frac{B}{b^+}$ را که به $[\frac{B}{b^+}]$ نشان می‌دهیم، *شاخص کانلی*[1] I می‌نامیم و آن را به $h(I)$ نمایش می‌دهیم.

برای مطالعهٔ بیشتر در زمینهٔ فضای خارج‌قسمت و ردهٔ هوموتوپیِ فضاهای توپولوژیک به‌ترتیب به [۱۷، بخش ۱۱.۲] و به [۲۰، بخش ۳.۱۲] رجوع کنید. در ضمن اگر X یک فضای توپولوژیک باشد ردهٔ هوموتوپی فضای خارج‌قسمت $\frac{X}{X}$ را به $\bar{o}$ نمایش می‌دهیم. در اینجا باید توجه کنیم که هرچند شاخص کانلی به مجموعهٔ ناوردای منزوی I نسبت داده می‌شود، ولی محاسبهٔ آن از طریق یک بلوک منزوی‌ساز حول I صورت می‌گیرد. از طرفی هر مجموعهٔ ناوردای منزوی دارای بینهایت بلوک منزوی‌ساز است، در نتیجه باید عدم وابستگی شاخص کانلی به انتخاب بلوک منزوی‌ساز اثبات گردد. برای ملاحظهٔ اثبات این مطلب به [۲۰، ص۴۷۵، قضیهٔ ۲۹.۲۲] رجوع کنید. همچنین می‌توان نشان داد برای هر مجموعهٔ ناوردای منزوی و هر همسایگی منزوی‌ساز آن، یک بلوک منزوی‌ساز حول مجموعهٔ ناوردا و در واقع در همسایگیِ منزوی‌سازِ داده‌شده وجود دارد [۲۰].

مثال. معادلهٔ $\dot{x} = 2x$ را در $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. در اینجا می‌توان مجموعهٔ ناوردای منزوی $I = \{\circ\}$، بلوک منزوی‌ساز $B = [-1, 1]$ و مجموعهٔ خروجی آن $b^+ = \{-1, 1\}$ را در نظر گرفت. شاخص کانلی I یعنی $h(I)$ در اینجا همان ردهٔ هوموتوپی فضای خارج‌قسمت S^1 بر یک نقطهٔ آن است که آن را به Σ^1 نمایش می‌دهند.

همچنین اگر معادلهٔ $\dot{x} = x^2$ را در نظر بگیریم آنگاه برای $I = \{\circ\}$ و $B = [-1, 1]$ و $b^+ = \{1\}$ خواهیم داشت $h(I) = \bar{o}$.

تعریف (معادلهٔ شبه‌گرادیان)[2]. معادلهٔ (۴) را روی زیرمجموعهٔ باز U از Ω نسبت به تابع پیوستهٔ $g : U \to \mathbb{R}$ *شبه‌گرادیان* می‌نامیم هرگاه g روی مدارهای غیرثابت معادلهٔ (۴) واقع در U اکیداً صعودی باشد.

این نامگذاری از رفتار میدان گرادیان سرچشمه می‌گیرد. هرگاه $f : U \to \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد، معادلهٔ دیفرانسیل $\dot{x} = \mathrm{grad} f$ را در نظر بگیرید. اگر $x(t)$ یک جواب این معادله باشد، بنا به قاعدهٔ زنجیری داریم

$$\frac{d(f(x(t))}{dt} = |\mathrm{grad} f(x(t))|^2$$

که چنانچه $x(t)$ یک جواب ثابت نباشد، همواره مثبت است یعنی تابع f در طول جوابهای غیرثابت، اکیداً صعودی است.

1. Conley Index
2. gradient-like equation

مثال. معادلهٔ دیفرانسیل عادی $\dot{x} = x^2$، $x \in \mathbb{R}$ نسبت به تابع $g(x) = x$ روی $\mathbb{R}$ شبه‌گرادیان است زیرا اگر $x(t)$ یک جواب غیرثابت معادلهٔ فوق باشد (یعنی $x \neq 0$) خواهیم داشت

$$\frac{dg(x(t))}{dt} = 1\dot{x} = x^2 > 0$$

این معادله نسبت به تابع $g(x) = \frac{x^2}{2}$ حتی گرادیان است زیرا گرادیان (مشتق) g دقیقاً برابر طرف راست معادله است. همچنین دستگاه زیر

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^2 \\ \dot{y} = -x \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

(اگرچه یک دستگاه گرادیان نیست) روی $\mathbb{R}^2$ نسبت به تابع $g(x,y) = x^2 + y^2$ شبه‌گرادیان است زیرا اگر $x(t)$، $y(t)$ یک جواب غیرثابت معادلهٔ فوق باشد آنگاه

$$\begin{aligned} \frac{dg(x(t),y(t))}{dt} &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \\ &= 2x(y + x^2) + 2y(-x) = 2x^4 > 0 \end{aligned}$$

در زیر قضیهٔ مهمی مطرح می‌کنیم که در اثبات وجود مدارهای متصل‌کننده از آن بهره می‌گیرند.

قضیهٔ اصلی (وجود مدار متصل‌کننده). *فرض کنیم $N \subset \Omega$ یک همسایگی منزوی‌ساز برای معادلهٔ (۴) باشد و معادلهٔ (۴) روی آن نسبت به تابع پیوستهٔ g شبه‌گرادیان باشد. همچنین فرض کنیم N دقیقاً شامل دو نقطهٔ ساکن x_1 و x_0 باشد که حداقل یکی از آنها ناتبهگن است. اگر I مجموعهٔ ناوردای منزوی در N باشد و $h(I) = \bar{0}$، آنگاه یک مدار متصل‌کننده بین x_1 و x_0 در N موجود است.*

(نقطهٔ ساکن x را *ناتبهگن* می‌نامیم هرگاه هیچ یک از مقادیر ویژهٔ بخش خطی معادله حول آن صفر نباشند.)

برای ملاحظهٔ اثبات این قضیه به [۲۰، قضیهٔ ۳۳.۲۲] یا [۲] رجوع کنید.

۳. مدلهای فیزیکی

در این قسمت می‌خواهیم به بررسی مدل ریاضی موج شوک در مدلهای فیزیکی بپردازیم. بررسی رفتارگازها در میدانهای مغناطیسی اولین‌بار توسط ژرمن ریاضیدان فرانسوی در سال ۱۹۵۹ انجام شد [۱۱]. وی وجود موجهای سریع و کند را تحت شرایطی اثبات نمود. بعد از او به‌ترتیب در سال ۱۹۶۳ اندرسن در [۱] و در سال ۱۹۶۵ کولیکوفسکی و لیوبیموف در [۱۶] و در سال ۵ـ۱۹۷۴ کانلی و اسمولر در [۸] و [۹] مطالبی را در زمینه MFD مطرح کردند. نهایتاً در سال ۱۹۸۲ حصارکی در تز دکتری خود بحث کاملی در زمینهٔ ساختار برای موجهای شوک در MFD مطرح کرد و مسائل باقیمانده در این زمینه در یک مدل خاص را حل نمود که در سال ۱۹۸۴ در [۱۴] به چاپ رسید.

حال می‌خواهیم یک مدل ریاضیِ دینامیک سیالات در میدانهای مغناطیسی را بررسی کنیم. در واقع مسألهٔ ریاضی مربوط به وجود ساختار موج شوک در مدلی از دو سیال در یک میدان مغناطیسی، به‌صورت یک دستگاه معادلهٔ دیفرانسیل چهارمجهولی که به چهار پارامتر چسبندگی وابسته است، بیان شده است. در زیر به بررسی وجود مدارهای متصل‌کننده بین نقاط ساکن آن می‌پردازیم.

برای مدل MFD فوق دستگاه مربوط به وجود ساختار موج شوک به‌صورت زیر است که در [۱۴، بخش ۲] آمده است

$$\begin{aligned} (\alpha V)\dot{B} &= y \\ (\alpha V)\dot{y} &= \varepsilon + (V - \delta^2)B - \frac{\sigma^{-1}}{\alpha V}y \\ \eta\dot{V} &= \frac{1}{2}B^2 + V - J + P(V,T) \qquad (5) \\ k\dot{T} &= -\frac{1}{2}(V - \delta^2)B^2 - \frac{1}{2}V^2 - \varepsilon B + JV + \frac{1}{2}y^2 \\ &\quad + e(V,T) - C \end{aligned}$$

در دستگاه فوق، $(\alpha, \eta, k, \sigma^{-1})$ پارامترهای چسبندگی، V حجم ویژه، T درجهٔ حرارت، $P(V,T)$ و $e(V,T)$ به‌ترتیب توابع فشار و انرژی داخلی در مدل فیزیکی هستند. B نمایانگر شدت میدان مغناطیسی و ε معرف شدت میدان الکتریکی خارجی‌اند. δ و J و C ثابت هستند. البته توابع $P(V,t)$ و $e(V,T)$ و تابع دیگری به‌نام انتروپی $S(V,T)$ باید در شرایط خاصی صدق کنند.

وجود مدارهای متصل‌کننده بین نقاط ساکن دستگاه (۵) معادل وجود ساختار برای موجهای شوک در مدل MFD فوق است. لذا ابتدا قضیه‌ای در مورد تعداد نقاط ساکن دستگاه (۵) می‌آوریم. نخست توابع

$$\begin{aligned} &V - J + P(V, T_1(V)) = 0 \\ &g(V) = \frac{1}{2}\varepsilon^2(V - \delta^2) + V - J \\ &\ell(V) = -\frac{3}{2}V^2 + (2J + \delta^2)V - J\delta^2 \\ &\varphi(V) = -\frac{1}{2}\varepsilon^2(V - \delta^2)^{-1} + \frac{1}{2}V^2 - VJ - e(V, T_1(V)) \end{aligned}$$

را معرفی می‌کنیم.

در تساویهای فوق توابع g و ℓ و φ به‌صورت صریح و تابع $T_1(V)$ به‌صورت ضمنی تعریف شده‌اند. حال اگر J به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، معادلهٔ $g(V) = 0$ دارای سه ریشهٔ w_i، $i = 2,3,4$ است که در نابرابری $0 < w_2 < \delta^2 < w_3 < w_4$ صدق می‌کنند. حال می‌توان ثابت کرد:

قضیه. *به‌ازای Jی مثبتِ به‌اندازهٔ کافی بزرگ، $\delta \neq 0$، ε مثبتِ ثابت، و شرطی مناسب روی φ، بازه‌ای وجود دارد که اگر C در آن بازه باشد، آنگاه دستگاه (۵) چهار نقطه ساکن دارد.*

اثبات در [۲۱، صص ۴۱ و ۴۸] آمده است.

پس برای $\varepsilon > 0$ تحت شرایط فوق، دستگاه (۵) دارای چهار نقطهٔ ساکن $u_i = (B_i, y_i, V_i, T_i)$ به‌ازای $0 \leq i \leq 3$ است. اکنون وجود مدارهای متصل‌کننده بین u_iهای مختلف به معنی وجود ساختار برای موجهای شوک مختلف در مدل MFD فوق است. این موجهای شوک نامهای متفاوتی دارند که در زیر به آنها اشاره می‌کنیم

۱) اگر $u_\ell = u_0$ و $u_r = u_1$، شوک را شوک سریع[1] می‌نامند.

۲) اگر $u_\ell = u_2$ و $u_r = u_3$، شوک را شوک کند[2] می‌نامند.

۳) اگر $u_\ell = u_i$ و $u_r = u_j$ به‌ازای $i = 0$ یا $i = 1$ و $j = 2$ یا

1. fast shock 2. slow shock

$j = ۳$ شوکها را *شوکهای میانی*[1] می‌نامند.

پیرت در ۱۹۶۴ در [۱۸] و [۱۹] مدل MFDفوق را مطرح نمود و ثابت کرد که اگر $\delta > ۰$ و $\eta = k = ۰$ آنگاه شوکهای سریع و کند دارای ساختار هستند. ژرمن نیز در سال ۱۹۶۷ در [۱۲] همین مدل را هنگامی‌که $\delta = ۰$ و $\eta = k = ۰$، بررسی کرد. حصارکی نیز در ۱۹۹۱ در [۱۵] این دستگاه را بررسی کرد و نشان داد که تحت مقادیر مختلف پارامترهای چسبندگی، شوکهای سریع و کند ساختار می‌پذیرند و به‌علاوه شوکهای میانی به‌طور فیزیکی به‌وقوع نمی‌پیوندند.

اکنون برای آشنایی خواننده با شیوه به‌کارگیری نظریهٔ کانلی در اثبات وجود ساختار برای موج شوک در مدل MFD، اشاره‌ای اجمالی به طرح اثبات وجود مدارهای متصل‌کننده بین نقاط ساکن $u_۱$ و $u_۰$ (موج سریع) و $u_۳$ و $u_۲$ (موج کند) می‌کنیم. این اثبات با استفاده از قضیهٔ اصلی مذکور در فوق انجام می‌شود. البته برقراری شرایط قضیه در چهار مرحله به‌صورت زیر اثبات می‌شود:

۱) ابتدا ثابت می‌شود که دستگاه (۵) روی

$$D = \{u \in \mathbf{R}^۴ : V > ۰, T > ۰\}$$

شبه‌گرادیان است. برای ملاحظهٔ این اثبات به [۱۵، قضیهٔ ۱.۳] مراجعه کنید.

۲) سپس ثابت می‌شود که نقاط ساکن دستگاه (۵) همگی ناتبهگن هستند. برای ملاحظهٔ اثبات به [۱۵، قضیهٔ ۵.۲] رجوع کنید.

۳) در مرحلهٔ بعد ثابت می‌شود که اعداد $a > ۰$ و $M > ۰$ موجودند به‌قسمی که مجموعهٔ $N = \{u \in \mathbf{R}^۴ : |u| \leq M, V \geq a, T \geq a\}$ یک همسایگی منزوی‌ساز برای دستگاه (۵) شامل کلیهٔ نقاط ساکن است. همچنین برای cی ثابت،عدد $k(c)$ چنان یافت می‌شود که مجموعه‌های

$$N_{۰۱} = \{u \in \mathbf{R}^۴ : V > ۰, T > ۰, p(u) < k(c)\} \cap N$$

$$N_{۲۳} = \{u \in \mathbf{R}^۴ : V > ۰, T > ۰, P(u) > k(c)\} \cap N$$

هر دو، همسایگیهای منزوی‌ساز برای دستگاه (۵) هستند و $\{u_۰, u_۱\} \subset N_{۰۱}$، $\{u_۲, u_۳\} \subset N_{۲۳}$. برای ملاحظهٔ اثبات به [۱۵، قضیهٔ ۱.۴] رجوع نمایید.

۴) در مرحلهٔ آخر، باتوجه به سه قسمت فوق واضح است که شرایط قضیهٔ اصلی انتهای بخش دوم این مقاله فراهم‌اند و لذا طبق آن قضیه یک مدار متصل بین $u_۰$ و $u_۱$ (موج سریع) و یک مدار متصل‌کننده بین $u_۲$ و $u_۳$ (موج کند) موجود است.

شایان ذکر است که: ۱) توابع $P(V,T)$ و $c(V,T)$ توابع خاصی نیستند و ممکن است از یک سیال به سیال دیگر تغییر کنند و فقط برخی از خواص آنها در دست است؛ و ۲) پارامترهای چسبندگی $(\alpha, \eta, k, \sigma^{-1})$ می‌توانند مقادیر متفاوتی اختیار کنند و به‌خصوص بررسی حدی آنها یعنی بررسی وضعیت آنها در صورت میل کردن به صفر موردنظر است؛ ۳) ثابتهای σ و J و C و شدت میدان الکتریکی، ε، قابل‌تغییر هستند. بررسی تفصیلی این عوامل از حوصلهٔ این مقاله خارج است.

در حال حاضر تحقیق در زمینهٔ وجود ساختار برای موجهای شوک در مدلهای مختلف فیزیکی همچنان ادامه دارد. دلیل این امر آن است که در مدلهای فیزیکی مختلف، دستگاههای دیفرانسیلِ عادیِ مطروحه از نظر معادلات و نیز از نظر رتبه با دستگاه (۵) متفاوت‌اند. و لذا اثبات وجود موج شوک در هر مدل فیزیکی موکول به اثبات وجود مدار متصل‌کننده برای دستگاه معادلات مربوطه خواهد بود. به‌خصوص مسألهٔ وجود ساختار موج شوک در مدلهای MFD هرگاه سیال قبل از وقوع شوک و بعد از وقوع شوک از قوانین ترمودینامیکی متفاوتی پیروی کند حل‌نشده باقی‌مانده است.

1. intermediate shocks

سپاسگزاری. نویسندهٔ مقاله از راهنماییهای آقای دکتر محمود حصارکی کمال تشکر را دارد.

مراجع

1. J.E. Anderson, *MHD Shock Waves*, MIT Press, Cambridge, Mass (1963).
2. C. Conley, *Isolated Invariant Sets and Morse Index*, Amer. Math. Soc., Providence (1978).
3. C. Conley, and J. Smoller, "Viscosity matrices for two-dimensional nonlinear hyperbolic systems", *Comm. Pure Appl. Math.*, **23** (1970) 867-884.
4. C. Conley, and J. Smoller, "Shock waves as limits of progressive wave solutions of higher-order equations", *Comm. Pure Appl. Math.* **24** (1971) 459-472.
5. C. Conley, and J. Smoller, "Shock waves as limits of progressive wave solution of higher-order equations, II", *Comm. Pure Appl. Math.* **25** (1972), 131-146.
6. C. Conley, and J. Smoller, "Viscosity matrices for two-dimentional nonlinear hyperbolic systems, II", *Amer. J. Math.*, **94** (1972) 631-650.
7. C. Conley, and J. Smoller, "Topological methods in the theory of shock waves", *Proc. Sympos. Pure Math.*, **23** (1973) 293-302, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
8. C. Conley, and J. Smoller, "On the structure of magneto hydrodynamic shock waves", *Comm. Pure Appl. Math.*, **28** (1974) 367-375.
9. C. Conley, and J. Smoller, "On the structure of magnetohydrodynamic shock waves, II", *J. Math. Pures et Appl.*, **54** (1975) 429-444.
10. I. Gelfand, "Some problems in the theory of quasilinear equations", *Usp. Mat. Nauk.*, **14** (1959) 87-158; English transl. in *Amer. Math. Soc. Transl. ser*, **2** (1963) 295-381.
11. P. Germain, "Contribution à la thèorie des ondes de choc en magné to dynamique des fluides", ONERA publ. No. 97 (1959).
12. P. Germain, "Shock waves, jump relations and structure advances", *Appl. Mechanics*, **12** (1972) 131-194.
13. E. Hopf, "The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. *Comm. Pure Appl. Math.*, **3** (1950) 201-230.
14. M. Hesaraki, "The structure of shock waves in magnetohydrodynamics", *Memoirs of AMS*, (302) **49** (1984).
15. M. Hesaraki, "The structure of MFD shock waves in a model of two fluids", *Nonlinearity* **6** (1993) 1-24.
16. A. Kulikovskiy, and G. Lyubimov, *Megnetohydrodynamics*, Addison-wesley, Reading (1965).
17. J.R. Munkres, *Topology A First Course*, Prentice-Hall (1975). [ترجمهٔ فارسی: جیمز ر. مانکرز. *توپولوژی، نخستین درس*.ترجمهٔ یحیی تابش، ابراهیم صالحی، جواد لآلی، نادر وکیل. تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۶.]
18. R. Peyret, "Sur la structure du choc lent dans un schéma à deux fluides non dissipatif *C.R. Acad. Sci. Paris*, **258** (1964) 2973-2976.
19. R. Peyret, "Sur la structure du choc lent dans un schéma à deux fluides avec dissipation *C.R. Acad. Sci. Paris*, **258** (1964) 3178-3181.
20. J.A. Smoller, *Shock Waves and Reaction Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1983).
۲۱. م.م. نیکنام. «ساختمان موج شوک در یک مدل فیزیکی خاص». پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد. تربیت مدرس، تهران (۱۳۷۳).

نشر ریاضی، سال ۷، شمارهٔ ۱، صص ۲۱-۲۴

گزارشی از اتصال ایران به شبکه‌های کامپیوتری جهانی

ابراهیم نقیب‌زادهٔ مشایخ*

مقدمه

یکی از پیشرفته‌ترین روشهای دستیابی به اطلاعات علمی و برقراری ارتباط بین محققان کشورهای مختلف، استفاده از شبکه‌های کامپیوتری است که امروز در بسیاری از مراکز علمی وتحقیقاتی جهان معمول شده است. توانایی روزافزون کامپیوتر در جستجو، جمع‌آوری، دسته‌بندی، تجزیه و تحلیل، و انتقال مقادیر زیادی از اطلاعات، کارایی و سودمندی چنین شبکه‌هایی را دائماً و به‌سرعت افزایش می‌دهد. سهولت دسترسی به خدمات اطلاعاتی جدیدتر و گسترده‌تر، و برقراری ارتباطِ آسان با سایر محققان نیز از مزایای این شبکه‌هاست. شایان ذکر است که با اتصال به هر نقطهٔ این شبکه‌ها می‌توان از امکانات کلیهٔ مراکز دیگرِ موجود در آنها نیز بهره‌مند شد.

در این مقاله، ضمن آشنایی با خدمات شبکه‌های کامپیوتری جهانی مخصوصاً شبکهٔ آموزشی و پژوهشی اروپا و شبکهٔ اینترنت، به‌چگونگی اتصال مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات به‌عنوان نمایندهٔ ایران در این دو شبکه پرداخته می‌شود و وضعیت فعلیِ اتصالات درونْ کشوریِ این مرکز نیز تشریح خواهد شد.

۱. شبکهٔ کامپیوتری چیست؟

تعدادی کامپیوتر که بتوانند با رعایت قراردادهای مشترک روی خطوط مواصلاتی تبادل اطلاعات کنند، تشکیل یک *شبکهٔ کامپیوتری* می‌دهند. به هر کامپیوتر مستقل شبکه، گره (node) گفته می‌شود. از کامپیوترهای شخصی کوچک گرفته تا کامپیوترهای بزرگ با چندین کاربر، می‌توانند گره شبکه باشند. شبکهٔ کامپیوتری گاه کامپیوترهای موجود در یک دانشکده یا مرکز پژوهشی را در بر می‌گیرد. به چنین شبکه‌ای که فاصلهٔ بین گرههای مختلف در آن حداکثر از چندصد متر تجاوز نمی‌کند، *شبکهٔ محلی* (Local Area Network یا به اختصار LAN) می‌گوییم. ولی گاه کامپیوترهای شبکه در شهرها، کشورها، یا حتی قاره‌های مختلف پراکنده‌اند، و شبکه را شبکهٔ گسترده (Wide Area Network یا WAN) می‌گوییم. هر شبکهٔ گسترده معمولاً نامی دارد که آن را از سایر شبکه‌ها متمایز می‌سازد، مانند بیتنت (BITNET)، اینترنت (Internet)، و یا اِرن (EARN). تفاوت شبکه‌های گستردهٔ گوناگون عمدتاً در قراردادهای تبادل اطلاعات، شیوه‌های نشانی‌دهی، تکنولوژی مواصلاتی، تسهیلات عرضه شده، و نحوهٔ ادارهٔ آنهاست. می‌توان شبکه‌های محلی یا گسترده را نیز با یکدیگر مرتبط ساخت و شبکه‌ای از شبکه‌ها تشکیل داد. به این عمل اصطلاحاً *ترکیب شبکه‌ها* (Internet working) گفته می‌شود. برای ترکیب شبکه‌های گوناگون که هر کدام احیاناً قراردادهای متفاوتی را در تعریف ساختار داده‌هایِ مبادله‌شونده به‌کار می‌برند، کامپیوترهایی بین هر دو شبکه حائل قرار داده می‌شود که قراردادهای یکی را برای دیگری به‌اصطلاح ترجمه می‌کند. کامپیوترهای حائل را *دروازه* (Gateway) می‌نامند.

۲. آشنایی با چند شبکهٔ گستردهٔ مهم

۱.۲ شبکهٔ بیتنت

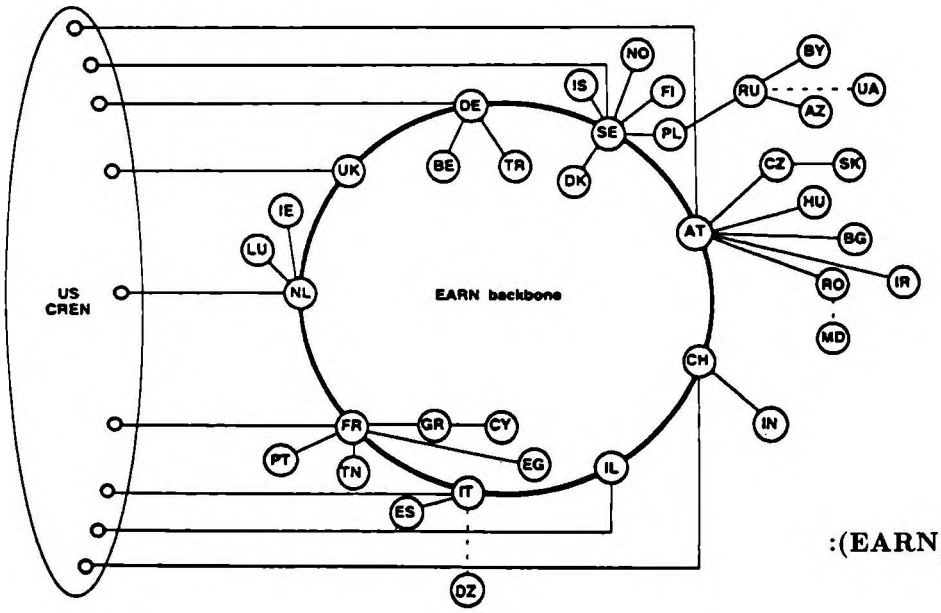
پروژهٔ بیتنت در بهار ۱۹۸۱ جهت برقراری ارتباطات کامپیوتری بین دانشگاه ییل و دانشگاه شهری نیویورک با استفاده از پروتکل جدید NJE آغاز شد و طی یک‌سال قلمرو این شبکه به کالیفرنیا رسید. تا پایان سال ۱۹۸۴ بالغ بر ۱۰۰ مؤسسهٔ عضو این شبکه بودند و در سال ۱۹۸۹ تعداد اعضای آن به ۵۰۰ مؤسسه رسید.

شبکهٔ بیتنت نخستین شبکهٔ گستردهٔ بین‌المللی است و در حال حاضر تقریباً ۱۴۰۰ سازمان در ۴۹ کشور به منظور تبادل اطلاعات علمی-تحقیقاتی از طریق این شبکه به‌یکدیگر متصل‌اند. هم‌اکنون بالغ بر ۳۰۰ فهرست موضوعی در این شبکه وجود دارد که‌اطلاعات ارزشمندی را دربارهٔ غالب عناوین علمی در اختیار اعضا قرار می‌دهد.

۲.۲ شبکهٔ اینترنت

سابقهٔ راه‌اندازی شبکهٔ اینترنت به شبکهٔ دیگری به‌نام آرپانت (Arpanet) باز می‌گردد. آرپانت یک شبکهٔ آزمایشی بود که به‌عنوان پروژه‌ای از طرف «آژانس پروژه‌های تحقیقاتی پیشرفته» وابسته به وزارت دفاع امریکا از سال ۱۹۷۶ آغاز به‌کارکرد. طی دههٔ ۷۰، آرپانت از یک پروژهٔ آزمایشی به پروژه‌ای فراگیر مبدل شد و ضمن به‌کارگیری ارتباطات ماهواره‌ای، رفته‌رفته شکل یک شبکهٔ گسترده را به‌خود گرفت.

گام بعدی در شکل‌گیری اینترنت، قبول پروتکل TCP/IP به‌عنوان پروتکل استاندارد برای تبادل اطلاعات از طرف وزارت دفاع بود (سال ۱۹۷۸). در سال ۱۹۸۳، نخستین شبکهٔ بین‌المللی میلنت (Milnet) که یک شبکهٔ نظامی بود با همکاری آژانس ارتباطات وزارت دفاع آمریکا و دانشگاه استنفرد بر اساس مدل TCP/IP دایر شد. از همین زمان بسیاری از کمپانیها اقدام به تولید تجهیزات همساز با TCP/IP کردند و این پروتکل رفته رفته به متداولترین پروتکل ارتباطی بدل شد، به‌طوری‌که امروزه به‌طور گسترده در سطح بین‌المللی مورد استفاده قرار می‌گیرد.



شکل ۱

شبکهٔ آموزشی و پژوهشی اروپا (EARN): نمودار اتصال کشورهای عضو

علامت اختصاری کشورهای عضو شبکه							
AT	اتریش	DZ	الجزایر	IR	ایران	RU	روسیه
AZ	آذربایجان	EG	مصر	IS	ایسلند	SE	سوئد
BE	بلژیک	ES	اسپانیا	IT	ایتالیا	SK	اسلواک
BG	بلغارستان	FI	فنلاند	LU	لوکزامبورگ	TN	تونس
BY	روسیهٔ سفید	FR	فرانسه	MD	مولداوی	TR	ترکیه
CH	سوئیس	GR	یونان	NO	نروژ	UA	اکراین
CZ	جمهوری چک	HU	مجارستان	NL	هلند	UK	بریتانیا
CY	قبرس	IE	ایرلند	PL	لهستان	US	ایالات متحدهٔ آمریکا
DE	آلمان	IL	اسرائیل	PT	پرتغال		
DK	دانمارک	IN	هند	RO	رومانی		

۳.۲ شبکهٔ آموزشی و پژوهشی اروپا

شبکهٔ کامپیوتری آموزشی و پژوهشی اروپا (ارن) نخستین و مهمترین شبکهٔ کامپیوتری است که دانشگاهها و مراکز پژوهشی اروپا، افریقا و خاورمیانه را به‌یکدیگر مرتبط ساخته است. کاربرد این شبکه منحصر به امور علمی و آموزشی و پژوهشی است.

سابقهٔ تأسیس این شبکه به ۱۹۸۴ بر می‌گردد که مرکز اروپایی پژوهشهای هسته‌ای سرن (CERN) در سوئیس، همراه با چند دانشگاه و مرکز پژوهشی دیگر در اروپا، درصدد برآمدند تا با پشتیبانی شرکت آی.بی.ام، کامپیوترهایشان را در شبکه‌ای به‌یکدیگر مرتبط سازند. کار این شبکه از ۱۹۸۵ رسماً آغاز شد.

اکنون بیش از یکصدهزار پژوهشگر در هر ماه به‌وسیلهٔ بیش از سه‌هزار دستگاه کامپیوتر واقع در بیش از ششصد مؤسسهٔ علمی از طریق این شبکه با یکدیگر تبادل اطلاعات می‌کنند. در حال حاضر، ۴۵ کشور در شبکهٔ آموزشی و پژوهشی اروپا عضویت دارند. شکل (۱) استخوانبندی این شبکه را نشان می‌دهد. پروتکل ارتباطی در این شبکه، NJE است.

شایان ذکر است که در اکتبر ۱۹۹۴، شبکهٔ ارن با شبکهٔ دیگری به‌نام رِیر (RARE) که در سطح اروپا فعالیت می‌کرد ادغام شد و شبکهٔ واحدی به‌نام ترنا (TERENA) به‌وجود آمد.

۳. معرفی امکانات و خدمات شبکه‌های کامپیوتری جهانی

در این بخش به معرفی برخی از خدمات مهم شبکه‌های کامپیوتری جهانی می‌پردازیم.

۱.۳ پست الکترونیک

در اکثر مواقع پست الکترونیک (e-mail) چیزی شبیه به پست معمولی است با این تفاوت که به‌جای تحویل نامه از طریق پست، این‌کار از طریق کامپیوتر انجام می‌شود. با استفاده از این امکان می‌توان با هر فردی که دارای نشانی پست الکترونیک باشد در هر نقطهٔ دنیا به‌راحتی تماس گرفت. در این تماس می‌توان به‌همراه انتقال پیام، فایل و برنامه نیز به اشکال مختلف ارسال و یا دریافت کرد.

۲.۳ گروههای مباحثه

این سرویس به محققین همرشته و افرادی که به یک موضوع خاص علاقه‌مندند امکان می‌دهد که به‌سهولت با یکدیگر به تبادل‌نظر و اطلاعات بپردازند. این کار از طریق ارسال پرسشها و پاسخها به یک نشانی مشخص که همهٔ افراد گروه در آن عضویت دارند، انجام می‌گیرد. یک نسخه از هر پیامی که به یک گروه مباحثه (discussion list) ارسال گردد به‌طور خودکار برای تمام افراد عضو آن گروه (که ممکن است در سراسر دنیا پراکنده باشند) ارسال می‌شود و بدین‌ترتیب به‌سهولت هرچه تمامتر، زمینهٔ لازم برای بحثهای علمی گروهی فراهم می‌گردد.

تعداد گروههای مباحثه در شبکه‌های جهانی بسیار زیاد است به‌طوری که هر محققی قادر است موضوع مورد علاقهٔ خود را در بین آنها بیابد.

۳.۳ انتقال پرونده‌های کامپیوتری

هدف از سرویس انتقال پرونده‌های کامپیوتری (file transfer protocol یا به‌اختصار ftp)، فراهم‌نمودن امکانِ انتقالِ آسان و سریع پرونده‌ها اعم از داده‌ها، برنامه‌ها، و اسناد و مدارک بین کامپیوترهایی است که در شبکه قرار دارند. با استفاده از این امکان می‌توان به اطلاعاتِ اکثر کامپیوترها در همهٔ نقاط دنیا آزادانه دسترسی پیدا کرد، البته به‌شرطی که کامپیوتر موردنظر به‌عنوان یک خدمتکار ftp قبلاً به شبکه معرفی شده باشد.

با استفاده از دستور ftp می‌توان به اطلاعات جالب و مفیدی مانند مقالات علمی، کتب و نشریات و نرم‌افزارهای بسیاری که در بخشهای مختلف دانشگاهها و مراکز تحقیقاتی وجود دارد دسترسی پیدا کرد.

۴.۳ گروههای خبری

یکی از امکانات جالب شبکه‌های کامپیوتری جهانی وجود صدها گروه خبری فعال است که هر کدام در زمینهٔ یک موضوع خاص علمی، ادبی، هنری، و ... اطلاعات جدید و به‌روزدرآمده را عرضه می‌کند.

ممکن است از عبارت گروههای خبری (newsgroups) چنین برداشت شود که این گروهها تنها مخصوص انتشار اخبار هستند اما در واقع، این گروهها علاوه بر انتشار اخبار، عرصه‌ای برای مباحثه، طرح سؤالات علمی یا عمومی و دریافت پاسخهای مختلف فراهم می‌کنند. همچنین از این طریق می‌توان ضمن انتخاب گروه خبری مورد علاقهٔ خود با محققین دیگری که در نقاط مختلف دنیا پراکنده هستند ارتباط برقرار کرد و از تجربیات آنها آگاه شد.

۵.۳ استفاده از امکانات یک کامپیوتر از راه دور

با استفاده از این سرویس (موسوم به تلنت telnet)، محققی که بر روی یک سیستم کامپیوتری دارای شناسهٔ کاربر (userid) است می‌تواند از طریق یک سیستم کامپیوتری در مکان دیگری، حتی در آن سوی کرهٔ زمین، وارد سیستم خود شده و به‌کار بپردازد. بدین‌ترتیب، دورشدن محقق از محیط کاری خود باعث جدا افتادن وی از فعالیتهای علمی نخواهد شد و زمینه برای استفاده از پردازنده‌ها و سیستمهای کامپیوتری قدرتمند نیز برای محققانی که در محیط کاری خود فاقد چنین امکاناتی هستند فراهم می‌آید.

۴. ایران در شبکه‌های کامپیوتری جهانی

مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات در اواخر سال ۱۹۹۱ میلادی به‌عنوان نمایندهٔ ایران در شبکهٔ آموزشی و پژوهشی اروپا پذیرفته شد. این مرکز برای راه‌اندازی گره ایران در این شبکه یک برنامه‌ریزی سه‌مرحله‌ای را به مورد اجرا گذاشت که ذیلاً به‌طور اجمال به آن اشاره می‌شود.

۱.۴ اتصال موقت

در این مرحله با گرفتن یک شناسهٔ کاربر بر روی سیستم کامپیوتری دانشگاه لینتس در کشور اتریش، ارتباط مرکز تحقیقات با شبکه از طریق شماره‌گیری برقرار شد. در این مرحله استفاده از خدمات شبکه صرفاً برای محققین مرکز فراهم بود و در طول یک سال که این ارتباط ادامه داشت (از تاریخ ۱۳۷۰/۱۰/۱۹ تا ۱۳۷۱/۹/۱۵) بیش از دوهزار پیام (بالغ بر ۵ مگابایت) از طریق شبکه ردوبدل شد.

به‌دلیل کندی خطوط تلفن عادی برای انتقال داده‌ها و نوع اتصال، در این مرحله استفاده از خدمات شبکه منحصر به سرویس پست الکترونیک بود و از آن برای سازماندهی چند کنفرانس و کارگاه آموزشی بین‌المللی در مرکز تحقیقات نیز استفاده شد.

۲.۴ راه‌اندازی گره دائم

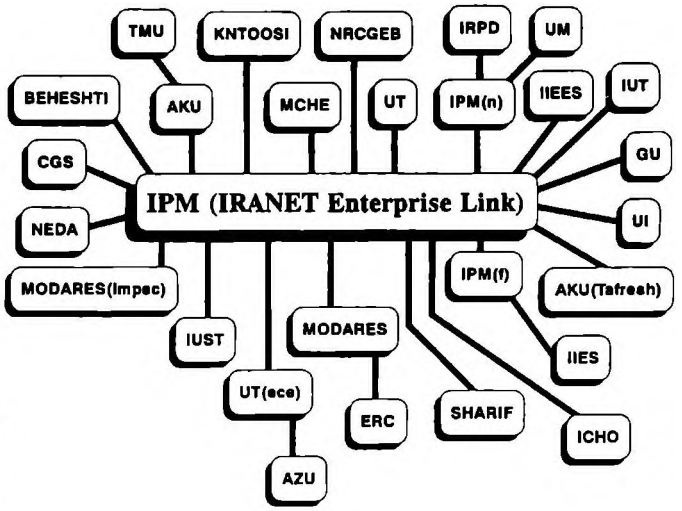
با انتخاب و نصب یک سیستم کامپیوتری Microvax 3100/20E گره دائم ایران در شبکهٔ ارن از تاریخ ۱۳۷۱/۹/۱۶ راه‌اندازی شد و از اول ژانویه ۱۹۹۳ به‌طور رسمی در سطح جهان مورد شناسایی قرار گرفت. این ارتباط از طریق یک خط مخابراتی استیجاری (leased line) به‌سرعت ۹۶۰۰ بیت در ثانیه بین مرکز تحقیقات و دانشگاه وین، نمایندهٔ اتریش در شبکهٔ ارن، برقرار شده است. با راه‌اندازی گره ایران، مرکز تحقیقاتْ ارائهٔ خدمات شبکه به جامعهٔ علمی کشور را آغاز کرد و اعضای هیأت علمی دانشگاهها را از آن بهره‌مند ساخت. هم‌اکنون بیش از ۱۲۰۰ نفر از اعضای هیأت علمی با داشتن شناسهٔ کاربر بر روی سیستم کامپیوتری مرکز تحقیقات از خدمات شبکه استفاده می‌کنند. این مرکز همچنین با اختصاص‌دادن پنج خط تلفن، خدمات شبکه را از طریق شماره‌گیری در اختیار دانشگاهها و مؤسسات تحقیقاتی قرار داد. از نکات قابل ذکر دیگر در مورد گره ایران در شبکه‌های جهانی، انتخاب نام ایرانت (Iranet مخفف Iranian Network یا Iranian Research and Academic Network) برای شبکهٔ ایران است.

ترافیک اطلاعاتی گره ایران در حال حاضر در حدود ۴۰۰۰ پیام در روز و بالغ بر ۸۰ مگابایت است.

۳.۴ گسترش خدمات شبکه در داخل کشور

از پاییز سال ۱۳۷۲ با برقراری خطوط مخابراتی استیجاری و راهنمایی کارشناسان مرکز تحقیقات، اتصال دانشگاهها و مراکز تحقیقاتی کشور به شبکه آغاز شد و هم‌اکنون ۱۶ دانشگاه در تهران و شهرستانها از خدمات شبکه بهره‌مند هستند. نمودار اتصالات درونْ کشوری در شکل ۲ دیده می‌شود.

این اتصالات هم‌اکنون از طریق خطوط مخابراتی استیجاری با سرعت ۹۶۰۰ بیت در ثانیه برقرار شده است. مرکز تحقیقات به‌منظور دستیابی به‌خطوط مخابراتی سریعتر و قابل اطمینان‌تر و نیز رفع مشکلات مربوط به گرفتن این‌گونه خطوط از شرکت مخابرات (خصوصاً برای دانشگاههایی که در شهرستانها قرار دارند)، امکان انواع دیگر ارتباطات با شبکه را مورد بررسی قرار داده است. از جمله، ارتباط دانشگاه گیلان با شبکه از طریق VSAT (آنتنهای ماهواره‌ای) برقرار شده و آزمایش پروتکلهای مختلف موجود



شکل ۲

شبکهٔ اطلاعاتی ایرانِت در نخستین گام

علامت اختصاری اعضای شبکه					
NEDA	مؤسسهٔ ندا رایانه	IPM(f)	مرکز تحقیقات فیزیک‌نظری و ریاضیات (فرمانیه)	AKU	دانشگاه صنعتی امیرکبیر
NRCGEB	مرکز ملی تحقیقات ژنتیک و تکنولوژی زیستی	IPM(n)	مرکز تحقیقات فیزیک‌نظری و ریاضیات (نیاوران)	AKU (Tafresh)	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (تفرش)
SHARIF	دانشگاه صنعتی‌شریف	IRPD	مؤسسهٔ عالی پژوهش در برنامه‌ریزی و توسعه	AZU	دانشگاه الزهرا
TMU	دانشگاه تربیت معلم	IUST	دانشگاه علم و صنعت	BEHESHTI	دانشگاه شهید بهشتی
UI	دانشگاه اصفهان	IUT	دانشگاه صنعتی اصفهان	CGS	مرکز پژوهشهای مجلس شورای اسلامی
UM	دانشگاه مشهد	KNTOOSI	دانشگاه خواجه نصیر طوسی	ERC	مرکز تحقیقات غُدد
UT	دانشگاه تهران	MCHE	وزارت فرهنگ و آموزش عالی	GU	دانشگاه گیلان
UT (ECE)	دانشگاه تهران (دانشکدهٔ برق و کامپیوتر)	MODARES	دانشگاه تربیت مدرس	ICHO	سازمان میراث فرهنگی کشور
		MODARES (impsc)	دانشگاه تربیت مدرس (مرکز مطالعات مدیریت و بهره‌وری)	IIES	مرکز مطالعات بین‌المللی انرژی
				IIEES	مرکز بین‌المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله

توضیح: اخیراً این مؤسسات نیز به شبکه پیوسته‌اند: دانشگاه علوم پزشکی ایران (IUMS) و فرهنگستان علوم پزشکی (AMS).

و ارزیابی سرعت انتقال داده‌ها در دست اقدام است. همچنین استفاده از مودمهای باند پایه (baseband) و بیسیم نیز تحت بررسی و آزمایش قرار دارد.

از نکات قابل ذکر دیگر، عضویت مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات به‌عنوان گره اصلی ایران در شبکهٔ اینترنت است. این امر با دریافت دو دسته آدرس کلاس C در این شبکه تحقق یافت و گره ایران در این شبکه از فوریهٔ ۱۹۹۴ رسماً در سراسر جهان مورد شناسایی قرار گرفت. پروتکل ارتباطی شبکهٔ اینترنت TCP/IP است و مرکز تحقیقات، خدمات شبکه را درداخل کشور بر اساس همین پروتکل گسترش داده است.

با راه‌اندازی گره ایران در شبکهٔ اینترنت، امکان استفاده از خدماتِ پیوسته (online) در شبکه نظیر world-wide-web، gopher، telnet، و ftp که پیش از این تحت پروتکل NJE در شبکهٔ آموزشی و پژوهشی اروپا میسر نبود نیز در اختیار کاربران شبکه در داخل کشور قرار گرفت. سرویس خبری جهانی (usenet) هم فعلاً از طریق سیستم gopher در دسترس کاربران است. شایان ذکر است که خدمتکار gopher نصب شده بر روی سیستم SUN مرکز تحقیقات، رسماً در بین خدمتکارهای gopher بین‌المللی به ثبت رسیده و نام آن در کلیهٔ جدولهای بین‌المللی درج گردیده است. بدین‌ترتیب، اطلاعات خدمتکار gopher مرکز تحقیقات برای تمام کاربران شبکهٔ اینترنت در سراسر جهان قابل دستیابی است. هم‌اکنون در منطقهٔ خاورمیانه، بجز خدمتکار مزبور، ۱۲ خدمتکار gopher از کشور اسرائیل، یک خدمتکار gopher از کشور مصر و یک خدمتکار gopher از کشور تونس به‌ثبت رسیده‌اند.

گروه کاربران یونیکس که از گروههای تخصصی انجمن انفورماتیک ایران است در بهار ۱۳۷۳ یک شبکهٔ uucp بین شرکتهای کامپیوتریی که از سیستم یونیکس استفاده می‌کنند دایر کرد و مرکز تحقیقات نیز در همان تاریخ به این شبکه پیوست. بدین‌ترتیب، امکان عرضهٔ خدمات شبکهٔ اینترنت به بخش غیردانشگاهی کشور نیز فراهم آمد. از نکات قابل ذکر در این زمینه، ارائهٔ خدمات شبکهٔ اینترنت به دانشگاه اُمان در کشور اردن است که از طریق همین شبکه صورت گرفت.

مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات به موازات گسترش خدمات شبکه درکشور، به تکمیل تجهیزاتِ سخت‌افزاری و نرم‌افزاری خود نیز پرداخت و هم‌اکنون چند سیستم مختلف کامپیوتری را به‌خدمت گرفته است.

* * * * * *

* ابراهیم نقیب‌زادهٔ مشایخ، مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات
ebrahim@irearn.bitnet

زوالِ قریب‌الوقوع مجلات تحقیقیِ چاپی: فقدان مصیبت‌بار یا خلاصیِ مسرت‌انگیز؟*

اندرو اُدلیزکو*
ترجمهٔ تقی یزدانبخش

مقدمه

مجلات چاپیِ سنتی از نمودهای آشنا و مأنوس کارهای تحقیقاتی‌اند. این نشریات ابزار اصلیِ مبادلهٔ نتایج تحقیقاتی بوده‌اند، و در این کسوت خدمات ارزشمندی کرده‌اند. ولیکن این ابزارِ فرآورده‌ای دست‌وپاگیر ـ هرچند پیشرفته ـ از تکنولوژی چاپ است که در چند سدهٔ اخیر تنها وسیلهٔ موجود برای تبادل اطلاعات علمی در مقیاس وسیع بوده است. امروزه رشد کمّی آثار تحقیقی به‌همراه توانِ سریعاً فزایندهٔ تکنولوژی الکترونیک و امکانات روزافزونِ دسترسی به آن، فشارهای بسیار شدیدی بر مجلات چاپی وارد می‌کند. هدف این نوشتار ارائهٔ تصویر گسترده‌ای از این فشارها و پیامدهای محتمل آنها، و بحث بر له این نظر است که بعید نیست تحولات آتی [در زمینهٔ مجلات تحقیقی] ناگهانی باشند.

خیلیها تصور می‌کنند که روند تغییراتْ تدریجی و ملایم خواهد بود و شاید به‌صورتِ ظهور چند مجلّهٔ الکترونیک و استفادهٔ بیشتری از پست الکترونیک، سیستم انتقال پرونده‌های کامپیوتری[1]، و غیره باشد. اما به‌گمان من، دگرگونی در این زمینه بسیار شدیدتر از این خواهد بود. احتمالاً مجله‌های تحقیقی در شکل فعلی در طول ده تا بیست سال آینده از بین خواهند رفت. جانشینان الکترونیکِ آنها، اگرچه شاید همان نامها را یدک بکشند، اما با نشریات ادواری حاضر تفاوت کلّی خواهند داشت. آشکار است که روگردانیِ ناگهانی از نظامی که به جامعهٔ علمی به‌خوبی خدمت می‌کرده است، خطراتی به‌همراه دارد [۱۵]. ولی من به این نتیجه رسیده‌ام که نظامهای ارتباطاتی آینده بسیار بهتر از مجلّات سنتی خواهند بود. هرچند این تغییر نظام ممکن است دشواری‌زا باشد، اما امید می‌رود که کارآییِ فعالیتهای پژوهشی بسیار افزایش یابد. تأخیر در انتشار مطالب از میان خواهد رفت و با امکان افزودن نظر و حاشیه به نوشته‌ها و ذکر کارهای بعدی که به نوشتهٔ موردنظر ارجاع می‌دهند، قابلیت اعتماد مقاله‌ها بیشتر خواهد شد. این احتمالِ بهبود در صورتی به تحقق نزدیکتر خواهد شد که از مسائل مربوط آگاه باشیم و تغییر نظام فعلی را هرچه زودتر برنامه‌ریزی کنیم. در هر صورت، ما راههای چندانی فراروی خود نداریم زیرا این دگرگونیِ بنیادی ناگزیر و مستقل از تمایلات ماست.

پیش‌بینیها و نظراتی که در این نوشتار عنوان می‌شود، در مورد اغلبِ رشته‌های علمی صادق است. ولی بحث من بیشتر دربارهٔ ریاضیات خواهد بود زیرا با این رشته آشنایی بیشتری دارم و آمار و اطلاعاتی که در اختیار دارم در موردِ آن روشنتر و گویاتر است. رشته‌های مختلف نیازها و فرهنگهای گوناگونی دارند و ممکن است که مسیرهای کمابیش متفاوتی را در تکامل نحوهٔ ارتباطات خود بپیمایند.

افزایش تعداد مقاله‌ها

تحولات قریب‌الوقوع در نحوهٔ انتشار مقاله‌های تحقیقی ناشی از همراهیِ دو جریان است، یکی افزایش تعداد این‌گونه آثار، و دیگری رشد تکنولوژی الکترونیک.

تعداد مقالات علمی که در هر سال منتشر می‌شوند در دو سدهٔ اخیر هر ده تا پانزده سال دوبرابر شده است [۱۴]. در خودِ ریاضیات هم افزایش مشابهی صورت پذیرفته است. در سال ۱۸۷۰ تنها در حدود ۸۴۰ مقالهٔ ریاضی منتشر شد. اکنون، سالانه حدود پنجاه‌هزار مقاله منتشر می‌شود. این افزایش یکنواخت نبوده است. با نگاه دقیقتری به آمار و ارقام درمی‌یابیم که از پایان جنگ جهانگیر دوم تا سال ۱۹۹۰، تعداد مقالات منتشره حدوداً هر ده سال دوبرابر شده است [۱۲]. اخیراً افزایش متوقف شده، ولی ممکن است این فترت از نوعی باشد که پیشتر هم حادث شده است.

رشد نمایی تعداد مقالات ریاضی، پیامدهای جالب‌توجهی دارد. با جمع

1. ftp

زدن اعداد مذکور در [۱۲] یا تنها با برونیابی از همین رقم حاضر یعنی حدود پنجاه‌هزار مقاله در سال و با فرض دوبرابر شدن تعداد مقالات در هر ده سال، به این نتیجه می‌رسیم که تاکنون حدود یک‌میلیون مقالهٔ ریاضی منتشر شده است. چیزی که برای اکثر افراد بسیار شگفت‌انگیزتر است (امّا دلیلش همان نرخ رشد هندسی است) آن است که نزدیک به نیمی از این مقالات در ده سال گذشته منتشر شده‌اند. حتی اگر قرار بود میزان انتشارات، پنجاه‌هزار مقاله در سال باقی بماند، حجم نوشته‌های ریاضی در بیست سال دیگر دوبرابر می‌شد. با آنکه این رشد سریع نشانه‌ای از سرزندگی و نشاط رشتهٔ ماست، لیکن موجد معضلاتی هم هست.

انتشارات پژوهشی خصوصیاتی دارند که آنها را از کتابهای عامه‌پسند مانند رمان یا زندگینامه به‌وضوح متمایز می‌کند و حل مشکلات ناشی از رشد سریع آنها را دشوار می‌سازد. مقالات پژوهشی به‌توسط متخصصان و برای متخصصان نوشته می‌شوند. به‌علاوه، هیچ فایدهٔ مادی مستقیمی به‌سبب نوشتن این مقالات عاید پژوهشگران نمی‌شود. ایشان مقالات را تنها به‌منظور اشاعهٔ اطلاعات در میان دانشمندان دیگر به ناشران می‌سپرند. این بدان معناست که احتمال وقوع تحولات بنیادی در مجلات تحقیقی بیشتر است تا در انتشارات همگانی و غیرتخصصی، زیرا که اهداف دانشمندان و ناشران متفاوت است.

اگر میزان انتشارات پژوهشی کمتر بود، نشر این نوع آثار با مشکلی کوچک، روبه‌رو می‌شد نه با یک بحران. اگر یک بخش دانشگاهی هر سال ۵۰۰۰ دلار برای مجلات می‌پرداخت، می‌توانست تا چندین دهه دوبرابر شدن تعداد آثار و بهای اشتراک را تحمل کند بدون آنکه لازم باشد کار فوق‌العاده‌ای انجام دهد. ولیکن، کتابخانه‌های خوب ریاضی سالانه بالغ بر ۱۰۰۰۰۰ دلار فقط برای اشتراک مجلات می‌پردازند، و هزینهٔ کارکنان و جا معمولاً دست‌کم دوبرابر این مقدار است. بودجه‌هایی به این سنگینی دیر یا زود در معرض بررسی و تقلیل قرار می‌گیرند.

پیشرفتهای تکنولوژیک

دوبرابر شدن تعداد مقالات منتشره در هر دهه معادل رشدی نمایی با نرخ حدود هفت درصد در سال است که نرخ بالایی است ولی حتی به گردِ پای نرخ رشدِ پردازش و انتقال اطلاعات نمی‌رسد. سرعت ریزپردازنده‌ها در حال حاضر هر هجده ماه دوبرابر می‌شود که معادل نرخ رشدی به‌اندازهٔ شصت درصد در سال است. ذخیره‌سازی و انتقال اطلاعات هم ارقام رشد عجیب و غریبی دارد. به‌عنوان مثال، هزینهٔ ستون فقرات[1] شبکهٔ اینترنت که توسط بنیاد ملی علوم آمریکا تأمین می‌شود، در طی سالهای ۱۹۸۸ تا ۱۹۹۱ شصت‌وهشت درصد افزایش یافته، ولی به ترافیک شبکه ۱۲۸ درصد افزوده شده است [۱۱]. منظور از ذکر این ارقام و ارقام ذیل، آن است که پیشرفتهای تکنولوژی، راههایی برای تحول انتشارات تحقیقی گشوده است که حتی دو سه سال پیش ممکن نبوده است.

به خاطر آورید که هر سال حدود پنجاه‌هزار مقالهٔ ریاضی منتشر می‌شود. اگر همهٔ این مقاله‌ها با TEX حروفچینی شده باشند، برای ذخیره‌کردن کلّ این مقالات با احتساب میانگین تقریبی پنجاه‌هزار بایت برای هر مقاله، به ۲٫۵ گیگابایت حافظه احتیاج خواهد بود.

1. backbone

امروزه می‌توان یک دیسک مغناطیسی ۹ گیگابایتی را به بهای حدود ۳۰۰۰ دلار خریداری کرد. برای ذخیرهٔ مقالات در بایگانی می‌توانیم ابزارهای تکنولوژیک دیگری مانند دیسک نوری را به‌کار گیریم. یک دیسک نوری با ظرفیت ۷GB که فقط می‌شود یک‌بار بر آن نوشت، ۲۰۰ الی ۳۰۰ دلار قیمت دارد. نوارهای دیجیتال ۲۵۰ گیگابایتی هم قرار است به‌زودی به بازار آیند. بنابراین ظرفیت ذخیرهٔ الکترونیکی که برای انتشار نتایج پژوهشی ریاضی مورد احتیاج است از دید تکنولوژی امروزی چیزی به‌حساب نمی‌آید.

نتیجه می‌گیریم که همین حالا هم می‌توان تمام مطالب منتشرهٔ ریاضی را با هزینهٔ سالانه‌ای بسیار کمتر از آنچه برای اشتراک فقط یک مجله لازم است ذخیره کرد. در مورد مقالاتی که در طی سده‌های پیشین منتشر شده‌اند چه می‌شود کرد؟ چون تعداد آنها یک‌میلیون است، اگر تمام آنها با TEX حروفچینی شده بودند، حدود ۵۰GB برای ذخیره‌سازی تمامشان مورد نیاز بود. حروفچینی مقاله‌های قدیمی با TEX عملی به‌نظر نمی‌رسد. اما ذخیره‌سازیِ تصویری این مقالات، هنگامی که با استانده‌های متداول فکس فشرده شده باشند، به کمتر از ۱۰۰۰GB احتیاج دارد. این مقدارْ زیاد است ولی بازهم از ظرفیت ۱۵۰ دیسک نوری بزرگ که فعلاً وجود دارد کمتر است. برای مقایسه، فروشگاه زنجیره‌ای وال‌ـمارت دارای بانک اطلاعاتیی با بیش از ۱۰۰۰GB است که بر دیسکهای مغناطیسی ذخیره شده و به‌طور تمام‌وقت مورد استفاده است.

چه بسا تا کمتر از ده سال دیگر سیستمهایی برای کامپیوترهای شخصی داشته باشیم که بتوانند ۱۰۰۰GB ذخیره کنند. حتی پیش از آن، بخشهای دانشگاهها قادر به تأمین هزینهٔ سیستمهای ذخیره‌سازیی که بتوانند تمامی آثار ریاضی را ذخیره کنند، خواهند بود. این توانایی به‌معنای یک دگرگونی بنیادی در روشِ کارکردن ماست. به‌عنوان مثال، اگر شما بتوانید هر مقاله‌ای را روی صفحهٔ کامپیوترتان حاضر کنید و بعد از اینکه دیدید به نظرتان جالب می‌آید آن را با یک چاپگر لیزری رومیزی چاپ کنید، آیا دیگر به کتابخانهٔ دانشگاهتان نیازی خواهید داشت؟

شبکه‌های ارتباطی به‌سرعت در حال توسعه و تکامل‌اند. در اکثر بخشهای دانشگاهی، کامپیوترها روی شبکه‌های اترنت[1] قرار دارند که با سرعتی در حدود ۱۰Mbs (۱۰ میلیون بیت در ثانیه) کار می‌کنند. به‌علاوه، اکنون تقریباً تمامی دانشگاهها به اینترنت دسترسی دارند، وضعیتی که حتی دو سه سال پیش هم وجود نداشت. ستون فقرات اینترنت با سرعتی معادل ۴۵Mbs کار می‌کند. نمونه‌های اولیهٔ سیستمهای بسیار سریعتر هم‌اکنون به‌کار مشغول‌اند. تماشای فیلمهای درخواستی مستلزم آن است که شبکه‌هایی با سرعت چندصد مگابیت در ثانیه موجود باشند. اگر تأمین‌کنندگان محلی فیلم بتوانند فیلم درخواستی شما را عندالمطالبه به بهایی کمتر از ۱۰ دلار در اختیار شما قرار دهند (که باید بتوانند، وگرنه سیستم از نظر مالی توفیقی نخواهد داشت)، آنگاه فرستادن بالغ بر ۵۰MB مقالهٔ تحقیقاتی سال گذشته در حوزهٔ تخصصی شما بیش از چند سنت خرج نخواهد داشت. شاید دانشمندان خوششان نیاید که وابسته به سیستمهایی باشند که بقایشان مدیون درخواست فیلمهای مستهجن است، ولی هنگامی‌که این سیستمها به منصهٔ ظهور برسند از آنها استفاده خواهند کرد.

نه‌تنها ظرفیت ذخیره‌سازی و انتقال اطلاعات افزایش یافته، بلکه استفاده

1. Ethernet

از نرم‌افزار هم بس آسانتر شده است. سیستمهای حروفچینی کامپیوتری آنقدر متداول شده‌اند که به‌ندرت به دستنوشته‌ای برمی‌خوریم که با ماشین‌تحریر معمولی تایپ شده باشد. به‌علاوه اعضای هیأت علمی دانشگاهها به‌گونهٔ فزاینده‌ای خودشان حروفچینیِ نوشته‌های خود را انجام می‌دهند. این گرایش تا حدودی نتیجهٔ کاهشِ بودجهٔ پرسنل کمکی (مانند منشی و تایپیست) است، ولی عمدتاً معلول این است که محققان، کنترل بیشتر و اجرای سریعتری را که از این طریق میسر می‌شود، ترجیح می‌دهند. با تکنولوژی امروزین، انجام دادن یک کار غالباً آسانتر از فهماندن این مطلب به شخص دیگری است که چه بکند.

دو قرن پیش، فاصلهٔ عظیمی بین کاری که یک دانشور می‌توانست انجام دهد و امکاناتی که ناشران فراهم می‌آوردند موجود بود. مقالهٔ چاپ‌شده بسیار خواناتر از نسخه‌های دست‌نوشتهٔ پیش از چاپ بود، و هزینهٔ چاپ کمتر از هزینهٔ استخدام کاتب برای نوشتن صدها نسخهٔ مقاله تمام می‌شد. امروزه، مزیت کار ناشران از لحاظ کمتر بودن هزینه از میان رفته زیرا فرستادن صورتِ الکترونیک یک مقاله بسیار ارزانتر از چاپ آن در یک مجله تمام می‌شود. مجلات همچنان از نظر کیفیت برترند، ولی این مزیّت هم به‌سرعت در حال زوال است.

پیش‌چاپها و مجلات الکترونیک

پیشرفتهای تکنولوژیْ انتشار اطلاعات را بسیار آسانتر کرده است. توزیع نسخه‌های پیش از چاپ مقاله‌ها هم‌اکنون در ریاضیات و در بسیاری رشته‌های دیگر به‌صورت روش اصلیِ مبادلهٔ آخرین دستاوردهای تحقیقی بین متخصصین درآمده است. الکترونیک این فرایند را بسیار سهلتر می‌کند. در این زمینه، دو شیوه دارد معمول می‌شود. یکی اینکه بخشهای دانشگاهی فهرستهایی[1] فراهم می‌کنند که در دسترس عموم قرار می‌گیرد تا هر کسی بتواند از طریق انتقال پرونده‌های کامپیوتری به‌طور آزاد (بی‌نام)[2] از آخرین پیش‌چاپها نسخه‌برداری کند. دیگری استفاده از سیستم ارائه‌گرِ پیش‌چاپ[3] است، که پژوهشگران پیش‌چاپ مقاله‌هایشان را به یک بانک اطلاعاتی مرکزی می‌فرستند. استفادهٔ وسیع از این روشها برای پژوهشگران نعمت بزرگی است، ولی برای مؤسسات ناشر مجلات، زیان مهلکی دارد [۷]. اگر من بتوانم نسخهٔ پیش از چاپ یک مقالهٔ منتشرشده را به رایگان به‌دست آورم، دیگر چرا خود یا کتابخانه‌ام هزینه‌ای برای خریدن فلان مجله متحمل شویم؟

تأثیر «مخرب» توزیع وسیعِ پیش‌چاپها خواه‌ناخواه موجب تحولاتی در مجلات تحقیقی سنتی می‌شود. ممکن است این تحولات ناگهانی هم باشند. به‌عنوان مثال، ارائه‌گرِ پیش‌چاپی که پال‌گینسپارک برای فیزیک نظریِ انرژی بالا راه انداخت، در مدت یک‌سال به‌صورت روش استاندارد اشاعهٔ اطلاعات در آن رشته در آمد [۴]. از آن‌هنگام، در دیگر رشته‌ها هم چنین روشی اتخاذ کرده‌اند. این‌چنین تحولاتِ ناگهانی در حوزه‌های تکنولوژی عالی (مانند افزایش چشمگیر همگانی‌شدنِ ماشینهای فکس، یا کاهش غیرمنتظرهٔ استفاده از کامپیوترهای بزرگ) امری عادی است و ممکن است در مورد انتشار مجلات هم رخ دهد. در آینده ممکن است هنگام واردآمدن فشار مالی بر یک دانشگاه، یکی از مسؤولان دانشگاه به بخش ریاضی بیاید و چنین پیشنهادی را مطرح کند: «یا از اشتراک مجلات چاپی دست بکشید یا یک نفر از کادر علمی کم کنید». امروزه چنین حرفی جدی گرفته نمی‌شود، چون مجلات هنوز ضروری‌اند. ولیکن، ده دوازده سال دیگر، وقتی که پیش‌چاپها به‌رایگان در اختیار افراد قرار گیرند، احتمالاً صرفنظر کردن از مجلات پاسخِ مرجّح خواهد بود.

پیش‌چاپها بحق جایگاهی متفاوت با مجلات داوری‌شده دارند. ولیکن تکنولوژی جدیدْ انتشارِ آسانِ مجلات الکترونیک به‌توسط خودِ پژوهشگران را ممکن ساخته است. برای هیأت تحریریهٔ مجله‌ها قراردادن دستنوشته‌های مقالات داوری‌شده در یک فهرستِ قابل‌دسترس برای عموم یا یک سیستم ارائه‌گرِ پیش‌چاپ همانقدر آسان خواهد بود که همین کار را برای پیش‌چاپهای خودشان انجام دهند. تعداد مجلات الکترونیک اندک است، اما این تعداد رشد سریعی دارد.

من پیش‌بینی می‌کنم نشر مطالب تحقیقی به سمتی پیش رود که برای پخش اطلاعات منحصراً از ابزارهای الکترونیک استفاده شود. دلیل این امر، فشار اقتصادیِ ناشی از هزینه‌های فزایندهٔ نظام فعلی و نیز جاذبهٔ امکانات جدیدی است که نشر الکترونیک فراهم می‌کند.

قابلیتِ اثرگذاری و اثرپذیریِ انتشارات الکترونیک

از آنجا که مجلات چاپی سنتی مدتهای مدید جزء لازم حیات علمی بوده‌اند، انعطاف‌ناپذیری آنها مشهود نبوده است. اکثر مجلات ریاضی فقط در حدوداً هزار کتابخانهٔ پژوهشی در کل جهان یافت می‌شوند. حتی برای دانشورانی که در همان مؤسسه‌ها باشند دسترسی به مجلات مستلزم نقل‌مکان، غالباً به ساختمانی دیگر، و محدود به ساعات معیّنی است. مجلات الکترونیک سبب می‌شوند که دسترسی بیست‌وچهار ساعته به مقالات و منابع، از محل کار پژوهشگر ممکن باشد و جستجوی مطالب موردنظر هم خیلی آسانتر شود. در مورد مجلاتی هم که اشتراک آنها رایگان است، دسترسی از همه‌جای دنیا ممکن خواهد بود.

فرنک کوبین [۱۵] برآن است که برای حفظ اعتماد به نوشته‌های ریاضی بایستی در روگردانی از مجلات کاغذی احتیاط فراوان کرد، مبادا که بی‌بندوباری در انتشار مطالب یعنی انتشار «به سبک تخته سیاه» که در برخی رشته‌ها متداول است در ریاضیات هم رایج شود. وی مدافع حفظ تمایز صریح میان توزیع غیررسمی پیش‌چاپها و انتشارات رسمی مطالب داوری‌شده، حتی در قالب الکترونیکِ آن، است. من قبول دارم که ریاضیدانها باید برای حفظ و ارتقای اعتمادپذیری آثار ریاضی بکوشند. ولیکن حس می‌کنم که نگرانیهای کوبین عمدتاً نابجاست و ممکن است ریاضیدانها و دیگر دانشمندان را از ابداع روشهای بهتر برای مبادلهٔ نتایج علمی بازدارد. به گمان من، راه‌حلِ بهتر آن است که نظام متمرکزی داشته باشیم که در آن، مرسولات غیررسمی از نوع اخبار شبکه‌ای[1] با پیش‌چاپها و مجلات الکترونیک تلفیق شود. استیون هارناد دقیقاً از چنین راه‌حلی دفاع کرده [۵]، و اصطلاحاتِ scholarly skywriting و prepublication continuum را برای اطلاق بر فرایندی ابداع کرده که در آن، مراسلات غیررسمی محقّقان با انتشارات رسمی درمی‌آمیزند. تفاوت نظر من و هارناد در آن شیوهٔ «نقد به‌وسیلهٔ همتایان»[2] است که احتمالاً معمول

1. directories 2. anonymous 3. preprint server

1. netnews 2. peer review

خواهد شد. به نظر من یک جریان پیوستهٔ نقد که با جریان پیوستهٔ انتشار همساز باشد مناسبتر است، حال آنکه هارناد طرفدار نظام فعلی داوری توسط همتایان علمی است.

من سیستمی را که در ذهن دارم با فرض آنکه بر یک ماشین بانک اطلاعاتی تمرکزیافته عمل می‌کند تشریح می‌کنم. ولی این فرض تنها جهت سهولت است، و به ظن قریب به یقین هر سیستم عملی مشتمل بر سیستمهای همانند یا سیستمهای متفاوت ولی هماهنگ خواهد بود. من به جنبه‌های نرم‌افزاری این سیستم کاری ندارم. البته رابطهای اَبَرمتنی[1] درکار خواهند بود چنان‌که با فشار دکمه روی اسم مقاله یا یادداشت، آن مقاله یا یادداشت فوراً بر صفحه حاضر می‌شود، ولیکن جزئیات مربوطه در این نوشتار برای ما حائز اهمیت نیست.

در سطح استفاده‌کنندگان سیستمهای آینده، هر کسی خواهد توانست پیش‌چاپی را به سیستم ارسال کند. بر این مرسولات باید کنترلی اعمال شود، ولی احتمالاً این کنترل می‌تواند اندک باشد. شاید معیارهایی مانند معیارهای پذیرش چکیدهٔ مقاله در انجمن ریاضی آمریکا لازم باشد تا «برهان»هایی مثلاً برای مسطح بودن زمین، یا نظریاتی ازقبیل اینکه نسبیت خاص یک توطئهٔ صهیونیستی است، کنار گذاشته شوند. شاید بشود بحثی را در باب اینکه آیا بیکن نمایشنامه‌های شکسپیر را نوشته است، پذیرفت (چراکه رهیافتهای آماری جالب‌توجهی به این موضوع وجود دارد). همچنین از امضاءهای دیجیتال و ثبت زمان دیجیتال برای بازشناسیِ مؤلفان استفاده خواهد شد. قواعد دقیقِ عملکرد سیستم باید به‌تجربه معلوم شود. مثلاً، شاید یک خصوصیتِ آن این باشد که هیچ چیزی که زمانی ارسال شده نباید پس گرفته شود. این امر در بهبود کیفیت مؤثر خواهد بود، چه در آن‌صورت مؤلفینی که مقالاتِ ضعیف ارسال می‌کنند باید خطر این را که اشتباهات مقاله‌های آنها برای همیشه در معرض دید عموم باشد پذیرا شوند.

به محض اینکه پیش‌چاپ پذیرفته شد، در اختیار همه قرار خواهد گرفت. وصول آن برحسب رده‌بندی موضوعی یا کلیدواژه‌هایش به کسانی که در سرویسهای اطلاع‌دهنده در زمینه‌های مربوطه عضویت دارند اعلام خواهد شد. از همگان تقاضا خواهد شد که نظر خود را ارسال دارند (البته با اعمال محدودیتهای جزئی)، و این نظرها به مقالهٔ اصلی ضمیمه خواهند شد. برای نظرهای فاقد امضاء و نیز امضاءشده هم می‌شود پیش‌بینیهایی کرد. مؤلف این امکان را خواهد داشت که صورتهای تجدیدنظر شدهٔ مقالهٔ خود را با ملحوظ کردن اظهارنظرها (یا کارهای بعدی خود مؤلف روی آن مقاله) ارسال دارد. همهٔ صورتهای مختلف مقاله‌ها، به‌علاوهٔ تمامیِ اظهارنظرها ضبط و نگهداری خواهد شد. این فرایند می‌تواند بدون حد معیّنی، حتی تا صد سال پس از ارسال اولین مقاله، ادامه یابد. مؤلفی به‌نام X، وقتی مقاله‌ای می‌نگارد که نتیجهٔ پیشین $Y(۱۲۳)$، متعلق به مؤلفی به‌نام Y، را اصلاح و تکمیل می‌کند، تشویق خواهد شد که یادداشتی در این باب به $Y(۱۲۳)$ الحاق کند. حتی مؤلفینی که تنها $Y(۱۲۳)$ را به‌عنوان مرجع معرفی می‌کنند ترغیب خواهند شد که به اظهارنظرهایی که دربارهٔ $Y(۱۲۳)$ شده است، نظر بیفکنند. (نرم‌افزار خودبه‌خود اغلب قسمتهای این‌کار را انجام می‌دهد.) بدین‌طریق، مقالهٔ پژوهشی یک مدرکِ زنده خواهد بود که همچنان‌که نظرها و صورتهای تصحیح‌شده به آن اضافه می‌شوند، تکامل می‌یابد. این فرایند به خودیِ‌خود راهی طولانی به‌سوی فراهم‌کردن نتایجِ قابل‌اطمینان خواهد پیمود. از همه مهمتر این است که محققان از طریق این فرایند بازتاب کار خود را فوراً می‌بینند. هرچند اظهارنظرهای درخواست‌نشده برای آنکه حقیقتاً مفید باشند محتاج ارزشیابی‌اند و به‌طور کلّی از نظر قابلیت اطمینان با گزارشهای داوری رسمی قابل‌مقایسه نخواهند بود، ولی به‌هرحال از عدم هر نوع اطلاع بهتر خواهند بود. محققان آزاد خواهند بود که صافیهای موردنظر خود را برای تصفیهٔ این انبوهٔ پیش‌چاپها و اظهارنظرها برگزینند. به‌عنوان مثال، شاید بعضیها تصمیم بگیرند که به هیچ پیش‌چاپ داوری‌نشده‌ای که نظرهای مثبتی از حداقل سه متخصص از ده دانشگاه ردهٔ اول دریافت نکرده باشد، اطمینان نکنند.

در رأس این سیستم که تقریباً به‌کلی فاقد هماهنگی و سازماندهی و محدودیت است، یک مرحلهٔ ویرایش و داوری وجود خواهد داشت. این مرحله برای رسیدگی به بسیاری از مرسولات کاملاً لازم خواهد بود. هرچند بعید نیست که اظهارنظرهای درخواست‌نشده در تعیینِ بداعت و صحّتِ بسیاری مقالات راهگشا باشند، ولی احتمالاً در اغلب موارد بسنده نخواهند بود. لازم است اطمینان حاصل شود که تمامی نوشته‌هایی که محققان بر آنها تکیه می‌کنند با معیار یکنواختی (دست‌کم تا جایی که به صحّت مربوط می‌شود) داوری شده‌اند، و در عین حال، میزان کار ناقدان با حداقل کردنِ دوباره‌کاری کم شود. دستیابی به هر دوی این خواسته‌ها از طریق یک نظام نقادیِ تصادفی و سامان‌نیافته دشوار است. وجود یک فرایندِ نقدِ رسمی اجتناب‌ناپذیر است. می‌باید ویراستارانی باشند که «نقد به‌وسیلهٔ همتایان» را ترتیب بدهند. این ویراستاران ممکن است از طرف انجمنهای علمی منصوب شوند یا حتی خودشان خود را منصوب کنند. (من امیدوارم این خصلت علم که خودش خود را تصحیح می‌کند، از تأثیرگذاریِ ویراستارانِ ضعیف جلوگیری کند. همین حالا هم ما مطبوعاتِ کم‌اعتباری داریم که زیان محسوسی به‌بار نیاورده‌اند.) آنگاه این ویراستاران می‌توانند از نظرهایی که جمع شده‌اند برای ارزیابی صحت و اهمیت نتایج در یک مقاله استفاده کنند و داوران رسمی را انتخاب نمایند. (خودمانیم! برای داوری یک مقاله چه کسی شایسته‌تر از فردی است که با علاقه به آن مقاله نظر افکنده و عالمانه دربارهٔ آن اظهارنظر کرده است؟ معمولاً می‌توان از روی نظرات شخص دربارهٔ یک نوشته به‌آسانی در مورد دانش او از موضوعِ آن نوشته و دقتی که در خواندن آن به‌کار برده، قضاوت کرد.) گزارشهای داوری و ارزشیابیها را می‌توان به‌عنوان اظهارنظر در مورد مقاله به پروندهٔ مقاله افزود ولی باید با همین عنوان مشخص شوند. به این ترتیب، کسی که جویای اطلاعاتی در مثلاً جبر همولوژیک است و خود با موضوع آشنا نیست می‌تواند در بانک اطلاعاتی تنها مقالاتی را جستجو کند که به توسط متخصصان شناخته‌شده یا هیأت ویراستاریِ معتمدی بررسی و نقد شده‌اند. درست مانند حالا، مقالاتِ مروری و توصیفی هم وجود خواهند داشت که می‌توان با آنها عیناً مانند دیگر مقالات برخورد کرد. با انباشته‌شدن اطلاعات در طول زمان می‌توان نقدهای جدیدی درخواست کرد که نکات مورد مناقشه را حل کنند.

پیشنهاد فوق چنان طراحی شده که در محدودهٔ انتظاراتی که از عملکرد تکنولوژی و آدمهای معمولیِ جایزالخطا داریم، قابل کاربرد باشد. در این پیشنهادْ نقش مؤلفان، خوانندگان گهگاهی، و داوران رسمی ملحوظ شده است. امتیازِ اصلیِ این پیشنهاد آن است که جریان پیوستهٔ نقد به‌وسیلهٔ همتایان را با جریان پیوستهٔ انتشار که محتملاً پدید خواهد آمد، هماهنگ می‌کند.

1. hypertext links

آیندهٔ ناشران، مجلات، و کتابخانه‌ها

پیش‌بینی زمان یا سرعت انتقال به نظامی که در بخش پیشین به‌طور خلاصه تشریح شد غیرممکن است، زیرا اینها بیشتر به عوامل اجتماعی بستگی دارند. تکنولوژی لازم برای سیستمهای آینده یا در حال حاضر وجود دارد و یا تا چند سال دیگر به منصهٔ ظهور می‌رسد. اینکه چقدر طول بکشد که محققان از این تکنولوژی بهره برند بستگی به آن دارد که ما چقدر آمادگی داشته باشیم که از روشهای سنتی به نفع نظامی برتر ولی بدیع دست بکشیم. به‌عنوان مثال، چقدر طول خواهد کشید که کمیته‌های ممیزی و ترفیع در دانشگاهها، انتشارات الکترونیک را در حد مقالات منتشرشده در مجلات سنتی به‌حساب بیاورند؟

نقش ناشران در نظام جدید چه خواهد بود؟ محققان می‌توانند خودشان مجلات الکترونیک را بدون دریافت کمکهای مالی یا بهای اشتراک، و تنها بااستفاده از ظرفیتِ مازاد کامپیوترها و شبکه‌هایی که به‌عنوان بخشی از امکانات شغلی در اختیارشان نهاده شده، اداره کنند. این الگویی است که اکثر مجلات ریاضیِ الکترونیکِ فعلی برطبق آن عمل می‌کنند. در چنین نظامی، کار مؤلفان و ویراستاران نسبت به کاری که در مجلات چاپی سنتی انجام می‌دهند، بیشتر است، ولی پیشرفتهای تکنولوژی میزان فعالیت لازم را کاهش می‌دهد. از امتیازات عمدهٔ چنین نظامی آن است که مجله هر زمان و تا هر کجا که شبکه‌های اطلاع‌رسانی گسترده شده باشند می‌تواند به‌طور رایگان در دسترس باشد. با این‌حال، اینکه نظام مورد بحث احتمالاً فاقد مرحلهٔ ویرایش فنی خواهد بود، نمی‌تواند قابل‌قبول باشد. اما گمان من این است که هزینهٔ لازم برای کمک ویراستاری به‌مراتب کمتر از هزینهٔ این‌کار در مجلات چاپی است، در حدی که مؤسساتی که مؤلفان در آنها کار می‌کنند، خواهند توانست این نوع خدمات را در اختیار مؤلف قرار دهند. اگر چنین شود مجلات الکترونیک را می‌توان به‌رایگان هم توزیع کرد. اگر چنین کمکهایی فراهم نیامد، آنگاه بهای اشتراک بایستی دریافت شود و بر اساس آن، دستیابی به اطلاعات محدود گردد. ولکن، برای توفیق در رقابت با توزیع رایگانِ پیش‌چاپ و مجلات رایگان، تمامیِ مجلاتِ غیررایگان ناچار خواهند بود که بهای اشتراک را پایین نگه‌دارند. در هر صورت، حدس من آن است که تعداد ناشران به‌ناگزیر تقلیل خواهد یافت.

مجلات کاغذیِ فعلی باید به‌صورت الکترونیک منتشر شوند وگرنه از بین خواهند رفت. چه‌بسا که نقش کاغذ به استفاده‌های موقت محدود شود، و آرشیوهای ذخیره به‌صورت الکترونیک خواهد بود. اهمیت نقشی که مقالات نقدوبررسی ایفا خواهند کرد مدام افزایش خواهد یافت؛ این مقالات را محققان می‌نویسند و می‌توان آنها را در مجلات الکترونیکِ عادی منتشر کرد. از سوی دیگر ممکن است نقدوبررسی کوتاه آثار ریاضی، همچون نقدهایی که در متمتیکال ریویوز و تسنترالبلات مرسوم است، جای خود را به جستجوهای کامپیوتری بدهند، زیرا که کل آثار در کامپیوتر هر دانشوری در دسترس خواهد بود. شاید به این ترتیب فاتحهٔ متمتیکال ریویوز و تسنترالبلات خوانده شود. ولی من معتقدم که اینان به بقای خود ادامه خواهند داد، هرچند به ناچار تغییراتی خواهند کرد. این مجلات آنقدر ارزان هستند که نیازی ندارند خدمات فوق‌العاده‌ای برای توجیه قیمت خود ارائه دهند. همواره این نیاز وجود خواهد داشت که مقالات رده‌بندی شوند، و اطمینان حاصل شود که تمامِ مقالاتِ بااهمیت نقدوبررسی شده‌اند، و تمام تغییراتِ بانکهای اطلاعاتی مستمراً زیرنظر باشد. مجلات نقد در موقعیتی قرار می‌گیرند که این خدمات را ارائه دهند. ولی این مجلات باید تغییر کنند. آنها باید به‌صورت الکترونیک عرضه شوند و به‌احتمال قوی باید از هر مؤسسهٔ استفاده‌کننده مبلغی بابت جواز استفاده دریافت کنند تا امکان دسترسی نامحدود برای همهٔ دانشمندان وابسته به آن مؤسسه فراهم آید. این مجلات اطّلاعاتی بسیار روزآمدتر از آنچه با وسایل غیرالکترونیک ممکن است، در اختیار قرار خواهند داد زیرا تأخیری در انتشار وجود نخواهد داشت. قالبهای نقد ممکن است با قالبهای امروزی تفاوت داشته باشند. احتمالاً تمایز عمدهٔ آنها با آنچه امروز رایج است، وجود رابط‌های اَبَرمتنی بین نقدها از یک‌طرف و مقالات و حواشی مربوط به آنها از طرف دیگر، خواهد بود. مجلات نقدوبررسی با این امکانات به‌همراه میسر کردن دسترسی آسان به منابع اصلی، کلیهٔ خدمات کتابخانه‌های تخصصی را به خواستاران عرضه خواهند کرد.

چه بر سر کتابخانه‌ها خواهد آمد؟ کتابخانه‌ها هم به ناچار کوچک می‌شوند و باید نقششان عوض شود. احتمالاً انتقال به نظام جدید برای کتابخانه‌ها به‌اندازهٔ ناشران دشوار نخواهد بود. ولی چون کتابخانه‌ها دارای مجموعه‌های آثار قدیمیِ چاپی هستند که باید حفظ شده و به قالب دیجیتال درآیند، این تحول در آنها بیشتر طول خواهد کشید. اما نهایتاً چه بسا که به‌تعداد بسیار کمتری کتابدار مرجع نیاز داشته باشیم. اگر مجلات نقد آنچنانکه من پیش‌بینی کردم تحول یابند، تمامی خدماتی را که بیشتر کتابخانه‌ها ارائه می‌کردند، مستقیماً در اختیار پژوهشگران قرار خواهند داد. با امکان‌پذیر شدن دسترسی سریع به تمامی اطلاعات موجود در یک رشته، با وجود ابزارهای جستجو، نقدها، و دیگر وسایل کمکی، معدودی کتابدار و دانشمند در مجلات نقد می‌توانند جانشین هزار کتابدارِ مرجع شوند.

سپاسگزاری

این نوشتار دیدگاه شخصی مرا دربارهٔ آیندهٔ مجلات ریاضی شرح می‌دهد. معدودی از نظرات و پیش‌بینیها از آنِ خودِ من است؛ و از ایده‌های مطرح‌شده در مقالاتی نیز که در فهرست زیر می‌آیند، آزادانه استفاده کرده‌ام. همچنین از مکاتبات الکترونیک فراوان با پال گینسپارک، فرنک کوپین، و به‌ویژه استیون هارناد بسیار بهره برده‌ام؛ و نیز اظهارنظرها و اطلاعات مفیدی از بسیاری همکاران و کسانی‌که با ایشان مکاتبه داشته‌ام دریافت کرده‌ام که از همگی در متن کامل این مقاله سپاسگزاری نموده‌ام. صورت کاملِ این نوشتار که شامل داده‌های بیشتر، استدلالات مشروحتر، و مراجع افزونتری است، در مجلهٔ *International Journal of Human-Computer Studies* چاپ خواهد شد ولی می‌توان آن را از طریق پست الکترونیک هم از نویسنده دریافت کرد.

مراجع

1. *Report of the APS task force on electronic information systems*, Bull. Amer. Phys. Soc. **36** (1991), 1119-1151.
2. J. Franks, *The impact of electronic publication on scholarly journals*, Notices Amer. Math. Soc. **40** (1993), 1200-1202.
3. _____, *What is an electronic journal?*, Unpublished report, availableat gopher: //gopher.cic.net/11/e-serials/related.
4. P. Ginsparg, *First steps towards electronic research communication*, Comput. Phys. **8** (1994), 390-396; also available at URL

http://xxx.lanl.gov/blurb/.

5. S. Harnad; *Scholarly skywriting and prepublication continuum of scientific inquiry*, Psych. Sci. **1** (1990), 342-343; reprinted in Current Contents **45** (1991), 9-13.

6. ———, *Implementing peer review on the Net: Scientific quality control in scholarly electronic journals*, Proc. Intern. Conf. on Refereed Electronic Journals: Towards a Consortium for Networked Publications (to appear); available via anonymous ftp, along with [5] and other related papers, from princeton.edu, in directory pub/harnad/Harnad.

7. ———, *Publicly retrievable FTP archives for esoteric science and scholarship: A subversive proposal*; to be presented at Network Services Conference, London, 28-30 November 1994. Available by anonymous ftp from princeton.edu, in directory pub/harnad/Psycoloquy/Subversive.Proposal.

8. J. Lederberg, *Digital communications and the conduct of science: The new literacy*, Proc. IEEE **66** (1978), 1314-1319.

9. J.C.R. Licklider, *Libraries of the future*, M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1965.

10. D. Loeb, *An electronic journal of mathematics: Feasibility report 5*, Electronically circulated manuscript, 1991.

11. J.K. MacKie-Mason and H.R. Varian, *Some economics of the Internet*, Networks, Infrastructure and the New Task for Regulation (W. Sichel, ed.) (to appear). Available via gopher or ftp together with other related papers from gopher.econ.lsa.umich.edu in /pub/Papers.

12. *Mathematical Reviews, 50th anniversary celebration*, special issue, January 1990.

13. A. Okerson, *The electronic journal: What, whence, and when?*, The Public-Access Comput. Sys. Rev. **2** (1991), 5-24.

14. D.J. Price, *The exponential curve of science*, Discovery **17** (1956), 240-243.

15. F. Quinn, *Roadkill on the electronic highway? The threat to the mathematical literature*, Notices Amer. Math. Soc. (1995), 53-56.

16. A.C. Schaffner, *Electronic journals in the sciences*, Brandeis internal report, available from the author, schaffner@logos.cc.brandies.edu.

17. ———, *The future of scientific journals: Lessons from the past*, Inform. Tech. Lib. **13** (1994) (to be published); preprint available from the author, schaffner@logos.cc.brandeis.edu.

* * * * * *

• Andrew M. Odlyzko, "Tragic loss or good riddance? the impending demise of traditional scholarly journals", *Notices of the AMS*, (1) **42** (1995) 49-53.

* اندرو اُدلیزکو، آزمایشگاههای بل در آمریکا

amo@research.att.com

مجلهٔ فیزیک

سال ۱۳، شمارهٔ بهار و تابستان ۱۳۷۴

به‌زودی منتشر می‌شود

عنوان برخی از مقاله‌ها:

- چه کسی از علم می‌ترسد؟
- مفهوم جرم
- چگونه می‌توان بخشی از معادلات حرکت سیستمهای مکانیکی را وارد کنش سیستم کرد؟
- ایستایی‌شناسی نردبانی که به دیوار تکیه دارد
- سرانجام کوارک سر پیدا شد
- در جستجوی بی‌پایان شتابدهنده‌ها
- استخراج نظم بیشتر از هرج و مرج
- ماکس پلانک و «سال سیاه» فیزیک آلمان

مقالهٔ کلاسیک

برخی کاربردهای توپولوژی در جبر

هاینتس هوپف

ترجمهٔ مهدی مجیدی ذوالبنین

مقالهٔ زیر که شاهکاری در زمینهٔ تألیف مقالات توصیفی ریاضی به‌شمار می‌رود برای اولین بار در سال ۱۹۵۲ در مجلهٔ *گزارشهای سمینار ریاضی دانشگاه و پلی‌تکنیک تورینو* به چاپ رسید و در واقع، متن سخنرانیهای هاینتس هوپف در دانشگاههای تورینو و جنوا بود. در سال ۱۹۹۴، مجلهٔ *اِلِمِنته دِر ماتماتیک* (*Elemente der Mathematik*) چاپ سوئیس، این مقاله را در ویژه‌نامهٔ صدمین سال تولد هاینتس هوپف به چاپ رساند. عنوان مقاله در زبان اصلی، **Einige Anwendungen der Topologie auf die Algebra** است.

با وجود دوگانگی روشهای جبریِ محض و روشهای توپولوژیکِ محض، که اغلب با واژه‌های «گسسته» و «پیوسته» توصیف می‌شوند، همان‌طور که می‌دانیم، همبستگیها و روابط متعدد و مختلفی بین جبر و توپولوژی وجود دارد. من در این سخنرانی از میان انبوه این روابطْ چند مورد خاص را برخواهم گزید. همهٔ این موارد به یک بخشِ در واقع قدیمی از ریاضیات تعلق دارند، و کاربرد روشهای توپولوژیک در جبر کلاسیک و «غیرنوین» هستند، یعنی جبری که بر روی هیأت اعداد حقیقی یا هیأت اعداد مختلط بنا می‌شود. بدین‌ترتیب در اینجا کم‌وبیش با اثبات وجود صفرهای چندجمله‌ایها یا دستگاههای چندجمله‌ای سروکار خواهیم داشت. از آنجا که مفاهیم پیوستگی دقیقاً همان چیزی است که باعث تمایز هیأتهای اعداد حقیقی و اعداد مختلط با سایر هیأتهای جبری می‌شود، عجیب نیست که روشهای توپولوژیک و در نتیجه، روشهای «هندسهٔ پیوسته» در اینجا کارایی زیادی دارند. به‌علاوه بخشهایی از هندسهٔ جبری کلاسیک مانند قضایای نقطهٔ بُرشی و نتایج آن نیز جایگاهی طبیعی در این بحث دارند ولی من نمی‌خواهم در این سخنرانی دربارهٔ مسائلی که در میان متخصصان هندسهٔ جبری مطرح است صحبت کنم. قصد من بیشتر آن است که نه تنها بار دیگر قابلیت کاربرد روشهای توپولوژیک در جبر را نشان بدهم، بلکه همزمان توجه جبردانها را به برخی قضیه‌ها و مسأله‌های جبریِ کمتر شناخته‌شده، که در جریان تحقیقات توپولوژیک پدیدار شده‌اند جلب کنم.

۱. شاید قدیمیترین مثال در زمینهٔ به‌کارگیری روشهای توپولوژیک برای اثبات یک قضیهٔ جبری، استدلالی باشد برای اثبات اینکه هر چندجمله‌ای

هاینتس هوپف (Heinz Hopf)، یکی از چهره‌های بارز ریاضیات در نیمهٔ اول قرن بیستم، در سال ۱۸۹۴ در شهر برسلاو آلمان (وروتسلافِ فعلی در لهستان) متولد شد. وی در دانشگاههای برلین، هایدلبرگ و گوتینگن به تحصیل پرداخت و زیرنظر ارهات اشمیت در برلین رسالهٔ دکتری خود را گذراند. هوپف در دههٔ ۱۹۲۰ از افکار مکتب امی‌نوتر بهره گرفت و دوستی و همکاریِ علمیِ درازمدتی را با الکساندروف ریاضیدان روسی برقرار کرد که یکی از ثمرات آن کتاب معروف *توپولوژی* آن دو است. در سال ۱۹۳۱ که هرمان وایل زوریخ را ترک کرد، هوپف صاحب کرسی استادی ریاضیات در دانشگاه صنعتی فدرال (ETH) سویس شد و بقیهٔ زندگی علمی خود را در آن دانشگاه گذراند. وی در سال ۱۹۷۱ درگذشت.

هوپف یکی از بنیانگذاران توپولوژیِ جبری و از نخستین ریاضیدانانی است که به جای ناورداهای عددی، ناورداهای جبری (گروه، حلقه، ...) را به ساختارهای توپولوژیک و هندسی نسبت داد. مفاهیم و قضایای متعددی در توپولوژیْ نام هوپف را برخود دارند (قضیهٔ پوانکاره‌ـهوپف، ناوردای هوپف، کلاف هوپف، ...). وی در سال ۱۹۵۵ به ریاست اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان منصوب شد و تحت رهبری او بود که این اتحادیه که در زمان جنگ جهانی دوم متلاشی شده بود، به یک مجمع منسجم و فراگیر بین‌المللی مبدل شد.

حقیقی

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \qquad (۱.۱)$$

که درجهٔ آن فرد باشد، دارای یک صفرِ حقیقی است. باتوجه به تعمیمهای بعدی، مسیر این استدلال را با ذکر جزئیات مشخص می‌کنم. قرار می‌دهیم

$$g(x) = x^n, h(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \qquad (۲.۱)$$

در نتیجه

$$f(x) = g(x) + h(x) \qquad (۳.۱)$$

و

$$|h(x)| < |g(x)| \quad \text{به‌ازای} \quad |x| \text{بزرگ} \qquad (۴.۱)$$

بنابراین

$$\text{sign}.f(x) = \text{sign}.g(x) \quad \text{به‌ازای} \quad |x| \text{بزرگ} \qquad (۵.۱)$$

از آنجا که n فرد است، $g(x) = x^n$ همواره با x همعلامت است و بدین‌ترتیب، از (۵.۱) نتیجه می‌شود

$$f(r) > 0 \text{ ، } f(-r) < 0 \quad r \text{ مثبت بزرگ} \qquad (۶.۱)$$

تا اینجا اثبات ماهیت جبری داشته است؛ اکنون از پیوستگی f استفاده کرده قضیهٔ بولتسانو را به‌کار می‌بندیم، یعنی قضیهٔ توپولوژیک زیر که من آن را B_1 خواهم نامید: «هرگاه تابع حقیقی f که دربازهٔ E پیوسته است،.در دو نقطهٔ انتهایی E دارای مقادیری با علامتهای متفاوت باشد، آنگاه f دارای صفری در E است.» از اینجا و از (۶.۱) وجود صفری برای چندجمله‌ای $f(x)$ نتیجه می‌شود.

در اثبات معروف زیر برای «قضیهٔ اساسی جبر»، یعنی این قضیه که هر چندجمله‌ای مختلط با درجهٔ مثبت دارای یک صفر است، از استدلالی کاملاً مشابه استفاده می‌شود. فرض کنید در (۱.۱)، a_iها اعداد مختلط و x متغیری مختلط باشند. با تعریفهای (۲.۱)، روابط (۳.۱) و (۴.۱) مانند بالا برقرار خواهند بود. این‌بار به‌جای مطالب بالا در مورد علامتها، مطالبی در مورد «عدد پیچش» ذکر می‌شود: نگاشتهایی از صفحهٔ مختلط x به صفحه مختلط y را که به‌صورت $y = f(x)$ و $y = g(x)$ به‌دست می‌آیند، در نظر می‌گیریم. (به بیان ساده f و g دو تابع پیوستهٔ دلخواه‌اند). وقتی x روی دایرهٔ S_r که به‌صورت $|x| = r$ مشخص می‌شود حرکت کند، تصویر آن، $f(x)$، به دفعات معینی (برابر با تغییرات شناسهٔ آن تقسیم بر 2π) حول نقطهٔ $y = 0$ می‌پیچد. این عدد را با $C[f(S_r)]$ نشان می‌دهیم. به‌همین ترتیب $C[g(S_r)]$ نیز تعریف می‌شود. (در اینجا به‌علاوه فرض می‌کنیم که نقطهٔ $y = 0$ روی $f(S_r)$ و $g(S_r)$ قرار نگرفته باشد). یک نتیجهٔ هندسی ساده، که اصل روشه* نامیده می‌شود، نشان می‌دهد که اگر $f(x) = g(x) + h(x)$ و $|h(x)| < |g(x)|$ به‌ازای $|x| = r$، آنگاه $C[f(S_r)] = C[g(S_r)]$. بدین‌ترتیب در مورد چندجمله‌ایهای f و g نیز به‌خاطر (۴.۱)، همانند (۵.۱)، نتیجه می‌شود که

$$C[f(S_r)] = C[g(S_r)] \quad \text{به‌ازای } r \text{بزرگ} \qquad (۵'.۱)$$

از $g(x) = x^n$ به‌روشنی نتیجه می‌شود

$$C[g(S_r)] = n \quad \text{به‌ازای هر } r > 0 \qquad (۷.۱)$$

از اینجا مشابه با (۶.۱) نتیجه می‌شود

$$C[f(S_r)] = n \neq 0 \quad \text{به‌ازای } r \text{ بزرگ} \qquad (۶'.۱)$$

اکنون از قضیهٔ توپولوژیک B_2 استفاده می‌کنیم که تعمیم مستقیمی از قضیهٔ B_1 است: «فرض کنید f چنین نگاشت پیوسته‌ای از ناحیهٔ دایره‌ای E محدود به S_r، به صفحهٔ y باشد، به‌طوری که $C[f(S_r)] \neq 0$. در این‌صورت، نقطه‌ای در E وجود دارد که توسط f به صفرِ صفحهٔ y نگاشته می‌شود». از اینجا و از (۶'.۱) وجود صفری برای چندجمله‌ای $f(x)$ نتیجه می‌شود[1]. من قضیهٔ B_2 را در اینجا اثبات نخواهم کرد، و به‌طور کلی در این سخنرانی هرگز در مورد اثبات قضیه‌های توپولوژیک صحبت نمی‌کنم و فقط به چگونگی استنتاج قضیه‌های جبری از قضیه‌های توپولوژیک خواهم پرداخت. قضیهٔ B_2 فقط حالت خاصی است از یک قضیهٔ B_k که ناظر به نگاشتهای پیوسته از یک فضای اقلیدسی kبعدی به فضایی همانند می‌باشد. در اینجا می‌خواهم در مورد این قضیهٔ کلی و یک کاربرد آن صحبت کنم. فرض کنید فضای x و فضای y، فضاهای kبعدی اقلیدسی باشند. در این فضاها از نماد جمع برداری استفاده می‌کنیم و نرم اقلیدسی را با $|x|$ و $|y|$ نمایش می‌دهیم. S_r کرهٔ $(k-1)$بعدیِ مشخص‌شده به‌وسیلهٔ $|x| = r$ است، E کرهٔ توپر kبعدی احاطه‌شده توسط S_r است، f نگاشت پیوسته‌ای است از E به فضای y که در آن نقطهٔ $y = 0$، که من آن‌را به اختصار o خواهم نامید، روی تصویر $f(S_r)$ قرار ندارد. اکنون، عدد $C[f(S_r)]$ که آن‌را «مرتبهٔ o نسبت به $f(S_r)$» و یا «شاخص کرونکر f روی S_r» می‌نامند، به‌صورت زیر تعریف می‌شود: این عدد، درجهٔ براوئری نگاشتی از S_r به S'_1 (که در فضای y به‌صورت $|y| = 1$ مشخص می‌شود) است که با تصویر کردن $f(S_r)$ از نقطهٔ o روی S'_1 به‌دست می‌آید (و درجهٔ نگاشت، به‌عنوان تعداد پوششهای مثبت S'_1 به‌وسیلهٔ تصویر S_r منهای تعداد پوششهای منفی مشخص می‌شود). به‌سادگی دیده می‌شود که این عدد به‌ازای $k = 2$، همان عدد پیچش است. اکنون قضیهٔ B_k، که آن‌را «قضیهٔ وجودی کرونکر» نیز می‌نامند چنین می‌گوید: «اگر $C[f(S_r)] \neq 0$، آنگاه نقطه‌ای مانند x در E وجود دارد که $f(x) = 0$»[2].

این قضیه کاربردهای متعددی در قضایای وجودی صفرهای دستگاههای توابع دارد، به‌ویژه هنگامی که آن‌را با اصلِ پیشگفتهٔ روشه که برای فضای kبعدی درست همانند صفحه بیان و اثبات می‌شود، ترکیب کنیم. به‌ویژه، از طریق همان نتایجی که پیشتر ما را به‌سمت اثبات قضیهٔ اساسی جبر کشاند،

---

* Roché

۱. در اثباتهای متداول، به‌جای قضیهٔ توپولوژیک B_2ی فوق، قضیهٔ آنالیزی زیر را به‌کار می‌برند: «اگر f تحلیلی باشد، آنگاه:

$$C[f(S_r)] = (2\pi i)^{-1}\S f^{-1}f'dz = \text{تعداد صفرهای } f \text{ در } E\text{»}.$$

۲. رجوع کنید به

Alexandroff-Hopf. *Topologie I* (Berlin 1935). 12. Kap. §§ 1.2.

می‌توان اکنون قضیهٔ زیر را به‌دست آورد: «فرض کنید f نگاشت پیوسته‌ای از کل فضای x به فضای y باشد و فرض کنید بتوان آن‌را (با نماد جمع برداری) به‌صورت (۳.۱) نوشت، طوری که (۴.۱) برقرار باشد. به‌علاوه، فرض کنید

$$C[g(S_r)] \neq 0 \quad (\text{برای } r \text{ بزرگ}) \qquad (۸.۱)$$

آنگاه نقطهٔ xی وجود دارد که $f(x) = 0$.»

به‌عنوان مثالی خاص از این قضیه، در مورد «قضیهٔ اساسی جبر برای کواترنیونها» (متعلق به آیلنبرگ و نیون [۳]) صحبت می‌کنم: فرض کنید a_iها کواترنیونهای همیلتنی و x متغیری کواترنیونی باشد. یک «تکجمله‌ای از درجهٔ n» حاصلضربی به‌صورت $a_0 x a_1 x \ldots a_{n-1} x a_n$ است که در آن $a_i \neq 0$؛ و یک چندجمله‌ای نسبت به x، مجموعی متناهی از تکجمله‌ایهاست. در اینجا توجه می‌کنیم که به‌دلیل فقدان قانون تعویض‌پذیری، مجموع دو تکجمله‌ای با درجهٔ یکسان، در حالت کلی یک تکجمله‌ای نیست. «قضیهٔ اساسی» می‌گوید: «*اگر چندجمله‌ای کواترنیونی $f(x)$ دقیقاً یک تکجمله‌ای از درجهٔ n در بر داشته باشد و سایر تکجمله‌ایها از درجهٔ کمتر باشند، آنگاه کواترنیونی* چون x_0 وجود *دارد* که $f(x_0) = 0$».

برای اثبات این قضیه، فرض کنیم $g(x)$ تکجمله‌ایِ از درجهٔ n موجود در $f(x)$ باشد و $h(x)$ را مانند (۳.۱) تعریف می‌کنیم. در این‌صورت به‌آسانی ملاحظه می‌شود که (۴.۱) برقرار است. تنها (۸.۱) برای اثبات باقی می‌ماند و در واقع نشان‌دادن اینکه (۷.۱) و به‌دنبال آن (۸.۱) برقرارند، زیاد مشکل نیست.

در اینجا نمی‌خواهم وارد کاربردهای بعدی قضیهٔ وجودی کرونکر شوم. بسیاری از این کاربردها بیشتر به آنالیز منتهی می‌شوند تا به جبر. اکنون می‌خواهم در مورد کاربردهای روشهای توپولوژیک در جبر خطی صحبت کنم.

۲. مثال زیر، نمونهٔ خوبی از کاربرد سادهٔ توپولوژی در جبر خطی است: با کمک قضیهٔ کلاسیک نقطهٔ ثابت براوئر، که می‌گوید «هر نگاشت پیوسته از هر سادکِ با بعد دلخواه به خودش، دارای نقطهٔ ثابت است» [۴]، قضیهٔ زیر (متعلق به فروبنیوس) به‌آسانی اثبات می‌شود: «*هر ماتریس مربعی با درایه‌های حقیقیِ غیرمنفی، دارای یک مقدار ویژهٔ حقیقی غیرمنفی است.*»

در واقع اگر (a_{ij}) یک ماتریس مربعی حقیقی از درجهٔ n باشد و $a_{ij} \geq 0$، برای هر nتایی حقیقی $x = (x_1, \ldots, x_n)$ قرار می‌دهیم $\sum a_{ij} x_j = f_i(x)$. باید نشان دهیم که عدد $\lambda \geq 0$ و nتایی $x \neq (0, \ldots, 0)$ وجود دارند به‌طوری که

$$f_i(x) = \lambda x_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (۱.۲)$$

مجازیم فرض کنیم که هیچ nتایی $x \neq (0, \ldots, 0)$ وجود ندارد که به‌ازای آن، همهٔ f_iها صفر شوند، زیرا یک چنین nتایی، جوابی از (۱.۲) با ضابطهٔ $\lambda = 0$ است. مختصات فضای تصویری $(n-1)$بعدی P را به‌صورت $x_1 : x_2 : \cdots : x_n$ نمایش می‌دهیم، در این‌صورت از طریق

$$x_i = f_i(x)$$

نگاشت $x' = f(x)$ از P به خودش تعریف می‌شود که سادک $(n-1)$بعدی T را که به‌صورت

$$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$$

مشخص می‌شود، به‌خودش می‌نگارد. در T نقطهٔ ثابتی برای f وجود دارد. (۱.۲) به‌ازای این نقطه صادق است و در نتیجه، چون به‌ازای $i = 1, \ldots, n$، $x_i \geq 0$ و $f_i \geq 0$ ولی همهٔ x_iها صفر نیستند، پس $\lambda \geq 0$ (و به دلیل فرضی که در بالا کردیم، حتی $\lambda > 0$).

بدین‌ترتیب، نه‌تنها قضیهٔ فروبنیوس بلکه تعمیم زیر نیز اثبات می‌شود: «فرض کنید توابع حقیقی $f_1, \ldots, f_n$ از متغیرهای حقیقی $x_1, \ldots, x_n$ همه‌جا پیوسته باشند و به‌ازای xهای مثبت، غیرمنفی باشند. در این‌صورت عدد $\lambda \geq 0$ و nتایی $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ با ضابطهٔ $x_i \geq 0$ به‌ازای هر i، وجود دارند چنانکه (۱.۲) برقرار است.» این شرایط به‌طور مثال هنگامی برآورده می‌شوند که f_iها چندجمله‌ایهایی با ضرایب مثبت باشند؛ در این‌صورت یک قضیهٔ جدید جبری خواهیم داشت.

۳. این واقعیت ساده که هر ماتریس مربعیِ حقیقی از درجهٔ فرد، همواره یک مقدار ویژهٔ حقیقی دارد، نقطهٔ شروعِ مناسبی است برای کاربردهای بعدی توپولوژی در قضیه‌های وجود مقدارهای ویژه حقیقی و قضیه‌های همخانوادهٔ آن در جبر خطی. هرچند این قضیه به‌سادگی از این موضوع نتیجه می‌شود که معادلهٔ مشخصهٔ ماتریس از درجهٔ فرد است و یک ریشهٔ حقیقی دارد و هرچند قضیه ارزش جستجو برای یافتن اثباتهای دیگر را ندارد، من می‌خواهم آن‌را به‌شکلی دیگر براساس دیدگاهی توپولوژیک اثبات کنم، زیرا این دیدگاه ما را به سمت تعمیمهایی خواهد کشاند که چندان هم قابل انتظار نیستند.

قضایای توپولوژیکی که در اینجا وارد کار می‌شوند، با میدانهای برداری مماس و پیوسته روی کره‌ها سروکار دارند. بر روی کرهٔ $(n-1)$بعدی S^{n-1} که گاهی در فضای اقلیدسی $(x_1, \ldots, x_n)$، $\mathbb{R}^n$، به‌صورت $\sum x_i^2 = 1$ مشخص می‌شود، می‌توان وقتی n زوج است، یک میدان برداری مماس و پیوسته طوری ساخت که همواره به نقطهٔ $(x_1, \ldots, x_n)$، بردار $\{-x_2, x_1, \ldots, -x_n, x_{n-1}\}$ منسوب شود. وقتی n فرد باشد چنین چیزی غیرممکن است، زیرا قضیهٔ زیر که پوانکاره آن‌را به‌ازای $n = 3$ و براوئر در حالت nهای بزرگتر ثابت کردند و من آن‌را «قضیهٔ مماسها» خواهم نامید، برقرار است: «برای nهای فرد، روی کرهٔ S^{n-1} هیچ میدان برداری مماس و پیوستهٔ بدون تکینگی وجود ندارد». از اینجا قضیهٔ زیر که گاهی آن‌را «قضیهٔ خارپشت» می‌نامند (زیرا برای $n = 3$ شامل تعبیری در مورد خارهای خارپشت است) به‌آسانی نتیجه می‌شود: «برای nهای فرد، در هر میدان برداری پیوسته (و در حالت کلی غیرمماس)، برداری عمود بر S^{n-1} وجود دارد». زیرا در غیر این‌صورت مؤلفه‌های مماس این بردارها یک میدان برداری مماس پیوسته می‌ساختند که با قضیهٔ مماسها تناقض دارد. [۴الف]

وجود یک مقدار ویژهٔ حقیقی برای ماتریس مربعی nسطری حقیقی $A = (a_{ij})$ وقتی n فرد است، نتیجه‌ای از قضیهٔ خارپشت است: فرض

---

۳. رجوع کنید به

S. Eilenberg und I. Niven, The *Fundamental theorem of Algebra* for Quaternions. Bulletin Am. Math. Soc. 50 (1944).

۴. اثبات این قضیه در صفحات ۳۷۷، ۴۸۰، و ۵۳۲ از مرجع ذکرشده در پانوشت ۲ آمده است.

۴الف. صفحهٔ ۴۸۱ از مرجع ذکرشده در پانوشت (۲).

کنید به هر نقطهٔ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ از S^{n-1} بردار $\mathfrak{p}' = A\mathfrak{p}$، یعنی برداری را که از بردار $\mathfrak{p} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ تحت تبدیل خطی A حاصل می‌شود، منسوب کنیم. اگر A تکین باشد، $\lambda = 0$ یک مقدار ویژه است، اگر A ناتکین باشد، بردارهای $\mathfrak{p}'$ یک میدان برداری پیوسته روی S^{n-1} می‌سازند. بنابه قضیهٔ خارپشت، جایی مثل x هست که در آن، جهت $\mathfrak{p}'$ عمود و در نتیجه همجهت با $\mathfrak{p}$ است. در این نقطه $\mathfrak{p}' = A\mathfrak{p} = \lambda\mathfrak{p}$ و λ یک مقدار ویژهٔ A است.

در حال حاضر، این واقعیتِ ساده و مسلم که روی هر کرهٔ S^{n-1} با n زوج، همواره یک میدان مماس پیوسته وجود دارد باعث طرح این پرسش شده است که آیا ممکن است بتوان روی چنین کره‌ای میدان دیگری در نظر گرفت که نسبت به میدان قبلیْ مستقل خطی باشد؟ و یا شاید میدان سوّمی و غیره؟ این پرسش را می‌توان به‌صورت دقیقِ زیر بیان کرد: «برای n داده‌شده، حداکثر تعداد میدانهای برداری پیوسته که می‌توانند به‌صورت مستقل خطی روی S^{n-1} وجود داشته باشند، چندتاست؟» هرچند تاکنون موفق به تعیین این عدد برای n دلخواه نشده‌ایم، ولی در هر صورت قضیهٔ زیر اثبات شده است: «فرض کنید

$$n = 2^m.q, \quad q \text{ فرد} \tag{۱.۳}$$

و فرض کنید روی S^{n-1} تعداد $r - 1$ میدان برداری پیوسته وجود داشته باشد که در هر نقطه مستقل خطی باشند. در این‌صورت

$$r \leq 2^m \tag{۲.۳}$$

یعنی تعداد میدانها از 2^m کمتر است». برای nهای فرد، یعنی برای $2^m = 1$، این همان قضیهٔ مماسهاست. برای $n = 4k + 2$، یعنی برای $2^m = 2$، قضیه می‌گوید که برای هر دو میدان مماس و پیوسته روی S^{4k+1} نقطه‌ای وجود دارد که در آن، جهت هر دو میدان یکسان و یا معکوس هم است و غیره. قضیهٔ فوق در این شکل کلی، نخستین‌بار در ۱۹۵۱ توسط هنری وایتهد اثبات شد[5]، ولی قبل از آن اشتیفل قضیه را برای میدانهای برداری روی فضاهای تصویری $(n-1)$بعدی و یا به‌صورت معادل، برای میدانهایی روی کرهٔ S^{n-1} که تحت تصویر نسبت به مرکز کره به خودشان می‌روند، اثبات کرده بود. از این قضیهٔ خاص، اشتیفل برخی نتایج جبری بیرون کشید که اکنون دربارهٔ آنها صحبت خواهیم کرد[6].

فرض کنید $A_1, \ldots, A_r$ ماتریسهای مربعی حقیقی از درجهٔ n باشند. این ماتریسها، دسته‌ای خطی از ماتریسها چون

$$y_1A_1 + \cdots + y_rA_r \tag{۳.۳}$$

تولید می‌کنند که $y_1, \ldots, y_r$ ضرایب حقیقی دلخواه هستند. این دسته را «منظم» می‌نامیم در صورتی‌که همهٔ ماتریسهای (۳.۳) مگر ماتریس $(y_1, \ldots, y_r) = (0, \ldots, 0)$ منظم باشند. در این حالت این قضیه برقرار است: «*اگر (۱.۳) برقرار باشد و اگر یک دستهٔ منظم (۳.۳) با r ضریب وجود داشته باشد، آنگاه (۲.۳) برقرار است*».

می‌خواهیم این قضیه را بلافاصله از قضیهٔ بالا در مورد میدانهای برداری روی کره‌ها نتیجه بگیریم: از آنجا که دستهٔ (۳.۳) منظم است، ماتریس A_r نیز منظم خواهد بود. یعنی ماتریس منظم A_r^{-1} وجود دارد. چون با ضرب کردن همهٔ ماتریسها در یک ماتریس منظمِ معلوم، به‌طور مثال در A_r^{-1}، چیزی عوض نمی‌شود، مجازیم از ابتدا فرض کنیم: $A_r = E$ (ماتریس واحد). برای هر بردار واحد $\mathfrak{p}$ در $\mathbb{R}^n$، به بردارهای $A_i\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ (یعنی بردارهایی که $\mathfrak{p}$ توسط نگاشتهای خطی A_i به آنها نگاشته می‌شود) توجه می‌کنیم. $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_r$ را به‌عنوان بردار مکان نقطهٔ x روی S^{n-1} در نظر می‌گیریم و به نقطهٔ x بردارهای $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{r-1}$ را منسوب می‌کنیم. مؤلفه‌های مماسی $\mathfrak{p}_i$ نسبت به S^{n-1} بردارهای $\mathfrak{p}'_i = \mathfrak{p}_i - (\mathfrak{p}_i\mathfrak{p})\mathfrak{p}$ هستند. اکنون ابتدا از منظم‌بودن دسته ماتریسهای (۳.۳) استقلال خطی بردارهای $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{r-1}$ و $\mathfrak{p}$ نتیجه می‌شود و سپس از اینجا استقلال خطی $r - 1$ بردار $\mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_{r-1}$ حاصل می‌شود. بدین‌ترتیب روی S^{n-1} دستگاهی از $r - 1$ میدان برداری پیوستهٔ مستقل خطی وجود دارد و در نتیجه (۲.۳) برقرار است.

قضیه‌ای که در مورد دسته ماتریسها اثبات شد، به‌ازای nهای فرد، یعنی به‌ازای $2^m = 1$ حاکی است که هر دستهٔ ۲پارامتری شامل یک ماتریس تکین است و این گفته معادل همان قضیهٔ قبلی در مورد وجود یک مقدار ویژهٔ حقیقی برای یک ماتریس با درجهٔ فرد است. این قضیه به‌ازای $n = 4k + 2$، یعنی $2^m = 2$، می‌گوید که هر دستهٔ ۳پارامتری، شامل یک ماتریس تکین است و یا به عبارت دیگر، هر دستهٔ ۲پارامتری، ماتریسی با یک مقدار ویژهٔ حقیقی دربر دارد و غیره. به‌علاوه، نتیجهٔ زیر هم از قضیه‌مان به‌دست می‌آید: «*یک دسته ماتریس منظم nپارامتری از ماتریسهای nسطری فقط در صورتی ممکن است وجود داشته باشد که $n = 2^m$*». به این سؤال که آیا به‌ازای هر n یک دسته ماتریس منظم 2^mپارامتری از ماتریسهای nسطری وجود دارد یا نه، جواب داده نشده است. به‌نظر می‌رسد جواب سؤال منفی باشد. مشخص شدن این مسأله، برای جبر و به‌همان اندازه برای توپولوژی روشنگر است.

حالت $r = n$ که حکم فوق راجع به آن است، در تحقیقات مربوط به جبرهای تقسیم شرکت‌ناپذیر روی هیأت اعداد حقیقی نقشی ایفا می‌کند. یک‌چنین جبری از درجهٔ n، به‌طوری که می‌دانید، به‌صورت زیر تشریح می‌شود: فضای برداری nبعدی حقیقی $\mathbb{R}^n$ با عملهای معمولیش، به‌همراه یک ضرب برداری که نسبت به جمع توزیع‌پذیر است و در قانون زیر که در آن A و B بردار و a و b عدد هستند صدق می‌کند

$$(aA).(bB) = (ab).(AB)$$

و بالاخره باید تقسیم بر هر بردار مخالف ۰ به‌صورت یکتا بامعنی باشد، به‌عبارت دیگر نباید هیچ مقسوم‌علیه صفری وجود داشته باشد. اما لازم نیست قانون شرکت‌پذیری ضرب برقرار باشد. اینکه ما در اینجا به جبرهای شرکت‌ناپذیر هم علاقه‌مندیم، هم بدان‌جهت است که ساختارهای شرکت‌ناپذیر

---

۵. رجوع کنید به

N.E. Steenrod and J.H.C. Whitehead, *Vector fields on the n-sphere*. Proc. Nat Acad. Sci. 37 (1951).

۶. رجوع کنید به

E. Stiefel. *Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen und einen Satz aus der reellen Algebra*. Comment. Math. Helvet. 13 (1941)

و همچنین به

H. Hopf. *Ein topologischer Beittrag zur reellen Algebra*

در همانجا.

(مثل طوقها*) امروزه به‌هرحال موضوع تحقیقات جبری هستند و هم به‌خاطر آن است که یک جبر تقسیم شرکت‌ناپذیر روی هیأت اعداد حقیقی وجود دارد که به دلایل جبری و هندسی مهم و جالب است: دستگاه هشت‌تاییهای کیلی که از درجهٔ ۸ است[۷].

بنابر یک قضیهٔ کلاسیکِ متعلق به فروبنیوس، اعداد مختلط و کواترنیونها تنها جبرهایِ تقسیمِ شرکتپذیر روی هیأت حقیقی هستند. یعنی در این حالت $n = ۲$ یا $n = ۴$. قضیه‌ای از هورویتس (در مورد قضیه‌های ضرب مجموعهای مربعی)[۸] می‌گوید: تنها جبرهایی (نه لزوماً شرکت‌پذیر) که در آنها قانون ضربِ نرمی $|AB| = |A|.|B|$ برقرار است (که عدم وجود مقسوم‌علیه صفر، یعنی خاصیت تقسیم را نتیجه می‌دهد) عبارت‌اند از دستگاه اعداد مختلط، کواترنیونها و هشت‌تاییهای کیلی. پس در این حالت، $n = ۲, ۴, ۸$. اینکه آیا برای درجه‌های nی غیر از ۲و۴و۸، جبرهای تقسیم (که در آنها، نه قانون شرکتپذیری و نه قانون ضرب نرمی، هیچکدام نمی‌توانند برقرار باشند) روی هیأت حقیقی وجود دارند یا نه، مشخص نیست. امّا نکتهٔ زیر در مورد این مسأله، از نظریهٔ اشتیفل که قبلاً در مورد آن صحبت کردیم به‌دست می‌آید: «*درجهٔ هر چنین جبری حتماً توانی از ۲ است*». در واقع، فرض کنید $n_۱$، ...، n_n بردارهای پایه برای یک‌چنین دستگاهی باشند و فرض کنید ضرب آنها به‌صورت

$$n_i n_j = \sum a_{ij}^k n_k \qquad (۴.۳)$$

تعریف شده باشد، به‌طوری که برای $A = \sum x^i n_i$ و $B = \sum y^j n_j$، حاصلضرب آنها، به‌صورت

$$AB = \sum z^k n_k, \qquad z^k = \sum x^i y^j a_{ij}^k$$

باشد. همچنین فرض کنید $AB = ۰$ و $B \neq ۰$، یعنی

$$\sum_i (\sum_j y^j a_{ij}^k) x^i = ۰, \qquad k = ۱, \ldots, n \qquad (۵.۳)$$

و $(y_۱, \ldots, y_n) \neq ۰$. از آنجا که هیچ مقسوم‌علیه صفری وجود ندارد، دستگاه معادلات (۵.۳) تنها به‌ازای $A = (۰, \ldots, ۰)$ برقرار می‌شود، پس ماتریس $(\sum y^j a_{ij}^k)$ منظم است. این ماتریس برابر است با

$$A_j = (a_{ij}^k) \quad \text{که} \quad y^۱ A_۱ + \cdots + y^n A_n$$

(که در آن i و k اندیس سطرها و ستونها هستند). بدین‌ترتیب، یک دستهٔ منظم nپارامتری از ماتریسهای nسطری داریم. بنابراین همان‌طور که قبلاً دیده‌ایم، $n = ۲^m$.

امّا اینکه آیا چنین جبرهایی برای $n = ۲^m \geq ۱۶$ وجود دارد یا نه، مشخص نیست.

۴. اکنون می‌خواهم با یک روش توپولوژیک که با آنچه تا اینجا دیده‌ایم کاملاً تفاوت دارد، قضیه‌ای جبری ثابت کنم که کاملاً در محدودهٔ بحث ماست.

اگر به اصول موضوعِ «جبرهای تقسیم روی هیأت حقیقی که ممکن است شرکتپذیر نباشند»، این شرط را هم بیفزاییم که ضرب باید تعویضپذیر باشد، آنگاه طبیعی است که وضعیت بسیار ساده‌تر خواهد شد و جای تعجب ندارد که دیگر مسأله حل‌نشده‌ای وجود نداشته باشد. در واقع، این قضیه[۹] برقرار است: «*یک جبر تقسیمِ تعویضپذیر روی هیأت اعداد حقیقی، شرکتپذیر یا شرکت‌ناپذیر، از درجهٔ ۲ است*».

اگر علاوه بر این، این شرط را هم اضافه کنیم که جبر باید عنصر یک نیز داشته باشد، آنگاه از قضیهٔ فوق با استفاده از احکامی کاملاً مقدماتی نتیجه می‌شود که جبر مذکور همان هیأت اعداد مختلط است. بنابراین می‌توان گفت: برای هر جبر (از درجهٔ متناهی) روی هیأت اعداد حقیقی، قانون شرکتپذیریِ ضرب نتیجه‌ای از ویژگی تقسیم (عدم وجود مقسوم‌علیه صفر)، قانون تعویضپذیری، و وجود عنصر یک است.

اکنون به اثبات توپولوژیک قضیه می‌پردازیم. برتری عدد ۲ بر اعداد بزرگتر از آن در قضیهٔ فوق، به‌صورت زیر مشخص می‌شود: به‌ازای $n = ۲$، ولی نه به‌ازای $n > ۲$، کره‌های $(n - ۱)$بعدی $S^{n-۱}$ و فضاهای تصویری حقیقی $(n - ۱)$ بعدی $P^{n-۱}$ با هم همسانریخت (از نظر توپولوژیک معادل) هستند. در واقع، دایرهٔ $S^۱$ و خط تصویری $P^۱$ خطهای بستهٔ ساده‌ای هستند، درحالی‌که به‌ازای $n > ۲$، هر چند کرهٔ $S^{n-۱}$ ساده‌ـهمبند است (یعنی می‌توان هر مسیر بسته روی آن‌را به یک نقطه تبدیل کرد) ولی فضای تصویری $P^{n-۱}$ چنین نیست (زیرا مثلاً در آن، یک خط تصویری قابل انقباض نیست).

اکنون جبری از درجهٔ n در نظر می‌گیریم که همهٔ ویژگیهای قید شده را داشته باشد. فرض کنید در فضای $\mathbf{R}^n$، که بردارهای آن اعضای جبر هستند، o نقطهٔ صفر باشد. کلاف خطوط گذرا از o نمایشگر یک $P^{n-۱}$ و خمینهٔ نیم‌خطهای خارج شونده از o نمایشگر یک $S^{n-۱}$ هستند. فرض کنید q نگاشتی از $\mathbf{R}^n$ به خودش باشد که به هر بردار A مربع آن $A.A = A^۲$ (به مفهوم ضرب در جبر موردنظر) را نسبت می‌دهد: $q(A) = A^۲$. به‌ازای هر عدد حقیقی c داریم $q(cA) = C^۲ A^۲$؛ بنابراین، q هر خط راست گذرا از o را بر یک نیمخط خارج شونده از o می‌نگارد. پس نگاشتی چون Q از $P^{n-۱}$ به $S^{n-۱}$ به‌دست می‌آید. طبیعی است که Q پیوسته است. من ادّعا می‌کنم: Q یک‌به‌یک است. فرض کنید A و B دو بردار باشند که خطوط همراستای آنها هر دو به یک نیمخط نگاشته می‌شوند. در این صورت $q(A)$ و $q(B)$ تنها در یک ضریب حقیقی با هم تفاوت دارند که منفی نیست و در نتیجه می‌توانیم آن‌را $c^۲$ بنامیم

$$B^۲ = c^۲ A^۲$$

---

* loops

۷. رجوع کنید به
L. E. Dickson, *Algebren und ihre Zahlentheorie* (Zürich 1927) §133.

۸. رجوع کنید به
A. Hurwitz. *Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen*. Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen 1898 (=Math. Werke. Bd. II (Basel 1933). p. 565).

۹. رجوع کنید به
H. Hopf. *Systeme symmetrischer Bilinearformen und euklidische Modelle der projektiven Räume*, Vierteljahrsschrift Naturf. Ges. Zürich, LXXXV (1940), (=Festschrift *Rudolf Fueter*), p. 165.

به‌خاطر خاصیت تعویضپذیری

$$B^2 - c^2A^2 = (B + cA)(B - cA)$$

پس

$$(B + cA|)(B - cA) = 0$$

و چون مقسوم‌علیه صفر وجود ندارد

$$B = \pm cA$$

یعنی: A و B روی یک خط راست قرار دارند. بدین‌ترتیب، یک نگاشت پیوسته و یک‌به‌یک Q از P^{n-1} به S^{n-1} داریم. اما P^{n-1} و S^{n-1} خمینه‌هایی بسته هستند و از احکام کاملاً ساده و کلّی توپولوژی نتیجه می‌شود که Q یک همسانریختی است. بنابراین $n - 1 = 1$ و $n = 2$.

بدین‌ترتیب، قضیهٔ ما ثابت شده است. خاطرنشان می‌کنم که من برای این قضیه اثباتی نمی‌شناسم که با روشهای معمول جبری و بدون استفاده از توپولوژی انجام شود. یافتن چنین اثباتی را تمرین جالبی می‌دانم که با توجه به سادگی خودِ قضیه و اثبات توپولوژیکِ ما، گمان نمی‌کنم خیلی مشکل باشد.

۵. می‌توان قضیه‌ای را که هم‌اکنون اثبات کردیم طوری تغییر داد که یک پرسش جدید جبری که آن هم از طریق توپولوژی قابل بررسی است مطرح شود.

قضیهٔ ما می‌گوید: «فرض کنید $n > 2$ و نیز فرض کنید روی هیأت اعداد حقیقی، جبری از درجهٔ n داشته باشیم که لزوماً شرکتپذیر نیست ولی تعویضپذیر هست. در این‌صورت این جبر دارای مقسوم‌علیه صفر است». همان صورتبندی بخش ۳ را به‌کار می‌بریم، یعنی ضرب به‌صورت (۴.۳) داده شده است. در این‌صورت، n ماتریس

$$A^k = (a^k_{ij}), \qquad k = 1, \ldots, n$$

(که در آن، حالا، i و j اندیسهای سطرها و ستونها هستند) به‌خاطر خاصیت تعویضپذیریِ ضرب، متقارن هستند. من نماد A^k را همزمان به‌عنوان تابعی که با صورت دو خطی متقارن

$$A^k(x, y) = \sum a^k_{ij} x^i y^j$$

داده می‌شود نیز به‌کار می‌برم. وجود مقسوم‌علیه صفر بدان معناست که دستگاه معادلات (۵.۳)، یعنی دستگاه

$$A^k(x, y) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n$$

دارای جوابی به‌صورت $x \neq (0, \ldots, 0)$ و $y \neq (0, \ldots, 0)$ است. این به زبان هندسی به معنی زیر است: «*فرض کنید در فضای تصویری حقیقی P^d از بعد $d = n - 1$، $d + 1$ رویهٔ درجهٔ ۲ به‌وسیلهٔ معادلات*

$$A^k(x, x) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n$$

داده شده باشند. در این‌صورت دو نقطهٔ حقیقی x و y وجود دارند که نسبت به هر یک از این رویه‌ها قطبی‌اند».

این قضیه با قضیهٔ ما در بخش ۴ در مورد جبرهای تقسیم تعویضپذیر معادل است. اما اکنون این سؤال طبیعی پیش می‌آید که آیا این ادعا — یعنی وجود دو نقطه که نسبت به همهٔ رویه‌های داده شده قطبی‌اند — وقتی هم که بیشتر از $d + 1$ رویه داشته باشیم درست نخواهد بود؟ در واقع، اکنون با همین حالت سروکار داریم و قضیهٔ زیر برقرار است: «*در فضای تصویری حقیقی P^d، $d > 1$، فرض کنید s رویهٔ حقیقی درجهٔ ۲ داده شده باشند. در این‌صورت، هر یک از شرطهای (الف) و (ب) ی زیر برای وجود یک جفت نقطهٔ حقیقی x و y که نسبت به هر یک از رویه‌ها در وضعیت قطبی باشند، کافی است*،

(الف) $s \leq d + 2$

(ب) $s \leq 2^t - 1$ که $2^{t-1} \leq d < 2^t$

شرط (الف) برای همهٔ dها و شرط (ب) برای بیشتر dها — یعنی برای آنهایی که برابر $2^t - 1$ یا برابر $2^t - 2$ نیستند — تعمیم قضیهٔ قبلی ما در مورد $d + 1$ رویه هستند. برای بیشتر dها، شرط (ب) بسیار از شرط (الف) بهتر است، یعنی بیشتر وقتها می‌توان خیلی بیش از $d + 2$ رویه در نظر گرفت. من نمی‌دانم بزرگترین عدد $s^* = s^*(d)$ که به‌ازای آن، وجود یک جفت نقطهٔ x و y به‌صورت ذکر شده، برای هر دستگاه n رویه‌ای تضمین می‌شود کدام است. می‌خواهم در اینجا به این مسأله که مربوط به هندسهٔ جبری حقیقی است اشاره کنم.

در مورد اثبات (الف) و (ب) باید گفت که (الف) را می‌توان با تعمیم نکتهٔ توپولوژیک بخش ۴ اثبات کرد. به‌جای استفاده از این حکم که به‌ازای $n > 2$ فضای تصویری P^{n-1} با کرهٔ S^{n-1} همسانریخت نیست، از این حکم قویتر استفاده می‌کنیم که P^{n-1} دارای الگویی توپولوژیک در فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^n$ نیست.* شرط (ب) از قضیه‌ای متعلق به اشتیفل در چارچوب نظریه‌ای که در شمارهٔ ۳ از آن صحبت شد (ولی در آنجا آن‌را صورتبندی نکردیم**) در می‌آید. برای ملاحظهٔ جزئیات موضوع، شما را به نوشته‌های موجود ارجاع می‌دهم؛ نمی‌خواهم سخنانم را که تا همین‌جا هم طولانی شده است، طولانیتر کنم[۱۰].

۶. در اینجا فقط می‌خواهم چند تذکر دیگر بدهم که جنبهٔ کلی و اصولی دارند. در اینجا از قضیه‌های جبری صحبت کردیم که می‌توان آنها را با ابزار توپولوژیک اثبات کرد و تقریباً همهٔ آنها هم از راههای توپولوژیک به‌دست آمده‌اند. حال همان‌طور که در مقدمه گفتم، کاملاً میسر است که در جبر روی

---

* پانوشت ۹ را ببینید.

** پانوشت ۶ را ببینید.

۱۰. قضیه‌ها و اثباتهای دیگری را که در چارچوب این سخنرانی می‌گنجند، علاوه بر مراجعی که در زیرنویس ۶ به آنها اشاره شد، می‌توان در مراجع زیر نیز پیدا کرد:

H. Hopf und M. Rueff, *Über faserungstreue Abbildungen der Sphären*. Comment. Math. Helvet. 11(1939).— B. Eckmann. *Systeme von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen*. Comment. Math. Helvet. 15 (1943) و همچنین، در *Stetige Lösungen Linear Gleichungssysteme* در همانجا.

اعداد حقیقی (یا روی هیأت اعداد مختلط، که تفاوت اساسی با آن ندارد) از ابزار توپولوژیک استفاده شود، زیرا در تعریف اعداد حقیقی، مفاهیم پیوستگی پیش می‌آیند. باوجوداین، قابل درک است که وقتی در جریان تحقیقات توپولوژیک، قضایایی از نوع قضیه‌های جبری ذکر شده در بخشهای ۳ و ۴ و ۵ پیدا می‌شوند، رضایت کامل حاصل نشود و این تمایل وجود داشته باشد که برای این قضیه‌ها که آشکارا سرشتِ «جبری» دارند، اثباتهای جبری هم پیدا کنند. اما در اینجا ابتدا باید پرسید منظور از اثبات جبری چیست. من در موقعیتهای مختلف این‌طور پیشنهاد کرده‌ام (در این پیشنهاد همواره می‌توان قضیه‌هایی را که اینجا مورد بحث قرار دادیم در نظر داشت بدون اینکه به کلیت موضوع لطمه‌ای بخورد): «در صورتبندی قضیه‌ها، به‌جای هیأت اعداد حقیقی یک هیأت بستهٔ حقیقی به مفهوم نظریهٔ آرتین-شرایر[۱۱] درنظر گرفته شود و ادعاهای کلیتری که بدین‌ترتیب به‌دست می‌آیند اثبات شوند». در واقع، از این طریق، اصل ارشمیدسی، یعنی اصل پیوستگی کنار گذاشته می‌شود. این‌کار برای قضیهٔ مذکور در بخش ۳ و برای سایر قضیه‌های مربوط به آن، که من به آنها نپرداختم، به‌وسیلهٔ برند انجام شده است[۱۲]. هابیشت نیز برخی اثباتهای جبری محض برای قضیه‌های پیدا شده از طریق توپولوژی ـ به مفهومی که از پیشنهاد من بر می‌آید ـ یافته است[۱۳]. ولی برای قضیهٔ مذکور در بخش ۴، تا آنجا که من می‌دانم، متناظر آن تا کنون به‌دست نیامده است (که همان‌طور که در انتهای بخش ۴ گفتم، من از این امر تعجب می‌کنم، به‌ویژه که حقایق توپولوژیکی که در بخش ۴ ظاهر می‌شوند، از آنهایی که در شمارهٔ ۳ ظاهر می‌شوند، بسیار ساده‌ترند). این مسأله، به‌واسطهٔ نتایج تحقیقات تارسکی در نظریهٔ برهان[۱۴]، جهتی کاملاً نو و به نظر من بسیار شگفت‌انگیز یافته است. برای دستهٔ بزرگی از قضیه‌های «جبری»، که من در اینجا آن را تعریف نمی‌کنم، ولی در هر حال قضیه‌های مورد بحث در بالا را هم در بر دارد، همان‌طور که تارسکی نشان داده است، این حکم برقرار است: «اگر چنین قضیه‌ای نسبت به یک هیأت بستهٔ حقیقی قابل اثبات باشد، آنگاه نسبت به هر هیأت بستهٔ حقیقی برقرار است» ـ به‌عنوان نمونه، در نتیجهٔ آن، قضیهٔ ما در بخش ۴ در واقع برای هر هیأت بستهٔ حقیقی برقرار است و اثبات این، دو قسمت دارد: اول اثبات توپولوژیک ما برحسب هیأت اعداد حقیقی و دوم به‌کارگیری اصل تارسکی.

به‌خاطر این اصل، پیشنهادی که در بالا ارائه کردم و نیز کارهای برند و هابیشت که به آنها اشاره شد تقریباً بیفایده شده‌اند. با وجود این، نمی‌توان این کارها و کارهای مشابه را حتی امروز، بی‌محتوا دانست زیرا به این وسیله، به قضیه‌هایی که از طریق توپولوژی به‌دست آمده‌اند، از دیدگاه جدید جبری نگریسته می‌شود و من گمان نمی‌کنم که اثباتِ فرا ریاضیاتی-توپولوژیک برای قضایایِ راجع به جبرهای تقسیم تعویضپذیر، که در بالا از آنها صحبت کردیم، خیال جبردانها را راحت کند. اگر هدف دستیابی به صراحت و روشنی باشد، باید این سؤال را که «اثبات جبری چیست؟» به‌صورت اصولی مورد بحث قرار داد، ولی طبیعی است که چنین بحثی از محدودهٔ این مقال بسیار فراتر می‌رود.

توضیح مجلهٔ *المِنته در ماتماتیک*. هوپف در سخنرانیش به تعدادی مسألهٔ حل‌نشده اشاره می‌کند. بیشتر این مسأله‌ها هنوز هم حل نشده‌اند و فقط مسائل مربوط به وجود میدانهای برداری مستقل خطی روی کره‌ها و همچنین وجود جبرهایِ تقسیم حقیقی، از این امر مستثنا هستند. در این زمینه، کرور[1] و میلنر[2] (در ۱۹۵۸) و کمی دیرتر، آدامز[3] (در ۱۹۶۰) نتایج پیشگامانه‌ای به‌دست آوردند. به دنبال حصول این نتایج، امروز می‌دانیم که روی کره‌های S^{n-1} تنها به‌ازای $n = 2, 4, 8$ وجود دستگاهی از $n - 1$ میدان برداری مماس پیوستهٔ مستقل خطی امکان دارد. در نتیجه، تنها در بعدهای ۱، ۲، ۴، ۸ وجود جبرهای تقسیم حقیقی امکان‌پذیر است. برای این قضیه در مورد جبرهای تقسیم، به‌نظر می‌رسد تا امروز هیچ اثباتی وجود نداشته است که در آن از ابزار قوی توپولوژیک (و نیز قضیهٔ تناوب بات[4]) اجتناب شده باشد. برای قضیهٔ راجع به جبرهای تقسیم تعویضپذیر حقیقی نیز که هوپف در بخش ۴ این مقاله به آن اشاره کرد، ظاهراً تا امروز هیچ اثبات جبریِ محضی کشف نشده است.

خواننده برای کسب اطلاعات بیشتر دربارهٔ این مطالب و پیشرفتهای بعدی در زمینهٔ موضوعاتی که در اینجا مورد بحث قرارگرفتند می‌تواند به کتاب

Ebbinghaus et al.: *Zahlen*. Springer Verlag, 3. Auflage 1992

و به‌خصوص به فصلهای ۸، ۹، و ۱۰ آن، و نیز به

Beno Eckmann: *Continuous solutions of linear equations – An old problem, its history, and its solution*. Expo. Math. 9 (1991) 351-365.

مراجعه کند.

1. M. Kervaire 2. J. Milnor 3. J.F. Adams 4. R. Bot

---

۱۱. به‌عنوان نمونه، رجوع کنید به

Man vergl. z.B. B.L. van der Waerden. *Moderne Algebra*. 1. Teil (2. Aufl. Berlin 1937). p. 235 ff.

۱۲. رجوع کنید به

F. Behrend. *Über Systeme reeller algebraischer Gleichungen*. Compos. Math. 7 (1939).

۱۳. رجوع کنید به

W. Habicht. *Über die Lösbarkeit gewisser algebraischer Gleichungssysteme*. Comment. Math. Helvet. 18 (1946).

و نیز *Ein Existensatz über reelle definite Polynome* در همانجا.

۱۴. رجوع کنید به

A. Tarski, A *decision method for elementary Algebra and Geometry* (2. edition. University of California Press. (Berkeley and Los Angeles 1951); bes. pp. 62-63.

قضیهٔ کرکیارتو دربارهٔ همسانریختیهایِ دوره‌ایِ قرص و کره*

آدرین کنستانتین و بوریس کولف*

ترجمهٔ شهرام محسنی‌پور

۱. مقدمه

درسال ۱۹۱۹، کرکیارتو اولین برهان هم‌ارزیِ توپولوژیک بین همسانریختیها[1]ی دوره‌ایِ [تناوبیِ] قرص و کره و ایزومتریهای اقلیدسی را در مجلهٔ *ماتماتیشه آنالن* به‌چاپ رساند [۳]. در همان مجله، درست بعد از مقالهٔ کرکیارتو، براوئر [۱] ضمن ارائهٔ برهان خودش برای این قضایا، توضیح داد که این احکام را از مدتها قبل می‌دانسته است چون نتیجهٔ چند قضیهٔ قدیمیتر وی دربارهٔ همسانریختیهایِ دوره‌ای رویه‌های فشرده هستند و فقط کمی با آنها تفاوت دارند. ولی برهان براوئر را نمی‌شود به آسانی فهمید و برهان کرکیارتو هم خلاصه‌وار است و در یک‌جا نقصی نیز دارد.

اثبات کامل این قضیهٔ مهم را سالها بعد، در ۱۹۳۴، ایلینبرگ [۶] عرضه کرد. در این اواخر، اپستاین [۷] مجدداً موضوع را در مورد همسانریختیهای دوره‌ایِ نقطه‌ای بررسی کرده است (مفهوم این نوع همسانریختی این است که هر نقطهٔ x تحت f دوره‌ای است ولی دورهٔ تناوب $n(x)$ به x بستگی دارد و کراندار هم فرض نمی‌شود). به دلیل اهمیت این نتایج و چون به نظر نمی‌آید که در نوشته‌های ریاضیِ موجود، شرحی به زبان امروزی دربارهٔ آنها پیدا شود، نویسندگان این مقاله فکر کرده‌اند که عرضهٔ اثباتی نو و مقدماتی سودمند خواهد بود. ولی استدلالهای اصلی متعلق به مراجع [۱، ۳، ۶] است.

۲. پیش‌زمینه و تعاریف

فرض کنید X فضایی توپولوژیک و f یک همسانریختی X باشد. می‌گوییم f دوره‌ای [تناوبی] است اگر عدد صحیحی چون $n > 0$ وجود داشته باشد که $f^n = Id$. دورهٔ تناوب f کوچکترین عدد صحیح مثبت n با این خاصیت است.

ابتدا چند خاصیت ابتداییِ نگاشتهایِ یک بعدی را، که بعداً بدون اثبات به‌کار می‌بریم، به اختصار یادآوری می‌کنیم.

فرض کنید $f : I \to I$ یک همسانریختیِ دوره‌ایِ بازهٔ واحد باشد. اگر f نقاط انتهایی را حفظ کند، آنگاه نگاشت همانی است. اگر f نقاط انتهایی را با هم تعویض کند، آنگاه $f^2 = Id$، و f مزدوج با نگاشتِ بازتابِ $x \mapsto 1 - x$ است. به‌طور مشابه، همسانریختی دوره‌ای خط حقیقی $\mathbf{R}$ بسته به اینکه صعودی یا نزولی باشد، نگاشت همانی یا مزدوج نگاشت قرینهٔ $x \mapsto -x$ است.

فرض کنید $f : S^1 \to S^1$ یک همسانریختیِ دوره‌ایِ دایرهٔ واحد با دورهٔ تناوب n باشد. اگر f جهت‌نگهدار و $\rho(f)$ عدد دورانی[1] f باشد، آنگاه $\rho(f) = k/n$ که در آن k و n متباین‌اند (در [۵] شرح بسیار خوبی دربارهٔ عددهای دورانی آمده است) و f مزدوج دورانی با زاویهٔ $2\pi k/n$ است. اگر f جهت برگردان باشد، آنگاه دقیقاً دو نقطهٔ ثابت دارد، f^2 نگاشت همانی است، و f دو کمانی را که نقاط ثابت f روی S^1 تعیین می‌کنند، تعویض می‌کند.

فضای متریک X مسیری-همبند[2] است اگر برای هر دو نقطهٔ مفروض، نگاشتی پیوسته از بازهٔ واحد $[0, 1]$ به توی X وجود داشته باشد که آنها را به هم وصل کند. X کمانی-همبند[3] است اگر برای هر دو نقطهٔ متمایز مفروض، نشاننده‌ای توپولوژیک از $[0, 1]$ به توی X وجود داشته باشد که آنها را به‌هم وصل کند. در واقع می‌توان نشان داد که این دو مفهوم، هم‌ارزند ([۱۴، قضیهٔ ۱.۴] یا [۱۱، لم ۳.۱۶]) را ببینید.

لم ۱.۲. *فضای متریک X، مسیری-همبند است اگر و تنها اگر کمانی-همبند باشد.*

با استفاده از مفهوم همبندی موضعی، توصیف سودمندی از فضاهای مسیری-همبند میسر می‌شود. فضای متریک X موضعاً همبند است اگر هر نقطهٔ X دارای همسایگیهای همبندِ به‌دلخواه کوچک باشد. می‌توان نشان داد که لم زیر برقرار است ([۸، قضیهٔ ۱۵.۳] یا [۱۱، لم ۴.۱۶]):

لم ۲.۲. *هر فضای متریک فشرده، همبند، و موضعاً همبند، مسیری-همبند است.*

1. homeomorphisms

1. rotation number 2. path connected 3. arcwise connected

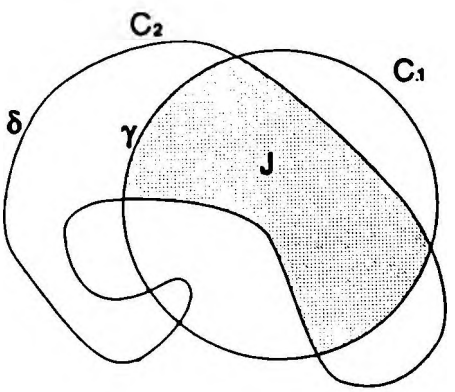
قضیهٔ مشهور ژوردان-شونفلیس دربارهٔ خمهای بستهٔ ساده در صفحه، مطلب مهم دیگری است که در این مقاله به‌کار گرفته می‌شود و در حقیقت آخرین نتیجه‌ای است که به آن احتیاج خواهیم داشت ([۲، ۹] یا [۱۲ قضیهٔ ۱.۱۷] را ببینید).

قضیهٔ ۳.۲. *(ژوردان-شونفلیس). هر خم بستهٔ سادهٔ J صفحه را دقیقاً به دو مؤلفه تقسیم می‌کند که خود مرز کامل هر دو مؤلفه است. و بستار مؤلفه کراندار را می‌توان به‌صورت توپولوژیک به‌روی قرص بستهٔ واحد نگاشت.*

از این به‌بعد، تصویر نشانندهٔ توپولوژیکِ قرصِ بستهٔ واحد را قرص بستهٔ توپولوژیک (یا فقط قرص توپولوژیک) D می‌نامیم و درون آن را با D° و مرز آن را با ∂D نشان می‌دهیم. بااین‌حال، بستار مجموعهٔ کرانداربازی که با قرص باز واحد همسانریخت است، لزوماً قرص توپولوژیک بسته نیست [۱۱، فصل ۱۵].

گزارهٔ ۴.۲. *فرض کنید D_1، D_2، $\cdots$ و D_n تعدادی متناهی قرص توپولوژیک بسته در صفحه و J° یکی از مؤلفه‌های همبندی $\cap_{i=1}^{n} D_i^\circ$ باشد. آنگاه ∂J یک خم بستهٔ ساده و J، بستار J°، قرصی توپولوژیک است.*

برهان ۴.۲. از استقرا روی n یعنی تعداد قرصها استفاده می‌کنیم. برای $n = 1$ قضیهٔ ژوردان-شونفلیس به‌دست می‌آید. پس فرض می‌کنیم که حکم برای nی ($n \geqslant 1$) درست باشد و نیز J° یکی از مؤلفه‌های همبندی اشتراک $n+1$ قرص توپولوژیک D_1، D_2، $\cdots$ و D_{n+1} باشد. فرض کنید K° مؤلفه‌ای از $\cap_{i=1}^{n} D_i^\circ$ باشد که شامل J° است. بنا به استقرا، بستار آن (K) قرص توپولوژیک است. چون J° مؤلفهٔ $K^\circ \cap D_{n+1}^\circ$ است کافی است نشان دهیم که گزاره برای دو قرص D_1 و D_2 درست است (شکل ۱ را ببینید). به‌ازای $i = 1, 2$ قرار می‌دهیم $C_i = \partial D_i$ و فرض می‌کنیم J بستار مؤلفه‌ای از $D_1^\circ \cap D_2^\circ$ باشد. داریم $\partial J \neq \emptyset$ و $\partial J \subset C_1 \cup C_2$. اگر ∂J تماماً در یکی از دو خم، مثلاً در C_1 قرار گیرد آنگاه $J = D_1$، و لم ثابت شده است. پس فرض می‌کنیم که $\partial J \not\subset C_1$ و $\partial J \not\subset C_2$.



شکل ۱

فرض کنید $x \in \partial J$ و $x \notin C_2$. در این‌صورت $x \in C_1 \cap D_2^\circ$، و می‌توان کمانی چون γ در C_1 پیدا کرد که

$$x \in \gamma, \gamma \subset \partial J, \gamma \backslash \partial\gamma \subset D_2^\circ, \partial\gamma \cap C_2$$

نقاط انتهایی γ روی C_2 کمانی چون δ را مشخص می‌کنند که با J° اشتراک ندارد و $\delta \cap J = \partial\delta$. ملاحظه می‌کنیم که حداکثر تعداد شمارایی کمان مانند γ وجود دارد که آنها را با $(\gamma_i)_{i\in N}$ نشان می‌دهیم و اگر $i \to \infty$ آنگاه $diam(\gamma_i) \to 0$. در این استدلال می‌توان جای C_1 و C_2 را عوض کرد و به‌این‌ترتیب مرز بستهٔ ساده‌ای برای J به‌دست می‌آید و طبق قضیهٔ ژوردان-شونفلیس، J قرص توپولوژیک است. □

خاصیت جالب توجه زیر در مورد همسانریختیهای دوره‌ای، نتیجهٔ مستقیم ۴.۲ است و برای فضاهایی کلیتر از صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ یعنی خمینه‌های توپولوژیک دوبعدی نیز درست است و این به سبب ماهیت موضعی آن است. این خاصیت را در چارچوب مبحث خمینه‌ها بیان می‌کنیم چون در این مقاله مکرراً آن را برای قرص و کره به‌کار خواهیم برد.

لم ۵.۲. *فرض کنید $f : S \to S$ یک همسانریختی دوره‌ای خمینهٔ توپولوژیک دوبعدی دلخواه S باشد و فرض کنید $x \in Fix(f)$ نقطهٔ ثابتی از f باشد. دراین‌صورت برای هر همسایگی N از x، قرص توپولوژیک Δ_x وجود دارد که*

۱. $\Delta_x \subset N$

۲. Δ_x همسایگی x است

۳. $f(\Delta_x) = \Delta_x$

برهان ۵.۲. می‌توانیم فرض کنیم N و $f(N)$ تصویر N تحت f، زیرمجموعهٔ نقشه‌ای موضعی چون U هستند که همسانریخت با $\mathbb{R}^2$ است و نقطه و مجموعهٔ متناظرشان در $\mathbb{R}^2$ را نیز با همان x و N نمایش می‌دهیم. فرض کنید D_x قرصی اقلیدسی به مرکز x و به شعاع η ($\eta > 0$) باشد به‌طوری‌که به‌ازای $k = 0, 1, \cdots, n-1$ داشته باشیم $f^k(D_x) \subset N$، و C_x را مرز آن بگیرید. فرض کنید Δ_x بستار مؤلفه‌ای از مجموعهٔ ناوردای $\cap_{k=0}^{n-1} f^k(D_x^\circ)$ باشد که شامل x است. طبق ۴.۲، Δ_x قرص توپولوژیکی است که تحت f ناورداست (هر همسانریختی، مؤلفه‌ها را به مؤلفه‌ها می‌فرستد) و در سه حکم لم صدق می‌کند. □

نکته. γ_x مرز Δ_x، که خمی بسته و ساده و ناورداست، در $\cup_{k=0}^{n-1} f^k(C_x)$ قرار دارد.

۳. همسانریختیهای دوره‌ای قرص

قضیهٔ ۱.۳. *فرض کنید $f : D^2 \to D^2$ یک همسانریختی دوره‌ای باشد. دراین‌صورت، $r \in O(2)$ و همسانریختی $h : D^2 \to D^2$ وجود دارند به‌طوری‌که $f = hrh^{-1}$.*

قبل از پرداختن به اثبات حکم بالا بد نیست به حالت خاصی از قضیهٔ ۱.۳ نظری بیفکنیم.

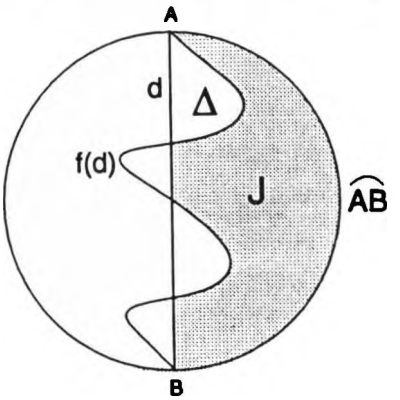
گزارهٔ ۲.۳. *فرض کنید $f : D^2 \to D^2$ یک همسانریختی دوره‌ای باشد که $f/_{\partial D^2} = Id$. دراین‌صورت $f = Id$.*

برهان ۲.۳. فرض کنید d قطر داخلی از D^2 با نقاط انتهایی A و

B باشد و Δ یکی از دو مؤلفهٔ همبند $D^2 - d$. مجموعهٔ

$$E = \bigcap_{i=1}^{n} f^i(\Delta^\circ)$$

تحت f ناورداست و بستار هر یک از مؤلفه‌هایش یک قرص توپولوژیک است.



شکل ۲

فرض کنید $\widehat{AB}$ کمانی از دایره باشد که در مرز Δ قرار دارد و A را به B وصل می‌کند. چون برای هر i داریم $f^i(\widehat{AB}) = \widehat{AB}$، پس مؤلفه‌ای از E، مثلاً J°، وجود دارد که بستارش، J، شامل $\widehat{AB}$ است (شکل ۲ را ببینید). طبق ۴.۲، J، قرصی توپولوژیک است و تحت f ناورداست.

می‌توانیم بنویسیم $\partial J = \widehat{AB} \cup \delta$ که δ کمانی ساده، ناوردا تحت f، و دارای نقاط انتهایی A و B است به‌طوری‌که

$$\delta \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^i(d)$$

چون $f(A) = A$ و $f(B) = B$، $f/_\delta = Id$. فرض کنید x نقطه‌ای از کمان δ باشد. حال $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \in f^i(d)$ و $x = f^{n-i}(x) \in d$ و در نتیجه $\delta = d$ و $f/_d = Id$. چون قطر d دلخواه بود، نشان داده‌ایم که روی D^2، $f = Id$. □

از این پس، f نمایشگر همسانریختی دوره‌ای قرص با دوره تناوب n $(n > 1)$ خواهد بود. در دنبالهٔ این بخش، ابتدا ساختار مجموعهٔ نقاط ثابت f را بررسی کرده سپس قضیهٔ ۱.۳ را ثابت می‌کنیم.

گزارهٔ ۳.۳. *فرض کنید $f : D^2 \to D^2$ یک همسانریختی دوره‌ای با دورهٔ تناوب n $(n > 1)$ باشد. آنگاه*

۱. اگر f جهت‌نگهدار باشد، $Fix(f)$ به یک نقطه که روی مرز D^2 نیست تقلیل می‌یابد و به‌ازای $1 \leqslant i \leqslant n-1$، $Fix(f^i) = Fix(f)$.

۲. اگر f جهت‌برگردان باشد، $f^2 = Id$ و $Fix(f)$ خم ساده‌ای است که D^2 را به دو قرص توپولوژیک تقسیم می‌کند که به‌وسیلهٔ f تعویض می‌شوند.

برهان ۳.۳. ابتدا فرض کنید که f جهت‌نگهدار باشد. طبق قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر، f دست‌کم یک نقطهٔ ثابت دارد. چون $f/_{\partial D^2}$ جهت‌نگهدار و دوره‌ای است، f روی ∂D^2 هیچ نقطهٔ ثابتی ندارد. در غیراین‌صورت، f روی ∂D^2 نگاشت همانی خواهد بود و با به‌کاربستن ۲.۳، f روی همهٔ قرص، نگاشت همانی می‌شود که طبق فرض، این حالتِ f مستثنی شده است. بنابراین f دست‌کم یک نقطهٔ ثابت در $D^2 \backslash \partial D^2$ دارد که می‌توانیم ـپس از مزدوج‌کردنـ فرض کنیم همان نقطهٔ O یعنی مرکز قرص است.

فرض کنید $A = D^2 \backslash \{O\}$. A حلقهٔ نیمه‌بازی است که تحت f ناورداست. حال فرض کنید f^i، تکرّری از f، دارای نقطهٔ ثابت $x_0 \in A$ باشد. فرض کنید $\tilde{x}_0$ یک ترفیع[1] x_0 به $\tilde{A}$، «فضای پوششی کامل»[2] A، باشد و G ترفیعی از f^i باشد به‌طوری‌که $G(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$. G^n ترفیعی از Id است که یک نقطه را ثابت نگه می‌دارد پس $G^n = Id$. به‌ویژه، $G/_{\partial\tilde{A}}$ یک همسانریختی دوره‌ای و جهت‌نگهدار خط است، لذا روی $\partial\tilde{A}$ داریم $G = Id$. بنابراین روی ∂D^2 داریم $f^i = Id$، و طبق ۲.۳، روی همهٔ قرص داریم $f^i = Id$ و در نتیجه طبق تعریف n، i مضربی از n است.

حال فرض کنید که f جهت‌برگردان باشد. در این حالت f دقیقاً دو نقطهٔ ثابت روی ∂D^2 دارد که آنها را با A و B نشان می‌دهیم و f^2 روی ∂D^2 نگاشت همانی است. بنابراین، طبق ۲.۳، روی D^2، $f^2 = Id$.

نشان می‌دهیم که $Fix(f)$ همبند است. اگر نباشد، می‌توانیم دو مجموعهٔ فشرده ناتهی K_1 و K_2 پیدا کنیم که

$$Fix(f) = K_1 \cup K_2, \qquad K_1 \cap K_2 = \emptyset$$

اگر $A \in K_1$ و $B \in K_2$، آنگاه می‌توان کمان سادهٔ γ را در $D^2 \backslash (K_1 \cup K_2)$ ساخت که با ∂D^2 تنها در نقاط انتهایی‌اش مشترک باشد و A را از B جدا کند. با به‌کارگیری استدلالی نظیر آنچه در برهان ۲.۳ به‌کار رفت می‌توانیم نشان بدهیم کمان سادهٔ

$$\delta \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} f^i(\gamma) \subset D^2 \backslash Fix(f)$$

که تحت f ناورداست، وجود دارد که A را از B جدا می‌کند. اما دراین‌صورت، f باید نقطهٔ ثابتی روی δ داشته باشد که این تناقض است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که یکی از دو مجموعهٔ فشرده، مثلاً K_1، در درون $D^2 \backslash \partial D^2$ است. در این حالت می‌توان خم بستهٔ ساده‌ای چون $c \subset D^2 \backslash \partial D^2$ ساخت که $K_1 \cup K_2$ را قطع نکند و قرص توپولوژیکی که به‌وسیلهٔ c محدود می‌شود دست‌کم شامل یک نقطه از K_1 باشد. با به‌کارگیری استدلالهایی شبیه برهان ۵.۲ می‌توانیم قرص توپولوژیکی در $D^2 \backslash \partial D^2$ بیابیم که تحت f ناوردا، و مرزش شامل هیچ نقطهٔ ثابتی نباشد. دراین‌صورت، مجدداً به تناقض می‌رسیم، چون هر خم بستهٔ ساده که قرص ناوردایی را محدود می‌کند شامل دقیقاً دو نقطهٔ ثابت f است.

کاربرد استدلالهای بالا در مورد قرص توپولوژیکِ ناوردایِ به‌دلخواه کوچکی حول یک نقطهٔ ثابت، مذکور در ۵.۲، نشان می‌دهد که $Fix(f)$ موضعاً همبند نیز هست و بنابراین طبق ۲.۲، $Fix(f)$ مسیری‌ـهمبند است. بنابه ۱.۲، کمان ساده‌ای چون γ در $Fix(f)$ وجود دارد که A و B را به‌هم وصل می‌کند. این کمان، طبق قضیهٔ ژوردان‌ـشونفلیس، D^2 را به دو قرص توپولوژیک Δ_1 و Δ_2 تقسیم می‌کند. $D^2 \backslash \gamma$ تحت f به‌وضوح ناورداست و f دوکمانی را که A و B روی ∂D^2 تعیین می‌کنند، تعویض می‌کند. بنابراین $f(\Delta_1) = \Delta_2$ و $f(\Delta_2) = \Delta_1$ و $Fix(f)$ به γ تقلیل می‌یابد. □

1. lift 2. universal covering space

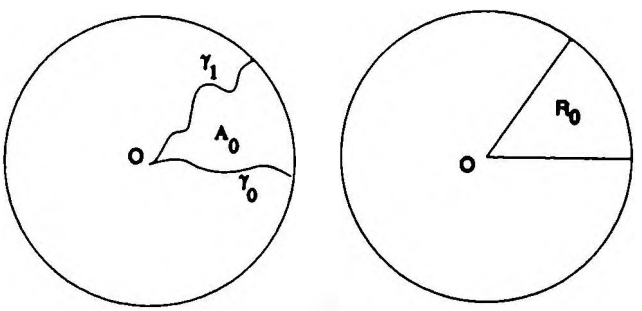
برهان ۱.۳. ابتدا فرض کنید که f جهت‌نگهدار باشد. طبق ۳.۳ می‌توانیم فرض کنیم $Fix(f) = \{O\}$ که O مرکز قرص است. چون $f/_{\partial D^2}$ یک همسانریختی دوره‌ای با دورهٔ تناوب n است، عدد دورانی $f/_{\partial D^2}$ یعنی $\rho(f/_{\partial D^2})$ برابر با k/n است که k و n متباین‌اند. می‌خواهیم ثابت کنیم که f مزدوج دوران حول مبدأ با زاویهٔ $2\pi/n$ است. بدون از دست دادن کلیت موضوع، می‌توانیم تصور کنیم که $k = 1$. در واقع فرض می‌کنیم که اگر $\rho(f/_{\partial D^2}) = 1/n$، آنگاه حکم برقرار باشد. اگر $k > 1$، f را با f^j تعویض می‌کنیم که در آن $j \in \mathbb{N}$ و $jk \equiv 1 (\bmod\ n)$. پس $\rho(f^j/_{\partial D^2}) = 1/n$ و بنابراین، f^j مزدوج دورانی به زاویهٔ $2\pi k/n$ حول مبدأ است و چون $(f^j)^k = f$، نتیجه می‌شود که f مزدوج دورانی به زاویهٔ $2\pi k/n$ است.

حال فضای خارج‌قسمت D^2/f را در نظر می‌گیریم که در آن دو نقطه یکی گرفته می‌شوند اگر به یک مدار تحت f تعلق داشته باشند. $D^2/_f$ به توپولوژی خارج‌قسمت مجهز است و فضایی فشرده و مسیری-همبند و متریک است که متریک به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(\pi(x), \pi(y)) = \inf_{0 \leqslant h,k \leqslant n-1} \{d(f^k(x), f^h(y))\}$$

که $\pi : D^2 \to D^2/_f$ افکنش متعارف است.

طبق ۱.۲، می‌توانیم کمان ساده‌ای چون γ از $\pi(O)$ تا نقطهٔ دلخواهی بر $\pi(\partial D^2)$ پیدا کنیم. چون گروه همسانریختیهای تولید شده توسط f، روی D^2 بجز در نقطهٔ O به‌طور آزاد عمل می‌کند، در نتیجه $\pi : D^2 \to D^2/_f$ پوشش شاخه‌دار عادی است (صفحهٔ ۴۹ از [۱۰] را ببینید). بنابراین $\pi^{-1}(\gamma)$ اجتماع n کمان ساده و مجزای $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}$ است (به‌استثنای نقطهٔ انتهایی مشترکشان O) که D^2 را به n قطاع مجزای $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$ تقسیم می‌کنند. فرض $\rho(f/_{\partial D^2}) = 1/n$ ایجاب می‌کند که $\gamma_i = f^i(\gamma_0)$.



شکل ۳

فرض کنید h یک همسانریختی بین A_0 و R_0 (ناحیهٔ لازم در D^2 برای دوران با زاویهٔ $2\pi/n$ حول مبدأ) باشد به‌طوری‌که $h/_{\gamma_1} = rh/_{\gamma_0}$. با تعریف $h/_{A_i}$ به‌صورت $r^i h f^{-i}$ که r دوران حول مبدأ با زاویهٔ $2\pi/n$ است، می‌توانیم h را به همسانریختی D^2 توسعه دهیم. به آسانی می‌شود تحقیق کرد که h همسانریختی D^2 است و $f = h^{-1}rh$.

حال فرض کنید که f جهت‌برگردان باشد. طبق ۳.۳، $Fix(f)$ کمان ساده‌ای چون γ است که D^2 را به دو قرص توپولوژیک Δ_1 و Δ_2 تقسیم می‌کند که به‌وسیلهٔ f تعویض می‌شوند. فرض کنید h یک همسانریختی بین Δ_1 و نیمهٔ بالای قرص D_1 باشد. روی Δ_2، h را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$h(y) = Sh/_{\Delta_1} f(y), y \in \Delta_2$$

که S بازتاب نسبت به‌محور xهاست. به‌آسانی می‌شود تحقیق کرد که h یک همسانریختی D^2 است و این، f و S را مزدوج هم می‌کند. □

نکته. با به‌کارگیری ۱.۳ همچنین می‌توان نشان داد که هر همسانریختی دوره‌ای طوق، هم‌ارز توپولوژیک یک ایزومتری اقلیدسی است (به پیمانهٔ تعویض دو لبه، اگر مرز نگهدار نباشد).

۴. همسانریختیهای دوره‌ای کره

قضیهٔ اصلی این بخش، قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ ۱.۴. *فرض کنید $f : S^2 \to S^2$ یک همسانریختی دوره‌ای باشد. دراین‌صورت، σ متعلق به $O(3)$ و همسانریختی $h : S^2 \to S^2$ وجود دارند به‌طوری‌که $f = hrh^{-1}$.*

برهان ۱.۴. بسته به اینکه f دارای دست‌کم یک نقطهٔ ثابت باشد یا نباشد، برهان قضیهٔ ۱.۴ را به دو حالت تفکیک می‌کنیم.

ابتدا فرض کنید f نقطهٔ ثابت داشته باشد. با استفاده از ۵.۲ نتیجه می‌گیریم که خم بستهٔ سادهٔ ناوردای c وجود دارد که S^2 را به دو قرص ناوردای D_1 و D_2 تقسیم می‌کند.

اگر f جهت‌نگهدار باشد و $f \neq Id$، آنگاه f نقطهٔ ثابتی روی c ندارد (طبق ۳.۳). بنابراین با توجه به قضیهٔ نقطه ثابت براوئر پی می‌بریم که f دست‌کم دو نقطهٔ ثابت دارد. پس از مزدوج‌کردن، می‌توانیم فرض کنیم که f دو قطب S^2 یعنی S و N را ثابت نگه می‌دارد. با به‌کارگیری نتایج بخش قبل می‌توانیم n کمان پیدا کنیم که N و S را هم وصل می‌کنند و اجتماعشان تحت f مجموعه‌ای ناورداست. همانند بخش ۳ می‌توانیم f و دوران با زاویهٔ $2k\pi/n$ حول محور شمال-جنوب را مزدوج کنیم.

اگر f جهت‌برگردان باشد، آنگاه دو نقطهٔ ثابت روی c دارد. در هر یک از قرصهای ناوردای D_1 و D_2 مجموعهٔ نقاط ثابت f کمان ساده‌ای است که روی c دو نقطهٔ ثابت f را به‌هم وصل می‌کند. اجتماع این دو کمان، خم بستهٔ ساده‌ای است که بر مجموعهٔ نقاط ثابت f روی S^2 منطبق است. بنابراین به‌سادگی می‌شود f و بازتاب نسبت به خط استوا را مزدوج کرد.

حال فرض کنید f هیچ نقطهٔ ثابتی روی S^2 ندارد. پس از مزدوج‌کردن، می‌توانیم تکرر دوم f یعنی f^2 را دوران تناوبی حول محور شمال-جنوب بینگاریم. به‌خصوص f نقاط N و S را تعویض می‌کند. به‌ازای $t \in (-1, 1)$ فرض کنید C_t دایره‌ای باشد که از قطع‌کردن کره با صفحهٔ $z = t$ به‌دست می‌آید. D_t قرص محصور شده به‌توسط C_t روی S^2 است که شامل N است و

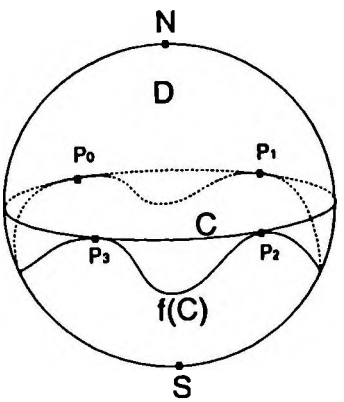
$$t_0 = \inf\{t \in (-1, 1); \qquad D_t \cap f(D_t) = \emptyset\}$$

برای سهولت می‌نویسیم $D = D_{t_0}$ و $C = C_{t_0}$. پس D، $f(D)$ را در مرزش و تنها در مرزش قطع می‌کند (شکل ۴ را ببینید). فرض کنید $P_0 \in C \cap f(C)$ و $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ مدار P_0 تحت f باشد. نقاط

P_0، P_2، ...، P_n و P_1، P_3، ...، P_{n-1} متمایز هستند چون f^2 دورانی با دورهٔ تناوب $n/2$ است.

فرض کنید که $i \in \{1, 3, \cdots, n-1\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که P_0 و $P_i = f^i(P_0)$ بر هم منطبق باشند. پس f^{2i} نقاط P_0 و S و N را ثابت نگه می‌دارد. در نتیجه $f^{2i} = Id$ و بنابراین $2i = n$. فرض کنید b_0 کمان دایرهٔ عظیمه‌ای باشد که N را در D به P_0 وصل می‌کند و $b_{n/2}$ تصویر آن تحت $f^{n/2}$ است. دراین‌صورت $b = b_0 \cup b_{n/2}$ کمان ساده‌ای است که N و S را به‌هم وصل می‌کند و نقطهٔ مشترکی با $(n/2) - 1$ تکرر اولش تحت f، به‌غیر از S و N، ندارد. این کمانها کره را به $n/2$ **قسمت** تقسیم می‌کنند و می‌توانیم ترکیب دوران با دورهٔ تناوب $n/2$ **حول محور** شمال-جنوب و بازتاب نسبت به خط استوا را با f مزدوج کنیم.

حال فرض کنید که نقاط P_0، P_1، ...، P_{n-1} متمایزند و نیز فرض کنید b_0 کمانی از دایرهٔ عظیمه‌ای است که در D، N و P_0 را به‌هم وصل می‌کند و b'_0 کمانی است که در $f(D)$، S را به P_0 وصل می‌کند و جدا از $f(b_0)$ و از $n-1$ تکرر اول آن است (این امر امکان‌پذیر است چون f^2 دوران است). اجتماع این دو کمان مجدداً کمان ساده‌ای است که N و S را به‌هم وصل می‌کند و با $n-1$ تکرر اولش تحت f نقطهٔ مشترکی به غیر از S و N ندارد. اجتماع این کمان و تکررهایش S^2 را به n قسمت مجزا تقسیم می‌کنند. در این حالت، ترکیب دورانِ با دورهٔ تناوب n حول محور شمال-جنوب و بازتاب نسبت به خط استوا، با f به‌طور توپولوژیک هم‌ارز است. □



شکل ۴

فرع ۲.۴. *اگر $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ یک همسانریختی دوره‌ای باشد، آنگاه f یا مزدوج توپولوژیکِ دورانی از مرتبهٔ متناهی حول مبدأ است یا مزدوج توپولوژیکِ بازتاب نسبت به محور xهاست.*

برهان ۲.۴. با استفاده از افکنش گنجنگاری می‌توانیم صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ را با متمم قطب شمال در S^2 یکی بگیریم و f را به یک همسانریختیِ کرهٔ S^2 توسعه بدهیم. طبق برهان ۱.۴، f یا هم‌ارزِ دورانی حول محور شمال-جنوب است یا هم‌ارز بازتاب نسبت به دایرهٔ عظیمه‌ای است که می‌توانیم فرض کنیم از قطب شمال N می‌گذرد. نشان‌دادن اینکه می‌توان مزدوج را طوری انتخاب کرد که قطب شمال N را ثابت نگه دارد، دشوار نیست. لذا این هم‌ارزی، هم‌ارزیِ توپولوژیکی بین f و دوران یا بین f و بازتاب نسبت به محور xها القا می‌کند. □

یادداشت. در مورد همسانریختیهای دوره‌ایِ رویه‌های با گونهٔ مثبت مطالعات مفصلی انجام شده است. در اینجا نمی‌توانیم کتابشناسی کاملی در این زمینه ارائه کنیم و فقط آثار اولیهٔ کرکیارتو [۴] و نیلسن [۱۳] را ذکر می‌کنیم که هر دو به این نتیجه منجر می‌شوند که هر همسانریختیِ دوره‌ایِ یک رویهٔ ریمانی با گونهٔ مثبت، مزدوجِ یک ایزومتریِ همدیس است.

سپاسگزاری. نویسندگان این مقاله سپاس خود را از ژروم فرنباخ، لوسین گی‌یو، و توبی‌هال، که بحث با آنها به بهترشدن این مقاله کمک کرد، ابراز می‌دارند.

مراجع

1. Brouwer, L. E. J. Über die periodischen Transformationen der Kugel. *Math. Ann. 80* (1919), 39-41.
2. Cairns, S. S. An elementary proof of the Jordan-Schoenflies theorem. *Proc. AMS 2* (1951), 860-867.
3. Kerékjártó de, B. Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche. *Math. Ann. 80* (1919-1920), 36-38.
4. ———, Über reguläre Abbildungen von Flächen auf sich. *Acta scient. math. Szeged 7* (1934), 65-75.
5. Devaney, R. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Benjamin-Commings 1986.
6. Eilenberg, S. Sur les transformations périodiques de la surface de la sphère. *Fund. Math. 22* (1934), 28-44.
7. Epstein, D. B. A. Pointwise periodic homeomorphisms. *Proc. London Math. Soc. 42 (3)* (1981), 415-460.
8. Hocking, J. G. and G. S. Young. *Topology.* Dover, 1988.
9. Maehara, R. The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem. *Amer. Math. Monthly 91* (1984), 641-643.
10. Maskit, B. *Kleinian Groups.* A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer Verlag 1988.
11. Milnor, J. *Dynamics in one complex variable.* Preprint, Stony Brook, New York 1990.
12. Newmann, M. H. A. *Elements of the Topology of Plane Sets of Points.* Cambridge Univ. Press (2nd edition) 1951.
13. Nielsen, J. Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen. *Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 15 (1)* 1937. See also: *Collected Papers of J. Nielsen.* Vagn Lundsgaard Hansen 1986.
14. Whyburn, G. T. *Topological Analysis.* Volume 23 of Princeton Math. Series. Princeton Univ. Press 1958.

******

• Adrian Constantin and Boris Kolev, "The theorem of Kerékjártó on periodic homeomorphisms of the disk and the sphere", *L'Enseignement Mathématique*, **40** (1994) 193-204.

* آدرین کنستانتین، مؤسسهٔ علوم ریاضی کورانت در آمریکا؛ بوریس کولف، بخش تحقیقات غیرخطی نیس در مرکز ملی تحقیقات علمی فرانسه.

بیایید فلسفهٔ ریاضی تدریس کنیم!*

روبن هرش*

ترجمهٔ محمد صال مصلحیان و بهزاد بوستانچی

آیا ریاضیات یک رشتهٔ مرموز تخصصی است که هیچ ارتباطی با تاریخ، فلسفه، ادبیات، و هنر ندارد؟ آیا هر موضوع ریاضی، ساختاری ثابت، قائم به ذات، و مصون از تغییرات زمانه است و هیچ معنا یا ارزشی در خارج از خود ندارد؟ آیا اصول موضوع و قوانین استنتاج دستگاههای ریاضی به‌طور قطعی «معین و مقرر شده‌اند» و نباید در معرض ارزیابی، انتقاد، ردشدن، یا تغییر قرار گیرند؟

اکثر خوانندگان به همهٔ این سؤالات قاطعانه پاسخ منفی می‌دهند. بله، ریاضیات منزوی نیست، شاخه‌های گوناگون آن کاملاً در یکدیگر و در کل فرهنگ بشری تنیده شده‌اند. اصول موضوع دستگاههای ریاضی دلخواه نیستند، و از لحاظ تاریخی به این منظور وضع شده‌اند که نظمی ساختاری به یک موضوع خاص ببخشند، و برای هر موضوع ریاضی می‌توان دستگاههای دیگری از اصول موضوع و نظمهای ساختاری دیگری نیز در نظر گرفت.

با این همه، نمی‌توان سبک جزمی و آمرانه‌ای را که بر متون درسی و روشهای تدریس حاکم است، و به‌طور عمیق ریشه دوانده است، انکار کرد. این سبک، باعث شده که هر موضوع ریاضی به صورت توده‌ای از اصول و الگوریتمهای منزوی و بیروح به‌نظر آید. دانشجو پیام کوتاه و بیرحمانه‌ای دریافت می‌کند: «همین است که هست، باید قبول کنی!» بسیاری از صاحبنظران اصرار ورزیده‌اند که باید روشهای تدریسمان را دگرگون کنیم و شیوه‌ای به‌کار ببریم که مسأله‌ـمحور و مبتنی بر سیر تاریخی مسائل و موضوعات و جنبه‌های فرهنگی آنها باشد. با این حال، تدریس به شیوهٔ آمرانه به‌زودی از میان نخواهد رفت.

یکی از گامهایی که می‌توان در جهت رسیدن به مقصود برداشت، ارائهٔ درسی با رهیافتِ فرهنگی‌ـتاریخیِ «آزاد» است که نشان دهد ریاضیات از کجا و چگونه به‌وجود آمده است و قضایای امروزی ما جواب چه مسائل مهمی بوده‌اند. چنین درسی را می‌توان «فلسفهٔ ریاضیات» نامید و من به مدت پانزده سال، این درس را در دانشگاه نیومکزیکو ارائه داده‌ام. هدف این مقاله آن است که محتوای چنین درسی را برای مدرسین علاقه‌مندی که می‌خواهند آن را در دانشگاههای خود تدریس کنند، روشن سازد.

در اینجا لازم است جلو یک سوءتفاهم را بگیرم. درس مورد نظر من آن چیزی نیست که امروز تحت عنوان «فلسفهٔ ریاضیات» در برخی از گروههای ریاضی و فلسفه تدریس می‌شود ولی در واقع دربارهٔ «مبانی ریاضیات» است (البته گاه همین عنوان «مبانی ریاضیات» هم به آن اطلاق می‌شود) و در آن، نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها، منطق مقدماتی، و مبانی یا ساختار دستگاههای اعداد تدریس می‌شود.

آن درس هرچند نام فلسفه را یدک می‌کشد، و موضوع آن هم ریشه در مفاهیم فلسفی ارائه شده در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم دارد (همان دوره‌ای که ایمره لاکاتوش آن را عصر «مبانی‌گرایی» نامیده است) اما در واقع کلیهٔ مسائل مورد توجه فلسفه را نادیده می‌گیرد. درس فلسفهٔ ریاضیاتی که معمولاً ارائه می‌شود چیزی نیست جز بحث فنی در یک مبحث ریاضی. من مخالفتی با «مبانی» ندارم بلکه آن را موضوع جذاب و مهمی برای پژوهش و نیز برای تدریس در دورهٔ کارشناسی می‌دانم. اما علاوه بر آن، ما نیاز به درسی داریم که واقعاً به فلسفهٔ ریاضیات بپردازد و مبانی فقط بخش مهمی از درس باشد نه کل آن.

در اینجا برخی از خوانندگان ممکن است بپرسند که «اگر منظور شما از فلسفهٔ ریاضیات، 'مبانی' نیست، پس چه چیزی است؟»

یک پاسخ به این سؤال این است که نگاهی به سایر رشته‌های دانشگاهی بیندازید. به‌عنوان مثال، علم در مقابل فلسفهٔ علم، هنر در مقابل فلسفهٔ هنر و حقوق در مقابل فلسفهٔ حقوق. هیچ‌کس معتقد نیست که درس فلسفهٔ علم باید دربارهٔ علم باشد و یا درس فلسفهٔ هنر باید به خود هنر بپردازد. بلکه در این دروس، مسائل مورد نظر دانشمند یا هنرمند از دید فلسفی بررسی می‌شود. اعتقاد بر این است که چنین درسی برای دانشمند، هنرمند، و یا هر کسی که به علم یا هنر علاقه‌مند است، مفید و جالب خواهد بود.

همین‌طور، درس فلسفهٔ ریاضیات، بحث در یک شاخهٔ فنی ریاضی یا حتی بحث فنی در منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها نیست. در این درس، اگر هم قضیه‌ای اثبات شود، الگوریتمی به‌دست داده شود، و یا فوت و فن حل مسأله آموزش داده شود، به‌طور ضمنی و اتفاقی خواهد بود (همان‌طور که درس فلسفهٔ علم شامل کار آزمایشگاهی و یا درس فلسفهٔ هنر شامل کار در آتلیه نیست). به‌جای اینها، فلسفهٔ ریاضیات به مطرح کردن و بررسیِ معضلات فلسفی ریاضیات در گذشته و حال می‌پردازد، معضلاتی چون سرشتِ واقعیت ریاضی، سرشت و مفهوم بینهایت، و رابطهٔ بین ریاضیات و دنیای طبیعی. در این درس، برخی از پاسخهای داده شده به این مسائل و نارساییهای آنها عنوان می‌شود.

چنین درسی تنها برای دانشجویانی قابل فهم خواهد بود که حداقلِ اطلاعاتِ لازم را از تاریخ ریاضیات داشته باشند. بنابراین در حدی که برای درک فلسفه لازم است، باید در این درس به تاریخ نیز پرداخت. باید از یونانیها (و یا حتی پیش از آنها) آغاز کرد. بدون آشنایی با اقلیدس نمی‌توان درک صحیحی از فلسفهٔ ریاضیاتِ قرون پیشین به‌دست آورد. همچنین تا هندسهٔ اقلیدسی را نشناسیم، نمی‌توانیم دربارهٔ هندسه‌های نااقلیدسی سخن

بگوییم. ماجرای پیدایش هندسهٔ نااقلیدسی، نقشی سرنوشت‌ساز در تاریخ فلسفه، آن هم نه تنها در فلسفهٔ ریاضیات بلکه در معرفت‌شناسی به‌طور کلی، داشته است. اما در درس امروزی «فلسفهٔ ریاضیات» هیچ اشاره‌ای به آن نمی‌شود!

من در درس فلسفهٔ ریاضیی که تدریس می‌کنم، با تخطی از ترتیب تاریخی برای سهولت تدریس، از هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی به سراغ تولد حساب دیفرانسیل و انتگرال، مفهوم بینهایت کوچک و نقد اسقف بارکلی از حساب دیفرانسیل و انتگرال نیوتن و لایب‌نیتس می‌روم. سپس به توضیح مفهوم حد به‌وسیلهٔ ϵ و δ و تشریح شیوه‌های کانتور و ددکیند در ساختن اعداد حقیقی می‌پردازم.

اما مگر اینها ریاضیات نیست؟ پس فلسفه کجاست؟ مضامین فلسفی در این درس به این شکل وارد بحث می‌شوند که مثلاً نحوهٔ ساختن اعداد حقیقی توسط ددکیند و کانتور، در چارچوب تاریخی-فلسفی‌اش و به‌عنوان راهی برای رفع یک ابهام چند صدساله که سابقه‌اش به نیوتن و بارکلی برمی‌گردد، مطرح می‌شود. ما ریاضیات را به‌عنوان بخشی از «تاریخ ایده‌ها و مفاهیم» بررسی می‌کنیم. این توجه به سیر تکامل تاریخی ایده‌ها، محتوای اساسیِ فلسفیِ درس مورد نظر است.

ساختن اعداد حقیقی با استفاده از مجموعه‌های نامتناهی از اعداد گویا، به‌ناگزیر به کارهای کانتور، مجموعه‌های نامتناهی و تناقضات نظریهٔ غیرصوری مجموعه‌ها منتهی می‌شود. در اینجا به قلب درسِ متداول مبانی می‌رسیم. ولی ما عمیقتر از حدی که در درسِ مبانی معمول است، در جنبه‌های فلسفی مبانی کندوکاو می‌کنیم. بنابراین (به اختصار) به کارهای اصلی فرگه و راسل در منطق می‌پردازیم و نیز دیدگاه فلسفی آنها یعنی «منطقگرایی» را تشریح می‌کنیم. سپس به مطالعهٔ کارهای براوئر (یا بیشاپ، و یا هر دو) و به شرح مثالهایی تفضیلی در شهودگرایی می‌پردازیم. پس از آن می‌توانیم دربارهٔ صورتگرایی هیلبرت و شکست آن برنامه به‌وسیلهٔ قضیهٔ ناتمامیت گودل بحث کنیم (برهان کوتاه و بسیار زیبایی از قضیهٔ گودل با استفاده از ماشین تورینگ در مقالهٔ مارتین دیویس با عنوان «محاسبه چیست؟» آمده است). سرانجام، بحث را با ماشینهای تورینگ، محاسبه‌پذیری، و حل‌ناپذیری به پایان می‌آوریم. این مباحث اهمیت فلسفیِ آشکار دارند و ارتباطشان با کامپیوتر نیز مناسبِ روز است.

در این سیر تاریخی، برنامهٔ مبانی‌گرایان که ناشی از پیشفرضهای فلسفی زمانِ خود بوده است، جایگاه مهمی دارد. در میان این پیشفرضها، مهمتر از همه این بود که ریاضیات *باید* بنیادی تزلزل‌ناپذیر داشته باشد، یعنی دارای نقش ویژه‌ای به‌عنوان ارائه‌کنندهٔ حقایق تردیدناپذیر و قطعیتِ بی‌چون‌وچرا باشد.

سابقهٔ واگذاری چنین نقشی به ریاضیات، به زمانهای بسیار دور بازمی‌گردد؛ به‌کانت، دکارت و اسپینوزا، آگوستینِ قدیس، افلاطون، و سرانجام به فیثاغورسیان. در این سنتِ مورد تکریم، هدف عبارت بود از توجیه مذهب -شناخت خدا- با استفاده از ریاضیات. عقیده بر این بود ــ و هنوز هم عدهٔ قابل ملاحظه‌ای بر این باورند ــ که ریاضیات، شناختِ تردیدناپذیری از حقایق به دست می‌دهد که مستقل از تجربه و یا حس فیزیکی است. در سراسر تاریخ مسیحیت، عالمان دین و مابعدالطبیعه بر اساس این اعتقاد، ادعا داشتند که انسان می‌تواند در مورد خداوند هم شناختِ تردیدناپذیری به‌دست آورد.

در اواخر قرن نوزدهم، ریاضیات دچار بحران شد. کشف خمهای ناقضِ شهود، مانند خم فضا پرکن پئانو و یا خم هیچ‌جا مشتقپذیر ریمان، نخستین ضربه را بر شهود بصری وارد آورد. سپس پارادوکس راسل و تناقضات دیگر، مبانی نوین [ریاضیات] را که مبتنی بر نظریهٔ مجموعه‌ها بود، سست کرد. اما چون اعتقاد راسخی وجود داشت که احکام ریاضی باید مطلقاً صحیح باشند، راسل، براوئر و هیلبرت بازسازی مبانی ریاضیات را از نظر فلسفی ضرور دانستند [و به آن پرداختند]. این هدف مشترک بعدها باعث شد که لاکاتوش همهٔ آنها را «مبانی‌گرا» بنامد. از دید امروزی، شهودگرایی براوئر، صورتگرایی هیلبرت، و منطقگرایی راسل در واقع نحله‌های رقیب از یک مکتب هستند (مکتبی که به زوال گراییده است). این نکته، آن زمینهٔ فلسفی است که محتوای درس مبانی را از لحاظ فلسفی جذاب و دلپذیر می‌سازد.

بحث هنگامی جذابتر خواهد شد که دنبالهٔ ماجرا تا عصر حاضر ذکر شود. آخرین مبحث در درس معمولی مبانی، قضیهٔ گودل است که حدود پنجاه سال از عمر آن می‌گذرد. پس از آن چه وقایعی روی داده است؟ در این مدت «مبانی گرایی» به‌عنوان یک برنامهٔ کار فلسفی راکد مانده است، اما «مبانی» به‌عنوان یکی از مباحث تخصصی ریاضیات، رونق یافته است.

البته این بدان معنا نیست که فلسفهٔ ریاضیات با رکود مواجه شده است. گرایشهای نوینی در فلسفهٔ ریاضی در حال پدیدآمدن است که دوران مبانی‌گرایی را پشت سر می‌گذارد. از نشانه‌های این امر، مجموعه مقالاتی است که توماس تیموچکو [۲۹] گرد آورده است. این مجموعه شامل مقالاتی از ۱۶ نویسنده است که هر کدام به طریقی «مبانی‌گرایی» را به مبارزه می‌طلبند یا از آن روی می‌گردانند. این تمایلات در راستای دگرگونیهایی است که در دهه‌های اخیر، تحت تأثیر کارهای کارل پوپر، توماس کون، و عده‌ای دیگر، در فلسفهٔ علم رخ داده است. البته دگرگونیهای مشابه در فلسفهٔ ریاضی هنوز در مرحلهٔ بسیار ابتدایی است و ویژگیهای آن از این قرار است: فلسفهٔ علم (یا ریاضیات) ارتباط تنگاتنگی با تاریخ آن و تجربهٔ عملی دست‌اندرکارانش دارد و مبتنی بر جزمیات پیشینی [مقدم بر تجربه] در این‌باره که علم (یا ریاضیات) چه *باید* باشد، نیست. از این دیدگاه، موضوعاتِ [علمی یا ریاضی] در حال تطور و تکامل هستند و نه ثابت و ایستا؛ همچنین در فرهنگ و جامعه تأثیر می‌گذارند و از آنها تأثیر می‌پذیرند؛ و بالاخره، حقایقی به‌دست می‌دهند که مشروط است نه مطلق.

این کلاس، دانشجویانی را از رشته‌های مختلف -از سال اول دانشگاه تا دوره‌های پس از کارشناسی- به خود جذب می‌کند. بیشتر این دانشجویان از رشته‌های علوم‌تجربی و مهندسی وعدهٔ کمی از آنها از رشتهٔ ریاضی می‌آیند. افرادی هم از رشته‌هایی چون اقتصاد، روانشناسی، فلسفه و معماری، به این درس علاقه نشان می‌دهند. تعداد بسیار کمی از دانشجویان درس را تا پایان ادامه نمی‌دهند، ولی بیشتر آنها این درس را فرصت مغتنمی به‌شمار می‌آورند که طی یک نیمسال دربارهٔ ایده‌ها و مطالب جالب بیندیشند.

خواننده‌ای که به درسهایِ معمولی ریاضیات عادت دارد، ممکن است بپرسد که دانشجو در این درس چه کار عملی انجام می‌دهد، یعنی اگر مسأله به‌عنوان تکلیف داده نمی‌شود و آزمونهای کوتاه برگزار نمی‌گردد، پس چه کاری انجام می‌شود؟ در پاسخ باید گفت که درسهای زیادی در دانشگاهها و کالجها ارائه می‌شود که در آنها دانشجو با تکلیف ریاضی و آزمون کوتاه سروکار ندارد. به‌جای آن، مطالب مختلف را می‌خواند، مقاله می‌نویسد، به صحبتهای کلاس گوش می‌دهد، یادداشت برمی‌دارد، و به اظهار نظر و بحث هم می‌پردازد. در کلاس من، بسیاری از دانشجویان، گاه دربارهٔ مطالبی که

من تعیین می‌کنم و گاه دربارهٔ مطالب مورد علاقهٔ خودشان، (اخیراً، از جمله، دربارهٔ دانش نظری کامپیوتر، مبانی مکانیک کوانتومی، و روانشناسیِ یادگیری ریاضیات) کنفرانس می‌دهند.

این درس، کتاب درسی خاصی ندارد. من به‌جای آن از قطعات و گزیده‌هایی از منابع مختلف استفاده می‌کنم. کتابشناسی توصیفیِ انتهای این مقاله شامل منابع مفیدی برای استفاده در این درس، خواه برای مطالعهٔ آزاد یا تدریس در کلاس است. علاوه بر آن، نمونه‌ای از عناوین مقالات پروژه و نمونه‌ای از سؤالات آزمون پایان ترم این درس را نیز در اینجا آورده‌ام.

نمونهٔ عناوین مقالات پروژه (به هر دانشجو دو یا سه موضوع داده می‌شود)

۱. چنانکه در کلاس نشان داده شد، تعریف هندسه به‌عنوان علم مطالعهٔ (الف) اشیاء فیزیکی، (ب) دستگاههای اصل موضوعی صوری، (ج) اشیاء ایده‌آل غیرواقعی، (د) اندیشه‌هایی که در مغز افراد خاص وجود دارد، نامعقول است؛ لذا باید به این نتیجه رسید که هندسه یک نظریهٔ ناپایدار و غیرقابل اعتماد است (این دیدگاه را نقد کنید)

۲. آیا ریاضیات کار پرارزشی است؟ اگر هست، چرا؟ و اگر نیست، چرا؟

۳. آیا ریاضیات، همان محاسبات است؟ اگر خیر، تفاوتشان چیست؟ و اگر بله، چرا مردم فکر می‌کنند که اینها متفاوت‌اند؟

۴. آیا بدون استفاده از ریاضیات می‌توانیم جهان فیزیکی را بشناسیم؟ چرا؟

۵. آیا به‌کارگیری ریاضیات در علوم اجتماعی مناسب است یا خیر؟

۶. آیا ریاضیات بخشی از منطق است؟

۷. آیا هندسهٔ اقلیدسی به همان درستیِ هندسهٔ نااقلیدسی است؟ اگر خیر، درستیش کمتر است یا بیشتر؟

۸. به چه دلیل ارشمیدس با نیوتن و گاوس در یک مرتبه قرار می‌گیرد؟

۹. وقتی گفته می‌شود یک شیء ریاضی وجود دارد، منظور چیست؟ چگونه می‌توانیم به وجود آن پی ببریم؟

۱۰. انتقاد بارکلی از نیوتن چه بود؟ کدام‌یک درست می‌گفتند؟

۱۱. یک مقاله و یا فصلی از یکی از کتابهای مذکور در فهرست کتابشناسی انتهای این مقاله را بخوانید و خلاصه‌برداری کنید.

نمونهٔ آزمون پایان ترم

از میان موضوعات زیر، دربارهٔ سه و یا چهار موضوع، هرچه می‌دانید بنویسید.

۱. ریاضیات پیش‌اقلیدسی، اقلیدسی و ارشمیدسی.

۲. هندسهٔ نااقلیدسی؛ منشأ و ماهیت آن.

۳. اعداد: طبیعی، گویا، حقیقی، و ترامتناهی. نحوهٔ ساختن و خواص آنها.

۴. منطقگرایی، صورتگرایی و شهودگرایی (یا ساختگرایی). یکی یا همه.

۵. منطق صوری، دستگاههای اصل موضوعی، قضیهٔ گودل.

۶. وجود در ریاضیات چه معنایی دارد و چه معنایی باید داشته باشد؟

کتابشناسی توصیفی

1. Asger Aaboe, *Episodes from the Early Histoty of Mathematics*, New Mathematical Library, Mathematical Association of America, 1964.

در این کتاب، شرح تحقیقات باستان‌شناسی انجام شده بر روی جداول بابلی که به خط میخی نگاشته شده‌اند، همراه با مثالهایی از عددنویسی در مبنای شصت و روشهایی برای حل معادلات درجهٔ دوم با ضرایب بسیار بزرگ، آمده است. سپس فصلهایی به اقلیدس، ارشمیدس، و بطلمیوس اختصاص یافته است. در این میان، من اغلبِ مبحث مربوط به اصول موضوع و متعارف اقلیدس را با تأکید بر اصل پنجم (توازی) برمی‌گزینم. همچنین، روش مشهور ارشمیدس در تعیین نسبت حجمهای کره، مخروط و هرم نیز مورد استفادهٔ من است. در حقیقت، مؤلف در این کتاب استفادهٔ ارشمیدس از روشهای غیرمعمول (بینهایت، کوچکها، مراکز ثقل) را به‌روشنی شرح داده است.

2. E.T. Bell, *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, New York, 1937.

این کتاب مجموعهٔ بینظیری از زندگینامه‌های ریاضیدانان بزرگ است که به شکل داستان نقل می‌شود. دانشجویان مسلماً از این سبک بیان بل لذت خواهند برد و ضمناً می‌آموزند که هیچ دلیلی وجود ندارد که هر مطلب چاپ شده‌ای، حتماً صحیح باشد. [این کتاب را حسن صفاری با عنوان *ریاضیدانان نامی* به فارسی ترجمه، و انتشارات خوارزمی منتشر کرده است ــ م.]

3. Paul Benacerraf and Hilary Putnam, *Philosophy of Mathematics*, 2nd ed, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

مجموعهٔ استانداردی از مقالات مربوط به فلسفهٔ ریاضی است، البته با تأکید بیشتر بر دیدگاه مبانی‌گرایی.

4. E. Bishop. *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1967.

بخش اعظم کتاب شامل مباحث فنی ریاضی است. اما فصل اول آن، بحث نسبتاً مفصلی از دیدگاه شهودگرایی ــ ساختارگرایی است.

5. E. Bishop, Aspects of Constructivism, Lecture Notes, New Mexico State University. 1972.

6. C. Boyer, *History of Calculus and Its Conceptual Development*, New York, 1949. Dover reprint, 1959.

این کتاب به‌تنهایی می‌تواند برای یک درس مناسب باشد. هدف اصلی آن، روشن نمودن هرچه بیشتر مفاهیم بینهایت کوچک، و حد است. بایر این مطالب را قبل از ارائهٔ آنالیز نااستاندارد رابینسن نوشته است، یعنی در زمانی که کنارگذاشتن بینهایت کوچکها را ضروری و مطلوب می‌دانستند.

7. H. Curry, Some aspects of the problem of mathematical rigor, *Bulletin of the American Mathematical Society* **47** (1941) 221-241.

موضع این کتاب، صورتگرایی افراطی است.

8. Tobias Dantzing, *Number, The Language of Science*, Doubleday Anchor Books, Garden City, NY, 1956.

داستان دستگاههای اعداد از طبیعی تا مختلط که به سبک شاعرانه و با ژرف‌نگری فیلسوفانه نوشته شده است. [این کتاب توسط عباس گرمان با عنوان *عدد، زبان علم* به فارسی برگردانده شده و به وسیلهٔ سازمان کتابهای جیبی انتشار یافته است ــ م.]

9. Philip J. Davis and Reuben Hersh, *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston, 1981.

یکی از کتابهای مورد علاقهٔ من.

10. Philip J. Davis and Reuben Hersh, *Descartes Dream*, Harcourt Brace Jovanovich, Boston, 1986.

شرحی از تأثیر ریاضیات و علم کامپیوتر بر جامعهٔ امروزی.

11. A. Dresden, Some philosophical aspects of mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society* **34** (1928) 438-452.

تا حدودی همسو با نظریات براوئر است.

12. Howard Eves and Carrol V. Newsom, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, Holt Rinehart and Winston, New York, 1965.

این کتاب را کمابیش می‌توان یک کتاب درسی برای این درس محسوب کرد. نویسندگان، شرحی تاریخی از مفاهیم و نتایج مهم ریاضیات از زمان یونانیان تا هیلبرت وگودل آورده‌اند. کتاب نثری زیبا و تعداد زیادی مسألهٔ جالب دارد که متأسفانه برای دانشجویانی که رشتهٔ اصلی آنها ریاضی یا علوم نیست، بسیار مشکل‌اند. من از فصلهای مربوط به هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی این کتاب استفاده می‌کنم. اما به نظر من، بحث نویسندگان در مورد حساب دیفرانسیل و انتگرال و ریاضیات قرن نوزدهم و بیستم، نیاز به گسترش دارد.

13. Gottlob Frege, *The Foundations of Arithmetic*, Harper and Brothers, Harper Torchbooks, New York, 1960.

منبع دست‌اولی دربارهٔ منطقگرایی، که به سبکی زنده، جدلی، و مطایبه‌آمیز نوشته شده و توجه دانشجویان را جلب می‌کند.

14. K. Gödel, What is Contor continum problem?, *American Mathematical Monthly* **54** (1974) 515-525.

نمونه‌ای از افلاطونگرایی [ترجمهٔ این مقاله با عنوان «مسألهٔ پیوستار کانتور چیست؟» در شمارهٔ ۱ سال ۲ی نشر *ریاضی* آمده است ــ م.]

15. Hans Hahn, The crisis in intuition in J.R. Newman, ed, *The World of Mathematics*, Simon and Schuster, New York, 1956-1976.

شرح جذابی دربارهٔ کشف خمهای «نامعقول» فضا پرکن و هیچ‌جا مشتقپذیر، که ضرباتی مهلک بر اعتبار شهود بصری در قرن نوزدهم وارد آورد.

16. G.H. Hardy, Mathematical proof, *Mind* **30** (1929) 1-25.

«نمونهٔ» فلسفهٔ ریاضیدان حرفه‌ای.

17. Reuben Hersh, Some proposals for reviving the philosophy of mathematics, *Advances in Mathematics* **31** (1979) 31-56.

دیدگاه شخصی من در مورد نظریات اشتباه‌آمیز در فلسفهٔ ریاضی و کارهایی که باید برای رفع آنها انجام داد.

18. M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, Oxford, 1972.

یک گزارش خلاصه‌وار اما عالی، دقیق و قابل اعتماد از تاریخ ریاضیات تا اوایل قرن بیستم. این کتاب، یکی از بهترین کتب تاریخ ریاضیات در زمان حاضر به‌شمار می‌رود.

19. Philip Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, New York, 1983.

این کتاب حاصل باندپروازانه‌ترین تلاش برای مبتنی ساختن فلسفهٔ ریاضی بر تاریخ ریاضیات و کارهای امروزی ریاضیدانان است. به احتمال زیاد، بخشهای پایانی کتاب بیشتر از بخشهای نخستین آن برای دانشجویان قابل درک است زیرا شیوهٔ غالب در آغاز کتاب، از نظر فلسفی، فنیتر است.

20. S. Korner, *The Philosophy of Mathematics*, Harper Torchbooks, New York, 1962.

فشرده‌ای سودمند از مباحث مربوط به سه مکتب مبانی‌گرایانه (منطقگرایی، صورتگرایی و شهودگرایی) به‌همراه نقدی بر آنها.

21. Imre Lakatos, *Proofs and Refutaions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

نقطهٔ عطفی در فلسفهٔ ریاضیات قرن بیستم. دنیایی از فراست و دانش. در این کتاب ماهیت ریاضیات با استفاده از یک گفتگوی کلاسی در مورد فرمول اویلر $V - E + F = ۲$ تشریح می‌شود.

22. Jean Piaget, *Genetic Epistemology*, Columbia University Press, New York, 1970.

پیاژه نه فقط به روانشناسی و آموزش ریاضی، بلکه به فلسفهٔ آن هم می‌پرداخت. اهمیت فلسفی ایده‌های او هنوز هم شناخته نشده است.

23. J. Pierpont, Mathematical rigor, past and present, *Bulletin of the American Mathematical Society* **34** (1928) 13-53.

شرح بحرانها در مبانی ریاضیات، با لحنی مطایبه‌آمیز.

24. M. Polanyi, *Personal Knowledge: Towards a Post-Critical Philosophy*, University of Chicago Press, Chicago, 1960.

این کتاب بیشتر فلسفهٔ علم است تا فلسفهٔ ریاضیات، اما کتاب جذاب و مهیجی است و هرکس باید آن را بخواند. در مورد ریاضیات، به این حقیقت مهم اشاره می‌کند که هر ایده یا روشی برای اینکه به‌عنوان جزئی از ریاضیات پذیرفته شود باید جالب باشد.

25. G. Pólya, *How to Solve it*, Princeton University Press, Princeton, 1945.

مانند کارهای پیاژه، تحقیقات پولیا نیز در مورد تدریس و آموختن ریاضی، اهمیت فلسفی زیادی دارد که هنوز شناخته نشده است. این کتاب یکی از بهترین آثار فکری قرن بیستم است. [این کتاب توسط احمد آرام با عنوان چگونه *مسأله را حل کنیم* به فارسی ترجمه شده و انتشارات کیهان آن را منتشر کرده‌است ــ م.]

26. Alfred Renyi, *Dialogues on Mathematics*, Holden Day, San Francisco, 1967.

این گفتگوها را هرکسی می‌تواند بخواند، چراکه در آنها به شکلی ساده و دقیق به سؤالات عامی همچون ریاضیات چیست، ریاضیات کاربردی چیست، و چگونه ریاضیات در علوم به‌کار می‌آید، پاسخ داده شده است. [این کتاب، توسط سعید قهرمانی با عنوان گفت و شنودهایی در *ریاضیات* به فارسی ترجمه شده و مؤسسهٔ انتشارات خوارزمی آن را منتشر کرده است ــ م.]

27. Rudy Rucker, *Infinity and the Mind*, Birkhäuser, Boston, 1982.

کتابی است سرگرم‌کننده که مضمون آن آمیزه‌ای از منطق، ریاضیات و عرفان است. امتیاز ویژهٔ آن، شرح گفتگوهای مؤلف با گودل است.

28. Lynn Arthur Steen (ed.), *Mathematics Today*, Vintage Books (Random House), New York, 1980.

گردآیه‌ای از مقالاتی که موضوع، سطح، و میزان اصالت آنها بسیار متفاوت است. من همیشه از مقالهٔ مارتین دیویس («محاسبه چیست؟») که در این کتاب آمده، برای تدریس ماشینهای تورینگ و قضیهٔ گودل استفاده می‌کنم.

29. Thomas Tymoczko (ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Birkhäuser, Boston, 1986.

گزیده‌ای از آثار جدید که بیشترشان سعی دارند فلسفه را بر پایهٔ عمل و تجربهٔ واقعی ریاضیدانان بنا کنند.

30. L.A. White, The locus of mathematical reality, *Philosophy of Science* **14** (1947) 289-303. Reprinted in The World of Mathematics, J.R. Newmain (ed.), Vol 4, Simon and Schuster, New York, 1956, pp. 2348-2364.

بحثی زیبا از یک مردم‌شناس معروف دربارهٔ این دیدگاه که «محدودهٔ واقعیت» در ریاضیات، ریشه در فرهنگ بشری، یعنی آگاهی مشترک جوامع، دارد.

* * * * * *

• Reuben Hersh, "Let's teach philosophy of mathematics!" *College Math. J.*, (2) **21** (1990) 105-111.

* روبن هرش، دانشگاه نیومکزیکو، آمریکا.

دو شکل در صفحهٔ هذلولوی*

ریفل رابینسن*
ترجمهٔ خداداد خسروی

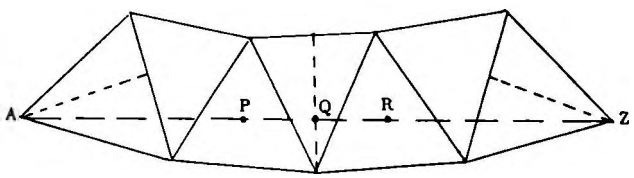
در صفحهٔ هذلولوی، زوایای درونی مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توانند هر اندازه‌ای کمتر از شصت درجه داشته باشند. مثلاً به‌ازای هر عدد صحیح $n \geq ۷$، این زاویه‌ها می‌توانند $۳۶۰^\circ/n$ باشند. با کنار هم قراردادن n تا از این مثلثها حول یک رأس می‌توان صفحهٔ هذلولوی را آجرفرش کرد.

اگر n زوج باشد، خطی که یک ضلع را دربرگیرد، دنباله‌ای از اضلاع را شامل خواهد شد و خطی که یک ارتفاع را دربرگیرد، دنباله‌ای از ارتفاعها را دربر خواهد گرفت. اگر n فرد باشد، خطی که یک ضلع را دربرگیرد، متناوباً یک ضلع و یک جفت ارتفاع را شامل خواهد شد.

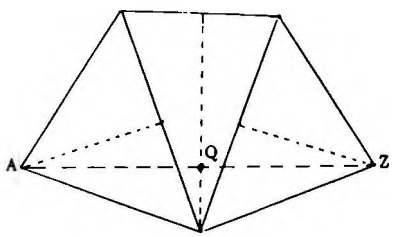
حال اگر خطی از یک رأس چنان رسم شود که بر یک ضلع عمود باشد چه می‌شود؟ اگر n مضربی از چهار باشد، این خط دنباله‌ای از اضلاع را دربر می‌گیرد. اگر n دوبرابر یک عدد فرد باشد، این خط دنباله‌ای از ارتفاعها را شامل می‌شود. اگر n فرد باشد، این خطْ زاویهٔ بین یک ضلع و ارتفاعی مارّ بر رأس اولیه را نصف خواهد کرد، اما رفتار بعدی آن روشن نیست.

در اینجا نشان خواهیم داد که در دو حالت $n = ۷$ و $n = ۹$، استدلال هندسی ساده‌ای مسیر خط را مشخص می‌کند. موضوع در شکلهای ۱ و ۲ نمایش داده شده است. در هر دو حالت، از نقطهٔ A شروع کرده خطی رسم می‌کنیم که زاویهٔ بین یک ضلع و ارتفاع را نصف کند و این خط را امتداد می‌دهیم تا به رأس دیگری چون Z برسد. در حالت $n = ۷$، A و Z با چهار ضلع به هم وصل می‌شوند ولی برای $n = ۹$، دو ضلع کافی است. در هر دو حالت، این خط یک ارتفاع را در نقطهٔ وسط آن، Q، قطع می‌کند و زاویه‌ای بین یک ضلع و یک ارتفاع مارّ بر رأس Z را نصف می‌کند. وقتی $n = ۷$، این خط از مرکزهای P و R از دو مثلث می‌گذرد.

تناسب ابعاد طبعاً تغییر می‌کند تا این شکلها در صفحهٔ اقلیدسی جا بیفتند. میزان تغییر ابعاد در شکلهای مختلف متفاوت است. اضلاع آجرها، و تنها همانها، با خط پر نشان داده شده‌اند. آجرها صرفنظر از ظاهرشان همه بر هم قابل انطباق‌اند. ارتفاعهایی که ترسیم شده‌اند با خط‌چینِ متشکل از پاره‌خطهای کوتاه رسم شده‌اند و نیمسازهای زاویهٔ بین یک ضلع و یک ارتفاع با خط‌چینِ مرکب از پاره‌خطهای بلندتر.



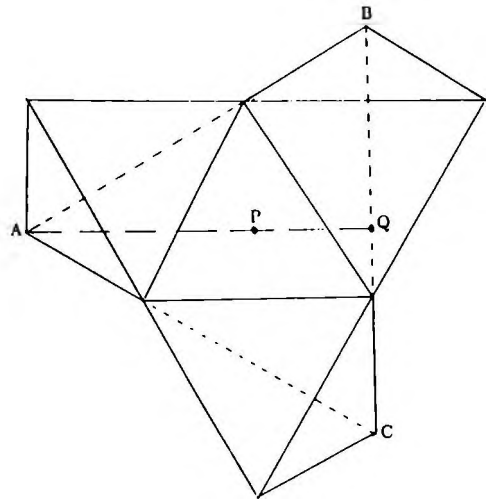
شکل ۱



شکل ۲

اگر در شکل ۱ یا ۲ نیمساز را در طرف چپ A یا طرف راست Z ادامه دهیم، این خط زاویهٔ دیگری بین یک ضلع و یک ارتفاع را نصف خواهد کرد. به این ترتیب، کل شکل تکرار می‌شود و این خطْ بینهایت رأس را دربر می‌گیرد که به فواصل مساوی از یکدیگر قرار دارند.

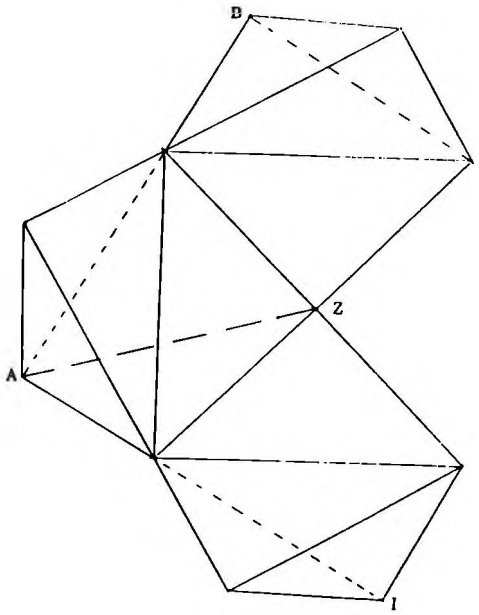
اثبات مطلب در حالت $n = ۷$ در شکل ۳ نمایش داده شده است. مجتمعی از هفت آجر مثلثی در این شکل دیده می‌شود. فراموش نکنید که آجرها همه بر هم قابل انطباق‌اند. پاره‌خط AB شامل دو ارتفاع و یک ضلع است که در یک امتداد قرار دارند. به این ترتیب، ABC یک مثلث



شکل ۳

متساوی‌الاضلاع است و به سبب تقارن، مرکز آن P باید بر مرکز مثلث مرکزی منطبق باشد. زاویهٔ مثلث ABC در نقطهٔ A زاویهٔ بین یک ضلع و ارتفاع یک آجر است. نیمساز این زاویه باید از P، مرکز مثلث، بگذرد و بر ضلع مقابل در نقطهٔ Q عمود باشد. به این ترتیب، نیمهٔ چپ شکل ۱ حاصل می‌شود. نیمهٔ راست با قرینه‌یابی به‌دست می‌آید.

اثبات مطلب برای $n = ۹$ در شکل ۴ نمایش داده شده است. در اینجا یک مجتمع ۲۷ آجری در نظر می‌گیریم که ۹ آجر آن در رأس Z مشترک‌اند و یک نُه‌ضلعی منتظم پدید می‌آورند و یک جفت آجر دیگر به هر ضلع ۹ضلعی چسبیده‌اند. جادادن همهٔ این آجرها در یک شکل، به‌نحوی که قابل استفاده باشد، غیرممکن است. بنابراین، تنها یک قطاع ۱۲۰ درجه‌ای نشان داده شده است که در آن، برای روشن شدن موضوع، زوایای مرکزی در رأس Z بزرگتر کشیده شده‌اند. پاره‌خط AB از دو ارتفاع و یک ضلع تشکیل شده است که بر یک امتداد قرار دارند. با تصورکردن آن قسمت از شکل که رسم نشده است، می‌بینیم که ABCDEFGHI یک نُه‌ضلعی منتظم است که مرکز



شکل ۴

آن Z می‌باشد. زاویهٔ نُه‌ضلعی در Aزاویهٔ بین ضلع و یک ارتفاع یک آجر است. نیمساز این زاویه باید از Z، مرکز نُه‌ضلعی، بگذرد. این منجر به شکل ۲ می‌شود. به سبب تقارن شکل، پاره‌خط AZ باید بر یک ارتفاع در نقطهٔ وسط آن Q عمود باشد و نیز باید زاویهٔ بین یک ضلع و یک ارتفاع در رأس Z را نصف کند، و به این ترتیب اثبات به انجام می‌رسد.

* * * * * *

• Raphael M. Robinson, "Two figures in the hyperbolic plane", *International Journal of Mathematics*, (3) 5 (1994) 421-423.

* ریفل رابینسن، دانشگاه کالیفرنیا (برکلی)، آمریکا

دربارهٔ نویسندهٔ این مقاله

ریفل رابینسن نویسندهٔ مقالهٔ بالا که در هنگام نوشتن این مقاله استاد دانشگاه کالیفرنیا (برکلی) بوده است، در هفتم بهمن‌ماه سال گذشته درگذشت. در اینجا برای یادکرد او مطلبی را که در مجلهٔ *مانتلی*، شمارهٔ مه ۱۹۹۵، صفحهٔ ۴۶۹ (به‌نقل از مقاله‌ای در شمارهٔ فوریهٔ همان سال) دربارهٔ یکی از کارهای رابینسن آورده شده، بازگو می‌کنیم:

> باناخ و تارسکی توانستند این حکمِ جالب، و مغایر با ادراکِ شهودی، را ثابت کنند که، مثلاً، کرهٔ زمین را می‌توان به تعدادی متناهی قطعه تجزیه کرد به‌طوری که اگر قطعات حاصل را دوباره کنار هم بگذاریم یک تیله [گوی بسیار کوچک] یا حتی دو کره به همان اندازهٔ کرهٔ زمین به‌دست آید. جان فون نویمان حکم دیگری را به این حکمِ شگفت‌انگیز افزود و آن اینکه فقط نُه قطعه برای تجزیهٔ یک کره به دو کره با همان شعاع، کافی است. ریفل رابینسن از این هم جلوتر رفت و در سال ۱۹۴۷ نشان داد که پنج قطعه برای این منظور کفایت می‌کند!

نشر ریاضی، سال ۷، شمارهٔ ۱، صص ۴۹-۵۲

شگردهای آشنا و ناآشنا

بهرنگ نوحی*

در این نوشته، چند مسألهٔ کمابیش مقدماتی و راه‌حل‌هایی برای آنها گردآوری شده است. اما نخست لازم است خواننده به این نکته توجه داشته باشد که هدف، آموزش مسأله‌های جدید و افزودن بر گنجینهٔ مسائل مخاطب نیست، کما اینکه تقریباً همهٔ مثالها و مسأله‌هایی که در این نوشته خواهید دید، ازجمله مسائل و یا قضایای معروف هستند.

هدف این است که پس از بررسی هر مسأله و راه‌حل یا راه‌حل‌های آن قضاوت کنید که راه‌حل تا چه حد طبیعی و قابل پیش‌بینی است. آیا پیش از دیدن آن می‌توانستید حدس بزنید که چنین راه‌حلی هم ممکن است وجود داشته باشد و آیا خط سیری را که منجر به پدید آمدن راه‌حل شده درک می‌کنید یا خیر. مثلاً در مثال اول خط سیر اثبات کاملاً طبیعی و قابل انتظار است اما در مورد مثال آخر نمی‌توان به‌راحتی چنین نظری داد.

در پایان، چند مسأله آورده شده که حل آنها به عهدهٔ خواننده است. در بعضی موارد به کمک ایده‌هایی مشابه ایده‌های به‌کار رفته در مثالهای ۱ تا ۶ می‌توان مسأله را حل کرد. در شمارهٔ بعدی مجله، راه‌حل‌های این مسأله‌ها را خواهید دید.

مثال ۱. اولین مثال، اثباتی ساده و معروف از قضیهٔ کیلی-همیلتن است که می‌توان آن را در زمرهٔ راه‌حل‌های طبیعی دانست.

قضیهٔ کیلی - همیلتن. فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریسی است که درایه‌های آن در $\mathbb{C}$ هستند و چندجمله‌ای مشخصهٔ آن $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ است. در این‌صورت

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_0 I = 0 \qquad (*)$$

اثبات: صحت حکم برای ماتریسهای قطری از یک محاسبهٔ بسیار ساده نتیجه می‌شود. بنابراین حکم برای کلیهٔ ماتریسهای قطری‌شدنی درست است. از طرفی اگر مجموعهٔ ماتریسهای $n \times n$ را با $\mathbb{C}^{n^2}$ یکی بگیریم، مجموعهٔ ماتریسهای قطری‌شدنی یک زیرمجموعهٔ چگال از $\mathbb{C}^{n^2}$ را به‌وجود خواهد آورد. در حقیقت، بنابر قضیه‌ای در جبر خطی، اگر ماتریسی قطری‌شدنی نباشد چندجمله‌ای مشخصهٔ آن باید ریشهٔ تکراری داشته باشد یعنی مبین چندجمله‌ای مشخصه باید صفر باشد و لذا مجموعهٔ ماتریسهای قطری‌نشدنی زیرمجموعهٔ یک رویهٔ جبری در $\mathbb{C}^{n^2}$ است. پس تا به‌حال ثابت کرده‌ایم معادلهٔ (*) برای اعضای زیرمجموعهٔ چگالی از $\mathbb{C}^{n^2}$ برقرار است. با یک حدگیری، حکم برای کلیهٔ نقاط $\mathbb{C}^{n^2}$ به‌دست می‌آید و به این ترتیب، اثبات قضیهٔ کیلی-همیلتن کامل می‌شود.

تذکر: خواننده می‌تواند حکم کلی را در حالتی که درایه‌های ماتریسها در یک حلقهٔ تعویضپذیر و یکدار قرار دارند، از حکم بالا نتیجه بگیرد.

مراحل مختلف اثبات بالا به‌وضوح قابل تشخیص است: ابتدا اثبات حکم برای ماتریسهای قطری، سپس برای ماتریسهای قطری‌شدنی، و سرانجام، گذار به حالت کلی به کمک یک حدگیری ساده.

مثال بعدی هم به نوعی یک راه‌حل طبیعی است ولی کمی پیچیده‌تر از مورد قبل است.

مثال ۲. می‌دانیم سری $\sum \frac{1}{p}$ که در آن p در مجموعهٔ اعداد اول تغییر می‌کند، واگراست. در اینجا می‌خواهیم حکم قویتری را بررسی کنیم که در آن p در مجموعهٔ اعداد اولی که به‌صورت $4k + 1$ هستند تغییر می‌کند.

ثابت کنید $\sum_{p\in A}\frac{1}{p}$ که در آن A مجموعهٔ اعداد اولِ به‌صورت $4k+1$ است، واگراست.

می‌توان ثابت کرد که ثابتی مانند c وجود دارد به‌نحوی که $\frac{c}{p}\geq\log(\frac{1}{1-\frac{1}{p}})$. پس کافی است ثابت کنیم سری $\sum_{p\in A}\log\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$ و یا حاصلضرب

$$\prod_{p\in A}(\frac{1}{1-\frac{1}{p}})=\prod_{p\in A}(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots)$$

واگراست. این حاصلضرب در حقیقت برابر است با $\sum_{t\in A'}\frac{1}{t}$ که در آن A' مجموعهٔ اعدادی است که تمامی عوامل اول آنها به‌صورت $4k+1$ هستند. فرض کنید این مجموع همگرا و مقدار آن برابر α باشد. β و γ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\beta=\sum_{s\in B}\frac{1}{s^2}$$

که B مجموعهٔ اعداد صحیح مثبتی است که عاملهای اول آنها فقط به‌صورت $4k+3$ هستند.

$$\gamma=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}$$

و β و γ هر دو مقادیری متناهی دارند، بنابراین مجموع زیر متناهی است

$$\alpha\beta\gamma=\sum_{\substack{r=0\\ s\in B\\ t\in A'}}^{\infty}\frac{1}{2^r s^2 t}=\sum_{\substack{n \text{ به‌صورت}\\ \text{مجموع دو}\\ \text{مربع است}}}\frac{1}{n}$$

اکنون توجه می‌کنیم که تعداد نمایشهای یک عدد صحیح به‌صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح با ملحوظ داشتن ترتیب، از هشت برابر تعدادِ آن مقسوم‌علیه‌های عدد n که به‌صورت $4k+1$ هستند، بیشتر نیست. بنابراین

$$(\alpha\beta\gamma)^2\geq\frac{1}{8}\sum_{\substack{n \text{ قابل‌نمایش}\\ \text{به‌صورت مجموع}\\ \text{دو مربع}}}\frac{8d_1(n)}{n}\geq\frac{1}{8}\sum_{\substack{x,y\in\mathbf{Z}\\ x^2+y^2\neq 0}}\frac{1}{x^2+y^2}$$

اما از مقایسه با انتگرال واگرای $\iint_{\mathbf{R}^2-D^2}\frac{dxdy}{x^2+y^2}$ نتیجه می‌شود که $\sum_{\substack{x,y\in\mathbf{Z}\\ x^2+y^2\neq 0}}\frac{1}{x^2+y^2}$ واگراست. و این تناقض است.

بنابر قضیه‌ای از دیریکله اگر $(a,b)=1$، $\sum_{\substack{p \text{ عدد اول}\\ \text{به‌صورت } ak+b}}\frac{1}{p}$ واگراست. (در حقیقت مرتبهٔ بزرگی آن به‌صورت $\frac{\log\log n}{\varphi(a)}$ است.) حکم بالا در حقیقت اثبات حالت بسیار خاصی از قضیهٔ دیریکله است. متأسفانه تعمیم اثبات بالا برای حالت کلی قضیه دیریکله ظاهراً غیرممکن است. برای دیدن اثبات قضیهٔ دیریکله می‌توانید به کتابهای نظریهٔ تحلیلی اعداد مراجعه کنید.

مثال ۳. این مثال هم در مورد نامتناهی بودن اعداد اول است.

در اینجا بد نیست برای تنوع، اثبات ساده‌ای از نامتناهی بودن مجموعهٔ اعداد اول بیاوریم. اثبات زیر بر مفاهیم توپولوژیک استوار است و در سال ۱۹۵۵ ارائه شده است.

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که گردآیهٔ مجموعه‌های متشکل از عناصر یک تصاعد حسابی در $\mathbf{Z}$ تشکیل یک پایهٔ توپولوژی می‌دهند. اکنون توپولوژی به‌دست آمده توسط این پایه روی $\mathbf{Z}$ را در نظر بگیرید. چون متمم هر تصاعد حسابی را می‌توان با تعدادی متناهی تصاعد حسابی پوشاند، لذا یک تصاعد حسابی نه‌تنها باز است بلکه بسته نیز هست. حال اگر تعداد اعداد اول متناهی باشد، مجموعهٔ $\bigcup_{p \text{ عدد اول}} p\mathbf{Z}$ بسته و لذا متمم آن یعنی $\{-1,1\}$ باز است؛ و به تناقض می‌رسیم.

در حقیقت ایدهٔ اثبات چنین است: فرض کنید می‌خواهیم $\mathbf{Z}$ را با کمک $p\mathbf{Z}$ها که p در مجموعهٔ اعداد اول تغییر می‌کند بپوشانیم. از نظر شهودی قابل تصور است که هر بار که یک $p\mathbf{Z}$ می‌افزاییم باز مقدار زیادی عدد صحیح باقی می‌ماند که پوشانده نشده و لذا این فرایند نمی‌تواند در زمان متناهی پایان پذیرد. در حقیقت می‌توان تخمین زد که چه نسبتی از $\mathbf{Z}$ توسط این تصاعدها پوشانده می‌شود. مثلاً فرض کنید n عددی باشد که عوامل اول آن دقیقاً p_1، ...، p_k باشند.

واضح است که دقیقاً $n-\phi(n)$ عضو هستند که به‌وسیلهٔ k تصاعد بالا پوشانده می‌شوند. بنابراین به نسبتِ $\frac{n-\varphi(n)}{n}=1-(1-\frac{1}{p_1})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$ از اعداد این بازه پوشانده شده‌اند. در حقیقت می‌توان نشان داد که چگالی مجموعهٔ $\bigcup_{i=1}^{k}p_i\mathbf{Z}$ یعنی حد $\lim_{n\to\infty}\frac{\#[1,n]\cap\bigcup_{i=1}^{k}p_i\mathbf{Z}}{n}$ وجود دارد و برابر $1-(1-\frac{1}{p_1})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$ است.

مثال ۴. اکنون به حکمی در مورد تصاعدهای حسابی توجه می‌کنیم.

فرض کنید $\mathbf{N}$ را به تعدادی متناهی تصاعد حسابی افراز کرده‌ایم. ثابت کنید حداقل دو تا از این تصاعدها قدرنسبتِ برابر دارند.

اثبات اول: فرض کنید $\{a_1x+b_1\}$، ...، $\{a_nx+b_n\}$ تصاعدهای حسابی موردنظر باشند. تعریف می‌کنیم

$$f_i(x)=x^{b_i}+x^{a_i+b_i}+\cdots+x^{a_ik+b_i}+\cdots$$

چون تصاعدها $\mathbf{N}$ را افراز می‌کنند خواهیم داشت

$$f_1(x)+\cdots+f_n(x)=x^1+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{x}{1-x}$$

از طرف دیگر، $f_i(x)=x^{b_i}/1-x^{a_i}$. بنابراین اتحاد زیر را داریم

$$\frac{x^{b_1}}{1-x^{a_1}}+\frac{x^{b_2}}{1-x^{a_2}}+\cdots+\frac{x^{b_n}}{1-x^{a_n}}=\frac{x}{1-x}$$

فرض کنید a_n بزرگترینِ a_iها باشد. اگر a_iها دوبه‌دو متمایز باشند هیچ‌یک از a_1، ...، a_{n-1} برابر با a_n برابر نخواهد بود. بنابراین طرف راست عبارت زیر در $e^{2\pi i/a_n}$ تعریف شده اما طرف چپ آن تعریف نشده است. با این تناقض، صحت حکم مسأله به اثبات می‌رسد

$$\frac{x^{b_n}}{1-x^{a_n}}=\frac{x}{1-x}-\frac{x^{b_1}}{1-x^{a_1}}-\cdots-\frac{x^{b_{n-1}}}{1-x^{a_{n-1}}}$$

اثبات دوم: بازه‌ای به‌طول $a_1a_2\ldots a_n$ در نظر بگیرید و ابتدا و انتهای آن را برهم منطبق کنید. مسألهٔ تصاعدها به‌صورت زیر درمی‌آید:

فرض کنید رأسهای یک Nضلعی منتظم را با n رنگ مختلف طوری

رنگ کرده‌ایم که نقاط همرنگ رئوس یک چندضلعی منتظم را تشکیل می‌دهند. ثابت کنید در بین این چندضلعیها دو چندضلعی برابر وجود دارند.

اثبات: دایرهٔ مذکور را بر دایرهٔ واحد در صفحهٔ مختلط منطبق می‌کنیم. ابتدا به یک حکم کلی توجه می‌کنیم. فرض کنید e_1، ... ، e_m رئوس یک mضلعی منتظم باشند. در این‌صورت

$$e_1^\ell + \cdots + e_m^\ell = \begin{cases} m & \text{اگر } m|\ell \\ 0 & \text{اگر } m\nmid\ell \end{cases}$$

بدون کاسته‌شدن از کلیت موضوع، می‌توانیم فرض کنیم $e_k = e^{\frac{2\pi i k}{m}} = e_1^k$ بنابراین

$$e_1^\ell + \cdots + e_m^\ell = e_1^\ell + e_1^{2\ell} + \cdots + e_1^{m\ell}$$

که اگر $m \mid \ell$، برابر است با m و اگر $m\nmid\ell$، برابر است با $0 = \frac{e_1^\ell(e_1^{m\ell}-1)}{1-e_1^\ell}$.

حال برای اثبات حکم فرض کنید در بین تمام چندضلعیها، کوچکترین آنها از نظر تعداد اضلاع، ℓضلعی باشد و تنها از یک رنگ، ℓضلعی داشته باشیم. اکنون مجموع توانهای ℓام رئوس Nضلعی اصلی را در نظر بگیرید. از یک‌طرف مطابق گزارهٔ بالا این مجموع برابر صفر است. اما اگر این حاصلجمع را براساس رنگ دسته‌بندی کنیم $n-1$ قسمت مجموعی برابر صفر دارند و mامی، مجموعی برابر ℓ. پس مجموع کل برابر با ℓ است، و به تناقض رسیده‌ایم.

گرچه این مسأله ظاهراً به نظریهٔ اعداد تعلق دارد اما در هر دو اثبات فوق از روشهایی، تقریباً مشابه، در اعداد مختلط استفاده می‌شود. در تمرینها از خواننده خواسته می‌شود که اثباتی بدون استفاده از اعداد مختلط برای این مسأله پیدا کند!

مثال ۵. اکنون به مسألهٔ زیر در مورد رنگ‌آمیزی گرافها توجه کنید.

فرض کنید گراف سادهٔ G، که تعداد رئوس آن لزوماً متناهی نیست، و همین‌طور k رنگ با شماره‌های ۱، ... ، k داده شده‌اند. فرض کنید می‌توان رئوس هر زیرگراف متناهی G را به‌گونه‌ای رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو رأس متصل به‌هم، همرنگ نباشند. ثابت کنید خود G را هم می‌توان اینگونه رنگ‌آمیزی کرد. (*نامگذاری:* این‌گونه رنگ‌آمیزی را *مناسب* می‌گوییم.)

اثبات اول: در این اثبات فرض می‌کنیم G شمارا باشد و مثلاً رئوس آن با ۱، ۲، ... ، n، ... شماره‌گذاری شده باشند. A_n را زیرگراف حاوی رئوس $\{1, 2, \ldots, n\}$ فرض می‌کنیم. به هر رنگ‌آمیزی G عددی در $[0, 1]$ به این‌صورت نسبت می‌دهیم که رقم nام بعد از ممیز آن متناظر با شمارهٔ رنگ زائد رأس nام باشد. به این ترتیب بسط مبنای $k+1$ عددی را در $[0, 1]$ خواهیم داشت که در بسط آن صفر ظاهر نمی‌شود. اکنون تمام رنگ‌آمیزی‌های G را که تحدید آنها به A_n مناسب باشد در نظر می‌گیریم و زیرمجموعهٔ متناظر با آنها را در $[0, 1]$ با C_n نشان می‌دهیم. از آنجایی که اعداد C_n با تنها n قید روی n رقم اول آنها تعیین می‌شوند و به‌علاوه مشکل یکتا نبودن نمایش اعشاری را نداریم (چون بسط مختوم نداریم) پس C_n بسته و لذا فشرده است. از طرفی واضح است که $C_{n+1} \subseteq C_n$، بنابراین دنباله‌ای نزولی از مجموعه‌های فشردهٔ $\cdots \subseteq C_n \subseteq \cdots \subseteq C_2 \subseteq C_1$ داریم که اشتراک آنها ناتهی است. اکنون عضوی از اشتراک برمی‌گزینیم و با کمک آن رنگ‌آمیزی مناسب روی G را انجام می‌دهیم.

اثبات دوم: حکم را بااستفاده از منطق مرتبهٔ اول ثابت می‌کنیم. در این اثبات، شمارا بودن G لازم نیست. ابتدا باید زبانی مناسب برای بیان احکام موردنظر بسازیم. در این زبان به هر رأس p از گراف G یک ثابت c_p نسبت می‌دهیم: پس مجموعهٔ $\{c_p : p \in G\}$ مرکب از ثابتها به‌دست می‌آید. همین‌طور متناظر با رنگهای ۱، ۲، ... ، k، نمادهای محمولی یک موضعی P_1، P_2، ... ، P_k را در زبان قرار می‌دهیم. حال با کمک همین پارامترها احکام موردنیاز را به‌صورت جملات زیر می‌سازیم. این مطلب را که رأس p با دقیقاً یکی از رنگهای ۱، ۲، ... ، k رنگ‌آمیزی شده، این‌گونه بیان می‌کنیم

$$S_p \text{ جملهٔ: } (\bigvee_{i=1}^{k} P_i(c_p)) \wedge (\neg \bigvee_{1\le i<j\le k} (p_i(c_p) \wedge P_j(c_p))$$

و همرنگ نبودن دو رأس p و p' را که توسط یال e به هم متصل شده‌اند، با جملهٔ زیر

$$S_e \text{ جملهٔ: } \neg(\bigvee_{i=1}^{k} (P_i(c_p) \wedge P_i(c'_p)))$$

حال حکم مسأله را با کمک قضیهٔ فشردگی منطق مرتبهٔ اول ثابت می‌کنیم. فرض کنید G' یک زیرگراف G باشد. مجموعهٔ تمام جملات S_p, S_e متناظر با رئوس و یالهای G' را $S_{G'}$ بنامید. بنابر فرض مسأله، به‌ازای هر G' متناهی $S_{G'}$ یک مدل دارد. به‌علاوه توجه کنید که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ متناهی از جملات S_G زیرگراف متناهی G' را می‌توان به‌گونه‌ای یافت که $S_{G'}$ شامل همهٔ این جملات باشد. بنابراین هر زیرمجموعهٔ متناهی از S_G مدل دارد و لذا بنابه قضیهٔ فشردگی منطق مرتبهٔ اول خود S_G هم مدل دارد. بنابراین رنگ‌آمیزی موردنظر برای گراف G امکان‌پذیر است، و حکم ثابت شده است.

مثال ۶. در پایان به مسألهٔ معروف زیر از نظریهٔ گروهها می‌پردازیم.

قضیه. فرض کنید H زیرگروهی به اندیس p از گروه متناهی G باشد. اگر p کوچکترین عامل اول $|G|$ باشد H نرمال خواهد بود.

اثبات: می‌توان هیأتهای E و F را پیدا کرد به‌قسمی که E توسیع گالوایی F باشد و $\mathrm{Gal}(E/F) \cong G$. حال با کمک نظریهٔ گالوا می‌توان مسألهٔ اصلی را به این‌صورت مطرح کرد:

تحت شرایط بالا اگر $L \subseteq E$ توسیعی از F باشد که $[L : F] = p$، آنگاه L/F نرمال است.

برای اثبات این حکم توجه می‌کنیم که چون هر عضو E روی F جدایی‌پذیر است پس L/F توسیعی جدایی‌پذیر و متناهی است و از این‌رو به صورت $F(\alpha)$ می‌باشد. حال فرض کنید α' مزدوجی از α باشد. از آنجایی که چندجمله‌ای مینیمال α روی F در $F(\alpha)$ تجزیه می‌شود، درجهٔ α' روی $F(\alpha)$ از p کمتر است. اما این ممکن نیست مگر اینکه $[L(\alpha') : L] = 1$ زیرا می‌دانیم $[L(\alpha') : L]|n$. بنابراین $\alpha' \in F(\alpha)$ یعنی توسیع L/F نرمال است.

چند مسأله برای حل

۱. فرض کنید X زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی باشد. X' را زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی بگیرید که هر عضو آن حاصلضرب تعدادی متناهی از اعضای X باشد. ثابت کنید مجموع معکوسات اعضای X واگراست اگر و تنها اگر مجموع معکوسات اعضای X' چنین باشد.

۲. ثابت کنید توپولوژی معرفی شده در مثال ۳ متریک‌پذیر است. آیا می‌توانید متریکی برای آن ارائه کنید؟

۳. نشان دهید $\lim_{n\to\infty} \frac{\#([1,N]\cap\cup_{i=1}^{k} P_i \mathbf{Z})}{n}$ موجود و برابر $1-(1-\frac{1}{p_1})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$ است.

۴. نشان دهید بینهایت زوج متوالی از اعداد طبیعی وجود دارد که هر دو مؤلفهٔ هر یک از زوجها خالی از مربع باشند. (*راهنمایی*: چگالی اعداد خالی از مربع را حساب کنید.)

۵. فرض کنید $\{b_1,\cdots,b_n\}$ و $\{a_1,\cdots,a_n\}$ دوگردایه از اعداد صحیح باشند با این فرض که در هر گردایه یک عدد ممکن است بیش از یک‌بار ظاهر شده باشد. همچنین فرض کنید گردایه‌های $\{b_i+b_j \mid 1\le i<j\le n\}$ و $\{a_i+a_j \mid 1\le i<j\le n\}$ برابر باشند. ثابت کنید n توانی از ۲ است.

۶. بدون استفاده از اعداد مختلط، راه‌حلی برای مسألهٔ تصاعد (مثال ۴) پیدا کنید.

۷. بنابر تعریف، ابرگراف عبارت‌است از مجموعه‌ای مانند G (رئوس) و خانوادهٔ E از زیرمجموعه‌های متناهی G (یالها)؛ رنگ‌آمیزی رئوس را مناسب می‌گوییم هرگاه یالی پیدا نشود که تمام رئوس متصل به آن همرنگ باشند. حال فرض کنید k رنگ داده شده است. نشان دهید اگر هر زیر ابرگراف متناهی G رنگ‌آمیزی مناسب داشته باشد، G هم یک رنگ‌آمیزی مناسب دارد.

۸. الف) نشان دهید اگر یالهای گراف کامل نامتناهی K_∞ را با تعدادی متناهی رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم، یک زیرگراف کامل نامتناهی با یالهای همرنگ وجود خواهد داشت.

ب) با کمک مسألهٔ ۶ قضیهٔ رمزی[1] را ثابت کنید: فرض کنید k و m اعدادی طبیعی باشند. نشان دهید عدد طبیعی n وابسته به k و m وجود دارد به‌طوری که اگر K_n را با k رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم یک زیرگراف K_m از K_n با یالهای همرنگ وجود داشته باشد.

۹. ثابت کنید هر دو مجموعهٔ باز و محدب جدا از هم در $\mathbb{R}^n$ را می‌توان با ابرصفحه‌ای از هم جدا کرد. (*راهنمایی*: ابتدا حکم را در حالتی که مجموعه‌ها کراندار هستند ثابت کنید.)

۱۰. ثابت کنید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ با این خصوصیت که به‌ازای هر $x\neq y$ داشته باشیم $f(x)f(y)\le|x-y|^2$، وجود ندارد.

۱۱. الف) فرض کنید $n=2k$ نفر حول یک میز دایره‌ای شکل جلسه‌ای تشکیل داده‌اند. پس از یک استراحت موقت این افراد مجدداً دور این میز می‌نشینند ولی با ترتیبی متفاوت. نشان دهید دو نفر پیدا می‌شوند که قبل و بعد از استراحت به یک فاصله از یکدیگر هستند (یعنی تعداد افراد بین آنها تغییر نمی‌کند).

ب) همین حکم را برای $n=6k+3$ ثابت کنید. همچنین نشان دهید که حکم در غیر از این دو حالت غلط است.

ج) تابع $f:\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}_n$ را m-*پایدار* گویند اگر به‌ازای هر k، $0\le k<m$، تابع $f_k(x)=f(x)+kx$ دوسویی باشد. نشان دهید که تعداد n تابع m-پایدار یافت می‌شود اگر و تنها اگر $(n,m!)=1$.

سپاسگزاری. از آقای دکتر علی عنایت که اثبات دوم مثال ۵ (اثبات از راه منطق) را از ایشان آموخته‌ام و از آقای محمدرضا رزوان که مسألهٔ آخر را پیشنهاد کرده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

مراجع

1. R., Graham, et al., *Ramsey Theory*, Interscience Publication (1990).
2. S., Lang, *Linear Algebra*, Springer-Verlag (1987).
3. I., Tomescu, *Problems in Combinatorics and Graph Theory*, Wiley-Interscience Publication (1985).

* * * * * *

* بهرنگ نوحی، دانشگاه صنعتی‌شریف؛ نشانی فعلی: دانشگاه ام.آی.تی، آمریکا
behrang@math.mit.edu

تصحیح

در شمارهٔ قبل نشر ریاضی (سال ۶، شمارهٔ ۱ و ۲) در بخش مسأله برای حل، صفحهٔ ۵۱، ستون اول، مسألهٔ ۱، سطر سوم، کلمهٔ «نامتناهی» اشتباهاً به‌صورت «متناهی» چاپ شده بود که به این وسیله از خوانندگان پوزش می‌خواهیم.

1. Ramsey

نشر ریاضی، سال ۷، شمارهٔ ۱، صص ۵۳-۵۵

کتاب

گوشه‌هایی از «گوشه‌ها»

الهٔ خیراندیش *

گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی. تألیف جی.ال. برگرن. ترجمهٔ دکتر محمد قاسم وحیدی، دکتر علیرضا جمالی. ویراستهٔ دکتر محمدهادی شفیعیها. انتشارات فاطمی، بهار ۱۳۷۳. ۲۲۰ص، شامل واژه‌نامه و نمایه.

ترجمه و انتشار اثر مهم برگرن[1] به زبان فارسیْ رویدادی است مطلوب، که باید از مترجمان، ویراستار، و ناشر آن که چنین اثر ارزنده‌ای را در دسترس خوانندگان فارسی زبان قرار داده‌اند، قدردانی کرد. از نظر جامعهٔ علمی جهانی، متن اصلی کتاب که حدود ۱۰ سال از انتشار آن می‌گذرد از چند جهت ارزنده است. در وهلهٔ اول، نوشته‌ای است در نوع خود کم‌نظیر و بلکه بی‌نظیر، چه برخلاف تألیفات مشابه دیگر، ازجمله الگوی اصلی آن یعنی کتاب *Episodes from the Early History of Mathematics* دربارهٔ ریاضیات دوران باستان (۱)، تنها تألیف مستقل و روزآمد به یک زبان اروپایی است که به تاریخ علوم ریاضی در جهان اسلام اختصاص دارد. از مشخصه‌های مهم دیگر کتاب، گستردگیِ دامنهٔ بحث آن از لحاظ تاریخی و جغرافیایی است یعنی یک دورهٔ تاریخی طولانی (از قرن دوم تا هشتم هجری) و دامنهٔ جغرافیایی وسیعی (از آسیای میانه تا اروپای غربی) را دربر می‌گیرد. از همه مهمتر، با اینکه کتاب به کل ریاضیات در سرزمینهای اسلامی، و حتی به برخی از اصیلترین مباحث ریاضیِ آن دوره چون نجوم نظری و موسیقی نمی‌پردازد، آنچه از رشته‌هایی چون حساب، هندسه، جبر، مثلثات، و علم اَکَر عرضه می‌کند، مجموعهٔ منتخبی است که حقیقتاً مفید و مستند به موارد متعدد و متکی بر منابع اصلی است.

بدین ترتیب، سوای محتوای غنی کتاب که طیف وسیع فعالیت ریاضی دانشمندانی از جهان اسلام چون محمد خوارزمی (متوفا بعد از ۲۳۲)،

ثابت بن قره (م. ۲۸۸)، ابوکامل الشجاع (م. ۲۱۸)، کوشیار گیلانی (حدود ۳۳۰)، ابراهیم بن سنان (م. ۳۵۵)، ابوالوفای بوزجانی (م. ۳۸۸)، ابوسهل کوهی (م. حدود ۴۰۵)، ابوبکر کرجی (م. حدود ۴۲۰)، ابوریحان بیرونی (م. ۴۴۲)، عمر خیام نیشابوری (م. ۵۲۶)، سموئل مغربی (م. حدود ۵۷۰)، خواجه نصیرالدین طوسی (م. ۶۷۲)، و غیاث‌الدین کاشانی (م. ۸۳۲) را (به‌همراه شرح جداگانه و مفصلتری دربارهٔ چهار ریاضیدان ایرانی یعنی خوارزمی، بیرونی، خیام، و کاشانی) دربر می‌گیرد (۲)، روش علمی مؤلف نیز به‌خودی خود الگوی مناسبی برای تحقیق و تألیف در اختیار دانشجویان و پژوهشگران قرار می‌دهد. کتاب برگرن، که طی بیست سال اخیر آثار فراوانی از او در این زمینه به‌چاپ رسیده، ویژگیهای دیگری نیز دارد که به‌خصوص از نظر آموزش و پژوهش مقدماتی سودمند است: وجود تصاویری از آلات ریاضی، نسخه‌های خطی و بناهای تاریخی در لابه‌لای بخشهای متعدد شش فصل کتاب، و کتابنامهٔ آخر هر فصل که خوانندهٔ علاقه‌مند را در پی‌گیری مطالعاتش راهنمایی می‌کند، ازجملهٔ این ویژگیهاست. همچنین توضیح مفصل مقدمهٔ کتاب دربارهٔ ساختار زبان و نامهای عربی و به‌خصوص نحوهٔ صحیح برگرداندن واژه‌ها و عنوانهای مربوط به این زمینه به حروف لاتین، به‌ویژه برای غربیان یا کسانی که بخواهند آثار غربیان را دربارهٔ تاریخ ریاضیات دورهٔ

---

۱. مشخصات اصل این اثر چنین است

J.L. Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer-Verlag, New York (1986).

اسلامی مطالعه کنند، مفید است.

در شرایطی که تاریخ علوم به‌طور کلی و تاریخ ریاضیات به‌طور اخص چه از نظر آموزشی و چه از لحاظ پژوهشی هنوز در کشور ما پا نگرفته است، انتشار منابعی با این مشخصات به زبان فارسی، امری است به‌راستی حیاتی و حرکت صحیح در زمینهٔ تاریخ ریاضیات در ایران مشروط به تکرار و تداوم فعالیتهایی در این سطح است. در حالی‌که تألیفات برجستهٔ داخلی در مورد جنبه‌های مختلف تاریخ ریاضیات در اسلام و ایران از موارد انگشت‌شماری چاپ متون اصلی ریاضی و فهرست آثار تجاوز نمی‌کند (۳) و ترجمه‌های فارسی از تألیفات خارجی نیز اکثراً در نقل چند نوشتهٔ منسوخ و گاهی بی‌اعتبار خلاصه می‌شود (۴)، انتشار اثر موردبحث در کنار چند مورد تازهٔ دیگر (۵) فرصتی است مغتنم برای گشایش باب جدیدی در این زمینه، که دست اندرکاران ترجمه و انتشار این کتاب ارزنده به‌خوبی از عهدهٔ اولین قدمهای آن برآمده‌اند. با این حال، در مورد ترجمهٔ کتاب که با عنوان *گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی* در اختیار علاقه‌مندان قرار گرفته است، ذکر نکاتی لازم است.

از نکات مثبت ترجمه، همتی است که در اغلب موارد در بازگرداندن عناوین و اصطلاحات و گاه عبارتهایی از متون اصلی به‌صورت اولیهٔ خود (یعنی به‌زبان عربی یا فارسی) به خرج داده شده است، ولی معلوم نیست چرا این کار در مورد حروف ابجد (ازجمله در صفحات ۵۴ و ۵۵) و بعضی جدولها صورت نگرفته است حال آنکه انتقال اطلاعات مندرج در نقشه‌ها، بیشترِ جدولها، و فهرستها از اصل به ترجمه و افزودن حاشیه‌های مفید، از احاطهٔ مترجمان حکایت می‌کند. همچنین با اینکه در اکثر موارد دقت و وسواس لازم در گزینش لغات و اصطلاحات (گاه با ابتکاراتی جالب چون «نقل حروفی تلفظ کلمات عربی» در برابر transliterating Arabic) به‌کار رفته، در بعضی موارد بهترین معادل ممکن به‌جای اصل قرار نگرفته است. مثلاً در برابر zodiacal signs معادل «علامتهای منطقةالبروج» (ص ۱۸۴) آمده و حال آنکه بهتر بود «بروج دوازده‌گانه» یا «بروج فلکی» گفته می‌شد. در تنها معرفی و نقدی که قبلاً بر این کتاب نوشته شده (۶)، گفته می‌شود: «در ترجمهٔ کتاب مواردی هست که می‌شد از معادلهای رایج متنهای اصلی استفاده کرد مثل جهت قبله (به‌جای سمت نماز)، مطالع (زمانهای طلوع)، شاخص (گنومون)، و فرایض (فراید)».

نکتهٔ دیگر دربارهٔ رعایت امانت است که به‌نظر می‌رسد در این ترجمه گاهی رعایت نشده است. برای مثال در بحث مربوط به کاشانی، دانشمند برجستهٔ سدهٔ هشتم هجری، وقتی صحبت از رسالهٔ طولانی او دربارهٔ آلتی نجومی به‌نام «طبق‌المناطق» به‌میان می‌آید، در متن فارسی این عبارت آمده که «خود [یعنی کاشانی] مخترع آن بوده» (ص ۲۶) ولی چنین جمله‌ای در اصل اثر دیده نمی‌شود و مترجمان اگر بیان این نظر را لازم می‌دیده‌اند بایستی آن را به‌نحوی از اصل اثر ــ که گویای نظر مؤلف است ــ متمایز می‌کرده‌اند. در گوشه‌ای از کتاب، وقتی کتاب *ریاضیات اسلامی* اثر یوشکویچ، محقق مشهور روس، معرفی شده، مشخصات مربوط به محل و تاریخ انتشار حذف شده (ص۸) حال آنکه آوردن مشخصات کامل این اثر کلاسیک و جاودانی در پانوشت صفحه می‌توانست برای خوانندهٔ علاقه‌مند مفید باشد.

چند اِشکال دیگر نیز ـ که جزئی و بعضاً چاپی‌اند ـ در گوشه و کنار متن ترجمه دیده شد که خوب است در تجدید چاپ کتاب اصلاح شود: در فهرست مندرجات کتاب، «کشف کسرهای اعشاری» که یکی از عمده‌ترین دستاوردهای ریاضیات دورهٔ اسلامی و بخش مهمی از کتاب است، از قلم افتاده است. در متن کتاب، نام «سعیدان» به‌صورت «سیدان» (ص ۷۹) و «هوخندایک» به‌صورت «هوگندیک» (ص ۱۰) و «ثابت‌بن قره» در یک‌جا به‌صورت «ثبات‌بن قره» (ص۱۲۳) ضبط شده و در واژه‌نامه، در مقابل «تضعیف مکعب» عبارت duplication of circle آمده است.

یادداشتها و مراجع

۱. اثر معروف آبو (A. Aaboe) که در پیشگفتار متن فارسی به‌صورت «آبویه» نوشته شده است.

۲. تاریخ وفات دانشمندان مذکور در این قسمت، از کتاب *زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی (از سدهٔ سوم تا سدهٔ یازدهم هجری)*، تألیف ابوالقاسم قربانی (مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۵) نقل شده است.

۳. برای ملاحظهٔ نمونه‌ای از این آثار (به ترتیب سال انتشار) رجوع کنید به

بیرونی، ابوریحان. *التفهیم لاوائل صناعةالتنجیم*. به تصحیح علامه جلال‌الدین همایی. چاپ اول، تهران، وزارت معارف به مباشرت شرکت مطبوعات، ۱۳۱۸. چاپ دوم، تهران، انجمن آثار ملی، ۱۳۵۱. چاپ سوم، تهران، انتشارات بابک، ۱۳۶۲. چاپ چهارم، تهران، مؤسسهٔ نشر هما، ۱۳۶۷، ۳۷۹ ص.

مصاحب، غلامحسین. *حکیم عمر خیام به‌عنوان عالم جبر*، مشتمل بر متون و ترجمهٔ فارسی آثار خیام در علم جبر و تحلیل کارهای جبری وی با مقدمات و حواشی. انجمن آثار ملی، ۱۳۳۹، چهارده+ ۳۲۴ص. (نقد: احمد آرام. *راهنمای کتاب*، سال چهارم، شمارهٔ ۴۱، بهمن و اسفند ۱۳۴۰، صص ۱۰۳۳ـ۱۰۳۷).

قربانی، ابوالقاسم. *کاشانی نامه؛ تحقیق در احوال و آثار غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضیدان و منجم بزرگ ایرانی*. دانشگاه تهران، ۱۳۵۰. ۲۷۶ص.

قربانی، ابوالقاسم. *بیرونی نامه؛ تحقیق در آثار ریاضی استاد ابوریحان بیرونی، ریاضیدان و منجم بزرگ ایران در سده چهارم و پنجم هجری*. تهران. انجمن آثار ملی، ۱۳۵۳، ۶۱۹ص.

قربانی، ابوالقاسم. *فارسی نامه؛ احوال و آثار کمال‌الدین فارسی، ریاضیدان و نورشناس ایرانی و بررسی شاهکار ریاضی او تذکرةالاحباب فی بیان‌التحاب*. مؤسسهٔ نشر هما، شهریور ۱۳۶۳. ۱۵۵ ص.

کوشیار گیلانی. *اصول حساب هندی* (متن عربی همراه با ترجمهٔ فارسی). ترجمه و پیشگفتار از محمد باقری. تهران، شرکت انتشارات علمی و فرهنگی (ش ۱۸۶). تهران، ۱۳۶۶.

خوارزمی، محمدبن موسی. *کتاب جبر و مقابلهٔ خوارزمی*. به ترجمهٔ حسین خدیوجم. کمیسیون ملی یونسکو، چاپ دوم (با تجدیدنظر)، تهران، ۱۳۶۲.

طبری، محمدبن ایوب. *معرفةالاسطرلاب معروف به شش فصل به‌ضمیمه عمل و الالقاب*. تصحیح و مقدمه از محمد امین ریاحی. تهران، شرکت انتشارات علمی و فرهنگی (ش ۲۹۶)، ۱۳۷۱، ۲۵۲ص.

حسینی صفوی، ابوطالب بن حسن. «رساله‌ای در اثبات هیئت جدید». به تصحیح حسین معصومی همدانی. *معارف*، دورهٔ اول، شمارهٔ دوم، صص ۱۱۷ـ۱۸۵.

۴. برای نمونه رجوع کنید به

سارتن، جرج. *مطالعهٔ تاریخ ریاضیات و تاریخ علم*. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار. تهران، توکا، ۱۳۵۶، ۱۳۲ص.

یوجین اسمیت، دیوید. *تاریخ ریاضیات*، ج۱. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار. تهران، توکا، ۱۳۵۶، ۵۲۰ ص.

کتاب زیر از این قاعده مستثنی است:

نلینو، کرلو الفونسو. *تاریخ نجوم اسلامی؛ خلاصهٔ سخنرانیهای دانشمند خاورشناس و استاد دانشگاه مصر و دانشگاه پالرم ایتالیا در دانشگاه مصر*. ترجمهٔ احمد آرام. تهران، ۱۳۴۹، ۴۵۶ص.

۵. رجوع کنید به

کندی، ای.اس. *چکیدهٔ زیج جامع کوشیار گیلانی*، ترجمه و تدوین از محمد باقری. انتشار محدود توسط مترجم (به‌مناسبت هزارهٔ کوشیار)، نوروز ۱۳۶۷، ۳۲ص.

صلیبا، جرج. «مکتب نجومی مراغه». ترجمهٔ حسن طارمی‌راد، *تحقیقات اسلامی* (نشریهٔ بنیاد دایرةالمعارف اسلامی)، سال هشتم، شمارهٔ ۱ و ۲، ویژهٔ تاریخ علم، ۱۳۷۲.

کینگ، دیوید. *علم در خدمت دین*. ترجمهٔ توفیق حیدرزاده. *پیام یونسکو* (زیر چاپ).

۶. معرفی و نقد: محمد باقری. گنجینه (مجلهٔ علوم پایه). سال چهارم، شمارهٔ سوم، مرداد و شهریور ۱۳۷۲، صص ۵۹ تا ۶۰.

* * * * * *

* الهٔ خیراندیش، انجمن حکمت و فلسفه و ادیان

چند مقاله در نقد و معرفی این کتاب، به‌زبان انگلیسی

دربارهٔ کتاب

Episodes in the Mathematics of Medieval Islam

نقدهایی به زبان انگلیسی نوشته شده که مشخصات سه تا از آنها را برای اطلاع علاقه‌مندان ذکر می‌کنیم:

1. Gerald Toomer, *American Mathematical Monthly*, (6) **95** (1988) 567-69.
2. J. Hoyrup, *Mathematical Reviews*, May 1988: 01013.
3. George Saliba, *Historia Mathematica*, (2) **16** (1989) 188-190.

در اینجا ترجمهٔ بخشهایی از نقد اول (نوشتهٔ تومر) را می‌خوانید:

از لحن و ساختار کتاب (وجود «تمرین» در انتهای هر فصل) پیداست که منظور مؤلف تدوین کتابی درسی در زمینهٔ تاریخ ریاضیات برای استفاده در دورهٔ کارشناسی بوده است، هرچند وی خود چنین چیزی نگفته است... من به‌تجربه می‌دانم که دانشجویان دورهٔ کارشناسی در درسهای مقدماتی، اگر متوجه شک و تردیدی در لحن مدرس یا کتاب درسیشان بشوند احساس ناخوشایندی پیدا می‌کنند ... بنابراین درک می‌کنم که چرا برگرن بعضی فرضیه‌های قابل مناقشه را به‌صورت حقایق مسلم بیان کرده است، ولی باز هم تأیید این کار برایم مشکل است (یک نمونه از حکمهایی که با آنها موافق نیستم، کاربرد روشهای عددی در مدلهای سیاره‌ای یونانی «دست‌کم از زمان آپولونیوس پرگایی در قرن سوم پیش از میلاد» است.)

... مؤلف در بیشتر فصلها بخشی را به «بعد اسلامی» موضوعها اختصاص داده و در آن کوشیده است ارتباط موضوع مورد بحث را با خصوصیات ویژهٔ تمدن اسلامی نشان دهد. [مسائل ناشی از] این خصوصیات معمولاً پیش‌پا افتاده است و در یک مورد، این ربط دادن کاملاً بیجاست. در فصل مربوط به هندسه، ترسیمات با «پرگار زنگ‌زده» زیر عنوان «بعد اسلامی» آمده است؛ البته در ریاضیاتِ [نوشته‌شده به زبانِ] عربیْ مسائل جالبی وجود دارد که شامل استفاده از پرگاری با فرجهٔ ثابت است ولی این موضوع جنبهٔ خاصِ اسلامی ندارد و اصل ایده، طبق معمول، منشأ یونانی دارد (گرچه، برحسب اتفاق، تنها رسالهٔ تفصیلیِ شناخته‌شده دربارهٔ این موضوع در دورهٔ تمدن هانی، از طریق ترجمهٔ عربی یک اثر یونانی به ما رسیده است).

... ایراد اصلی من به فصل اول (که شامل زمینه و کلیات تاریخی است) یکی آوردن عکسهای بناهای تاریخی است که ربطی به موضوع ندارند (و ظاهراً براساس این اصل درکتاب آمده‌اند که وجود هر تصویری بهتر از نبودِ تصویر است) و دیگر، آوردن تمرینهایی که به فرهنگ *زندگینامهٔ علمی دانشوران* مربوط می‌شوند (و این فکر را در ذهن خوانندهٔ مبتدی تقویت می‌کنند که «تحقیق عبارت است از برداشتن مطالبی از متون مرجع»). در بقیهٔ کتاب، مؤلف از این امکان برخوردار بوده که «گوشه‌هایی» [از ریاضیات دورهٔ اسلامی] را که فی‌نفسه اهمیت دارند انتخاب کند، و در اکثر موارد به‌خوبی از عهدهٔ این گزینش برآمده است ....

گمان می‌کنم خوانندگانی که مخاطب اصلی این کتاب‌اند، در فهم مطالب فصل ششم، راجع به علم اَکَر، با مشکلات زیادی روبه‌رو می‌شوند زیرا مباحثِ بسیار دربارهٔ موضوعی که برای بیشتر دانشجویان دورهٔ کارشناسی ناآشنا و غریب است، در صفحات معدودی گنجانده شده است ....

غلط‌گیری کتاب با دقت همراه نبوده، و اشتباهات چاپی یا لغزشها متأسفانه شامل اعدادی هم که در توضیح مطالب اهمیت دارند، شده است. ولی مدرس می‌تواند با حُسن استفاده از این اشکال، از دانشجویان بخواهد اثباتها یا شیوه‌های صحیح را «بازسازی کنند». موردی که برای این «تمرین» بسیار خوب است، مثالِ تقسیم چندجمله‌ایها در صفحات 117-115 [صفحات ۱۳۲ـ۱۳۵ متن فارسی] است. با نگاهی به این مثال بلافاصله آشکار می‌شود که خطایی درکار است، ولی دانشجو باید تیزهوش و مصمم باشد تا بتواند همهٔ ۱۳ خطای عددی را پیدا کند و در حین این کار مسلماً فهم دقیقی از شیوهٔ سموئل به‌دست خواهد آورد. من اعتراف می‌کنم که نتوانستم این کار را بکنم تا آنکه بالاخره به متن اصلی عربی نگاه کردم.

دورهٔ چهارم کلاسهای ویرایش

مرکز نشر دانشگاهی

مرکز نشر دانشگاهی برای چهارمین دورهٔ مقدماتی ویرایش دانشجو می‌پذیرد. داوطلبان برای آگاهی از شرایط دوره و ثبت نام در آزمون ورودی، روزهای شنبه تا چهارشنبه بین ساعت ۳ تا ۵ به مرکز نشر دانشگاهی واقع در خیابان وزرا پلاک ۴۶ (ساختمان سنایی) بخش آموزش مراجعه کنند.

دیدگاه

این بخش به درج نامه‌ها و نظرهای خوانندگان و همکاران نشر ریاضی و سایر صاحبنظران دربارهٔ مسائل جامعهٔ ریاضی و علمی اختصاص دارد. نظرهای چاپ شده، بیانگر آرای نویسندگان آنهاست و ضرورتاً با دیدگاه نشر ریاضی یکسان نیست.

سه نظر دربارهٔ درس مبانی ریاضیات

«دیدگاه» این شماره حاویِ سه پاسخ است که به نظرپرسیِ کتبی نشر ریاضی در مورد «محتوای درس مبانی ریاضیات، لزوم یا عدم‌لزوم آن، و ــ احتمالاً ــ تدریس درس دیگری به‌جای آن» داده شده است. باب این بحث و اظهارنظر برای همهٔ صاحبنظران ــ اعم از مدرس و دانشجو ــ باز است.

این همه تکرارِ نالازم

خودبه‌خود گردد در میخانه باز
بر تهی پیمانگان بی‌نیاز

وجود بعضی از دروس در برنامه‌های درسی دانشگاه ریشه در مشکلات آموزشی و برنامه‌ریزی دارد و نشانهٔ وجود آنهاست. از جمله، حضور دروس مبانی ریاضیات و ریاضیات عمومی در برنامهٔ کارشناسی ریاضی ناشی از دو عامل زیر، و خود دالّ بر وجود آنهاست:

الف) عدم هماهنگی دانشگاه و دبیرستان در تنظیم برنامه‌های درسی؛

ب) انعطاف‌پذیری برنامه‌های آموزشی دانشگاه در جهت برآوردن خواستهای دانشجویان ضعیف.

از مدتها پیش این طرز فکر برکمیتهٔ ریاضی شورایعالی برنامه‌ریزی حاکم بوده است که تکرار مواد درسی نه‌تنها عیب برنامه نیست بلکه حسن آن است زیرا سبب می‌شود پایهٔ دانشجو قوی شود. هنوز هم در این طرز فکر تغییر محسوسی مشاهده نمی‌شود. این‌طور به‌نظر می‌رسد که حتی اگر در دبیرستان «بورباکی» نیز تدریس شود، باز هم دانشجوی رشتهٔ ریاضی باید دروس مبانی ریاضیات و ریاضیات عمومی ۱ و ۲ و ۳ را بگذارند. شاید مجبور شود برای قویترشدنِ پایه‌اش، درس «ریاضیات پیش‌دانشگاهی» را هم بگذراند.

گفته می‌شود:

«دانشجوی رشتهٔ ریاضی، دانشجوی فیزیک یا رشته‌های فنی نیست که خواندن ۸ واحد ریاضیات عمومی (به‌جای ۱۲ واحد) برایش کافی باشد. دانشجویان رشته‌های غیرریاضی به درس مبانی ریاضیات نیازی ندارند زیرا نمی‌خواهند در رشتهٔ ریاضی به تحصیل بپردازند. ولی این درس برای دانشجوی رشتهٔ ریاضی لازم است، زیرا گذشته از آنکه با تکرار آنچه در دبیرستان خوانده است پایه‌اش قوی می‌شود، ساختن اعداد به روش ارشمیدس و ددکیند را هم فرا می‌گیرد. چه ایرادی دارد که درس ریاضی عمومی ۳ تکرار درس ریاضی عمومی ۲ است. مگر ریاضی عمومی ۱ تکرار درس جبر و آنالیز دبیرستان نیست؟ باشد. دانشجو پایه‌اش قوی می‌شود. اشکالی ندارد که دروس ریاضیات عمومی در دروس آنالیز تکرار می‌شود. پایهٔ دانشجو باز هم قویتر می‌شود.»

ولی با کمال تأسف در عمل دیده می‌شود که علی‌رغم پایه‌ای تا این حد قوی، حتی فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد ریاضی محض نیز از عهدهٔ حل مسائل ریاضیی که دانشجویان فیزیک و رشته‌های فنی آنها را حل می‌کنند برنمی‌آید.

اینکه تکرار مطالب به قوی شدن پایهٔ دانشجو کمک می‌کند جای تردید

است. ولی بدون شک این امر، دانشجویی را که برای موفقیت در کنکور تن به کار سپرده و به کارکردن عادت کرده به خمودی و تنبلی می‌کشاند و دلسرد می‌کند. دانشجو وقتی خود را مجبور به خواندن مطالبی می‌بیند که عین آنها را در همان سطح قبلاً نیز خوانده است، می‌گوید: «این مطالب را یک‌بار خوانده‌ام و به‌خوبی می‌دانم» و کتاب را می‌بندد و تا نزدیکیهای پایان ترم با آن کاری ندارد. این امر سبب می‌شود که به مطالب دیگر هم چندان توجهی نکند و سرانجام به صف دانشجویانِ به اصطلاح ضعیف بپیوندد.

آیا درس مبانی ریاضیات لازم است؟ به‌جرأت می‌توان گفت: خیر. آن زمان که در دبیرستان حتی نامی از «مجموعه» برده نمی‌شد، در دانشگاه نیاز به وجود درس مبانی ریاضیات احساس نمی‌شد. چرا امروز که این درس کم‌وبیش در دبیرستان هم ارائه می‌شود در دانشگاه باید تدریس شود؟ چند تن از استادان ریاضی دانشگاهها خود این درس را خوانده‌اند؟ آیا نخواندن درس مبانی ریاضیات برایشان مشکلی تولید کرده است؟

زبان ریاضی و مبانی آن در ضمن کار خودبه‌خود فرا گرفته می‌شود و نیازی به تدریس آن نیست. مگر دانشجویان ما چه چیز از ما کم دارند که باید این‌گونه لقمه را جویده در دهانشان گذاشت؟ این بی‌انصافی است که بگوییم ما به درس مبانی ریاضیات نیازی نداشتیم ولی دانشجویان ما به آن احتیاج دارند. درسی باید در برنامه قرارگیرد که نبودِ آن مشکلی برای دانشجو در درک مطالب بعدی ایجاد نماید، ولی به جرأت می‌توان گفت حذف درس مبانی ریاضیات نه‌تنها مشکلی برای دانشجو ایجاد نمی‌کند، بلکه با بازشدن جا برای یک درس دیگر به جلوتررفتن او کمک می‌کند.

دانشگاه همه ضعفهای دانشجو را به‌گردن دبیرستان می‌اندازد، وکاستیهای موجود در کنکور و برنامه‌های آموزشی خود را نادیده گرفته، به بهانهٔ ضعف دانشجو سطح درس را پایین می‌آورد. درحالی‌که همین پایین‌آوردن سطح دروس سبب می‌شود که دانشجو به‌کار نپردازد. تحرک موجود در برنامه‌های آموزشی دبیرستان و عدم تحرک برنامه‌های آموزشی دانشگاه، با هم در تضادند. شایسته است که با استقبال از تحولی که در برنامه‌های دبیرستانی در جهت گنجاندن بعضی از مواد درسی دانشگاه صورت گرفته و شرکت در بهتر ساختن آن برنامه‌ها و هماهنگ کردن برنامه‌های درس دبیرستانی و دانشگاهی، با حذف دروسی چون مبانی ریاضیات و ادغام ریاضیات عمومی در آنالیز، جا را برای کشاندن بعضی از دروس کارشناسی ارشد به دورهٔ کارشناسی باز نماییم، تا بدین‌وسیله قدمی در جهت ارتقای برنامه‌های آموزشی برداشته باشیم و دانشجویان بتوانند در سنین پایینتر وارد دورهٔ دکتری و مراحل تحقیق شوند.

احمد شفیعی‌ده‌آباد
گروه ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران
shafei@vax.ipm.ac.ir

تفکر منطقی را نمی‌توان با مطالعهٔ منطق آموخت

وجود این درس نتیجهٔ تحولات برنامهٔ آموزشی و دشواریهای برنامه‌ریزی بوده است. تحولات در برنامهٔ آموزشی با ارائهٔ «جبر»، مختصری از «مجموعه‌ها» و «ماتریس» آغاز شد، درحالی‌که «ریاضیات عمومی» مانند گذشته تدریس می‌شد. ملاحظه می‌کنید که درس مبانی ریاضی از آغاز تحولات ـ اوایل دههٔ چهل ـ مورد توجه قرارگرفته است. این طرز تفکر که ریاضیات جدید (فقط) همین چیزهاست نیز شدت گرفت. خیلیها دانستن این مطالب را مانند ریاضیات عمومی برای دانشجویان ضروری می‌دانستند. کتاب *آنالیز* دکتر مصاحب که حاوی مطالب بسیاری از این دست است نمونهٔ بارز این طرز تفکر است.

با این طرز فکر، برنامهٔ ریاضیات عمومی را عوض کردیم، به‌تدریسِ کتابهایی چون «آپوستل» و «سیلورمن» بدون تأکید بر جنبه‌های استدلالی آنها پرداختیم. کم‌کم به‌تدریس «توماس» که از نظر ریاضی کم‌مایه‌تر از آن دو است روی آوردیم. حال برای تکمیلِ مطالب استدلالی ریاضیات عمومی، و کاستن از شکافی که بین این درس و درسهای آنالیز و جبر وجود داشت، اهمیت پرداختن به درسی دربارهٔ «مبادی ریاضی» آشکار شد. در این مورد اقداماتی صورت گرفت، و درسی به‌اسم «مبانی ریاضی» در بسیاری از دانشگاهها برقرار شد.

* * *

پس از انقلاب با آمدن دیپلمه‌های نظام جدید به دانشگاهها ابتدا از این درس حمایتی نشد؛ گمان می‌کردند که دانشجویان جدید این درس را می‌دانند. به‌جای مبانی ریاضی به‌تدریس «نظریهٔ مجموعه‌ها» به دانشجویان سالهای آخر کارشناسی پرداختند.

ولی عواملی موجب ارائهٔ مجدد درس مبانی ریاضی شد؛ از جمله اینکه بسیاری از دانشجویان چیزی از درسهای دبیرستانی نمی‌دانستند، برخی از مطالب لازم در جبر مثل «عضو ماکسیمال» در دبیرستان گفته نمی‌شد؛ و چون در ریاضیات عمومی، «توماس» را مبنا قرار داده بودیم شکاف بین این درس و آنالیز پر نشد. پس از چندی درس مبانی عرضه شد. وجود چند کتاب خارجی هم در این زمینه بی‌تأثیر نبود؛ برنامه‌های ما بر اساس محتوای چنین کتابهایی تنظیم می‌شود.

اما من دلایل فوق را موجّه نمی‌دانم. انباشتن کلاسهای دانشگاه از جوانان و سالمندانِ نامستعد، به‌زیان جامعه است و باعث هدر رفتن ثروت ملی می‌شود. به‌خصوص در رشتهٔ ریاضی، «اهلیت» مهم است. بدون درگیرشدن با دشواریهای آنالیز و جبر نه درک «اصل انتخاب» مقدور است و نه «عضو ماکسیمال» و نه دیگر مفاهیمی از این دست. «سوپریمم» و «اینفیمم» و «اصل کمال» را باید در جای خود خواند: ریاضیات عمومی و آنالیز. در این دروس است که این مطالب به‌کار می‌روند، دنبال می‌شوند، و جان می‌گیرند نه در «مبانی ریاضی».

* * *

حال به مضمون درس می‌پردازیم. محتوای این درس در «برنامهٔ وزارتخانه» آمده است. به‌نظر می‌رسد که مدافعین درس مبانی ریاضی، آن را وسیله‌ای برای «منطقی اندیشیدن» می‌دانند که به دانشجویان کمک می‌کند تا در فراگرفتن ۶ فصل اول آنالیز آپوستل با دشواری مواجه نشوند، «اصل انتخاب» و احکام معادل آن را فرا گیرند، و در جبر و توپولوژی کمتر با مشکل روبه‌رو شوند.

در پاسخ اینان می‌گوییم که با مطالعهٔ «منطق» نمی‌توانیم برخورد منطقی را بیاموزیم؛ منطق را باید در ضمن «کار» آموخت (نگاه کنید به *آشتی با ریاضیات*، شمارهٔ ۳، یادداشت نگارنده) از آن گذشته، رئوس «منطق مقدماتی» را محصلان در دبیرستان می‌خوانند. نه «خواص جبری توابع» برای دانشجویان تازگی دارد و نه «ساختمانهای جبری». نه‌تنها «لزوم برخورد اصل موضوعی

با مجموعه‌ها» که در برنامه آمده است برای دانشجویان سال اول معنی ندارد بلکه «اصل انتخاب» و «احکام معادل آن» و «قضیهٔ شرویدر-برنشتین» بیشتر برای آنان شگفت‌آور است تا آموزنده.

نه‌تنها لازم نیست که هر چیزی را در کلاس بیاموزیم بلکه بجاست که از طرح بی‌موقع مطالب خودداری کنیم. چه خوب است که دانش‌آموزان و دانشجویان با مطالعهٔ کتابهای غیردرسی و ضمن بحث با مدرس و همشاگردان خود در خارج از کلاس، با این مطالب آشنا شوند.

برنامهٔ این درس مخدوش است، به‌اصطلاح «از هر چمن گلی است»، و باعث سردرگمی دانشجویان می‌شود. با تمام کاستیهای ریاضیات عمومی، ضرورتی ندارد که این درس، پیشنیاز آنالیز و جبر باشد. ولی قانع کردن اکثریت اعضای هیأت علمی در این مورد دشوار می‌نماید. در هر صورت با تأکید بیشتری بر «اصل کمال» (در ریاضیات عمومی) دیگر نیازی به درس مبانی ریاضی نداریم.

ضرورتی ندارد که به‌جای این درس، درس دیگری گذاشته شود. «نظریهٔ مجموعه‌ها» را می‌توان به‌عنوان درس اختیاری عرضه کرد. بهتر است که حجم مطالب درسی را کاهش دهیم تا از دشواریها کاسته شود.

هوشنگ شکرانیان
گروه ریاضی دانشگاه رازی کرمانشاه

بهشتِ کانتور و برزخِ «مبانی»

«[. . .] گفته شده است که تمام اشیاء ریاضیْ مجموعه‌اند، و خواص آنها را می‌توان از اصول موضوعِ نسبتاً کم‌شمار و ظریفِ مجموعه‌ها به‌دست آورد. هیچ چیزِ چنین ساده‌اندیشانه‌ای نمی‌تواند کاملاً درست باشد، اما در این باره کمتر تردید وجود دارد که در روالِ متعارفِ جاریِ ریاضیات، 'دقیق ساختنِ یک مفهوم' اساساً مرادفِ 'تعریفِ آن در نظریهٔ مجموعه‌ها' است.» ـیانیس موسخوواکیس[1].

نظریهٔ معادلات دیفرانسیل بخش گسترده و زنده‌ای از ریاضیات است با مسائل و روشهای خاصِ خود. صدها ریاضیدان در این بخش فعال‌اند، چندین مجلهٔ پژوهشی نتایج تحقیقات اینان را انتشار می‌دهند، و هر سال دهها نفر در شاخه‌های گوناگونِ آن دکترا می‌گیرند. مایهٔ خندهٔ متخصصانِ این حوزه خواهیم شد اگر موضوع تخصصشان را همان مجموعهٔ شگردهای مبتذلی برای حل معادلاتِ مرتبهٔ اول بدانیم که هر مهندسِ متوسطی به انبانی از آنها مجهز است و عمر هیچ‌یک هم کمتر از صدوپنجاه سال نیست. بحث از آنچه «مبانی ریاضیات» خوانده می‌شود بدون تمییزِ مشابهی بین کلّ نظریهٔ مجموعه‌ها و بخش مقدماتیِ بسیار کوچک اما پرکاربردی از آن کامل نخواهد بود. اکنون بیش از صدوبیست سال از تولد نظریهٔ مجموعه‌ها (۱۸۷۴) و حدود نود سال از اصل موضوعی شدن آن (۱۹۰۸) می‌گذرد و از ۱۹۲۲ اصل موضوع جدیدی به دستگاه تسرملو-فرنکل افزوده نشده است. ساختن اعداد حقیقی با برشهای ددکیند یا دنباله‌های کوشی از محصولات ریاضیات قرن نوزدهم است. «لم تسورن» را اول‌بار ریاضیدان لهستانی کازیمی‌یر کوراتووسکی در ۱۹۲۲ معرفی کرد و قوانین اساسی حساب کاردینالها پیش از ۱۹۱۰ به اثبات رسیده بود. همهٔ اینها ـو بسی بیشترـ را در هر درس قابل‌قبول نظریهٔ مجموعه‌ها می‌توان در یکی دو هفته به هر دانشجوی ریاضیات که درسهایی در جبر و آنالیز گذرانده باشد آموخت. اینها را همه، و از جمله واضعان فرهیختهٔ درس مبانی ریاضیات در برنامهٔ دورهٔ کارشناسی، می‌دانند؛ پس، باید دید حکمتِ وضع این درس برای تازه‌واردان و وعظی چهار واحدی در این موضوعاتِ پیش‌پا افتاده در چیست.

در بعضی دانشگاهها (متأسفانه) بخشی از مطالب درس مبانی ریاضیات از توضیح معنای $p \to q$ و $\neg p$ و $\exists x P(x)$ و امثال اینها تشکیل یافته است. اینکه این موضوعاتْ آموختنی نیستند به نظرِ بسیاری کسان بدیهی است. هر که ذهناً بیمار نباشد می‌تواند اعتبارِ «سقراط انسان است و انسانْ فانی؛ پس سقراط فانی است» و فسادِ «'$p \to \neg p$' یک تناقض است» را دریابد. تشخیص استدلال از مغالطه و توانایی اثبات را نمی‌توان با خواندنِ (مقدماتِ) منطق آموخت، چنانکه، مثلاً، جراحان قلب قلبشان لزوماً منظم‌تر از مردمِ عادی نمی‌تپد. بعید است تدریس این بدیهیات ـکه نمونهٔ نوعیِ آن مطالبِ فصل اول *آنالیز ریاضیِ* شادروان مصاحب استـ جز اتلاف وقت و مجال یافتنِ لفاظی حاصلی داشته باشد.

بخش عمدهٔ «مبانی ریاضیات» را معرفی زبان مجموعه‌ها تشکیل داده است. در سالهایی که هنوز فارغ‌التحصیلانِ دبیرستان با الفبای این زبان آشنا نبودند، مدرسانِ درسهای اولیهٔ دانشگاه گزیری از آموزش آن به دانشجویان نداشتند. بدین‌گونه بسا که دانشجویان یک‌بار این مطالب را در هفته‌های آغازینِ درس جبر، یک‌بار در جلسات اولیهٔ درس آنالیز، و . . . می‌دیدند. نتیجهٔ طبیعیِ مشاهدهٔ این تکرارِ کُشندهٔ وقت و حوصله، جدا ساختنِ این مقدمات و تأسیس درس مبانی ریاضیات بود. آنچه در این درسْ لازم و طبیعی می‌نمود معرفی مفاهیم مجموعه و عضویت، رابطه، افراز، تابع، دنباله، ترتیبِ جزئی و خطی، و هم‌توانی و تناهی و شمارش‌پذیریِ مجموعه‌ها بود.

به‌نظر می‌رسد که اکنون (۱۳۷۴) گذراندن درسی با این موضوعات به‌*عنوان پیشنیازی برای دروسِ* دیگر وجهی نداشته باشد زیرا که از میانِ این مطالب، تنها چند موردِ آخر است که دانش‌آموزانِ سال آخر دبیرستان با آنها آشنا نیستند، که این ناآشنایی را هم می‌توان با سخنرانیِ جذابِ حداکثر دوساعته‌ای زدود و دانشجویانِ مشتاق را چهار ماه درانتظار رسیدن به مباحث اصلیِ ریاضیات نگاه نداشت. همین مقدار آشنایی با زبان مجموعه‌ها برای درک ریاضیاتِ معاصر کافی است ـدر واقع مشکل بتوان (و خیلی هم مطلوب نیست که) ریاضیات را با ابتدا به اصول آموخت: کمتر کسی است که بر این باور باشد که ساختن اعداد حقیقی [و پیش از آن: اعداد گویا و صحیح و طبیعی] بر هر مبحث دیگری در آنالیز ریاضی مقدم است. آنچه برای متخصصانِ آیندهٔ آنالیز مهم است این نیست که نحوهٔ تعریف اعداد حقیقی و جمع و ضربِ آنها را به‌تفصیل ببینند، بلکه این است که قانع شوند که، علی‌الاصول، *می‌توان* اینها را به‌دقت تعریف کرد.

کاربرد ناگزیر اصل موضوع انتخاب (ازجمله به شکل استفاده از لم تسورن) در بخشهایی از ریاضیات (و ظاهراً بیش از همه در شاخه‌هایی از جبر) ممکن است در نگاه نخستْ مبطلِ استدلال فوق به نظر آید و وجود درسی در مقدمات نظریهٔ مجموعه‌ها را، مقدم بر دروسِ دیگر، ضروری بنمایاند، اما باید توجه کرد که اولاً در وضعیت فعلی حتی در بسیاری از

1. Y.N. Moschovakis *Notes on Set Theory* Springer-Verlag, New York, 1994; p.vii.

دانشگاههای پایتخت هم مدرس «مبانی ریاضیات» آن‌قدر درگیر $p \wedge q$ و اشتراک و افراز می‌شود که عملاً اصل انتخاب در برنامهٔ درس جایی ندارد ـ نمونه‌هایی را می‌توان برشمرد. ثانیاً اصل انتخاب گزاره‌ای است که «درستیِ» آن آشکار است و کم نیستند ریاضیکارانی که هنگام استفاده از آن نمی‌دانند که چنین می‌کنند؛ برای نمونه، قضیه بودنِ این حکم مشهور که «هر اجتماع شمارا از مجموعه‌های شمارا شماراست» متوقف بر اصل انتخاب است[1]، اما در اثباتهایی از این قضیه که در کتبِ معمولِ آنالیز ذکر می‌شود حتی به *استفاده* از این اصل تصریح نمی‌شود. افزون بر این، بنابر قضیهٔ معروفی از گودِل (۱۹۳۸)، افزودنِ اصل انتخاب به بقیهٔ اصول سبب *ایجادِ* تناقض نمی‌شود؛ پس، از مناقشات تاریخی که بگذریم، ملاحظاتِ منطقیْ بررسی جداگانه و ویژهٔ اصل انتخاب را الزام نمی‌کند. دیگر اینکه با پذیرفتن اصل انتخاب (و حتی بدون ذکرِ آن) می‌توان با استدلال غیررسمیِ ساده‌ای موجه بودن لم تسورن را نشان داد[2].

* * *

این ملاحظات نباید از لزوم یا دست‌کم فایدهٔ درسی در نظریهٔ مجموعه‌ها در دورهٔ کارشناسی ریاضیات غافلمان سازد. در چنین درسی می‌توان، برحسب توانایی مخاطبان و تمایلات مدرس، تا قضایایی در ترکیبیاتِ نامتناهی یا سازگاری نسبیِ اصل انتخاب و فرضیهٔ پیوستار با ZF پیش رفت. این درس هر چند *منطقاً* پیشنیازی ندارد (حتی خودِ منطق هم پیشنیاز آن نیست!) تجربهٔ ریاضیی در حد برخورداری از معلوماتی در جبر و آنالیز و توپولوژیِ عمومی به درک بهتر محتوای آن کمک می‌کند. در چند جلسهٔ اولِ درس می‌توان پس از تبیینِ زمینه‌های تاریخی‌ـفلسفیِ مباحث و بیان اصول موضوع و با واگذاردنِ جزئیاتِ فنّیِ ساده به متعلمان، از مرزهای «مبانی ریاضیات» بسیار فراتر رفت. این جلسات که روشنگرِ سبب اعجاب هیلبرت و مفسرِ گفتهٔ موسخوواکیس و نشان‌دهندهٔ نقش وحدت‌بخش و شکوهمند نظریهٔ مجموعه‌ها در ریاضیات است تجربهٔ دل‌انگیزی برای دانشجویان تواند بود.

کاوه لاجوردی

kaave@vax.ipm.ac.ir

۱. حتی مدلی وجود دارد که در آن (اصل موضوع انتخاب برقرار نیست و) مجموعهٔ اعداد حقیقیْ اجتماع شمارایی از مجموعه‌های شماراست.

۲. طالبانِ *اثبات* می‌توانند به شیوه‌ای کاملاً مقدماتی (بدون توسل به اُردینالها) اصل ماکسیمالِ هاوسدُرف را برای شاگردانِ خود اثبات کنند ـ نگاه کنید به ضمیمهٔ کتاب

W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, (1987).

لم تسورن به‌سادگی از این «اصل» نتیجه می‌شود.

عاقبت پیش‌بینی ! *

کارل لودویگ زیگل، یکی از متخصصان نظریهٔ اعداد در قرن بیستم که گاه او را به شوخی آخرین ریاضیدان بزرگ قرن نوزدهم می‌نامند، حکایت جالبی نقل کرده است: هیلبرت در یک سخنرانی در سال ۱۹۲۰، هنگام صحبت دربارهٔ مسائل ریاضیات، خطاب به دانشجویان که زیگل هم در میان آنها بود گفت تحقیقات زیادی که اخیراً روی فرضیهٔ ریمان انجام شده او را امیدوار کرده که شاهد اثبات این فرضیه (دربارهٔ تعیین مکان صفرهای تابع زتا) باشد؛ [و افزود که] مسألهٔ فرما دشوارتر است اما عمرِ جوانترین فردِ حاضر کفایت خواهد کرد که حل آن را ببیند؛ ولی مسألهٔ متعالی بودن عدد $2^{\sqrt{2}}$ آنقدر دشوار است که در زمان حیاتِ هیچ‌یک از حاضران حل نخواهد شد. [از قضا،] چند سالی نگذشت که زیگل متعالی بودن این عدد را ثابت کرد (و در واقع، اولین نفری هم نبود که چنین کاری کرد)؛ [حال آنکه هرچند] امروز مسألهٔ فرما تقریباً حل شده و برای درستی فرضیهٔ ریمان هم شواهد عددیِ بسیار زیادی پیدا شده، ولی هیچ‌یک از دو مسأله کاملاً حل نشده‌اند.

* * * * * *

* ترجمه و نقل از

Craig Smoryński, *Logical Number Theory, I*, Springer-Verlag, Berlin (1991) 269.

[توجه کنید که این کتاب قبل از اثبات قضیهٔ فرما به‌وسیلهٔ وایلز چاپ شده است.]

مرکز نشر دانشگاهی منتشر کرده است

- آشنایی با اقتصادسنجی
  اسکار لانگه
- آشنایی با تاریخ ریاضیات (ج.۱ و ۲)
  هاورد و.ایوز
- آشنایی با تحقیق در عملیات (ج.۱)
  حمدی طه
- آشنایی با توپولوژی و آنالیز نوین
  ج.ف.سیمونز
- آشنایی با دانش کامپیوتر
  توماس بارتی
- آشنایی با فرایندهای تصادفی
  هوئل، پورت، استون
- آشنایی با منطق ریاضی
  هربرت ب. اندرتون
- آشنایی با نظریهٔ اعداد
  آدامز، گولدشتین
- آشنایی با نظریهٔ گروهها
  والتر لدرمن
- آمار ریاضی
  فروند، والپول
- آمار کاربردی (ج.۱)
  نتر، واسرمن، ویتمور
- آمار مقدماتی (ج.۱ و ۲)
  توماس و رانلد ووناکات
- آمار ناپارامتری کاربُردی
  کنوور
- آموزش تدریس ریاضیات دبیرستانی
  بسلرکولب
- آنالیز عددی مقدماتی (به شیوهٔ الگوریتمی)
  کونت، دوبور
- آنالیز مختلط و کاربردهای آن
  ریچارد.ا. سیلورمن
- استنباط آماری ناپارامتری
  جین دیکنسن گیبنز
- اصول آماری در طرح آزمایشها (ج.۱ و ۲)
  واینر
- اصول آنالیز حقیقی
  ربرت.جی.بارتل
- اعداد مختلط
  والتر ادرمن
- برنامه‌نویسی سیستم برای کامپیوترهای شخصی (PC) (ج.۱ و ۲)
  مایکل تیشر
- تابع گاما
  امیل آرتین
- تحلیل واریانس و طرح آزمایشها
  دوگه،زیرو
- توابع متغیر مختلط
  د.ا.تال
- توپولوژی، نخستین درس
  جیمز.ر.مانکرز
- جبر خطی
  مایکل اونان
- جبر خطی
  هافمن، کنزی
- جبر ماتریسها برای علوم زیستی و کاربردهای آماری‌آن
  س.سیرل
- حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی (ج.۱و۲)
  لوئیس لیتهلد
- حساب دیفرانسیل و انتگرال (برای رشته‌های بازرگانی، زیست‌شناسی و علوم اجتماعی)
  گرودیس، شلی، ویلر
- حساب دیفرانسیل و انتگرال (ج.۱)
  تام.م.آپوستل
- حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی (ج.۱و۲)
  توماس، فینی
- روشهای آنالیز حقیقی
  ریچارد گولدبرگ
- روشهای بنیادی اقتصاد ریاضی(ج.۱)
  آلفا سی شیانگ
- ریاضیات مهندسی پیشرفته (ج.۱ و ۲)
  اروین کرویت سیگ
- زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی
  ابوالقاسم قربانی
- سری فوریه
  ی.ن.اسندون
- طراحی منطقی دستگاههای رقمی
  آرتور د.فریدمن
- علم و هنر شبیه‌سازی سیستمها
  رابرت شانون
- کاشانی‌نامه
  ابوالقاسم قربانی
- کاربُردهای بینهایت
  لیو زیپین
- مبانی ریاضیات
  استیوارت، تال
- مبانی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
  ایان.اسندون
- مبانی نظریهٔ تصمیم
  برنارد و. لیندگرن
- مبانی نظریهٔ صف
  گراس، هریس
- متغیرهای مختلط و کاربرد آنها
  چرچیل، براون، ورهی
- معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها
  جرج ف.سیمونز
- مفاهیم و روشهای آماری (ج.۱ و ۲)
  جانسون،راتاچاریا
- مقدمات معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی (ج.۱)
  بویس،دیپریما
- نخستین درس در جبر مجرد
  ف.ج.هیگینز
- نخستین درس در جبر مجرد (ج.۱)
  جان.ب.فرالی
- نخستین گامها در آنالیز عددی
  هوسکینگ، جویس، ترنر
- نظریهٔ آمار (ج.۱ و ۲)
  برنارد و.ایندگرن
- نظریهٔ اعداد
  ت.ه.جکسن
- نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها
  پ.ر.هالموس
- نظریهٔ گالوا
  مورتی، رامانانان، شوکلا
- نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربردهای آن
  تی‌لین، فنگ‌لین
- نظریهٔ مقدماتی احتمال و فرایندهای تصادفی
  کای لای چانگ
- نظریهٔ نمونه‌گیری
  پرویز شیرانی
- نظریه و کاربردهای آنالیز عددی
  فیلیپس، تیلر
- هندسهٔ دیفرانسیل مقدماتی
  بارت اونیل
- هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی
  ماروین جی.گرینبرگ

NASHR-E RIYĀZI

A Mathematics Journal
of
Iran University Press

Volume 7, Number 1

Nashr-e Riyāzi is published by Iran University Press, twice a year. The main objectives of the journal are to present:

-new advances in mathematics;
-cultural, philosophical, and historical aspects of mathematics, as well as its applications;
-educational problems of mathematics, specifically those concerning higher education in Iran.

Some of the articles in each issue are written by Iranian mathematicians, and some are translations of expository articles selected from foreign sources.

The annual subscription rates including air mail postage are: Middle East £ 18, Europe & Asia £ 20, North America & Far East £ 25.

To subscribe, please send your name, address, and a check to Iran University Press, 85 Park Avenue, Tehran 15134, Iran.

Executive Editor
S. Shahshahāni
Editorial Board
S. Kāzemi
K. Lājevardi
S. Shahshahāni
Y. Tābesh
A. Toqhā

ISSN 1015-2857