نشریه ریاضی

سال ۴ ، شمارهٔ ۳

تاریخ انتشار: مهر ۱۳۷۱

TOPOLOGY

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ANNALS OF MATHEMATICS

THE JOURNAL OF SYMBOLIC LOGIC

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS

Journal für die reine und angewandte Mathematik

Mathematische Annalen

ACTA MATHEMATICA

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК СССР

مرکز نشر دانشگاهی

بسم الله الرحمن الرحیم

نشر ریاضی

مجلهٔ ریاضی مرکز نشردانشگاهی

شمارهٔ ۸۵ خیابان پارك خیابان دکتر بهشتی، تهران ۱۵۱۳۴

نقل مطالب با ذکر مأخذ مجاز است

بهای هر شماره ۶۰۰ ریال
حق اشتراك سالانه برای داخل کشور ۱۸۰۰ ریال

وجه اشتراك به حساب شمارهٔ ۹۰۰۰۹ بانك ملی شعبهٔ خیابان پارك تهران به نام مرکز نشردانشگاهی واریز شود.

نشرریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشردانشگاهی است که هر چهار ماه یك بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجّه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی پژوهان فارسی زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشرریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چهارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبك مقاله‌های چاپ شده در *نشرریاضی* باشد. به همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حك و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشردانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یك طرف کاغذ، یك خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ شدهٔ در *نشرریاضی* باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۴، شمارهٔ ۳

تاریخ انتشار: مهر ۱۳۷۱

مدیر مسؤول: سیاوش شهشهانی

● هیأت ویراستاران:

یحیی تابش

سیاوش شهشهانی

سیامك کاظمی

● امور فنی و هنری: واحد نشریات

محمد حسن‌پور

زهرا دلاوری

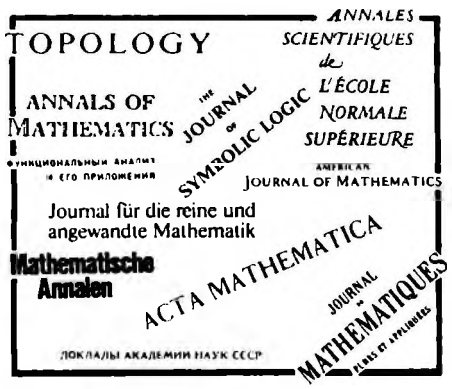
● ناظر چاپ: علی صادقی

با همکاری لاینوترون مرکز نشردانشگاهی

لیتوگرافی: نور حکمت

چاپ و صحافی: شقایق

فهرست



روی جلد

ر. ك.

«مجله‌های ریاضی جهان و کتابخانه‌های ریاضی ایران»

تدابیر داهیانه

در این شمارهٔ نشر ریاضی مقاله‌ای داریم دربارهٔ نشریات ادواری تحقیقی در ریاضیات. یکی از دوستان پس از خواندن دستنویس این مقاله بو زخندی زد و گفت چرا بیخود داغ مردم را تازه می‌کنید؟ مگر شما نمی‌گویید با مقررات جدید خرید متمرکز که وزارت فرهنگ و آموزش عالی در سال گذشته اختراع کرد، میزان خرید کتاب بعضی از دانشگاهها تقریباً به صفر رسیده است؟

توضیح دادیم که خوشبختانه، خرید مجله‌های علمی تا این لحظه از گزند تدابیر داهیانهٔ آن وزارتخانه در امان مانده است و مقالهٔ ما هم صرفاً به مجلات اختصاص دارد.

گفت به هر صورت امسال شاید آخرین سالی باشد که چیزی به نام ارز دولتی برای خرید کتاب و مجله در اختیار مؤسسه‌های آموزشی و پژوهشی قرار دارد. چرا دانشگاهها را تشویق نمی‌کنید که دست کم پیشینه‌های مجله‌ها را به صورت میکروفیلم و میکروفیش تهیه کنند که ارزانتر تمام می‌شود.

گفتیم اتفاقاً در همین فکر بودیم ولی متأسفانه یك اشکال کوچك در کار است و آن اینکه میکروفیلم و میکروفیش مجلات در رده‌بندی کالاهای وارداتی جزو «تجهیزات الکترونیك» محسوب می‌شوند و مدتی است که مؤسسات تحقیقاتی و آموزش عالی مجاز نیستند تجهیزات الکترونیکی را به ارز دولتی بخرند.

دوستمان برآشفته شد که فیلم عکاسی خیلی قبل از پیدایش صنایع الکترونیك اختراع شده است.

گفتیم اینکه چیزی نیست، حتی موردی را سراغ داریم که اجازهٔ خرید یك کتاب معمولی به دفتر مربوط به تجهیزات الکترونیك ارجاع شده است.

قبل از اینکه دوستمان یادآوری کند که مرحوم گوتنبرگ، مخترع صنعت چاپ، در قرن پانزدهم میلادی می‌زیسته، برایش توضیح دادیم که در پروفورمای کتاب مورد نظر ذکر شده که همراه کتاب، یك دیسکت حاوی بعضی برنامه‌های کامپیوتری مربوط به کتاب نیز ارسال می‌شود و کارشناسان تیزبین وزارت فرهنگ و آموزش عالی که لحظه‌ای از حراست بیت‌المال غافل نیستند موضوع را کشف کرده و مانع خرید کتاب به ارز دولتی شده‌اند.

دوستمان که کم‌کم نسبت به حرفهای ما مشکوك می‌شد گفت حتماً شما دانشگاهیها آنقدر در خرید کتاب و نشریه اسراف کرده‌اید که چنین بلایی سرتان آورده‌اند.

با یك حساب سرانگشتی نشان دادیم که اگر همهٔ دانشگاهها و مؤسسات پژوهشی تابع وزارتخانه آزاد باشند که کتابها و نشریات مورد نظرشان را بخرند، کل بودجهٔ لازم از حدود ده میلیون دلار در سال تجاوز نمی‌کند.

او که سالهاست صحرای برهوت دانشگاهی را ترك کرده و به جلگه‌های سرسبز تجارت خصوصی رو آورده، دهانش از تعجب باز ماند و بعد که به خود آمد، گفت اینکه در مقیاس خریدهای خیلی از وزارتخانه‌ها قلم کوچکی است. چطور کسی نیست که اهمیت این سرمایه‌گذاری را برای آیندهٔ علمی مملکت گوشزد کند؟ مگر در مملکت ما مراجعی برای دفاع از علم و فرهنگ وجود ندارد؟

گفتیم البته که وجود دارد. خود وزارت فرهنگ و آموزش عالی رسالتش همین است و دهها کمیسیون آموزشی، پژوهشی، برنامه‌ریزی

و سیاستگذاری زیرچتر خود دارد. ما چند فرهنگستان داریم، شوراهای پژوهشی مملکتی داریم، به تازگی هیأتهای امنای دانشگاهی داریم، و خیلی از این سازمانها متأسفانه یا خوشبختانه مشغول کارهای خیلی مهم هستند و فرصت رسیدگی به مسائل کوچك را ندارند.

گفت مثلاً به چه کاری مشغول اند؟

گفتیم مثلاً تهیهٔ کارنامه، جدول، بروشور، بانك اطلاعاتی و اِعمال مدیریت. تاسرتان را برگردانید یك پرسشنامهٔ جدید روی میزتان ظاهر می شود و از شما خواسته می شود فهرست تألیفات، نشریات، جوایز و خدماتتان را ظرف چهارده روز برای درج در جدیدترین بانك اطلاعاتی کامپیوتری بفرستید. واقعاً انسان احساس اهمیت می کند ولی کاش برای جلوگیری از اتلاف وقت، به یکباره نوعی دفترچهٔ بسیج تحقیقاتی برای هر خانوار ایرانی صادر می کردند. تحقیقات علمی در کشور ما چنان رونقی یافته است که به زودی مجبور خواهیم شد از یك سوپر کامپیوتر برای پردازش اطلاعات مربوط به محققان و آثارشان استفاده کنیم. شاید هم بهتر باشد متخصصان خرید متمرکز تعداد زیادی سوپر کامپیوتر با چهل درصد تخفیف از سنگاپور بخرند. ببخشید که از موضوع اصلی منحرف شدیم. غرض، توصیف رواج تحقیقات علمی در کشور بود و سازمانهای مهمی که برای هدایت این جریان و سیاستگذاری و آمارگیری در این زمینه خلق شده اند. اصلاً شاید وقت آن باشد که خرید کتابها و نشریات علمی خارجی را کلاً ممنوع کنیم. با توجه به نیاز شدیدی که آمریکا و اروپا به کشفیات محققان ما دارند، بی شك حاضر خواهند شد با یك معاملهٔ پایاپای، کتاب و نشریه با ما مبادله کنند.

دوستمان که نکتهٔ ما را دریافته بود گفت گرفتاری شما «شدت مدیریت» است.

پرسیدیم این دیگر چه صیغه‌ای است؟

پاسخ داد چند سال پیش، در آمریکای هراسان از باختن بازارهای تجاری به کشورهای خاوردور، کمیسیونی متشکل از تعدادی از نخبگان صنایع و رؤسای دانشگاههای صنعتی آن کشور مأمور رسیدگی به علل درماندگی نسبی صنایع آمریکا شد. یکی از نقایصی که این کمیسیون در مورد صنایع آمریکا پیدا کرد، نوع مدیریت در آن کشور است. در آمریکا، مدیریت تاحد زیادی یك علم یا فن مستقل از محصول به شمار می آید و آرزوی هر مدیری این است که با اثبات سریع شایستگی خود هرچه زودتر تغییر شغل دهد و به پستهای مدیریت سازمانهای بزرگ و بزرگتر برسد. مثلاً ممکن است یك نفر از مدیریت مؤسسهٔ جوجه‌کشی به مدیریت کارخانهٔ کفش سازی و سپس به مدیریت کمپانی هواپیماسازی برسد. چیزی که مطرح نیست، دلبستگی به محصول مؤسسه است. برعکس در ژاپن مدیران نسبت به محصول مؤسسهٔ خود، شناخت و حتی احساس عاطفی دارند. معمولاً تمام عمر حرفه‌ای یك مدیر در یك شرکت یا دست کم در یك صنعت طی می شود و این دلبستگی و پیوند درازمدت مانع از تصمیم گیریهای بی ربط و نمایشی و کارنامه پرکن می شود. ظاهراً در دستگاههای علمی ما هم تعدادی مدیر پرتحرك و علاقه‌مند به اِعمال مدیریت هستند که هیچ نوع شناخت، یا احساس عاطفی نسبت به موضوع مدیریت خود ندارند.

گفتیم حالا داریم می فهمیم که بعضی از بخشنامه‌های نبوغ آمیز از کجا سرچشمه می گیرند. مثلاً گفته می شود که به دنبالِ از هم پاشیده شدن همسایهٔ شمالی، بیش از سی هیأت رسمی برای بررسی نحوهٔ استفاده از نیروی عظیم انسانی محقق و دانشگاهی آن دیار از کشورمان به آنجا سفر کرده‌اند. نتیجه چه شده است؟ صدور بخشنامه‌ای ازسوی وزارتخانه که برای هر دانشگاه، یك یا چند جمهوری شمالی را برای مبادلات علمی تعیین کرده است! این همان مدیریت مستقل از محصول است که می گویید. چه چیزی از این بهتر که به جای رفتن از این مغازه به آن مغازه برای خرید نخود و لو بیا، از اول بقالی حسن آقا را برای منطقهٔ شما تعیین کنند. رابطهٔ تحقیقاتی هم همین طور است: دانشگاه شما بهتر است با قرقیزستان مبادلهٔ علمی کند، کارتان نباشد که محقق مورد نظر شما در ازبکستان است.

پرسیدیم در مورد این ویروس خرید متمرکز که به جان وزارتخانهٔ ما افتاده است چه می گویی؟ ریز کامپیوتر برای استادها، کتاب از سنگاپور، سیستم کامپیوتری کتابخانه براساس یك طرح منسوخ بیست سال پیش یونسکو، سیستم کامپیوتری حقوق و دستمزد،... همه یکنواخت و از جایی که وزارتخانه تعیین می کند.

گفت انشاءالله که این هم یك عارضهٔ مدیریتِ مستقل از محصول است. خیلیها در وزارتخانهٔ شما شناختی از محصول ندارند، وزارتخانه هم فقیر است، بنابراین، تنها راه اثبات شایستگی در مدیریت، تطبیق دادن محصول و ابوابجمعی با تخصصهای مدیریت است.

در این موقع دوستمان که متوجه شده بود کاسهٔ داغتر از آش شده است، گفت چرا اصلاً دربارهٔ خوبیهای وزارتخانه صحبت نمی کنید، مگر نمی شود حرف خوبی درباره‌اش گفت؟

گفتیم چرا، اخیراً وزارتخانه به خاطر رسالت خود در اشاعهٔ فرهنگ، فهرستی از غلطهای مصطلح در نثر معاصر را همراه با جانشینهای درست آنها برای استفادهٔ سازمانهای متبوع خود بخشنامه کرده است.

گفت تشویقشان کنید که چند هزار نسخه از کتاب *غلط ننویسیم* ابوالحسن نجفی را به طور متمرکز خریداری کنند و در اختیار سازمانها و دانشگاهها قرار دهند.

ناگهان یادمان آمد که مدتی است دنبال موضوع مناسبی برای سرمقالهٔ این شمارهٔ مجله می گردیم. پیشنهاد کردیم همین گفتگو را به عنوان سرمقاله نقل کنیم.

دوستمان یکه خورد و گفت این مطالب ممکن است نوعی طنز تلقی شود و برای مجلهٔ شما که معمولاً سرمقاله‌های جدّی چاپ می کند، نابجاست.

گفتیم اتفاقاً خیلی هم بجاست چون با توجه به موفقیت مالی *گل آقا* و دست تنگیهای مرکز نشر، شاید راه نجات این سازمان چاپ مقاله‌های فکاهی باشد.

هیأت ویراستاران

رشد ریاضیات در جهان سوم: تجربهٔ برزیل

ژاکوب پلیس(Jacob Palis) از ریاضیدانان سرشناس بین‌المللی است که اهل برزیل است و در دو دههٔ اخیر نقش فعالی در توسعهٔ ریاضیات در برزیل ایفا کرده است. پلیس در حال حاضر در مؤسسهٔ ریاضیات محض وکاربردی (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) برزیل (که به ایمپا معروف است) به کارهای آموزشی و پژوهشی مشغول است و علاوه بر آن دبیر اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان نیز هست.

گفتگوی زیر به سفارش نشر ریاضی توسط آقای یحیی تابش در شهریور ۱۳۷۰ در مرکز بین‌المللی فیزیک نظری (تریست ـ ایتالیا) با پلیس به عمل آمده و در آن پیرامون سیر تکاملی ریاضیات در برزیل و تجربه‌های برزیلیها در این زمینه صحبت شده است.

• با تشکر از شما آقای دکتر پلیس که در این مصاحبه شرکت کردید، لطفاً تاریخچهٔ مختصری از سیر پیشرفت ریاضیات معاصر در برزیل بیان بفرمایید تا بعداً سؤالهای دیگر را مطرح کنیم.

پلیس: باه، می‌توانم بگویم که از عمر ریاضیات جدید در برزیل مدت زیادی نمی‌گذرد. در اواخر قرن گذشته و اوایل قرن اخیر چند نفری نسبتاً معروف به ریاضیات عالی پرداختند که عمدتاً تحصیلکردهٔ فرانسه بودند، ولی سازماندهی نوین آموزش و پژوهش از دههٔ ۳۰ قرن بیستم شروع شد. در این سالها نخستین دانشگاهها در برزیل تأسیس شد و عده‌ای استاد خارجی هم برای تدریس در آن دانشگاهها دعوت شدند و در همین تاریخ بود که دانشگاه سن پائولو که شاید مهمترین دانشگاه برزیل محسوب شود و همین طور دانشگاه برزیل در ریودوژانیرو راه افتادند. البته بخشهایی از این دانشگاهها به صورت مدارس عالی از قبل موجود بودند که به یک مجموعهٔ دانشگاهی تبدیل شدند و در همین سالها دانشکدهٔ علوم که مشتمل بر فلسفه هم بود در این دو دانشگاه تأسیس شد و عده‌ای استاد خارجی به ویژه استادهای ایتالیایی نخستین اساتید آنجا بودند. با ایجاد این دانشگاهها، فعالیتهایی شروع شد ولی در دههٔ چهل درست بعد از جنگ بود که عده‌ای از ریاضیدانان صاحب نام فرانسوی به عنوان استاد مدعو به برزیل آمدند. در بین اینها مثلاً می‌توانم از آندره ویل نام ببرم که دو سال آنجا بود و شوارتس که یک سال ماند و گروتندیک و دیودونه که او هم حدود یک سال ماند و ژرژ ریب، و خلاصه گروه خیلی جالبی آنجا جمع شدند.

• حضور این قبیل افراد در برزیل خیلی جالب است ولی دلیل واقعی جاذبهٔ برزیل برای آنها که باعث می‌شده برای اقامتهای یک و دو ساله به آنجا بیایند چه چیزی بود؟

پلیس: برای من هم دلیل واقعی کاملاً روشن نیست ولی به نظر می‌رسد که شرایط نامساعد زندگی و اشتغال در اروپا بر اثر جنگ و اینکه آمریکای جنوبی جای امنی محسوب می‌شد و دنیای تازه‌ای بود، می‌تواند یکی از دلایل باشد. به هر تقدیر، این افراد تأثیر بسیار مثبت و سازنده‌ای روی محیط گذاشتند هر چند که می‌توانم بگویم زمینهٔ کافی هم برای استفادهٔ کامل از این افراد وجود نداشت و واقعاً می‌شد خیلی بیشتر از آنها استفاده کرد. شاید کسی که بیش از همه از وجود اینها استفاده کرد ناخبین(L. Nachbin) بود. در آن موقع یک فرد برزیلی ارشدتر به نام گاما هم بود که هم ریاضیدان بود و هم در رشتهٔ نجوم کار می‌کرد. او برای خودش گروهی گرد آورده بود و به کارهای پژوهشی مشغول بود. پشوتو(Peixoto) و ناخبین را هم می‌توان جزو همین گروه محسوب کرد. این فعالیتها در مجموع اولین نطفه‌های کارهای پژوهشی را شکل داد. در اینجا صحبت از اوایل دههٔ پنجاه است. در این سالها انجمن ملی تحقیقات برزیل ایجاد شد که البته تشکیل آن عمدتاً به خاطر اهمیتی بود که فیزیک در برزیل پیدا کرده بود. یک فیزیکدان جوان برزیلی در انگلستان کارهای مهمی انجام داده بود و مشهور شده بود. او به برزیل برگشته بود و نظرها را خیلی به خود جلب کرده بود و در این شرایط انجمن ملی تحقیقات شکل گرفت که بیشتر به تحقیقات در زمینهٔ فیزیک توجه داشت ولی در دلِ این انجمن، نهادهای دیگری نیز تشکیل شدند، مثل نهادهایی برای پژوهش در ریاضیات، زیست شناسی، و غیره. از این نهادها دانشگاهها هم سود می‌بردند و به این ترتیب محلی برای کارهای تحقیقاتی به وجود آمده بود که می‌توانست برای دانشگاهها الگو باشد. اول از همه تشکیلات فیزیکدانها شکل گرفت و بعد مؤسسهٔ ریاضیات محض وکاربردی(ایمپا) به راه افتاد. حالا که به گذشته نگاه می‌کنیم به نظر می‌آید شروع کار آسان بوده است. برای کار ریاضی فقط اتاق و تخته سیاه و گچ می‌خواهیم. به هر صورت، ایمپا در سال ۱۹۵۲ تشکیل شد و اولین رئیس آن گاما بود. گاما با اینکه اشتغالات زیادی داشت بیشتر وقت خود را صرف تحقیقات می‌کرد. ایمپا در اوایل کار فقط یک اتاق داشت که در همان مؤسسهٔ فیزیک واقع بود و در آغاز بجز گاما دو پژوهشگر داشت که همان ناخبین و پشوتو بودند. البته اینها از مؤسسه مستمری دریافت نمی‌کردند بلکه جزو کادر دانشگاه فدرال بودند که بعداً به دانشگاه ریودوژانیرو تبدیل شد. در برزیل، هر ایالت یک دانشگاه دولتی دارد بجز سن پائولو که در واقع سه دانشگاه دولتی دارد. بعداً لیما(Lima) که توپولوژیدان خیلی خوبی است و دکتریش را از شیکاگو گرفته بود به ایمپا پیوست. حالا هنوز هم ایمپا خیلی کوچک بود و فقط سه نفر کادر داشت ولی کم‌کم تعداد بیشتری دانشجو به آنجا جذب شدند. یکی از اینها دوکارمو (do Carmo) بود که کارش را در ایمپا شروع کرد ولی بعد به برکلی رفت و تحت نظر چرن ادامه داد. دیگری پائولو ریبنبویم(Ribenboim) بود که به نظریهٔ اعداد و به خصوص قضیهٔ آخر فرما علاقه داشت و مدتی است به کانادا مهاجرت کرده است. ولی به هر صورت، ایمپا هنوز هم مرکز کوچکی بود. در این اوان، انجمن ملی تحقیقات، ساختمان جداگانه‌ای که در واقع یک خانهٔ مسکونی بود برای ایمپا تهیه کرد که زیاد هم از همان مرکز تحقیقات فیزیک فاصله نداشت. من از سال ۱۹۶۱ که تازه تحصیلات دانشگاهی خود را شروع کرده بودم با ایمپا آشنا شدم و در اطراف آن به اصطلاح می‌پلکیدم و در آنجا در درسهایی که گذاشته می‌شد شرکت می‌کردم. محل ایمپا یک خانهٔ

مسکونی کوچک دو طبقه بود. تنها اتاق سخنرانی آن حدوداً سی نفر گنجایش داشت.

• در آن موقع چه درسهایی در ایمپا ارائه می‌شد؟ آیا این درسها برای برنامهٔ آموزشی خاصی، مثلاً دکتری، یا کارشناسی ارشد بود؟

پلیس: البته نوع درسها به تعداد اندک استادهایی که آنجا بودند بستگی داشت. مثلاً ناخبین خیلی فعال بود و پشوتو تازه شروع کرده بود و البته لیما هم بود و ریبنیویم هم تا حدی فعالیت داشت. اینها در زمینه‌های مورد علاقهٔ خود درسهایی ارائه می‌کردند. لیما توپولوژی جبری را مطرح کرده بود و بعد به توپولوژی دیفرانسیل و تا حدودی به سیستمهای دینامیکی پرداخت. اینها زیاد به سفر می‌رفتند و تحقیقاتشان تا حدود زیادی در خارج انجام می‌گرفت. البته هنوز ایمپا دانشجوی ثابت نداشت و این درسهایی که ارائه می‌شد در واقع برنامه‌های پراکنده‌ای بود و برای درجهٔ دانشگاهی خاصی نبود. فقط افراد را آماده می‌کرد که برای ادامهٔ تحصیل به خارج از کشور بروند و در موارد اندکی آدمهایی آنجا می‌ماندند که مثلاً تز خود را برای یک دانشگاه دیگر آماده کنند. به هر صورت، کار این گونه شروع شد و جلو رفت. واقعهٔ مهم آن سالها این بود که در سال ۱۹۶۰ لیما در شیکاگو با اسمیل آشنا شده بود. اسمیل جوان در آن موقع در شیکاگو مربی بود. بعداً لیما اسمیل را به پشوتو معرفی کرد. اسمیل و پشوتو کارهایی در زمینهٔ مشترک انجام دادند و بعد پشوتو و لیما از اسمیل دعوت کردند که به برزیل بیاید. او به ایمپا آمد و شش ماهی در آنجا ماند. در مدت اقامت در برزیل بود که اسمیل حدس پوانکاره برای ابعاد بالا را ثابت کرد و نامهٔ جالبی از لوینسون (Levinson) دریافت کرد که در آن لوینسون به اسمیل تذکر داده بود که آنچه امروز سیستمهای مرس ـ اسمیل می‌نامیم، در فضای سیستمهای دینامیکی چگال نیستند، و همین بود که موجب شد اسمیل موضوع نعل اسب معروف را ابداع کند. خوب، این وجود اسمیل در آنجا واقعهٔ مهمی بود و تأثیرات اساسی داشت. واقعهٔ دیگری که آن را هم می‌توان مهم دانست رو آوردن عدهٔ زیادی از دانشجویان رشته‌های مهندسی به رشتهٔ ریاضی و جذب آنها به ایمپا بود. می‌توانم بگویم به غیر از لیما بقیهٔ شروع کننده‌ها از رشته‌های مهندسی آمده بودند، حتی ناخبین و پشوتو، و این جریان امروز هم تا حدی ادامه دارد. در آن دوره هر کسی که ریاضیات و فیزیکش خوب بود به رشته‌های مهندسی می‌رفت و هر که به زیست شناسی علاقه داشت پزشکی می‌خواند و بقیه هم دنبال رشتهٔ حقوق بودند. این وضعیت تا حدی عوض شده است ولی نه زیاد. البته هنوز هم رشته‌های مهندسی و پزشکی جاذبه دارند و در کنار آنها رشته‌های انفورماتیک و اقتصاد هم ـ شاید به خاطر بحران اقتصادی دههٔ اخیر در برزیل ـ جاذبه پیدا کرده‌اند و داوطلبان تحصیل در رشته‌های علوم پایه هر چند جزء ضعیفترین دانشجویان نیستند ولی جزو بهترینها هم نیستند. ولی به هر ترتیب، خوشبختانه تعدادی، هر چند کم، از دانشجویان بسیار با استعداد را همه ساله جذب رشتهٔ ریاضی می‌کنیم که عده‌ای از آنها مستقیم به رشتهٔ ریاضی می‌آیند و عده‌ای هم از رشته‌های مهندسی جذب ریاضی می‌شوند.

• شما خودتان هم اول در رشتهٔ مهندسی بودید؟

پلیس: بله، من هم اول رفته بودم به دانشکدهٔ مهندسی ولی بعضیها به من گفتند که استعداد ریاضی دارم و پیشنهاد کردند که در دانشکدهٔ فلسفه و علوم ادامهٔ تحصیل دهم؛ اول فکر کردم اگر این کار را بکنم، ناچار باید دبیر دبیرستان شوم که از آن کار زیاد خوشم نمی‌آمد و فکر می‌کردم ریاضیات در سطوح عالیش باید در دانشکدهٔ مهندسی مطرح شود. به هر تقدیر در سال ۱۹۵۸ وارد دانشگاه شدم و در دانشکدهٔ مهندسی شروع به تحصیل کردم. سال اول دانشگاه که درسهای ریاضی و فیزیک مطرح می‌شد، برایم جالب بود ولی از سال دوم که درسهای مهندسی مطرح شد، هر چند به اصطلاح شاگرد اول بودم، ولی شده بودم اسباب دردسر استادها چون می‌خواستم همه چیز را خیلی بنیادی و بر مبنای تئوریک یاد بگیرم و می‌دانید که روح درسهای مهندسی این طور نیست. لذا تصمیم به تغییر رشته گرفتم. اول از همه به طور جدی فیزیک را برای ادامهٔ تحصیل در نظر گرفته بودم و خوب، یکی از دلایلش وجود مرکز تحقیقات فیزیک بود که در آن سالها (اوایل سالهای ۶۰) در اوج رونقش بود و فیزیکدانهای بنام نظیر فاینمن در آنجا حضور داشتند و اصولاً فیزیکدانهای برزیلی در آن سالها خیلی مشهورتر از ریاضیدانها بودند. ولی شاید دلیل واقعیش نوعی بینش مهندسی بود که در من القا شده بود. به هر تقدیر، من کم‌کم با ایمپا آشنا شدم و شروع کردم به گرفتن درسهایی در آنجا، در عین حال، دانشجوی مهندسی هم بودم. از درسهایی که با لیما گذراندم خیلی چیزها یاد گرفتم. در سال آخر دورهٔ مهندسی که پنجساله بود، تصمیم گرفتم به رشتهٔ ریاضی بروم ولی تکمیل دورهٔ مهندسی و دریافت مدرک از آنجا برایم سهلتر و سریعتر بود و دپارتمان ریاضی در دانشگاه هم آنقدرها وسیع و سازمان یافته نبود، لذا به همان تحصیل رسمی در رشتهٔ مهندسی و گرفتن دروس در ایمپا ادامه دادم. چند تا درس بسیار جالب با لیما گذراندم، دو تا با پشوتو و درسهای دیگری نظیر جبر و غیره. بعد از آن تصمیم به ادامهٔ تحصیل در رشتهٔ ریاضی در ایالات متحده گرفتم، هر چند که آیندهٔ «ریاضیدان حرفه‌ای بودن» در برزیل برایم روشن نبود. در موقع انتخاب محل تحصیل در ایالات متحده، چون وصف اسمیل را از لیما و پشوتو شنیده بودم فکر کردم بروم در جوار کسی که به هر صورت یک ریاضیدان مشهور است، کار را شروع کنم. در آن موقع یعنی سال ۱۹۶۳ اسمیل در دانشگاه کلمبیا بود. لذا من هم می‌خواستم به کلمبیا بروم ولی درست یک ماه قبل از رفتن من به ایالات متحده، اسمیل از کلمبیا به برکلی رفت و ترتیب انتقال مرا هم داد و من به جای نیویورک به کالیفرنیا رفتم. پاییز ۱۹۶۴ بود. اگر بخواهیم نظری هم به ایمپا در آن سال بیندازیم، باید بگویم که هنوز مرکز بسیار کوچکی بود، تعدادی دانشجو داشت ولی کادر آن خیلی کم بود که بیشتر هم در رفت و آمد با خارج بودند. پشوتو به دانشگاه براون و ناخبین به راچستر رفته بود، لیما هم اول به دانشگاه برازیلیا که دانشگاه تازه تأسیسی بود، منتقل شده بود و بعداً آنجا را ترک کرد و به آمریکا رفت. به هر صورت این تصویری از اوضاع در آن هنگام است. نکتهٔ اصلی که باید به آن اشاره کنم این است که توسعهٔ ریاضیات، فرایندی نیست که نقطهٔ تعادل و ایستایی داشته باشد. برنامهٔ دکتری ریاضی از سال ۱۹۶۳ در دانشگاه ریودوژانیرو شروع شده بود ولی کار به گونه‌ای هموار و پیوسته پیش نمی‌رفت. مثلاً سوتومایر (Sotomayer) و کوپکا (Kupka) دکتریشان را با پشوتو گرفتند که ریاضیدان صاحب نامی بود ولی مسألهٔ اساسی این بود که یک تشکیلات سازمان یافته و به اصطلاح «نهادی شده» به وجود نیامده بود. البته نمی‌خواهم بگویم که مثلاً کار نادرستی در جریان بود، به هیچ وجه، چون بالاخره باید از یک جایی شروع کرد.

• شما به عنوان دانشجوی دکتری، به برکلی رفتید؟

پلیس: بله من از پاییز ۱۹۶۴ تا پاییز ۱۹۶۷ دانشجوی دکتری در برکلی بودم. این دوره برای من تجربهٔ بسیار گرانقدری بود و تأثیر عمیقی بر من

گذاشت.در همین سالها شهشهانی هم در برکلی بود.البته او بعد از من شروع کرد ولی برای مدتی همکار و همدرس بودیم.این ایام، ایام هیجان انگیزی هم بود.دوره‌ای بودکه جنبش سیاسی دانشجویی به راه افتاده بود و سه ماه بعد از آنکه به برکلی رفتم اعتصاب شروع شد.در برزیل اعتصاب چیز عجیبی نبود ولی در ایالات متحده برایم عجیب بود.اسمیل هم در این جریان خیلی فعال بود و مدتی بعد هم در نهضتی که علیه جنگ ویتنام به راه افتاد، خیلی فعالیت می‌کرد.

• شما از اول شاگرد اسمیل بودید؟

پلیس: بله من از اول با اسمیل کار را شروع کردم، و البته شروع کردم به گرفتن درسهایی که در برزیل اصلاً با آنها آشنا نشده بودم، مثل نظریهٔ اندازه.ولی خوب با بعضی از درسها هم آشنایی زیادی داشتم.برنامهٔ تحصیلی من خیلی غیرعادی بود.در بدو ورود یک سمینار سیستمهای دینامیکی گرفتم که اسمیل با چارلز پیو(Pugh) آن را راه انداخته بودند و البته درسهای دیگری هم داشتم.خلاصه، در برکلی هم خیلی آزادانه درس می‌گرفتم و چندان توجهی به اینکه برای دریافت مدرک چه درسهایی باید گرفت و غیره، نداشتم و بیشتر برایم لذت ریاضی خواندن به عنوان یک فعالیت فکری مطرح بود و نگران آینده هم نبودم چون بالاخره مدرک مهندسی داشتم و می‌توانستم کاری پیدا کنم.البته متوجه شدم که این طرز فکر و شیوهٔ کار، همگانی نمی‌تواند باشد ولی خوب من از این وضعیت خوشحال بودم.مثلاً می‌گفتند که اسمیل تا کنون دانشجویی نداشته است و کارکردن با او، نوعی خطر کردن است ولی برای من انجام دادن کاری جالب در ریاضیات، مهمترین چیز بود و به چیز دیگری فکر نمی‌کردم.این گونه آزاداندیشی برای من ثمرات زیادی داشت.تجربهٔ کار با اسمیل هم خیلی ارزشمند بود، اسمیل هیچ وقت وارد جزئیات نمی‌شد و می‌توانم بگویم که در واقع موضوع تزم را خودم انتخاب کردم و اسمیل فقط نظرهایی کلّی راجع به آن موضوع ارائه کرد.و من از این طرز کار خیلی خوشم می‌آمد که او فقط به کلیات می‌پرداخت و به جزئیات کاری نداشت .

• اسمیل در چه سالی مدال فیلدز گرفت؟

پلیس: اسمیل در ۱۹۶۶ مدال فیلدز گرفت و در آن هنگام من، مایکل شوب (Shub) و نانسی کوپل(Kopell) شاگرد او بودیم.در پاییز ۶۶ او شش ماهی در برکلی نبود.البته ما خودمان سمینارهایی ترتیب می‌دادیم.اسمیل پس از بازگشت به برکلی بیشتر مورد توجه قرارگرفت، شاید به خاطر دریافت مدال و شاید هم به خاطر فعالیتهایش در نهضت ضد جنگ.اوایل سال ۶۷ بود که او سمینارهایی ترتیب داد.عده زیادی در سمینارهای او شرکت می‌کردند و دانشجویان زیادی مایل به کارکردن با او بودند.و این سال، آخرین سال تحصیل من در برکلی بود که برایم سال بسیار پر هیجانی بود.باید اضافه کنم که به خاطر وجود چرن در برکلی، مکتب هندسه نیز در آنجا خیلی فعال بود و تارسکی هم در منطق کار می‌کرد و ریاضیدانان مشهوردیگری هم بودند و کلاً محیط ریاضی خیلی خوبی در برکلی وجود داشت و برای من هم خیلی جالب بود که در ابداع نظریهٔ هذلولوی(hyperbolic theory) مشارکت مستقیم داشتم.من در پاییز ۱۹۶۷ کار خودم را تمام کردم و مدرک دکتری را گرفتم و نتایجی که به دست آوردم، پایداری دستگاه مورس ـ اسمیل نامیده شد.در ابتدا من و اسمیل در مورد پایداری ساختاری ابعاد بالاتر با هم اختلاف نظر داشتیم.من سعی می‌کردم آن را ثابت کنم و اسمیل سعی می‌کرد مثال ناقضی برایش پیدا کند.اما بعد در صدد برآمد آن را اثبات کند و بالاخره مشترکاً این کار را به انجام رساندیم.باید از کارهای موزر (Moser) هم در آن دوره اسم ببرم که جالب توجه بود. من با موزر هم در زمینهٔ کارهای مختلف تبادل نظر می‌کردم و در مجموع دورهٔ بسیار هیجان انگیزی بود.

• بعد از دریافت درجهٔ دکتری، چه کار کردید؟

پلیس: مایکل شوب به نظرم به ام.آی.تی رفت، نانسی درست یادم نیست که کجا رفت، فکر می‌کنم به دانشگاهی در بستن رفت.من موقتاً به دانشگاه براون رفتم ولی دیدارهایی از جاهای دیگر نظیر ام.آی.تی و برندایس و دانشگاههای دیگر هم داشتم که سمینارهای مشترک و غیره تشکیل می‌دادیم.بعد از آن برای مدت شش ماه به برکلی برگشتم و درکنفرانس بزرگ سیستمهای دینامیکی و هندسه که تحت عنوان آنالیز سراسری(global analysis) در جولای ۱۹۶۸ در برکلی برگزار شد نیز شرکت کردم.در آن وقت تصمیم داشتم به برزیل برگردم ولی این دوره برای پروراندن ایده‌هایی که داشتم بسیار مهم بود.

• چطور شد که تصمیم گرفتید به برزیل برگردید، اقامت در ایالات متحده برای شما جاذبه‌ای نداشت؟

پلیس: البته برای من هم امکان اقامت و پیدا کردن کار دائمی در آمریکا وجود داشت ولی دو نکتهٔ اساسی باعث شد که به برزیل برگردم. اول اینکه یک برنامهٔ دکتریِ نهادی شده در برزیل در جریان بود و دوم و شاید مهمتر از همه، این بود که کار پژوهشی در برزیل نوعی چالش محسوب می‌شد.به خاطر می‌آورم که دوکارمو هم در آن ایام برای شرکت در یک برنامهٔ بعد از دکتری در برکلی بود و لیما هم به عنوان استاد دیداری در آنجا بود.ما سه نفری خیلی در این مورد با همدیگر بحث و گفتگو می‌کردیم و من به این نتیجه رسیدم که چالش واقعی انجام کار پژوهشی و ایجاد مکتبهای تحقیقاتی در برزیل است.ممکن بود که در ایالات متحده ریاضیدان خوبی بشوم ولی کار در برزیل، احساس رضایت بیشتری به همراه داشت.به هر صورت من با دیدگاه کاملاً روشنی رهسپار برزیل شدم.البته کاملاً واضح است که تنها تصمیم شخصی برای موفقیت در این راه کافی نیست و حمایت و پشتیبانی و ایجاد شرایط مناسب از طرف کارگزاران دولتی ضرورت دارد.خوشبختانه در آن موقع دولت برزیل تصمیم به سرمایه‌گذاری در پژوهش در علوم پایه گرفته بود چون به این نتیجه رسیده بود که این سرمایه‌گذاری، کاری بنیادی و آینده نگرانه است که بالمآل در فرایند توسعهٔ کشور ـ حتی توسعهٔ اقتصادی ـ بازده خواهد داشت و در این شرایط، با اینکه از نظر سیاسی دوران ناخوشایند دیکتاتوری ژنرالها را می‌گذراندیم، امکانات بسیار خوبی در اختیار ایما گذاشته شده بود و در نتیجه شرایطی فراهم شده بود که خیلی از ریاضیدانان برزیلی که در خارج از کشور بودند به برزیل بازگشتند.از میان اینها می‌توانم از پشوتو، لیما، و دوکارمو و فیگنردو(Figneredo) نام ببرم.ساختار تازه‌ای به وجود آمد و تشکیلات جدیدی شروع به کارکرد تا خیلی حرفه‌ای تر به کار ریاضی پرداخته شود.سال ۱۹۶۸ بود.

• رابطهٔ بین لفشتز و پشوتو چگونه بود؟اصولا لفشتز چه نقشی در رشد ریاضیات در آمریکای لاتین ایفا کرد؟

پلیس: لفشتز روی پشوتو خیلی تأثیر گذاشته بود و از او خیلی حمایت کرده بود ولی بر ریاضیات برزیل تأثیر غیرمستقیمی داشت.او بیشتر روی مکزیکیها به طور مستقیم اثر گذاشته بود چون همه ساله از مکزیک دیدار می‌کرد ولی هیچ وقت به برزیل نیامد (اقلاً تا جایی که من به یاد دارم) ولی مطمئناً

تأثیرات غیرمستقیمی داشته است.گذشته از اینها، او بدون تردید آدم برجسته و مهمی بود که در موضوع سیستمهای دینامیکی در غرب از پیشگامان محسوب می‌شود.

• خوب به ایمپا در سال ۱۹۶۸ باز گردیم.

پلیس: بله من سال ۶۸ به برزیل رفتم ولی مدت زیادی نماندم و برای یک کنفرانس به دانشگاه واریک در انگلستان رفتم و مدتی حدود هشت ماه دراروپا اقامت کردم که بیشتر در واریک بودم و نیز در مؤسسهٔ مطالعات عالی درپاریس.بعد از آن با دید روشنتر و انگیزه‌های بیشتری به برزیل بازگشتم و بعد از مدتی به کمک ایما یک سمینار سیستمهای دینامیکی راه انداختیم.دوکارمو نیز در همان ایام آمد و او هم یک سمینار در هندسه راه انداخت.می‌توانم بگویم دورهٔ جدیدی درایمپا شروع شد و ما به آن سمت پیش رفتیم که برنامهٔ دکتری را هر چه بیشتر مدون و نهادی کنیم.کمکهای ایما دراین زمینه خیلی مؤثر بود.به طور رسمیتری شروع به گرفتن دانشجو برای دورهٔ کارشناسی ارشد و دکتری کردیم.البته بحثهای زیادی در این مورد داشتیم که دانشجو هم بگیریم یعنی برنامه‌های آموزشی هم داشته باشیم یا فقط به کار تحقیق مشغول شویم.ولی خیلی سریع مشخص شد که باید دانشجو هم داشته باشیم چون واقعاً وجود نیروهای جوان در چنین برنامه‌هایی بسیار ضروری است وگذشته از آن در کشوری مثل برزیل، وجود یک مرکز صرفاًتحقیقاتی به سادگی هم توجیه پذیر نبود.خلاصه، به این ترتیب شروع کردیم و بعد از آن توانستیم بودجه‌های بیشتری جذب کنیم و استادان مدعو داشته باشیم و غیره.در سال ۱۹۷۰ سمینار سیستمهای دینامیکی را برگزارکردیم و در آن من خودم شخصاً خیلی کارکردم.البته هنوز درسنامهٔ درست و حسابی نداشتیم.تعدادی مجله و تعدادی هم کتابهای قدیمی داشتیم و در این شرایط کارکردن چندان هم ساده نبود.البته توانستیم تعدادی استاد مدعو داشته باشیم که در بعضی موارد خیلی مفید بودند، از جمله، عده‌ای از دانشجویان سابق برکلی را به ایمپا دعوت کردیم.بعد از تقریباً یک سال و نیم، دانشجوها شروع به ارائهٔ نتایج اصیلی کردند که برای ما دستاورد بسیار ارزشمندی بود.در اواخر سال ۱۹۷۱ یک گردهمایی وسیع در برزیل تشکیل دادیم که از نظر بعضی از مدعوین، از لحاظ سیاسی مشکوک بود.آنها تصور می‌کردند رژیم نظامی پول فراوانی در اختیار ما گذاشته است تا تصویر مطلوبی از حکومت آنها ترسیم شود ولی در واقع، مخارج کنفرانس ما از منابع خصوصی غیرنظامی تأمین شده بود.به هرحال کنفرانس بسیار موفقی داشتیم که گزارش آن در دست است و بین اسامی شرکت کنندگان آن ریاضیدانان سرشناسی را می‌بینیم.ولی نکتهٔ مهم این بود که چون ما توانسته بودیم از مدتی قبل در دانشجویان آمادگی کافی ایجاد کنیم، یعنی سمیناری که از سال ۱۹۷۰ برگزاری آن را شروع کردیم در واقع به این کنفرانس منتهی شده بود، لذا دانشجویان و همهٔ ما توانستیم از این کنفرانس استفاده‌های زیادی ببریم.در حاشیه، خاطره‌ای هم برایتان بگویم.در همان زمان بود که نامهٔ عجیبی از یک دانشجوی دورهٔ لیسانس از کشور اوروگوئه به نام ریکاردو مانیه(Ricardo Mañe) دریافت کردم همراه با ادعاهای زیاد، ادعای اثبات قضایایی که برخی از آنها هنوز هم ثابت نشده‌اند! ولی من حس کردم این دانشجو باید جوهره‌ای داشته باشد و فوری موافقت کردم که برای شرکت درکنفرانس پذیرفته شود.بعداً او در ایمپا ماند و دکتریش را گرفت و الان یکی از ریاضیدانان برجستهٔ بین‌المللی و یکی از چهره‌های درخشان ایمپاست.باری به اصل مطلب برگردیم.درسال ۱۹۷۳ اولین دکترها از ایمپا فارغ‌التحصیل شدند، فارغ‌التحصیلانی که بسیار موفق بوده‌اند.بعد از آن توانستیم تعدادی استاد خارجی استخدام کنیم و عده‌ای از فارغ‌التحصیلهای برجستهٔ خودمان را هم استخدام کردیم.در حال حاضر، فقط بیست و پنج دانشجوی دکتری در زمینهٔ سیستمهای دینامیکی داریم و حدوداً همین تعداد در رشته‌های دیگر.در مجموع باید بگویم خیلی زودتر از انتظار به نتایج چشمگیری رسیده‌ایم.

• اوضاع فعلی از چه قرار است؟

پلیس: البته الان اوضاع اقتصادی در برزیل خیلی خراب است.تورم زیاد است و طبیعتاً در شرایط نامطلوب اقتصادی همه چیز تحت تأثیر قرار می‌گیرد.ولی هنوز هم تعداد زیادی دانشجوی خیلی خوب داریم که عده‌ای از آنها از کشورهای دیگر آمریکای لاتین آمده‌اند و چند نفری از پرتغال و یک نفر هم از دانمارک آمده‌اند.در اینجا، یک نکتهٔ مهم، داشتن یک سیستم بورس تحصیلی کارامد برای دانشجویان کارشناسی ارشد و دکتری است.

• برزیلیهایی که برای ادامهٔ تحصیل به خارج از کشور می‌روند به برزیل باز می‌گردند،ولی مثلا در مورد ایرانیها می‌بینیم که این طور نیست.به نظر شما دلیلش چیست؟

پلیس: خوب، این مسأله مربوط می‌شود به اوضاع عمومی هر کشور و امکاناتی که در اختیار این تحصیلکردگان قرار داده می‌شود.جالب اینجاست که تقریباً همهٔ برزیلیهایی که در اواخر دههٔ ۶۰ و در دههٔ ۷۰ به خارج رفتند، به برزیل بازگشتند در حالی که در آن زمان جو سیاسی مطلوبی در برزیل حاکم نبود.نکته این بود که شرایط مناسبی برای زندگی این افراد فراهم می‌شد.ولی در حال حاضر، عده‌ای از بورسیه‌های برزیلی که به خارج می‌روند، برنمی‌گردند و دلیل اصلی آن، امکاناتی است که در خارج در اختیار آنها قرار می‌گیرد و امیدهایی است که به آیندهٔ خود در آنجا دارند.برای جوانهایی که تازه برمی‌گردند، احتیاجات زندگی هم به طور جدی مطرح است

و ما سعی می‌کنیم کارگزاران دولتی را مجبور کنیم که در این مورد اقداماتی انجام دهند.

• در برزیل، نهادهای رسمی در کار آموزش و پژوهش چگونه عمل می‌کنند؟ در آنجا وزارت آموزش عالی دارید؟

پلیس: نه، در برزیل یک وزارت آموزش داریم که تمامی نظام آموزش مشتمل بر دانشگاهها تحت نظر آن است و یک شورای علوم و تحقیقات هم در آن وجود دارد؛ ولی یک انجمن ملی تحقیقات هم هست که مستقل عمل می‌کند.

• در وظایف این نهادها تداخل ایجاد نمی‌شود؟

پلیس: البته فکر می‌کنم تفکیک وظایف خیلی مهم است. باید بورسهای تحصیلی و پشتیبانی از تحقیقات و غیره را به نوعی رده‌بندی کنند و هر کاری وظیفهٔ یک قسمت باشد تا تداخل ایجاد نشود. بعضی وقتها بین این نهادها مسأله‌ای به وجود می‌آید ولی معمولاً با تفاهم با یکدیگر کار می‌کنند. اما به عقیدهٔ من، وجود مراکز متعدد مفید است و جامعهٔ علمی برزیل نیز از این عدم تمرکز دفاع می‌کند. مثلاً سمت وزارت آموزش یک سمت کاملاً سیاسی است و بعضی وقتها یک سیاستمدار عهده‌دار این سمت می‌شود که با مسائل علمی و تحقیقاتی بیگانه است. در این مواقع، کمک انجمن ملّی تحقیقات مؤثر واقع می‌شود. به هر صورت تفکیک اهداف و وظایف نهادهای مختلف ضروری است. سالهای هفتاد و نیمهٔ اول دههٔ هشتاد سالهای خیلی خوبی بودند و سرمایه‌گذاری مطلوب در کارهای علمی و تحقیقاتی می‌شد ولی چند سالی است به خاطر بحران اقتصادی دشواریهایی به وجود آمده است. البته هنوز هم سالانه در حدود ۱۵۰۰ نفر برای ادامهٔ تحصیل به خارج فرستاده می‌شوند و در داخل هم کارها با سرعت مناسب پیش می‌رود و به طور متوسط سالانه ۱۰ دکتر ریاضی از ایمپا بیرون می‌آیند ولی الان واقعاً امکانات کافی به آنها ارائه نمی‌شود، نه تنها امکانات مادی بلکه امیدواری زیادی هم نمی‌توانیم به آنها بدهیم. ولی من خودم از آدمهایی هستم که فکر می‌کنم هیچگاه نباید تسلیم شد و همیشه سعی می‌کنم امید را در خودم زنده نگاه دارم. البته الان بورسهای بعد از دکتری خوبی در ایمپا برقرار کرده‌ایم ولی در مجموع اشکالاتی در مورد کاریابی وجود دارد. در حال حاضر فقط هفت دهم درصد از درامد ملّی برزیل صرف تحقیق و توسعه می‌شود که به نظر ما این رقم باید به دو درصد برسد.

• آیا در دانشگاههای دیگری هم دورهٔ دکتری ریاضی برقرار است؟

پلیس: بله در چند دانشگاه دیگر هم دورهٔ دکتری ریاضی برقرار است. پنج دانشگاه در حال حاضر این دوره را دارند و در یک محل ششم هم دورهٔ دکتری ریاضی در حال تأسیس است. دورهٔ کارشناسی ارشد ریاضی نیز در ده ـ دوازده تا از دانشگاهها برقرار است.

• ببخشید آقای پلیس، شما را خیلی خسته کردیم ولی سؤالهای دیگری هم داریم. آیا ایجاد دوره‌های کارشناسی ارشد و دکتری در ایمپا موجب تضعیف دانشگاههای برزیل نشد؟

پلیس: بله، این سؤال مهمی است. البته می‌دانید منطق کار در روند توسعهٔ ریاضیات در برزیل تغییر کرده است. تصمیم به ایجاد دورهٔ رسمی آموزشی در سطوح کارشناسی ارشد و دکتری در ایمپا حدود سالهای ۱۹۶۸ و ۱۹۶۹ اتخاذ شد و در آن موقع ما روی کارشناسی ارشد هم تأکید داشتیم چون در آن زمان فقط یک دانشگاه دیگر چنین دوره‌ای داشت و ما می‌خواستیم استانداردهای اصولی ایجاد کنیم و سنّتهای جدیدی به وجود بیاوریم. لذا کار ما یک تحول بزرگ محسوب می‌شد ولی تأکید ما بر دورهٔ کارشناسی ارشد، گذرا بود و هدف دراز مدت تمرکز توجه به دورهٔ دکتری بود. درنتیجه کار ما موجب تقویت برنامه‌ها در مجموع شد و همواره با گذاشتن درسهای آزاد نیز به جذب دانشجو و اشاعهٔ ریاضیات توجه داشته‌ایم. ما همه ساله تعدادی دانشجوی بسیار با استعداد را که تازه وارد دورهٔ کارشناسی شده‌اند جذب می‌کنیم و برای آنها درسهایی ترتیب می‌دهیم. البته سعی می‌کنیم تعدادی دانشجو هم از منطقه آمریکای لاتین جذب کنیم که به آنها هم امکانات مساوی می‌دهیم تا شکوفا شوند. برخی از آنها در برزیل می‌مانند و بعضی دیگر در کشورشان کارهای ریاضی مهمی انجام می‌دهند. در حال حاضر، نیمی از دانشجویان ما غیر برزیلی هستند. در دههٔ ۷۰ این تصمیم مهم گرفته شد که بورسهای تحصیلی (که در حال حاضر تعدادشان ۴۰۰۰۰ است) مستقل از ملیت به دانشجویان داده شود. نوع دیگری از همکاری ما با دانشگاهها در توسعهٔ ریاضیات، واگذاری بورسهای تحصیلی به دانشجویان جوان و مستعد دانشگاههاست و ما واقعاً در سطح کارشناسی ارشد به هیچ وجه با دانشگاهها رقابت نمی‌کنیم بلکه همواره به آنها کمک می‌کنیم. ولی در مورد دورهٔ دکتری فکر می‌کنم ما هنوز نقش اساسی و بنیادی را به عهده داریم. چون دانشگاهها هنوز از قوام و پیشرفت لازم برخوردار نشده‌اند.

• برای تشویق و جذب دانشجویان دورهٔ کارشناسی به رشتهٔ ریاضی و اصولاً آشنا کردن جوانان با ریاضیات، چه می‌کنید؟

پلیس: این کار به برنامه‌های ویژه در سالهای آخر دبیرستان مربوط می‌شود که انجمن ریاضی برزیل در این زمینه فعال است. در برزیل، المپیاد ریاضی دبیرستانی خیلی جدی تلقی می‌شود. همه ساله در هر استان یک المپیاد داخلی برگزار می‌شود و سپس یک المپیاد ملّی داریم که برگزیدگان آنها به المپیاد جهانی و المپیادآمریکای لاتین اعزام می‌شوند. به نظر ما این جریان المپیاد خیلی مهم و سازنده است، صرفنظر از آنکه نتیجهٔ کار تیم در سطح جهانی چه باشد. افراد عضو تیم بدون تردید بسیار با هوش و دارای توانایی تفکر ریاضی هستند و در میان آنها می‌توان علاقه‌مندان جدّی به ادامهٔ تحصیل در رشته ریاضی پیدا کرد. عده‌ای از اعضای سابق تیم المپیاد اکنون در بین همکاران ما هستند. کار دیگری هم که انجام می‌شود انتشار یک مجلهٔ عمومی ریاضی است که مشتمل بر اخبار و گزارشهای ویژه‌ای است که عمدتاً جنبهٔ ترویج و ترغیب دارد و علاوه بر آن مقالاتی در آن درج می‌شود که زمینه‌های مختلف ریاضی را به زبان توصیفی شرح می‌دهد. تا مورد استفادهٔ غیرمتخصصان قرار گیرد. کار دیگری هم که انجام می‌شود برگزاری یک کنفرانس ریاضی هر دو سال یک بار است، که ایمپا آن را ابداع کرد و اکنون به طور مشترک توسط ایمپا و انجمن ریاضی برزیل ترتیب داده می‌شود. این کنفرانس در هر بار، تعدادی از ریاضیدانان مشهور بین‌المللی را دعوت می‌کند تا سخنرانیهای عمومی ارائه کنند و گذشته از آن در کنار کنفرانس برنامه‌های آموزشی ویژه‌ای نیز برگزار می‌گردد. این کلاسهای آموزشی در سه سطح مقدماتی، متوسط، و پیشرفته ترتیب داده می‌شود و مجموعاً ده درس، که به هر کدام پنج جلسه اختصاص دارد، ارائه می‌شود. شرط اساسی تشکیل این کلاسها تدارک درسنامهٔ لازم توسط مدرس مربوطه است. بدون درسنامهٔ

مدون و آماده هیچ کلاسی برگزار نمی‌شود.از این راه، مجموعهٔ ارزشمندی از نوشتارهای ریاضی فراهم می‌آید.این درسنامه‌ها مبنای تألیف کتابهای مختلفی واقع شده است و در سطوح پایین نیز اشاعه دهندهٔ ایده‌های ریاضی و معرفی کنندهٔ زمینه‌های مختلف ریاضیات است.برگزاری این کلاسها تجربهٔ بسیار موفقی بوده که خیلی مورد استقبال جوانها قرار گرفته است.آخرین دفعه‌ای که این کلاسها برگزار شد، حدود هزار دانشجوی جوان در آن شرکت داشتند.به طور کلی در این کنفرانسهای دو سال یک بار، مخاطبان اصلی دانشجویان جوان هستند.به هر صورت، سه کار فوق و اعطای بورسهای تحصیلی به کسانی که در رشتهٔ ریاضی تحصیل می‌کنند، از کارهایی است که برای جذب استعدادهای خوب به رشته ریاضی انجام می‌شود.

• در ایمپا چه نوع تجهیزاتی در اختیار دارید؟

پلیس: ما یک کتابخانهٔ بسیار مجهز داریم.می‌دانید که مسألهٔ کتابخانه تنها مسألهٔ بودجه نیست.بایستی عده‌ای با علاقهٔ بسیار زیاد دنبال تجهیز و روزامد کردن آن باشند.خوشبختانه لیما که الان سرپرستی ایمپا را به عهده دارد به کتابخانهٔ خیلی اهمیت می‌دهد و در واقع کتابخانه مثل فرزندش می‌ماند که به آن عشق می‌ورزد و همه روزه دو ساعت را به امور کتابخانه اختصاص می‌دهد.شما اگر پول زیادی هم داشته باشید ولی کسی با تمرکز و علاقه به کار کتابخانه نپردازد، نتیجهٔ مطلوب حاصل نمی‌شود.البته الان سالانه حدود ۲۵۰۰۰۰ دلار نیز اعتبار در اختیار کتابخانه است که پول کمی نیست.ولی ما همه ساله برای تأمین بودجهٔ کتابخانه باید پیگیریها و می‌توانم بگویم جنگ و جدالهای زیادی انجام دهیم تا بودجهٔ مطلوب در اختیارمان قرار گیرد.در مورد تجهیزات کامپیوتری مورد نیاز، نمی‌شود گفت در بهترین وضعیت ممکن هستیم ولی خوب، امکاناتی در اختیار داریم.تا پنج سال پیش تجهیزاتمان بسیار بدوی و قدیمی بود ولی الان به دو دلیل در حال توسعه و بهتر کردن آنها هستیم.دلیل اصلی، استفاده از کامپیوتر در کارهای علمی است که بسیار با اهمیت است و ما الان به کارهای آنالیز عددی و استفاده از گرافیک، کامپیوتری و غیره نیز خیلی اهمیت می‌دهیم، و دلیل دیگر، استفاده از کامپیوتر برای کارهای خدماتی مانند تایپ مقالات و استفاده‌های دیگری از این قبیل است که کاملاً ضروری است. لذا ما در حال توسعهٔ تجهیزات کامپیوتری و استفاده از ابزارهای پیشرفته هستیم، البته نه به خاطر اینکه پول زیادی در اختیار داریم و صرفاً می‌خواهیم آنها را هزینه کنیم بلکه بنا بر ضرورت و احتیاج اصولی.

• آیا در ایمپا پروژه‌های خدماتی نیز اجرا می‌کنید؟

پلیس: پروژه‌هایی که صرفاً جنبهٔ خدماتی داشته باشد به هیچ وجه، ولی پروژه‌هایی که همراه با این جنبه، کارهای پژوهشی اصیل و علمی در آنها مطرح شود مورد توجه ماست و همیشه متقاضی آنها هستیم، چون از این راه می‌توانیم منابع مالی بیشتری به دست بیاوریم.

• نکتهٔ دیگری، در مورد ایمپا به نظرتان می‌رسد که مطرح کنید؟

پلیس: برنامهٔ دیگری هم در ایمپا داریم که به «برنامهٔ تابستانی» مشهور است.در این برنامه که در واقع یک برنامهٔ بعد از دکتری است، ایدهٔ اصلی این است که به همکارانمان در دانشگاهها کمکی بکنیم، یعنی در تابستان که آنها در تعطیلات خود هستند می‌توانند دوره‌هایی پانزده تا چهل و پنج روزه را در ایمپا بگذرانند و به کارهای تحقیقاتی مشغول شوند.در هر تابستان می‌توانم بگویم ۵۰، ۶۰ نفر از طریق این برنامه به ایمپا می‌آیند، و این اجتماع تابستانی پیامدهای مثبت گوناگونی دارد که یکی از آنها مثلاً ایجاد ارتباط بین افراد در اقصی نقاط کشور است تا به کارهای مشترک ریاضی مشغول شوند.به افرادی که در این دوره‌ها شرکت می‌کنند، مبالغ زیادی نمی‌پردازیم ولی امکانات مختلف ایمپا در اختیار آنها قرار می‌گیرد.

• خوب آقای پلیس، اگر اجازه بدهید قدری هم راجع به اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان صحبت کنیم.شما الان دبیر اتحادیه هستید و چندین سال هم عضو کمیتهٔ اجرایی آن بوده‌اید.لطفا بفرمایید آیا اتحادیه و شخص شما برنامهٔ ویژه‌ای برای پیشبرد ریاضیات در کشورهای جهان سوم در نظر دارید؟

پلیس: بله می‌توانم بگویم که واقعاً پیشرفت ریاضیات در تمام جهان مورد نظر ماست.اتحادیه واقعاً جنبهٔ بین‌المللی دارد و همین حضور من در آنجا شاید تأکیدی بر این نقش باشد.درهای اتحادیه به روی همهٔ کشورها باز است، البته کشورهایی که اندک توجهی به کارهای پژوهشی در ریاضی داشته باشند و به آن اهمیت کافی بدهند.اتحادیه از دو طریق نقش خود را برای توسعهٔ ریاضیات ایفا می‌کند.اول اینکه کمیسیونی داریم به اسم کمیسیون توسعه و تبادل که سرپرست آن ناراسیمان از انستیتو تاتا (هندوستان) است که کار این کمیته، حمایت از ریاضیدانهای جهان سوم است.مثلاً تأمین هزینهٔ مسافرت ریاضیدانهای جهان سوم به کنفرانسها و کنگره‌ها را، البته در حدود بودجهٔ خود، عهده‌دار می‌شود و همچنین از برگزاری دوره‌های پژوهشی در کشورهای در حال توسعه پشتیبانی می‌کند و در زمینهٔ تبادل استاد و پژوهشگر و اعزام ریاضیدانان از کشورهای پیشرفته به کشورهای در حال توسعه نیز اقداماتی انجام می‌دهد و به این ترتیب، به طور همه جانبه در پیشبرد ریاضیات در جهان سوم مشارکت می‌کند.حتی این کمیته به گروههایی که در یک کشور در یک، برنامهٔ پژوهشی کار می‌کنند و مثلاً نیازهایی دارند، کمکهایی ارائه می‌کند.راه دیگری که اتحادیه برای حمایت از ریاضیات در کشورهای در حال توسعه در پیش می‌گیرد این است که در کنگره‌های بین‌المللی ریاضیدانان که هر چهار سال یک بار برگزار می‌شود، به ریاضیدانان جوان از لحاظ مالی کمک می‌کند تا بتوانند در این کنگره شرکت کنند.مثلاً در کنگرهٔ ژاپن ۴۲ نفر از این کمک استفاده کردند و در کنگرهٔ سال ۱۹۹۴ امیدواریم این تعداد به ۶۰ یا ۷۰ نفر برسد.متأسفانه، امکانات ما از لحاظ اطلاع رسانی زیاد نیست و این کار به عهدهٔ انجمنهای ریاضی کشورهاست که با ما تماس دارند.بعضی از این انجمنها این کار را خوب انجام می‌دهند و بعضی هم چندان منظم نیستند.مثلاً برای شرکت در کنگرهٔ گذشته ما فقط دو سه تقاضا از قارهٔ افریقا داشتیم.به هر صورت، این کارهایی است که فعلاً انجام می‌دهیم و آمادهٔ پذیرش هرگونه پیشنهاد یا ایدهٔ تازه‌ای در این زمینه هستیم.

• خوب، آقای پلیس، از شما خیلی تشکر می‌کنیم که در این گفتگو شرکت کردید.نکتهٔ دیگری هم هست که بخواهید مطرح کنید؟

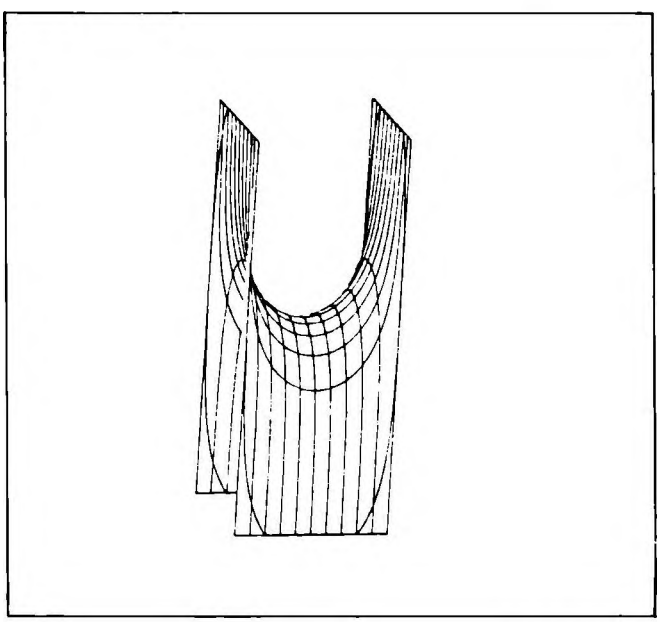
پلیس: بله می‌خواهم بگویم در راه پیشبرد ریاضیات در ایران، کارهایی را که شروع کرده‌اید با اطمینان کامل ادامه بدهید.مطمئن هستم که به موفقیت دست می‌یابید.شاهد مدعای من دانشجویان جوان و با استعداد ایرانی هستند که در رشتهٔ ریاضی تحصیل می‌کنند و من در ملاقاتهای اخیر خود با آنها، خیلی به آنها امید بسته‌ام.مطمئن هستم زودتر از آنچه فکر می‌کنید، به نتایج مطلوب می‌رسید.

رویه‌های مینیمال

سیدمحمدباقر کاشانی *

مقدمه

جاذبهٔ خاص رویه‌های مینیمال در این حقیقت نهفته است که گرچه آنها خانواده‌ای خاص از رویه‌ها را تشکیل می‌دهند و ظاهراً نباید چندان مورد توجه باشند، ولی چون در زمینه‌های گوناگون ریاضی و نیز در فیزیک و شیمی مطرح می‌شوند، مطالعهٔ آنها از جهات مختلفی مفید است.در سالهای اخیر به خاطر به دست آمدن تصویرهای جالب کامپیوتری از این رویه‌ها و نیز کاربردهایشان در شیمی، توجه به این رویه‌ها افزایش یافته است.مشهورترین نمونهٔ رویهٔ مینیمال در فیزیک، لایهٔ نازک صابون است [۲].مثال دیگر، تصویری زیبا از یک رویهٔ مینیمال است (شکل ۱) که ابتدا در سال ۱۸۳۵ به وسیلهٔ شرک (Scherk) کشف شد [۱] و اکنون در فیزیک و شیمی اهمیت یافته است.این اهمیت از آن روست که دانشمندان پایمر در تحقیقات خود رویه‌هایی بسیار شبیه رویه‌های شرک یافته‌اند.کامپیوتر نه تنها دیدن رویه‌هایی را ممکن ساخته که قبلاً مرموز به نظر می‌رسیدند، و کاملاً تحلیلی هستند (یعنی نقاط آنها عبارت‌اند از ریشه‌های تعدادی متناهی معادلهٔ تحلیلی)، بلکه به دست آمدن تصاویر کامپیوتری در اثباتها و در تولید مثالهای جدید نیز مفید واقع شده است.



شکل ۱.رویهٔ شرک

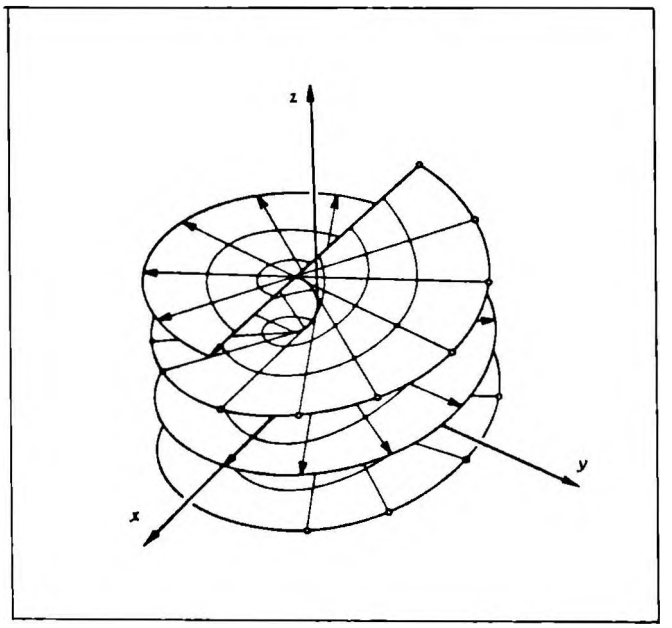
از نظر تاریخی، مطالعهٔ رویه‌های مینیمال را لاگرانژ در سال ۱۷۶۰ شروع کرد.او رویه‌هایی در $\mathbf{R}^3$ را بررسی کرد که به صورت نمودار تابعهای $z = f(x, y)$ که حداقل C^2 باشند قابل معرفی‌اند (زوج (x, y) در دامنه‌ای از $\mathbf{R}^2$ تغییر می‌کند).لاگرانژ در این باره این سؤال را مطرح کرده است:مطلوب است مشخص کردن آن دسته از رویه‌های فوق‌الذکر که هر قسمت فشرده از آنها(آن) دارای کمترین مساحت در بین همهٔ رویه‌هایی است که مرزشان همان مرز قسمت فشردهٔ انتخاب شده است.با توجه به اینکه جزء دیفرانسیل مساحت برای رویه‌های فوق به صورت $dA = (1 + f_x^2 + f_y^2)^{1/2} dxdy$ است (f_x و f_y مشتق f نسبت به x و y هستند). حل این مسأله منجر به حل معادلهٔ دیفرانسیل درجهٔ دوم زیر می‌شود

$$f_{xx}(1 + f^2 y) - 2 f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0 \qquad (1)$$

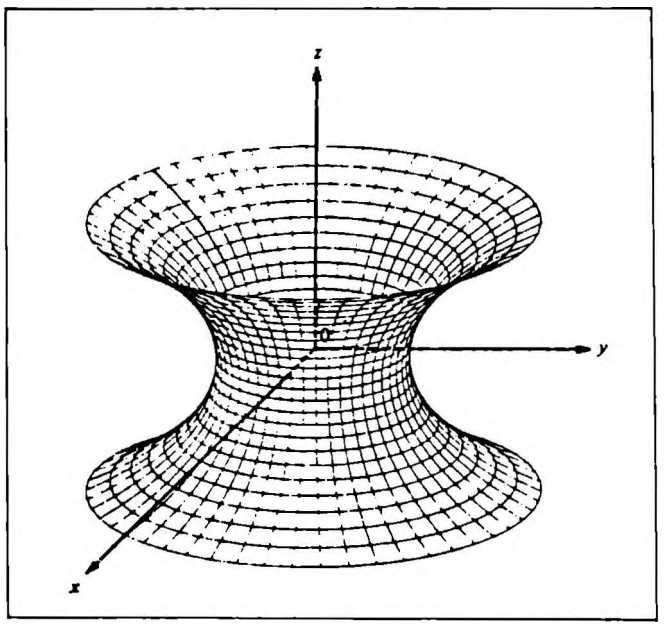
این معادله درحقیقت شرط لازم برای حل مسألهٔ لاگرانژ را ارائه می‌دهد.لاگرانژ مشاهده کرد هر تابع خطی (که نمودارش یک صفحه است) آشکارا یک جواب معادلهٔ (۱) است و البته خاصیت ذکر شده را نیز دارد.او همچنین وجود جوابهایی با هر مرز (هموار) داده شده را حدس زد.

در سال ۱۷۷۶، مونیه (Meusnier) تعبیر هندسی $H \equiv 0$ (صفر بودن خمیدگی متوسط در تمام نقاط) را برای مسألهٔ بالا بیان کرد (به تابلو نگاه کنید).البته، گفتنی است که این شرط ($H \equiv 0$) ضعیفتر از خاصیتی است که لاگرانژ در نظر گرفته بود ولی پس از پیدا شدن این تعبیر، این شرط برای تعریف رویهٔ مینیمال در نظر گرفته شد.غیر از صفحه، پیچوار (helicoid، شکل ۲) که به وسیلهٔ تابع $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ با فرمول $F(x, y) = (x\cos ay, x\sin ay, by)$، $0 \neq a, b \in \mathbf{R}$، مشخص می‌شود، رویهٔ دیگری بود که او به عنوان جواب معادلهٔ (۱) به دست آورد.وی همچنین دریافت که زنجیروار (catenoid، شکل ۳) که از دوران خم $\alpha(x) = (x, a\cosh(x/a + b))$، $a \neq 0$، $a, b \in \mathbf{R}$، حول محور xها حاصل می‌شود، تنها رویهٔ مینیمال دواردر $\mathbf{R}$ است.

در سال ۱۸۳۵، شرک با حل معادلهٔ (۱) برای توابعی به صورت $f(x, y) = g(x) + h(y)$ مثال جالب دیگری از رویه‌های مینیمال کشف کرد [۱].نمودار این توابع به نام رویهٔ مینیمال شرک (شکل ۱) مشهور است.شرک همچنین کوشید همهٔ رویه‌های مینیمال خط کشی شده (ruled) را مشخص



شکل ۲.پیچوار



شکل ۳.زنجیروار

کند ولی موفق به حل کامل مسأله نشد.این مسأله سرانجام در سال ۱۸۴۲ به وسیلهٔ کتلان (Catalan) حل شد.وی ثابت کرد که پیچوار تنها رویهٔ مینیمال خط کشی شده در $\mathbf{R}^3$ است.

اولین راه حل کلی برای معادلهٔ (۱) را وایرشتراس در سال ۱۸۶۶ ارائه کرد.در روش وی اولاً هر رویهٔ مینیمال ساده همبند را می‌توان برحسب فرمولی بیان کرد که او یافته و به نمایش وایرشتراس از رویه‌های مینیمال موسوم است؛ ثانیاً با در دست داشتن هر دو تابع تحلیلی f و g در یک دامنهٔ ساده همبند، چنانکه $f(z) \neq 0$ ، می‌توان یک رویهٔ مینیمال به دست آورد (این مطلب را در همین مقاله ملاحظه خواهید کرد).یک نتیجهٔ مستقیم این روش این است که رویه‌های مینیمال دارای توابع مختصات تحلیلی حقیقی هستند.

با توجه به مسائلی که تاکنون در زمینهٔ رویه‌های مینیمال بررسی شده‌اند، می‌توان گفت که به طورکلی نظریهٔ رویه‌های مینیمال در $\mathbf{R}^3$ در قرن نوزدهم عمدتاً محدود به خواص موضعی و مثالهایی خاص بوده و بر عکس، در قرن بیستم بر مسائل سراسری (global) و رویه‌های مینیمال کلی تأکید شده است.

در قرن حاضر، اولین نتیجهٔ سراسری مهم را برنشتاین (Bernstein) در سال ۱۹۱۵ به دست آورد.او رویه‌های مینیمال را از دیدگاه نظریهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی بررسی کرد.چنانچه بحث را به جوابهایی از معادلهٔ (۱) که به صورت نمودار تابع $z = f(x, y) \in \mathbf{R}$ هستند محدود کنیم، چنانکه گفته شد صفحه یک جواب معادلهٔ (۱) است.قضیهٔ مهمی از برنشتاین حاکی است که تنها جوابهای تام (entire) معادلهٔ (۱) توابع خطی هستند (جواب تام آن است که به ازای تمام مقادیر (x, y) در صفحه تعریف شده باشد).یک نتیجهٔ بلافصل قضیهٔ برنشتاین این است که هر جواب کراندار معادلهٔ (۱) تابعی ثابت است.برای آگاهی از اثبات قضیهٔ برنشتاین و تعمیمهای آن می‌توان به [۱۰] مراجعه کرد.

از جمله مسائل سراسری دیگری که در قرن بیستم و به ویژه در سالهای اخیر دربارهٔ رویه‌های مینیمال مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، عبارت‌اند از رویه‌های مینیمال کامل (complete)، رویه‌های مینیمال کامل با خمیدگی کل متناهی، رویه‌های مینیمال تناوبی، یک بار تناوبی، دوبار تناوبی، سه‌بار تناوبی، زیر خمینه‌های مینیمال (با بعد ناکمتر از ۳) در $\mathbf{R}^n$ و در فضاهای ریمانی کلیتر ...

بررسی مختصر رابطهٔ رویه‌های مینیمال با شاخه‌های گوناگون ریاضی

به خاطر آورید که یک رویهٔ S در $\mathbf{R}^n$ به وسیلهٔ تابع هموار $F : D \to \mathbf{R}^n$ مشخص می‌شود که در آن، D یک دامنه (زیرمجموعهٔ باز و همبند) در $\mathbf{R}^2$ است.مختصات $x = (x_1, x_2)$ را در D و $y = (y_1, \ldots, y_n)$ را در $\mathbf{R}^n$ به کار می‌بریم.بنابراین داریم $y = F(x)$.اگر قرار دهیم $g_{ij} = < \frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial y}{\partial x_j} >$،آنگاه رویهٔ S در نقطه‌ای از دامنه‌اش عادی (regular) نامیده می‌شود چنانچه $\det(g_{ij}) \neq 0$ یا به بیان دیگر، چنانچه بردارهای $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ و $\frac{\partial y}{\partial x_2}$ مستقل خطی باشند.

روش اصلی برای مطالعهٔ یک رویهٔ S در همسایگی نقطه‌ای از آن عبارت است از بررسی کلیهٔ خمهای واقع بر رویه که از آن نقطه می‌گذرند.در این بررسی، «بردارهای خمیدگی» خمها نقش مهمی دارند.چنانچه در نقطهٔ $p \in S$ یک بردار واحد مماس بر رویه چون T را در نظر گرفته و خم عادی α (پارامتری شده به وسیلهٔ طول قوس s) واقع بر S را چنان در نظر بگیریم که در p بر T مماس باشد، مؤلفهٔ عمودی (قائم بر رویه در نقطهٔ p) بردار خمیدگی α، یعنی $k^N(T)$، عبارت است از $k^N(T)' = (\frac{d\alpha'}{ds})^N$ که در آن $\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$ و این مؤلفه، بردار خمیدگی رویه در جهت T نامیده می‌شود.این بردار از آن جهت که مستقل از α است و فقط به S و T بستگی دارد، به S نسبت داده می‌شود.بردار خمیدگی میانگین رویهٔ S در p عبارت است از میانگین همهٔ $k^N(T)$ها هنگامی که T روی دایرهٔ واحد در فضای مماس بر S در p تغییر کند، یعنی $H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k^N(T) d\theta$ (بردار خمیدگی متوسط) که θ عبارت است از زاویه‌ای که در جهت مثبت بین T و جهتی ثابت (جهت مماسی) چون T_0 اندازه‌گیری می‌شود.می‌توان نشان

داد $H = \frac{1}{2}(k^N(T_1) + k^N(T_2))$ که T_1 و T_2 دو بردار واحد متعامد مماس می‌باشند.(همچنین نگاه کنید به تابلو).حال بنا به تعریف، یک رویهٔ عادی را مینیمال نامند در صورتی که $H \equiv 0$.اکنون، با در دست داشتن این تعریف، رابطهٔ رویه‌های مینیمال را با شاخه‌های مختلف ریاضی بررسی می‌کنیم.

الف) رابطه با نظریهٔ توابع مختلط

فرض کنید $\hat{F} : \hat{D} \to \mathbf{R}^n$، $\hat{D} \subset \mathbf{R}^2$، یک رویهٔ عادی را تعریف کند.در این صورت، برای هر نقطهٔ $p \in S$، یک همسایگی p را می‌توان به وسیلهٔ تابع همدیسی چون F پارامتری کرد.اگر قرار دهیم $y = F(x)$، $x = (x_1, x_2)$، x_1 و x_2 پارامترهای همدیس یا تکدما (isothermal) نامیده می‌شوند.به طور کلی، پارامتریسازی $y = y(x_1, x_2)$ برای رویهٔ عادی S تکدما نامیده می‌شود اگر

$$< \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2} >= 0, < \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_1} >=< \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_2} > 0$$

حال اگر $\hat{D}$ ساده همبند باشد، آنگاه رویه را به وسیلهٔ تابع همدیسی چون $F : D \to \mathbf{R}^n$ می‌توان به طور سراسری پارامتری کرد.در اینجا، D دامنه‌ای ساده همبند در صفحه است و به موجب قضیهٔ تابع ریمان، D را می‌توان تمام صفحه یا قرص واحد فرض کرد (به تابلو مراجعه کنید).

پس فرض کنید که رویهٔ S به وسیلهٔ تابع همدیس $F : D \to \mathbf{R}^n$ مشخص شده است و $y = F(x)$.بنا به تعریف تابع همدیس داریم

$$g_{ij} =< \frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial y}{\partial x_j} >= \lambda^2 \delta_{ij}, \lambda \neq 0$$

بنابراین، بردارهای $U = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial y}{\partial x_2}$ و $T = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial y}{\partial x_1}$ بردارهای مماس واحد متعامد هستند.لذا $H = \frac{1}{2\lambda^2}(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2})^N$ ولی بردارهای $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}$ و $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}$ خود بردارهای قائم هستند.پس

$$H = \frac{1}{2\lambda^2}(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}) = \frac{1}{2\lambda^2}\Delta y = \frac{1}{2\lambda^2}(\Delta y_1, \ldots, \Delta y_n)$$

نتیجهٔ واضح رابطهٔ بالا این است که رویهٔ S مینیمال است اگر و تنها اگر هر یک از توابع مختصات y_i همساز باشند.همچنین هنگامی که $n = 3$ و تابع گاوس رویهٔ مینیمال را در نظر بگیریم (به تابلو نگاه کنید)،این تابع همدیس است.این دو نکته‌اولین رابطه‌های بین رویه‌های مینیمال و نظریهٔ توابع مختلط را برقرار می‌کنند زیرا توابع همساز قسمتهای حقیقی توابع تحلیلی مختلط هستند و تابع گاوس هنگامی که به عنوان تابعی از صفحهٔ مختلط به خودش در نظر گرفته شود (با یکسان گرفتن کره منهای یک نقطه با صفحهٔ مختلط) تابعی تحلیلی است.

ب) رابطه با حساب وردشها(واریاسیون)

فرض کنید رویهٔ عادی S_0 به وسیلهٔ تابع $y = F_0 : D \to \mathbf{R}^2$ مشخص شده است.میدان برداری C^1 قائم V (V در هر نقطه قائم بر رویه است) بر S_0 را در نظر گرفته خانوادهٔ یک متغیره از رویه‌های S_t را که در جهت V تغییر می‌کنند به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$y_t(x) = F_t(x) = y(x) + tV(x).$$

اولین فرم اصلی y_t عبارت است از $g_{ij}(t) =< \frac{\partial y_t}{\partial x_i}, \frac{\partial y_t}{\partial x_j} >$. مساحت $F_t(D')$ برای هر زیر دامنهٔ فشردهٔ D' در D به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$A(t) = \iint_{D'} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} dx_1 dx_2$$

با به کاربردن بسط اولین فرم اصلی می‌توان به دست آورد

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\det(g_{ij}(t))}\,|_{t=0} = -2 < H, V > \sqrt{\det(g_{ij})}$$

که H همان میدان برداری خمیدگی متوسط است.بنابراین داریم

$$\begin{aligned} A'(0) &= -2 \iint_{D'} < H, V > \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 dx_2 \\ &= -2 \iint_{D'} < H, V > dA. \end{aligned} \tag{2}$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که

$$A'(0) \geq -2 \iint_{D'} | H | dA \tag{3}$$

و تساوی تنها وقتی برقرار است که در تمام نقاطی که $H \neq 0$، $V = H/|H|$.

رابطهٔ (۳) منجر به بیان خاصیت مینیمم‌سازی مساحت و اصولاً نامگذاری دسته‌ای از رویه‌ها به نام رویه‌های مینیمال شد.خاصیت مینیمم‌سازی مساحت به این شرح است:اگر رویهٔ S دارای این ویژگی باشد که هر قسمت فشردهٔ آن دارای کمترین مساحت در بین همهٔ رویه‌ها با همان مرز قسمت فشرده باشد، آنگاه روی S، $H \equiv 0$.در واقع، معادلهٔ (۳) نشان می‌دهد که اگر در نقطهٔ p از رویه، $H \neq 0$، آنگاه با تغییر شکل رویه در یک همسایگی p در جهت H مساحت رویه‌های حاصل کم می‌شود.

خاصیت مینیمم‌سازی مساحت به پایداری رویه هم تعبیر می‌شود.از بحث فوق معلوم می‌شود که مینیمال بودن یک رویه شرط لازم برای این است که رویه دارای خاصیت مینیمم‌سازی مساحت باشد ولی شرط کافی نیست.چنانچه رویهٔ مینیمال دارای خاصیت مینیمم‌سازی مساحت نباشد، رویه ناپایدار نامیده می‌شود.

خاصیت پایداری رویه‌ها مورد توجه و مطالعهٔ زیادی قرارگرفته و ما از بین نتایج به دست آمده به مطالب زیر اشاره می‌کنیم.

قضیه.فرض کنید S رویه‌ای در $\mathbf{R}^3$ باشد،چنانچه تصویر رویهٔ S تحت اثر تابع گاوس دارای مساحتی کمتر از 2π باشد، آنگاه S پایدار است[۱۰].

این قضیه بعداً به رویه‌های مینیمال در $\mathbf{R}^n$ تعمیم داده شده است.از طرف دیگر اگر رویه پایدار باشد، غالباً خواص مهمی دارد.به عنوان نمونه، می‌توان قضیهٔ زیر را ذکر کرد.

قضیه. عدد ثابت c وجود دارد چنانکه اگر S یک رویهٔ مینیمال باشد، آنگاه برای هر نقطهٔ p در S، خمیدگی گاوسی S در نقطهٔ p، $K(p)$، در شرط $|K(p)| \leq c/d^2$ صدق می‌کند که d فاصلهٔ نقطهٔ p تا مرز S است [۱۰].

نامساوی بالا نتایج زیادی دربارهٔ رویه‌های مینیمال به دست می‌دهد. و نه تنها در مورد رویه‌های مینیمال در $\mathbf{R}^3$ بلکه در مورد رویه‌های مینیمال واقع در یک خمینهٔ ریمانی سه بعدی قابل اعمال است.

پ) رابطه با نظریهٔ معادلات دیفرانسیل

رویهٔ S یک نمودار است اگر به شکل

$$y = F(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2))$$

قابل بیان باشد که در آن، $f : D \to \mathbf{R}^{n-2}$ تابعی است که حداقل C^2 است. در این حالت، شرط $H \equiv 0$ به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل ظاهر می‌شود که به شکل زیر است

$$(1+|\frac{\partial f}{\partial x_2}|^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - 2 < \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} > \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + (1+|\frac{\partial f}{\partial x_1}|^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0 \qquad (4)$$

در حالتی که $n = 3$، دستگاه فوق به یک معادله تقلیل می‌یابد. (به صفحات ۱۶ و ۱۷ مرجع [۱۰] نگاه کنید).

برای آگاهی از کاربردهای رویه‌های مینیمال در قسمتهای مختلف ریاضی و نیز در فیزیک، می‌توان به ضمیمهٔ ۳ از مرجع [۱۰] نگاه کرد.

در آنچه ذیلاً می‌آید، بعضی از ویژگیهای سراسری رویه‌های مینیمال به طور خیلی خلاصه مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

رویه‌های مینیمال مرزدار

یک سؤال اساسی که از ابتدا در مورد رویه‌های مینیمال مطرح بوده است این است که آیا برای هر خم هموار داده شدهٔ γ در $\mathbf{R}^3$ که خود را قطع نمی‌کند، یک رویهٔ مینیمال وجود دارد که مرزش γ باشد؟ این سؤال قدمت زیادی دارد و در طول سالیان دراز تلاشهای فراوانی صورت گرفته تا جواب مثبتی برای آن پیدا شود و سرانجام به صورت زیر به آن پاسخ داده شده است.

قضیه. فرض کنید γ یک خم ژوردان دلخواه در $\mathbf{R}^3$ باشد. در این صورت، رویهٔ عادی، مینیمال و ساده همبندی وجود دارد که مرزش γ است [قضیه داگلاس و دیگران].

دو سؤال مهم که در مورد این قضیه قابل طرح است این است که آیا جواب به دست آمده در $\mathbf{R}^3$ نشانده (embedded) شده است و آیا جواب به دست آمده یکتاست یا نه. به سؤال اول با در نظر گرفتن شرایط اضافی جواب مثبت داده شده است. جواب سؤال دوم در حالت کلی منفی است.

چنانچه قضیهٔ فوق را در $\mathbf{R}^n$ مطرح کنیم، باز هم رویهٔ مینیمال وجود دارد ولی خاصیت عادی بودن خود را از دست می‌دهد.

رویه‌های مینیمال کامل در $\mathbf{R}^3$

مثالهای اولیهٔ رویه‌های مینیمال (صفحه، زنجیروار، پیچوار، رویهٔ شرک، ...) همگی با متریک القا شده از $\mathbf{R}^3$ فضاهای متریک کامل هستند. به عبارت دیگر، هر ژئودزیک ماکسیمال در این رویه‌ها دارای دامنهٔ $\mathbf{R}$ است. جستجو برای یافتن رویه‌های مینیمال کامل از نظر هندسی با مثالهای ساده شروع شده است. در سال ۱۹۱۵، برنشتاین قضیهٔ زیر را ثابت کرد.

قضیه. اگر $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ یک تابع C^2 باشد که نمودار آن یک رویهٔ مینیمال S است، آنگاه f تابعی خطی است.

اثبات اولیهٔ برنشتاین از این قضیه کامل نبود و این نقص تا سال ۱۹۵۰ برطرف نشد. در این مدت، اثباتهای متعددی از این قضیه ارائه شد که برعکس روش برنشتاین (که مبتنی بر نظریهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی بود) بر نظریهٔ توابع مختلط اتکا داشتند. اکنون به اثبات قضیه که مبتنی بر نظریهٔ توابع مختلط است می‌پردازیم.

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، می‌توان رویهٔ مینیمال S را به وسیلهٔ تابع همدیس $F : D \to \mathbf{R}^3$ بیان کرد که D را به موجب قضیهٔ تابع ریمان می‌توان تمام صفحه یا قرص واحد در نظر گرفت. حال تابع $g(z) = \sigma . N . F(z)$ را در نظر بگیرید. به موجب فرض، تابع F همدیس است. همچنین تابع گاوس (N) هر رویهٔ مینیمال، همدیس است و σ که تابع گنجنگاری (stereographic projection) است همواره همدیس می‌باشد. بنابراین، g تابعی تمام‌ریخت (تحلیلی مختلط) است. حال اگر S یک نمودار باشد، جهت‌پذیر است و بردارهای قائم بر آن یا همگی به سوی بالا و یا همگی به سوی پایین هستند؛ بنابراین، $N(S)$ در یک نیمکره واقع می‌شود. با انتخاب σ به عنوان تابع گنجنگاری از قطب مخالف (مخالف نیمکره‌ای که $N(S)$ را در بر دارد) همهٔ نیمکره به داخل دایرهٔ واحد تصویر می‌شود، یعنی $|g(z)| < 1$. در اینجا دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد.

حالت اول: D همهٔ صفحه است. در این صورت، $g(z)$ یک تابع تام و کراندار است؛ پس بنا به قضیهٔ لیوویل، تابعی ثابت است. بنابراین، $N(S)$ یک نقطه است. یعنی S دارای جهت قائم واحد N است که از آن نتیجه می‌شود S صفحه‌ای است عمود بر N و بنابراین، f تابعی خطی است.

حالت دوم: D قرص واحد است یعنی $|z| < 1$: در این مورد این سؤال مطرح می‌شود که آیا چنین حالتی می‌تواند اتفاق بیفتد؟ اگر جواب منفی باشد، قضیهٔ برنشتاین ثابت شده است. بنابراین لازم است نشان دهیم چنانچه S یک نمودار مینیمال روی همهٔ صفحهٔ xy باشد، آنگاه S نمی‌تواند تصویر همدیس یک قرص باشد. این امر سبب شد که لونر (Loewner) سؤال کلی زیر را مطرح کند. فرض کنید S رویه‌ای هموار و عادی و به صورت نموداری روی همهٔ صفحهٔ xy باشد. آیا S می‌تواند تصویر یک قرص واحد تحت اثر یک تابع همدیس باشد؟ اگر جواب این سؤال منفی باشد، مسلماً قضیهٔ برنشتاین ثابت شده است ولی در این حالت جواب مثبت است یعنی رویه‌ای با خصوصیات ذکر شده در سؤال وجود دارد. بنابراین، برای اثبات قضیهٔ برنشتاین بایستی شرط مینیمال بودن را به کار ببریم. اثباتهای متعددی از این مطلب ارائه شده است که هر نمودار مینیمال تام، باید تصویر همدیس یک صفحه باشد و نه قرص واحد. قبل از آنکه بحث را تمام کنیم به اثبات مطلبی کلیتر از قضیهٔ برنشتاین می‌پردازیم. نیرنبرگ (Nirenberg) با بررسی

روشی که در بالا برای اثبات قضیهٔ برنشتاین ارائه شد، حدس زیر را مطرح کرد.

حدس. یک رویهٔ مینیمال کامل ساده همبند، یک صفحه است اگر $N(S)$ یکی از این دو وضعیت را داشته باشد: ۱) $N(S)$ برابر تمام کره‌منهای یک همسایگی یک نقطه باشد؛ ۲) $N(S)$ برابر تمام کره‌منهای سه نقطه باشد.

چنانچه بتوان ثابت کرد که در نمایش همدیس $F : D \to S$، D باید تمام صفحه باشد، حدس اثبات شده است زیرا با فرض اینکه حالت (۱) حدس اتفاق افتاده است یعنی $N(S)$ برابر تمام کره‌منهای یک همسایگی یک نقطه است، با به کاربردن تابع گنجنگاری به مرکز یک نقطهٔ درونی همسایگی سوده (با توجه به این فرض که D تمام صفحه است) نتیجه می‌شود که $g = \sigma \circ N \circ F$ یک تابع کراندار و تام است؛ بنابراین ثابت است.لذا اثبات حالت اول مذکور در بالا نشان می‌دهد که S یک صفحه است.

چنانچه حالت (۲)ی حدس اتفاق بیفتد، با انتخاب تابع گنجنگاری به مرکز یکی از نقاط حذف شده (و با توجه به این فرض که D تمام صفحه است) نتیجه می‌شود g تابعی تام است که تنها دو نقطه را اختیار نمی‌کند.بنابراین، به موجب قضیهٔ پیکار (Picard)، g تابعی ثابت است و دوباره با استناد به اثبات حالت اول، S باید یک صفحه باشد.

حال به ادامهٔ بحث ناتمام خود می‌پردازیم.برای اینکه نشان دهیم حالت دوم اتفاق نمی‌افتد، نمایش وایرشتراس برای رویه‌های مینیمال را شرح می‌دهیم.

فرض کنید S یک رویهٔ مینیمال ساده همبند باشد که توسط تابع همدیس $F : D \to \mathbf{R}^3$ مشخص شده است.نیز فرض کنید $N(S)$ حداقل یک نقطه را اختیار نکند.آنگاه S را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$y = F(z) = \mathrm{Re}\{\int \tfrac{1}{2} f(-g^2), \int \tfrac{i}{2} f(1+g^2), \int fg\} \qquad (5)$$

که g تابعی است که در بالا معرفی شد یعنی $g = \sigma \circ N \circ F$ و σ تابع گنجنگاری به مرکز نقطهٔ حذف شده است و f تابعی تحلیلی است که هرگز صفر نمی‌شود.به عکس اگر f و g دو تابع تحلیلی در یک ناحیهٔ ساده همبند باشند که $f(z) \neq 0$، آنگاه معادلهٔ (۵) یک رویهٔ مینیمال تعریف می‌کند که برای آن g برحسب تابع گاوس آن رویه، نمایش فوق را دارد.

برای رویه‌ای چون S که به صورت (۵) مشخص شود، معادلهٔ طول قوس ds روی رویه به صورت زیر است.

$$ds = \lambda(z)\,|dz| \quad , \lambda(z) = \frac{1}{2}\,|f(z)|\,(1+|g(z)|^2)$$

با به کار بردن این رابطه‌ها در مورد قضیهٔ برنشتاین که در آن S یک نمودار است، داریم $|g(z)| < 1$.در حالت اول حدس نیزنبرگ که $G(S)$ یک همسایگی نقطه‌ای از کره را اختیار نمی‌کند، $|g(z)|$ کراندار است، مثلاً $|g(z)| < M$. برای خم C در دامنهٔ F داریم

$$l(F(C)) = \int_C ds = \frac{1}{2}\int_C |f(z)|\,(1+|g(z)|^2)\,|dz| < \frac{1+M^2}{2}\int_C |f(z)|\,.\,|dz|$$

در هر رویهٔ کامل S، هر خم واگرا دارای طول بینهایت است (خم $\alpha(t)$ در S را که به ازای $t \geq 0$ تعریف شده واگراگوییم اگر برای هر زیر مجموعهٔ فشردهٔ Q از S، عدد t_0 موجود باشد چنانکه به ازای $t > t_0$، $\alpha(t) \notin Q$).در این صورت ، حدس نیزنبرگ به صورت زیر ساده می‌شود.فرض کنید $f(z)$ روی $|z| < 1$ تحلیلی باشد، و $f(z) \neq 0$، آیا همواره خم واگرای C وجود دارد چنانکه $\int_C |f(z)|\,.\,|dz| < \infty$ ؟

جواب این سؤال مثبت است و این مطلب از اینجا نتیجه می‌شود که تابع $F(z) = \int f(z)dz$ در شرط $F'(z) = f(z) \neq 0$ صدق می‌کند و بنابراین یک تابع همدیس از قرص واحد به صفحهٔ ω تعریف می‌کند.این تابع نمی‌تواند یک به یک و پوشا باشد زیرا در آن صورت، وارونش تابعی تام و کراندار، و بنابراین ثابت خواهد بود.پس خم واگرایی با طول متناهی وجود دارد زیرا

$$\int_C |f(z)|\,|dz| = \int_C |F'(z)|\,|dz| = \int_{F(C)} |d\omega|$$

با در نظر گرفتن همهٔ مطالب بالا، تحت شرایط اولین حدس نیزنبرگ، رویهٔ S نمی‌تواند تصویر همدیس یک قرص باشد، بنابراین باید تصویر تمام صفحه باشد؛ لذا g تابعی ثابت است و بنابراین، S یک صفحه است.اکنون این سؤال مطرح می‌شود که آیا می‌توان استدلالی مشابه را برای حدس دوم نیزنبرگ ارائه کرد؟جواب این سؤال منفی است و درحقیقت، حدس دوم صحیح نیست.با به کاربردن نمایش وایرشتراس و با انتخاب مناسب توابع f و g می‌توان مثالی صریح از رویه‌های مینیمال کامل ارائه کرد که تابعهای گاوس آنها نه سه مقدار، بلکه چهار مقدار را کنار می‌گذارند.

پس از طی مراحل میانی زیاد، سرانجام این مطلب در سال ۱۹۸۸ به وسیلهٔ فوجی‌موتو (Fujimoto) به صورت زیر بیان و اثبات شد:

«اگر رویهٔ مینیمال کامل S در $\mathbf{R}^3$ دارای تابع گاوسی باشد که بیش از چهار نقطه را کنار بگذارد، آنگاه S یک صفحه است.»

ایدهٔ فوجی‌موتو این است که گرچه تابع g کراندار نیست ولی می‌توان نوعی شرط رشد یافت که همگرایی $\int_C |f|\,(1+|g|^2)\,|dz|$ را برای یک خم C تضمین کند.درحقیقت با به کار بردن متریکی روی صفحه منهای تعدادی متناهی نقطه، با شرط $K \equiv -1$ (خمیدگی مقطعی همواره برابر ۱- باشد) و با به کاربردن لم آلفورس (Ahlfors)، فوجی موتو یک کران بالا برای $|g'(z)|$ یافت که نتیجهٔ مطلوب را به دست می‌دهد (به تابلو مراجعه کنید).

بعداً صورت ظریفتری از قضیهٔ فوجی‌موتو به صورت زیر بیان و اثبات شد [۹].

قضیه.اگر S یک رویهٔ مینیمال کامل و غیر از صفحه باشد و اگر $N(S)$ چهار مقدار را اختیار نکند آنگاه $N(S)$ نه تنها سایر مقادیر را اتخاذ می‌کند بلکه هر یک از آن مقادیر را بینهایت بار اتخاذ می‌کند.

نتیجه:تحت شرایط قضیهٔ بالا، خمیدگی کل S بینهایت است، یعنی $\int_S |K|\,dA = +\infty$.

درحقیقت، به موجب تعریف خمیدگی K، $\int |K|\,dA$ دقیقاً برابر مساحت تصویر S تحت اثر تابع گاوس است؛ حال اگر تابع گاوس همهٔ کره (به استثنای چهار نقطه) را بینهایت بار بپوشاند، مساحت تصویر به وضوح بینهایت خواهد بود.برای اطلاع از مطالبی دیگر در مورد رویه‌های مینیمال کامل به ضمیمهٔ A از مرجع [۱۰] مراجعه کنید.

رویه‌های مینیمال کامل با خمیدگی کل متناهی

دربارهٔ این رویه‌ها اطلاعات زیادی در دست است.قبل از آنکه قضیه‌ای اساسی در مورد آنها بیان کنیم، لازم است ابتدا تعریف خمیدگی کل را یادآوری کرده و مفهوم پایانه (end) را برای یک رویهٔ مینیمال تعریف نماییم.

چنانچه K خمیدگی گاوسی رویهٔ S و dA جزء دیفرانسیل مساحت باشد، آنگاه، $\int_S K dA =$ خمیدگی کل S.

مقصود از یک «پایانه» از یک رویهٔ غوطه‌ور (immersed) در $\mathbf{R}^3$ عبارت است از بخشی از رویه که با یک قرص توپولوژیک منهای مرکزش، همسانریخت (homeomorphic) باشد چنانکه هر خم واقع بر قرص که از مرکزش دور می‌شود، دارای طول بینهایت باشد.

فرض کنید M یک رویهٔ فشرده باشد و $p_1, \ldots, p_l$ تعدادی متناهی نقطه از M و $F : M - \{p_1, \ldots, p_l\} \to \mathbf{R}^3$ یک تابع غوطه‌ورسازی (immersion) باشد که تصویرش یک رویهٔ مینیمال کامل در $\mathbf{R}^3$ است.اگر $D \subset M$ یک همسایگی p_j در M باشد، آنگاه $F(D - \{p_j\})$ یک پایانه برای $F(M - \{p_1, \ldots p_l\})$ است.بنابراین، $F(M - p_1, \ldots p_l\})$ یک رویهٔ غوطه‌ور شده در $\mathbf{R}^3$ با l پایانه است.مثلاً، زنجیروار، یک رویهٔ مینیمال کامل با دو پایانه است.

اکنون به بیان قضیهٔ اساسی می‌پردازیم.

قضیه. فرض کنید S یک رویهٔ مینیمال کامل در $\mathbf{R}^3$ با خمیدگی کل متناهی و G تابع گاوس رویهٔ S باشد، در این صورت:

۱. $N(S)$ حداکثر می‌تواند سه مقدار را اتخاذ نکند مگر اینکه S یک صفحه باشد؛

۲. S به طور همدیس برابر است با یک رویهٔ فشردهٔ M که تعدادی متناهی از نقاطش، $p_1, \ldots, p_l$، $l \neq 0$ حذف شده‌اند؛

۳. قائمهای رویه در هر پایانه (که وابسته به یک p_j است) به یک حد میل می‌کنند، درحقیقت، تابع g در نمایش وایرشتراس S قابل گسترش به یک تابع برخه‌ریخت ($meromorphic$) روی M است؛

۴. $\int_S |K| dA = 4\pi m$، $m = 0, 1, 2, \ldots$؛

۵. $m = 0 \iff S$ یک صفحه است؛

$m = 1 \iff S$ یک زنجیروار یا یک رویهٔ انپر ($Enneper$) است (شکل ۴)؛

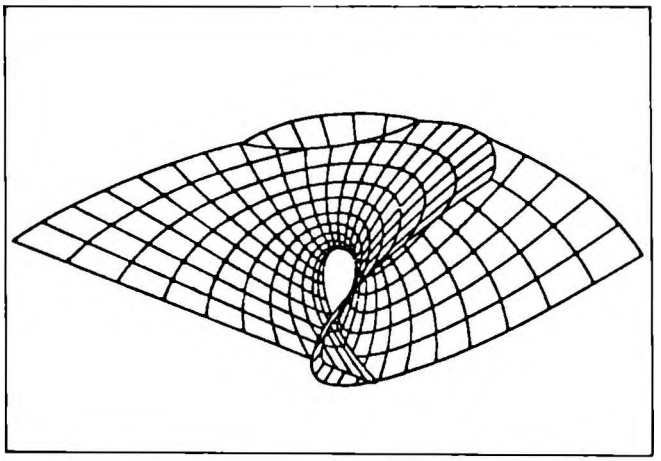
۶. اگر χ شاخص اویلر S باشد آنگاه

$$\int_S K dA \leq 2\pi(\chi - l)$$

که l برابر است با تعداد نقاط حذف شده از M و برابر است با تعداد پایانه‌های S.

نامساوی آخر با توجه به قضیهٔ کوهن ـ واسن (Cohn - Vossen) که می‌گوید برای هر رویهٔ S، $\int_S K dA \leq 2\pi\chi$، جالب است زیرا با توجه به نامساوی (۴)، برای رویهٔ S که در شرایط قضیهٔ اساسی صدق کند تساوی در رابطهٔ بالا اتفاق نمی‌افتد.برای آگاهی از اثبات این قضیهٔ اساسی به مرجع [۱۰]، قضایای ۱.۹، ۲.۹، ۳.۹، ۴.۹ و لم ۵.۹ رجوع کنید.

باز یک سؤال در مورد اولین حکم این قضیه این است که آیا می‌توان این حکم را قویتر کرد؟برای پاسخ دادن به این سؤال یا باید مثالی از یک رویهٔ



شکل ۴.رویهٔ انپر

مینیمال کامل با خمیدگی کل متناهی یافت که تابع گاوس آن دقیقاً سه نقطه را اختیار نکند، و یا حکم را بهتر کرد به طوری که $N(S)$ دقیقاً دو نقطه را اتخاذ نکند.

برای آشنایی با مثالهای رویه‌های مینیمال کامل با خمیدگی کل متناهی به [۱] مراجعه کنید.

قضیهٔ زیر نیز در مورد رویه‌های مینیمال کامل با خمیدگی کل متناهی جالب توجه است.

قضیهٔ هورگه ـ میکز (Jorge & Meeks).تنها رویه‌های مینیمال کامل با خمیدگی کل متناهی که تصویر $S^2 - \{p_1, \ldots, p_l\}$، $1 \leq l \leq 5$، در $\mathbf{R}^3$ تحت اثر یک نشاننده باشند عبارت‌اند از صفحه ($l = 1$) و زنجیروار ($l = 2$)،حالتهای $l = 3, 4, 5$ نمی‌تواند اتفاق بیفتد (برای ملاحظهٔ اثبات به [۱] مراجعه کنید.)

یک مسألهٔ جالب کلی دربارهٔ رویه‌های مینیمال کامل با خمیدگی کل متناهی، یافتن رویه‌های نشانده شده در $\mathbf{R}^3$ است یعنی رویه‌هایی که خودشان را قطع نکنند.در مقاله‌ای از هورگه و میکز [۶] نشان داده می‌شود که اگر چنین رویه (یا رویه‌هایی) موجود باشند باید در شرایط خاصی صدق کنند یعنی قائمهای رویه در تمام نقاط انتهایی $p_1, \ldots, p_l$ باید محدود به دو نقطهٔ متقاطر روی کره باشند و نامساوی (۴) بایستی برای آن رویه به تساوی تبدیل شود.

کستا (Costa) مثالی از یک رویه با گونهٔ (genus) یک و سه پایانه یافت که در این شرایط صدق می‌کند[۴].سپس هافمن (Hoffman) و میکز نشان دادند که رویهٔ کستا در واقع یک رویهٔ مینیمال است[۵].آنها همچنین نشان دادند خانواده‌ای یک پارامتری از رویه‌های مینیمال که حاصل تغییر شکل رویهٔ کستا هستند وجود دارد که آنها نیز مینیمال می‌باشند.و نیز این دو نفر ثابت کردند رویه‌های مشابه با گونه‌های بالاتر یا پایانه‌های بیشتر یا هر دو وجود دارند.

کستا نشان داد تنها رویه‌های نشانده شده در $\mathbf{R}^3$ با گونهٔ یک و سه پایانه عبارت‌اند از رویه‌ای که خودش کشف کرده بود و رویه‌هایی که از تغییر شکل رویهٔ او به وسیلهٔ هافمن و میکز به دست آمد.

لپی (Lopey) و راس (Ros) نشان دادند که صفحه و زنجیروار تنها

تابلو توضیحات

۱.تعریف.فرض کنید رویهٔ عادی S در $\mathbf{R}^3$ داده شده و $p \in S$ و $N : S \to S^2 = \{x \in \mathbf{R}^3 :< x, x >= 1\}$ تابع گاوس رویهٔ S باشد.در هر نقطهٔ $p \in S$، $N(p)$ عبارت است از بردار واحدی در $\mathbf{R}^3$ و به پایهٔ $0 \in \mathbf{R}^3$ چنانکه بر T_pS (فضای مماس بر رویه در نقطهٔ p) عمود باشد.N به صورت موضعی موجود و هموار است.آنگاه پایه‌ای واحد و متعامد چون $\{e_1, e_2\}$ برای T_pS وجود دارد چنانکه $d_pN(e_1) = -K_1e_1$ و $d_pN(e_2) = -K_2e_2$ (d_pN عبارت است از مشتق تابع N در نقطهٔ p، همچنین K_1 و K_2، $(K_1 \geq K_2)$ عبارت‌اند از ماکسیمم و مینیمم دومین فرم اصلی رویه در نقطهٔ p هنگامی که به دایرهٔ واحد در T_pS تحدید شود).مقدار دومین فرم اصلی رویهٔ S در نقطهٔ p به ازای بردار مماس X برابر است با $\mathrm{II}_p(X, X)$که این هم برابر است با $- < d_pN(X), X >$ که $|\mathrm{II}_p(X, X)|$ مستقل از انتخاب N است ولی علامت $\mathrm{II}_p(X, X)$به انتخاب N بستگی دارد.با این شرایط، K_1, K_2 را خمیدگیهای اصلی رویه در نقطهٔ p، $(K_1 + K_2)/2$ را خمیدگی متوسط رویه در p و $K = K_1K_2$ را خمیدگی گاوسی S در نقطهٔ p می‌نامند.بردار $(K_1 + K_2)N(p)/2$ بردار خمیدگی متوسط رویه در نقطهٔ p نام دارد.خمیدگی کل رویه عبارت است از $\int_S KdA$ که dA عبارت است از جزء دیفرانسیل مساحت روی S.

****

۲.قضیهٔ نگاشت ریمان:فرض کنید D ناحیه‌ای ساده همبند در صفحه است که تمام صفحه نیست و $a \in D$.در این صورت، تابع تحلیلی یکتای $f : D \to \mathbf{C}$ وجود دارد چنانکه $f(a) = 0$ و $f.f'(a) > 0$ یک به یک است و $f(D) = \{z : |z| < 1\}$.

****

۳.لم آلفورس:فرض کنید متریک استاندارد هذلولوی روی $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ به وسیلهٔ تابع $\lambda(z) = 2/(1 - |z|^2)$ داده شده است یعنی $g(v_z, w_z) = \lambda^2 < v_z, w_z >$ که $<,>$ حاصلضرب داخلی اقلیدسی روی $\mathbf{R}^2$ است و w_z, v_z بردارهایی از $\mathbf{R}^2$ به پایهٔ $z \in D$ هستند.فرض کنید $\tilde{\lambda}(z)$ تابعی همدیس روی D باشد که مطابق روش بالا متریک همدیس دیگری روی D تعریف می‌کند.اگر خمیدگی D با متریک حاصل از $\tilde{\lambda}$، $\tilde{K}$، در شرط $\tilde{K} \leq -1$ صدق کند، آنگاه روی D، $\tilde{\lambda}(z) \leq \lambda(z)$.

****

۴.تعریف.مقصود از یک عمل هموارگروه‌ای G بر خمینهٔ هموار M عبارت است از تابع هموار $F : G \times M \to M$ چنانکه تابع $g \to F(g, \cdot)$ یک همریختی از G به گروه دیفئومرفیسمهای M باشد.چنانچه $N \subset M$ یک زیر خمینه باشد و به ازای یک $g \in G$ و به ازای هر $x \in N$ داشته باشیم $F(g, x) \in N$، گوییم N تحت اثر g ناورداست.عمل G را روی M آزاد گوییم اگر برای هر $x \in M$، زیرگروه H، $H = \{g \in G : F(g, x) = x\} \subset H$ بدیهی یعنی برابر $\{e\}$ باشد.

رویه‌های نشانده شده با گونهٔ صفر هستند.برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه به ضمیمهٔ A از مرجع [۱۰] مراجعه کنید

رویه‌های مینیمال تناوبی در $\mathbf{R}^3$

در سالهای اخیر پیشرفت زیادی در نظریهٔ رویه‌های مینیمال تناوبی که به طور سره (properly) در $\mathbf{R}^3$ نشانده شده‌اند، حاصل شده است.این پیشرفتها شامل نتایج نظری سراسری و تعداد زیادی مثال است که در شرایط قضایای جدید صدق می‌کنند.عده‌ای از این رویه‌ها نیز به وسیلهٔ فیزیکدانها کشف شده‌اند.

بنا به تعریف، یک رویهٔ مینیمال تناوبی خوانده می‌شود اگر همبند بوده و تحت اثر یک گروه گسستهٔ G از ایزومتریهای $\mathbf{R}^3$ که آزادانه عمل می‌کنند، ناوردا باشد.مطالعهٔ این رویه‌ها از طریق مطالعهٔ رویه‌های خارج قسمت حاصل از آنها در $\mathbf{R}^3/G$ انجام می‌گیرد (تابلو را ببینید).غیر از صفحه، یک مثال غیر بدیهی از این رویه‌ها، پیچوار است.گروههای تقارن این دو رویه نامتناهی‌اند و این دو، تنها رویه‌های مینیمال نشانده شده در $\mathbf{R}^3$ با چنین خاصیتی هستند.

مطالعهٔ این رویه‌ها نشان می‌دهد که توپولوژی و هندسهٔ سراسری آنها شدیداً به هم مرتبط است.در اینجا تنها به بیان چند حدس و سؤال پاسخ داده نشده اکتفا می‌کنیم.خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به مقالات روزنبرگ (H.Rosenberg) و همکارانش در این زمینه مراجعه کند.قبل از بیان سؤالها به یادآوری یک تعریف می‌پردازیم.[۱۵]

تعریف.یک رویه را دارای توپولوژی متناهی گوییم اگر با یک رویهٔ بسته که تعدادی متناهی از نقاطش حذف شده است، همسانریخت باشد.

سؤال ۱.آیا پیچوار تنها رویهٔ مینیمالی است که به طور سره در $\mathbf{R}^3$

نشانده شده و دارای توپولوژی متناهی ولی خمیدگی کل نامتناهی است؟

سؤال ۲.انواع توپولوژیهای ممکن برای رویه‌های مینیمالی که به طور سره در $\mathbf{R}^3$ نشانده شده‌اند، چیستند؟

خانوادهٔ رویه‌های مینیمالی که به طور سره در $\mathbf{R}^3$ نشانده شده‌اند، خیلی غنی است ولی چنانکه از سؤال اول برمی‌آید، همهٔ مثالهای جدید دارای خمیدگی کل متناهی هستند.برای درک سؤال اول لازم است هندسهٔ «پایانه‌های حلقوی» (annular ends) یک رویهٔ مینیمال که به طور سره در $\mathbf{R}^3$ نشانده شده درک شود (یک پایانهٔ حلقوی از رویهٔ S عبارت است از یک نشاندهٔ هموار سره از $\{z \in \mathbf{C} : 0 < z \leq 1\}$ به S) زیرا هنگامی که M دارای توپولوژی متناهی است، همهٔ پایانه‌های آن از نوع حلقوی هستند.

حدس زیر توسط هافمن و میکز ارائه شده است.

حدس ۱.فرض کنید $S \subset \mathbf{R}^3$ یک رویهٔ مینیمال باشد که به طور سره نشانده شده و حداقل دو پایانه دارد.دراین صورت، هر پایانهٔ حلقوی S دارای خمیدگی کل متناهی است.

از حدس ۱ نتیجه می‌شود رویهٔ مینیمالی که به طور سره در $\mathbf{R}^3$ نشانده شده و حداقل دو پایانه و توپولوژی متناهی داشته باشد، دارای خمیدگی کل متناهی است.

اخیراً هافمن و میکز ثابت کردند هر رویهٔ مینیمالی که به طور سره در $\mathbf{R}^3$ نشانده شده می‌تواند حداکثر دو پایانه با خمیدگی کل متناهی داشته باشد.بنابراین، برای اثبات حدس باید ثابت کرد که دو پایانهٔ باقیمانده نیز دارای خمیدگی کل متناهی هستند.

سؤال مشخصتری که در ارتباط با سؤال ۱ و حدس ۱ مطرح می‌شود، چنین است.

سؤال ۳.فرض کنید S یک رویهٔ مینیمال است که به طور سره نشانده شده و دارای گونهٔ صفر است.آیا S یک صفحه یا یک زنجیروار یا یک پیچوار یا یکی از مثالهای تناوبی ریمان است؟

حدس زیر در ارتباط با سؤال ۳ عرضه شده است.

حدس ۲.هنگامی که رویهٔ مینیمال دارای گروه تقارن (گروه ایزومتریهای) نامتناهی باشد، جواب سؤال ۳ مثبت است.

زیرخمینه‌های مینیمال در یک خمینهٔ ریمانی

در سالهای اخیر در این زمینه مطالعات زیادی انجام شده است.یکی از نکات اساسی در اینجا این است که زیرخمینه‌های مینیمال می‌توانند فشرده باشند.از بین کارهای فراوانی که در این زمینه صورت گرفته، به ذکر چند قضیه اکتفا می‌کنیم.خواننده برای کسب اطلاعات بیشتر می‌تواند به ضمیمهٔ A از مرجع [۱۰] نگاه کند.

قضیه.فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی فشرده nبعدی از ردهٔ C^k باشد که $3 \leq n \leq 6$ و $5 \leq k \leq \infty$.در این صورت، یک ابر رویهٔ فشردهٔ مینیمال از ردهٔ C^{k-1} وجود دارد که در M نشانده شده است.

این قضیه بعداً به $n = 7$ نیز تعمیم یافته است.قضایای وجودی خاصتری نیز وجود دارند که به نوبهٔ خود مهم‌اند.به عنوان نمونه دو قضیهٔ زیر را می‌توان ذکر کرد.

قضیه.در کرهٔ سه‌بعدی، رویه‌های مینیمال فشرده از هر گونه وجود دارند.

قضیه.هیچ زیرخمینهٔ مینیمال فشردهٔ پایداری در یک کرهٔ n بعدی وجود ندارد.

مراجع

1.J.Barbosa, *Minimal Surfaces in* $\mathbf{R}^n$, notes distributed at ICTP, Italy (1989).

2.M.do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice - Hall, Inc.New Jersey, (1976).

3.J.B.Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer- Ver lag, NewYork (1975).

4.C.Costa, "Examples of a complete minimal immersion in $\mathbf{R}^n$ of genus one and three embedded ends," *Bull.Soc.Bras.Math.*, **15** (1984)47-54.

5.D.A.Hoffman & W.H.Meeks , "A complete embedded minimal surface in $\mathbf{R}^3$ with genus one and three ends", *J.Diff. Geom.*, **21** (1985) 109-127.

6.L.P.M.Jorge & W.H.Meeks, "The topolgy of complete mini mal surfaces of finite total curvature", *Topology*, **22** (1983) 203 -221.

7.W.Meeks & H.Rosenberg: "The global theory of doubly periodic minimal surfaces", *Invent.Math.*,**97** (1989) 351-379.

8._____ ,"The geometry of periodic minimal surfaces", Preprint.

9.*X*.Mo & R.Osserman,"On the Gaus map and total curvature of complete minimal surfaces and an extension of Fujimoto's theorem", *J.Diff. Geom.*(2) **31** (1990).

10.R.Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces*, Dover , New- York (1989).

11._____ , *Conformal Maps*, notes distributed at ICTP, Italy (1989).

12._____ , *Minimal Surfaces*, notes distributed at ICTP, Italy (1989).

13._____ , *Complete Minimal Surfaces*, notes distributed at ICTP, Italy (1989).

14._____ ,*The Hyperbolic Plane and the Shwarz- Pick - Ahlfors Lemma*, notes distributed at ICTP, Italy (1989).

15.H.Rosenberg, *The Geometry, Topology and Existance of Peri odic Minimal Surfaces*, notes distributed at ICTP, Italy (1989).

16.J.Wolf, *Spaces of Constant Curvature*, Publish or Perish, Inc., U.S.A.(1984).

****

★ محمدباقر کاشانی، دانشگاه تربیت مدرس

بعد فضای برداری و بعد گلدی

منصور معتمدی*

۱. مقدمه

جمع اعداد مختلط، آن‌گونه که‌توسط وسل و آرگان تعریف شد، جمع پاره‌خطهای جهت‌داراست.هیأتهای متناهی $GF(p^n)$ که گالوا آنها را ساخت، فضاهای برداری n بعدی بر روی هیأت $GF(p)$ هستند.جبر اعداد چهاربرگی حقیقی که همیلتن آنها را به وجود آورد، یک فضای برداری چهار بعدی بر روی هیأت حقیقی به شمار می‌آید.بدین ترتیب باید پذیرفت،که مفهوم فضای برداری به طور ضمنی در کارهای ریاضیدانان برجسته‌ای مشهود است.اما گراسمان نخستین ریاضیدانی است که صریحاً از «فضای برداری n بعدی» در کارهای تحقیقی خود نام برده است.

بعد یک فضای برداری بر روی هیأتی چون F، عدد اصلی یک پایهٔ دلخواه آن است. از همین روست که ابتدا باید وجود یک پایه برای فضای برداری اثبات شود، و آنگاه یکی بودن عدد اصلی پایه‌ها محقق گردد.این دو در نهایت با استفاده از لم تسورن و با انتخاب اسکالرها از یک هیأت و امکان عمل تقسیم میسر می‌شود.هنگامی که مفهوم یک فضای برداری به مدولها تعمیم داده می‌شود، اسکالرها، لزوماً از یک هیأت انتخاب نمی‌شوند و دیگر وجود پایه امری بدیهی نیست.مدولهای آزاد به دسته‌ای از مدولها اتلاق می‌شود که بر روی حلقه‌ای مفروض دارای پایه‌ای باشند.از این جهت. مدولهای آزاد را می‌توان نوعی تعمیم از فضاهای برداری دانست.با وجود این و با فرض آزادبودن مدول M بر روی حلقهٔ R، یکسان بودن عدد اصلی پایه‌ها مسئلهٔ دیگری است.گرچه این یکسانی در مورد دستهٔ بزرگی از حلقه‌ها وجود دارد، اما در حالت کلی چنین نیست [۱۳] و لذا امکان تعریف بعد یک مدول دلخواه، از این طریق وجود ندارد.

در بین سالهای ۱۹۵۸ تا ۱۹۶۰ میلادی به هنگام مطالعهٔ حلقهٔ خارج‌قسمتها، مفهومی به نام بعد گلدی یا بعد یکنواخت شکل گرفت که در قسمتهای وسیعی از نظریهٔ حلقه‌ها سودمند واقع شد.در این نوشتار به معرفی و توضیح بعد گلدی می‌پردازیم.همچنانکه خواهیم دید، بعد گلدی را می‌توان برای هر Rـ مدول M تعریف کرد.در بخش دوم، پس از مقدماتی، به تعریف بعد گلدی می‌پردازیم و مطالبی پیرامون آن عنوان خواهیم کرد.در آنجا زیر مدولهایی بنام زیر مدولهای یکنواخت که به راستی تعمیمی مناسب از زیر فضاهای یک بعدی هستند نقشی اساسی دارند. در بخش سوم، کاربرد بعد گلدی در نظریهٔ حلقه‌ها را که تضمین وجود حلقه‌های خارج قسمت برای دستهٔ بااهمیتی از حلقه‌های تعویض‌ناپذیر است، مورد بحث قرار می‌دهیم.در بخش پایانی اشاره‌ای کوتاه به بعد گلدی نامتناهی و تعمیم آن در شبکه‌های مدولی خواهیم داشت.تمام حلقه‌ها را یکدار می‌گیریم. مقصود از یک Rـ مدول، مدول راست می‌باشد.

۲. مدولهای با بعد گلدی متناهی

تعریف. گوییم Rـ مدول M دارای بعد گلدی متناهی است، هرگاه هیچ مجموع مستقیم نامتناهی از زیر مدولهای ناصفر آن وجود نداشته باشد.
بدیهی است که با تعریف فوق، هر Rـ مدول نوتری و از جمله هر فضای برداری با بعد متناهی، دارای بعد گلدی متناهی است.همچنین هر زیر مدول چنین مدولی دارای بعد گلدی متناهی خواهد بود.ملاحظه می‌شود همان‌طور که برای تعریف بعد متناهی یک فضای برداری ابتدا به طور کلی فضاهای برداری متناهی‌البعد تعریف می‌شوند، در تعریف بعد گلدی متناهی نیز به همین نحو عمل می‌شود.در اینجا لازم است بعضی مفاهیم اولیه را ذکر کنیم.

تعریف. گیریم M یک Rـ مدول و N یک زیر مدول آن باشد.در این صورت می‌نویسیم $N \leq M$.اگر به‌ازای هر زیر مدول ناصفر M مانند X داشته باشیم $N \cap X \neq \{0\}$، N را یک زیر مدول بزرگ M می‌نامیم و می‌نویسیم $N \leq' M$.

مثال ۱. اگر V یک فضای برداری باشد، V تنها زیر مدول بزرگ آن است.

در مورد زیرمدولهای بزرگ قضیهٔ زیر را متذکر می‌شویم.

قضیهٔ ۱.

یکم) اشتراک هر تعداد متناهی از زیر مدولهای بزرگ، یک زیر مدول بزرگ است.

دوم) اگر M_i $(1 \leq i \leq t)$، Rـ مدول باشد و $N_i \leq' M_i$، آنگاه $N_1 \oplus N_2 \ldots \oplus N_t \leq' M_1 \oplus M_2 \ldots \oplus M_t$.

سوم) اگر M یک Rـ مدول باشد و $N \leq M$، آنگاه $N' \leq M$ وجود دارد که

$$N \oplus N' \leq' M \quad \text{و} \quad N \cap N' = \{0\}$$

چهارم) Rـ مدول M تنها زیر مدول بزرگ M است اگر و تنها اگر M مجموعی مستقیم و متناهی از زیر مدولهای خود باشد.

اثبات.به اثبات قسمت سوم اکتفا می‌کنیم.اگر قرار دهیم

$$S = \left\{ X : X \leq M, N \cap X = \{0\} \right\}$$

به کمک لم تسورن می‌توان نشان داد که مجموعهٔ S دارای یک عنصر ماکسیمال مانند N' است.اگر Y یک زیر مدول M باشد و $Y \cap (N \oplus N') = \{0\}$، در این صورت زیر مدول $X = N' \oplus Y$ در شرط $N \cap X = \{0\}$ صدق می‌کند، لذا $Y = \{0\}$ و $N \oplus N' <' M$. زیر مدول N' را مکمل N در M می‌نامیم.هر زیر مدولی که مکمل یک زیر مدول باشد،زیر مدول مکمل نامیده می‌شود.

عناصر سازندهٔ یک فضای برداری، عناصر پایه‌های آن هستند؛ هر عنصر پایه نیز یک زیر فضای برداری با بعد یک پدید می‌آورد.از این قرار می‌توان زیر فضاهای یک بعدی را جایگزین عناصر پایه کرد؛ بدین ترتیب، مدولهای یکنواخت که اکنون به تعریف آنها می‌پردازیم، تعمیم زیر فضاهای یک بعدی خواهند بود.

تعریف. Rـ مدول U را یکنواخت می‌نامیم هرگاه $U \neq \{0\}$ و هر زیر مدول آن در U بزرگ باشد.

بدیهی است که تعریف فوق معادل آن است که U شامل مجموع مستقیمی از زیر مدولهای ناصفر خود نباشد (آیا فضاهای برداری با بعد یک چنین خاصیتی ندارند؟).

قضیه ۲. هر Rـ مدول M با بعد گلدی متناهی دارای یک زیر مدول یکنواخت است.

اثبات.اگر M یکنواخت باشد، اثبات بدیهی است ؛ در غیر این صورت M شامل مجموع مستقیمی از زیر مدولهای خود است:

$$M = M_0 \geq M_i \oplus M_i'$$

تکرار این استدلال برای M_1، M_2، ...، وجود مجموع مستقیم

$$M_1' \oplus M_2' \ldots$$

را نتیجه می‌دهد که به علت داشتن بعد گلدی متناهی، باید متناهی باشد و لذا یکی از M_kها باید یکنواخت باشد.

اکنون آخرین قضیه‌ای که ما را قادر به تعریف بعد گلدی می‌سازد بیان و ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۳. گیریم M یک Rـ مدول با بعد گلدی متناهی و $U_1 \oplus U_2 \ldots \oplus U_n$ یک مجموع مستقیم متناهی از زیر مدولهای یکنواخت M باشد که در M بزرگ است،در این صورت

یکم) هر مجموع مستقیم زیر مدولهای ناصفر M حداکثر دارای n جمعوند است.

دوم) یک مجموع مستقیم زیر مدولهای M در M بزرگ است اگر و تنها اگر شامل n جمعوند باشد.

اثبات. گیریم $M_1 \oplus M_2 \ldots \oplus M_k$ یک زیر مدول M باشد و به ازای هر i $(1 \leq i \leq k)$، $M_i \neq \{0\}$. قرار می‌دهیم $N = M_2 \oplus \ldots \oplus M_k$.این زیر مدول در M بزرگ نیست.بنابر قضیهٔ ۱ به ازای یک i $(1 \leq i \leq n)$ مثلاً $i = 1$ باید داشته باشیم $N \cap U_1 = \{0\}$؛ پس $M_2 \oplus \ldots \oplus M_k \oplus U_1$ یک جمع مستقیم است. پس از k بار تکرار نتیجه می‌گیریم که $k \leq n$. اثبات قسمت دوم تقریباً بدیهی است، زیرا اگر زیر مدولی در M بزرگ نباشد، دارای یک مکمل است که باید شامل یک زیر مدول یکنواخت باشد.

از قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود که برای مدولی با بعد گلدی متناهی مانند M، یعنی مدولی که شامل هیچ مجموع مستقیم نامتناهی از زیر مدولهای ناصفر خود نیست، یک کران بالا برای تعداد جمعوندهای مجموعهای مستقیم متناهی آن وجود دارد.این کران بالا یک عدد طبیعی است که آن را بعد گلدی یا بعد یکنواخت می‌نامیم و با $\mathrm{Gdim}M$ یا $\mathrm{Udim}M$ نشان می‌دهیم، پس،

$\mathrm{Gdim}M =$

$\sup\{k$: است M شامل مجموع مستقیم k زیر مدول ناصفر $M\}$

نتایج زیر بلافاصله به دست می‌آیند.

یکم) $\mathrm{Gdim}M = 0$ اگر و تنها $M = 0$

دوم) $\mathrm{Gdim}M = 1$ اگر و تنها اگر M یکنواخت باشد

سوم) اگر $N \leq M$ آنگاه $\mathrm{Gdim}N \leq \mathrm{Gdim}M$.تساوی برقرار است اگر و تنها N در M بزرگ باشد.

چهارم) $\mathrm{Gdim}\ M$ ماکسیمم طول زیر مدولهای مکمل M است.

نکته. می‌دانیم اگر دو فضای برداری بر روی یک هیأت ، بعدهای متناهی یکسان داشته باشند یکریخت هستند.اما اگر قرار دهیم $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ و $m = q_1 q_2 \ldots q_k$ که در آن p_i ها و q_i ها اعداد اول متمایز هستند، در این صورت $\mathrm{Gdim}\mathbf{Z}_n = \mathrm{Gdim}\mathbf{Z}_m$، با وجود این $\mathbf{Z}_n \not\cong \mathbf{Z}_m$.

نکته. مدولهای خارج قسمت یک Rـ مدول با بعد گلدی متناهی، لزوماً دارای بعد متناهی نیستند،مثلاً $\boldsymbol{Q}$ به‌عنوان یک $\mathbf{Z}$ـ مدول دارای بعد گلدی ۱ است، در صورتی که $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ دارای بعد گلدی متناهی نیست.

مثال ۲. اگر R یک حلقه و $\mathrm{Gdim}\,R = n$، در این صورت $M_m(R)$ حلقهٔ ماتریسهای $m \times m$ با درایه‌های متعلق به R، یک Rـ مدول است و $\mathrm{Gdim}\,M_m(R) = nm$.

اکنون قضیه‌ای را که مشابه قضیه‌ای معروف در مورد بعد فضاهای برداری است، بیان و ثابت می‌کنیم.

قضیه ۴. گیریم M یک Rـ مدول با بعد گلدی متناهی و M_1 و M_2 زیر مدولهای آن باشند، اگر $M_1 \cap M_2 = \{0\}$، آنگاه

$$\mathrm{Gdim}(M_1 \oplus M_2) = \mathrm{Gdim}\,M_1 + \mathrm{Gdim}\,M_2$$

اثبات. فرض کنیم $\mathrm{Gdim}\,M_1 = r_1$، $\mathrm{Gdim}\,M_2 = s$. در این صورت زیر مدولهای یکنواخت U_1، U_2، $\cdots$، U_r و همچنین زیر مدولهای یکنواخت V_1، V_2، $\cdots$، V_s وجود دارند به قسمی که $K_1 = U_1 \oplus U_2 \ldots \oplus U_r$ در M_1 و $K_2 = V_1 \oplus V_2 \ldots \oplus V_s$ در M_2 بزرگ هستند. کافی است نشان دهیم که $K_1 \oplus K_2$ در $M_1 \oplus M_2$ بزرگ است. به سادگی می‌توان نشان داد که

$$K_1 \oplus K_2 = (K_1 \oplus M_2) \cap (K_2 \oplus M_1)$$

می‌دانیم که $K_1 \cap M_2 = \{0\}$، پس X را مکمل K_1 در $M_1 \oplus M_2$ می‌گیریم که شامل M_2 است. به ویژه $K_1 \cap X = \{0\}$. اکنون می‌توان نشان داد که $M_1 \cap X = \{0\}$. اگر x یک عنصر X باشد، داریم $x = m_1 + m_2$ (m_1 به M_1 و m_2 به M_2 تعلق دارند) و لذا $x - m_2$ که برابر با m_1 است به $X \cap M_2$ تعلق دارد، پس $m_1 = 0$ و $x = m_2$. بنابراین $X \subseteq M_2$ و به علت ماکسیمال بودن X باید داشته باشیم $X = M_2$، و $K_1 \oplus X = K_1 \oplus M_2$ در $M_1 \oplus M_2$ است و در نتیجه $K_1 \oplus K_2 = (K_1 \oplus M_2) \cap (K_2 \oplus M_1)$ در $M_1 \oplus M_2$ بزرگ است.

نکته. می‌دانیم اگر V یک فضای برداری متناهی‌البعد بر روی هیأت F، و W_1 و W_2 زیر مدولهای آن باشند، آنگاه

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

همان‌طور که ملاحظه شد، حالتی را که در آن $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ می‌توان به بعد گلدی مدولهایی که دارای بعد گلدی متناهی هستند تعمیم داد. متأسفانه حالت کلی، دیگر برقرار نیست. در مرجع [۱] صفحهٔ ۲۹۴ در تمرین دوم به غلط گفته شده که دستور مشابهی برقرار است. در این مورد کمیلو موفق به اثبات قضیه زیر شده است.

قضیهٔ ۵. (کمیلو [۳]) گیریم $a \leq b \leq m$ سه عدد طبیعی دلخواه باشند، در این صورت حلقهٔ آرتینی موضعی R، Rـ مدول M و زیر مدولهای M_1 و M_2 وجود دارند که

$$\mathrm{Gdim}\,M_1 = a, M = M_1 + M_2$$
$$\mathrm{Gdim}\,M = m, \mathrm{Gdim}\,M_2 = b.$$

۳. حلقهٔ خارج قسمتها

اره [۱۲] در سال ۱۹۳۰ و آسانو [۲] در سال ۱۹۳۹ میلادی نظریهٔ حلقهٔ خارج قسمتها را پی‌ریزی کردند. اما این قسمت از نظریهٔ حلقه‌ها تا پایان دههٔ پنجم سدهٔ اخیر که مقاله‌های باارزشی از جانسن [۹]، اتومی [۱۶]، گلدی [۶ و ۷]، کروازو و لزیور [۴]، امبک [۱۰] و دیگران منتشر شد مورد توجه قرار نگرفت. پس از آن پیشرفتهای سریع و چشمگیری در این زمینه به دست آمد تا جایی که اکنون مطالعهٔ اصولی آن امکان‌پذیر گشته و اکثر مؤلفان کتابهای پیشرفتهٔ نظریهٔ حلقه‌ها، فصلهایی را به حلقهٔ خارج قسمتها اختصاص می‌دهند.

اولین مثالی که بی‌درنگ دربارهٔ حلقهٔ خارج قسمتها می‌توان ارائه داد، Q هیأت خارج‌قسمتهای یک قلمرو صحیح R است. این هیأت را می‌توان با دو ویژگی زیر مشخص کرد.

یکم) R یک زیرحلقهٔ Q است.

دوم) هر عنصر Q را می‌توان به شکل as^{-1} که a و s عناصر R هستند و $s \neq 0$ نوشت.

شیوهٔ ساختن Q طوری است که به‌سادگی می‌توان آن را به هر حلقهٔ تعویض‌پذیر تعمیم داد: به این منظور، مجموعهٔ S، متشکل از عناصر غیر مقسوم‌علیه صفر که تحت عمل ضرب بسته باشد، در نظر گرفته می‌شود. در این حالت می‌توان حلقهٔ خارج قسمتها، $R[S^{-1}]$ را شامل عناصری چون (a, s) دانست که $a \in R$ و $s \in S$، با این شرط که $(a, s) = (b, t)$ اگر و تنها اگر $U \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $Uat = Ubs$. به‌این ترتیب حلقهٔ $R[S^{-1}]$ ساخته می‌شود که علاوه بر صدق کردن در شرایط یکم و دوم، (با قید $s \in S$) هر عنصر $s \in S$ در آن وارون‌پذیر خواهد بود. [۱۵]

چنانچه R تعویض‌پذیر نباشد و S را یک مجموعهٔ بستهٔ ضربی از عناصر غیر مقسوم‌علیه صفر فرض کنیم، نمی‌توان $R[S^{-1}]$ را درست مانند حلقه‌های تعویض‌پذیر تعریف کرد، و وجود چنین حلقه‌ای منوط به برقراری شرط دیگری است:

«به‌ازای هر $a \in R$ و هر $s \in S$ عنصری مانند $b \in R$ و عنصری مانند $t \in S$ وجود داشته باشد که تساوی $at = sb$ برقرار گردد.»

با برقراری این شرط هر عنصر S در $R[S^{-1}]$ وارون‌پذیر است می‌شود و هر عنصر حلقهٔ راست خارج قسمتها را می‌توان به صورت as^{-1} که $a \in R$ و $s \in S$، نوشت. در حالتی که S مجموعهٔ تمام عناصری باشد که مقسوم علیه صفر نیستند، شرط اخیر را شرط (راست) ۱ره و $R[S^{-1}]$ را حلقهٔ راست خارج قسمتها می‌نامند. در صورتی که شرط (چپ) اره نیز برقرار باشد حلقهٔ چپ خارج قسمتها با حلقهٔ راست خارج قسمتها یکریخت است.

طبیعی‌ترین پرسش پس از طرح نکته‌های فوق، این است که حلقهٔ R چگونه باشد تا این حلقهٔ خارج قسمتها (راست یا چپ)، به‌شرط وجود، ساختمان شناخته شده‌ای داشته باشد، یا واجد شرایط مشخصی باشد. حلقه‌های نیم سادهٔ آرتینی به دلیل قضیه‌ای که ذیلاً بیان می‌کنیم می‌تواند چنین حلقه‌ای باشد. حلقهٔ نیم‌ساده، حلقه‌ای است که اشتراک همه ایده‌آلهای راست (یا چپ) آن ایده‌آل صفر باشد. حلقه‌های آرتینی به حلقه‌هایی اطلاق می‌شود که هر زنجیر کاهندهٔ ایده‌آلهای آن متناهی باشد.

قضیه.(آرتین ـ ودربورن) اگر R یک حلقهٔ نیم سادهٔ آرتینی باشد، آنگاه حلقه‌های تقسیم D_1، D_2، ...، D_k و اعداد طبیعی n_1، n_2، ...، n_k وجود دارند به طوری که

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \oplus M_{n_2}(D_2) \ldots \oplus M_{n_k}(D_k)$$

اعداد n_1، n_2، ...، n_k منحصر به فرد هستند و حلقه‌های تقسیم D_1، D_2، ...، D_k با تقریب یکریختی یکتا هستند.[۱۷ و ۱]

از آنجا که هر مجموع مستقیم و متناهی حلقه‌هایی از نوع $M_n(D_i)$، نیم ساده و آرتینی است، می‌توان گفت که حلقه‌های نیم سادهٔ آرتینی همان مجموع مستقیم و متناهی حلقهٔ ماتریسها با درایه‌های متعلق به یک حلقهٔ تقسیم هستند.

در بین سالهای ۱۹۵۸ تا ۱۹۶۰ میلادی، کروازو و لزیور [۴] مشترکاً و گلدی [۶ و ۷] به طور جداگانه موفق شدند حلقه‌هایی را که حلقهٔ خارج قسمتهای آن یک حلقهٔ نیم سادهٔ آرتینی باشند مشخص کنند.

قضیه (کروازو ـ لزیور ـ گلدی). حلقهٔ R دارای یک حلقهٔ خارج قسمتهای نیم سادهٔ آرتینی است اگر و تنها اگر در شرایط زیر صدق کند

یکم) حلقهٔ R شامل هیچ ایده‌آل پوچتوان مگر صفر نباشد،

دوم) هر زنجیر فزاینده از ایده‌آلهای راست، پوچساز متناهی باشد،

سوم) هیچ مجموع مستقیم نامتناهی از ایده‌آلهای راست ناصفر R وجود نداشته باشد.

شرط یکم در واقع تعریف حلقه‌های نیم اول است، یعنی حلقه‌هایی که اشتراک همهٔ ایده‌آلهای اول آن ایده‌آل صفر باشد.شرط دوم، شرط وجود زنجیری فزاینده را برای نوع خاصی از ایده‌آلهای راست، بیان می‌دارد: ایده‌آل راستی مانند A که به ازای آن یک زیر مجموعهٔ R مانند S وجود داشته باشد، به طوری که $A = A_{nn}S = \{r \in R : sr = 0 \forall s \in S\}$. حلقه‌های نوتری، به وضوح چنین شرطی را دارند.اگر R یک قلمرو صحیح باشد، حلقهٔ $R[x_1, x_2, \ldots]$ یعنی حلقهٔ چند جمله‌ایها با تعدادی شمارا متغیر، یک حلقهٔ غیر نوتری واجد شرط دوم است.شرط سوم را می‌توان به طور طبیعی برای هر Rـ مدول تعریف کرد و این همان است که مقدمات شکل‌گیری مفهوم زیر فضاهای یکنواخت و بعد گلدی را فراهم آورده است.

۴.بعد گلدی نامتناهی و تعمیم در شبکه‌های مدولی

مفهوم بعد گلدی را می‌توان به طور طبیعی برای هر R- مدول M تعریف کرد.بعد گلدی M، سوپرمم مجموعهٔ تمام اعداد اصلی مانند k است به قسمی که M شامل مجموع مستقیم k زیر مدول ناصفر باشد.این سوپرمم یک عدد اصلی است که در اینجا نیز با $\mathrm{Gdim}\ M$ نشان داده می‌شود.یک علت عدم توجه به حالت کلی ممکن است سختی کارکردن با اعداد اصلی باشد.از طرفی این پرسش نیز مطرح بوده است که آیا در Rـ مدول M با بعد گلدی a یک جمع مستقیم از a زیر مدول ناصفر وجود دارد یا خیر؟

دانس و فوکس مشترکاً نشان داده‌اند که برای دستهٔ بزرگی از اعداد اصلی که در اینجا از ذکر جزئیات آن صرف نظر می‌شود پاسخ این پرسش مثبت است [۵].

مفهوم بعد گلدی را می‌توان برای هر شبکهٔ مدولی تعریف کرد که بی‌جهت نمی‌دانیم به اختصار به توضیح آن بپردازیم.ابتدا چند تعریف را یادآوری می‌کنیم.

تعریف. شبکه، یک چهارتایی است مانند $\mathcal{L} = (L, \leq, \vee, \wedge)$ که در آن $(L, \leq)$ یک مجموعهٔ نیم مرتب است، و $\vee$ و $\wedge$ اعمال دوتایی هستند که در قوانین زیر صدق می‌کنند.

$$a \vee b \leq d \Longleftrightarrow (a \leq d \,\&\, b \leq d)$$

$$c \leq a \wedge b \Longleftrightarrow (c \leq a \,\&\, c \leq b)$$

$a \vee b$ و $a \wedge b$ را به ترتیب سوپرمم و اینفیمم a و b می‌نامیم.

در شبکه‌ها همواره فرض می‌کنیم ۰ و ۱ متعلق به L وجود دارند به قسمی که به ازای هر a متعلق به L

$$0 \leq a \quad \text{و} \quad a \leq 1$$

همچنین اگر a و b عناصر L باشند قرار می‌دهیم

$$[a, b] = \{x \in L : a \leq x \leq b\}$$

به وضوح $[a, b]$ یک زیر شبکهٔ L است و $L=[0,1]$.

تعریف. شبکهٔ $\mathcal{L} = (L, \leq, \vee, \wedge)$ را مدولی می‌نامیم هرگاه

$$c \leq b \Longrightarrow b \wedge (c \vee d) = c \vee (b \wedge d)$$

مثال. اگر M یک Rـ مدول باشد، در این صورت $\mathcal{L} = (L, \subseteq, \vee, \wedge)$ که در آن L مجموعهٔ تمام زیر مدولهای M است و

$$A \wedge B = A \cap B \qquad A \vee B = A + B$$

یک شبکهٔ مدولی است.

تعریف. گیریم $\mathcal{L} = (L, \leq, \vee, \wedge)$ یک شبکهٔ مدولی و a یک عنصر L باشد.گوییم a در L بزرگ است اگر به ازای هر عنصر ناصفر L مانند x داشته باشیم $a \wedge x \neq 0$.چنانچه هر عنصر ناصفر L در $\mathcal{L}$ بزرگ باشد $\mathcal{L}$ را یک شبکهٔ یکنواخت می‌نامیم.

تعریف زیرمجموعهٔ $I \subseteq L - \{0\}$ را مستقل توأم می‌نامیم هرگاه به ازای هر زیر مجموعهٔ نامتناهی I مانند X، اگر x یک عنصر $I - X$ باشد داشته باشیم $\bigvee X \wedge x = 0$ که در آن $\bigvee X$ سوپرمم تمام عناصر مجموعهٔ متناهی X است.

قضیه (گرسوزک ـ پوزیلوسکی) [۸]. چهار شرط زیر در مورد شبکهٔ $\mathcal{L} = (L, \leq, \vee, \wedge)$ هم‌ارز هستند،

یکم) L شامل هیچ مجموعهٔ نامتناهی مستقل توأم نیست.

دوم) L شامل یك مجموعهٔ مستقل توأم $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ است به قسمی که $a_1 \vee a_2 \ldots \vee a_n$ در $\mathcal{L}$ بزرگ است و شبکه‌های $[0, a_i]$ برای هر $1 \leq i \leq n$ یکنواخت است.

سوم)

$\sup\{k :$ L شامل زیرمجموعه‌ای مستقل توأم با k عنصر است$\}$
$= n$

چهارم) برای هر دنبالهٔ $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ از عناصر L یك j وجود دارد که به ازای هر $k \geq j$، a_j در $[0, a_k]$ بزرگ است.

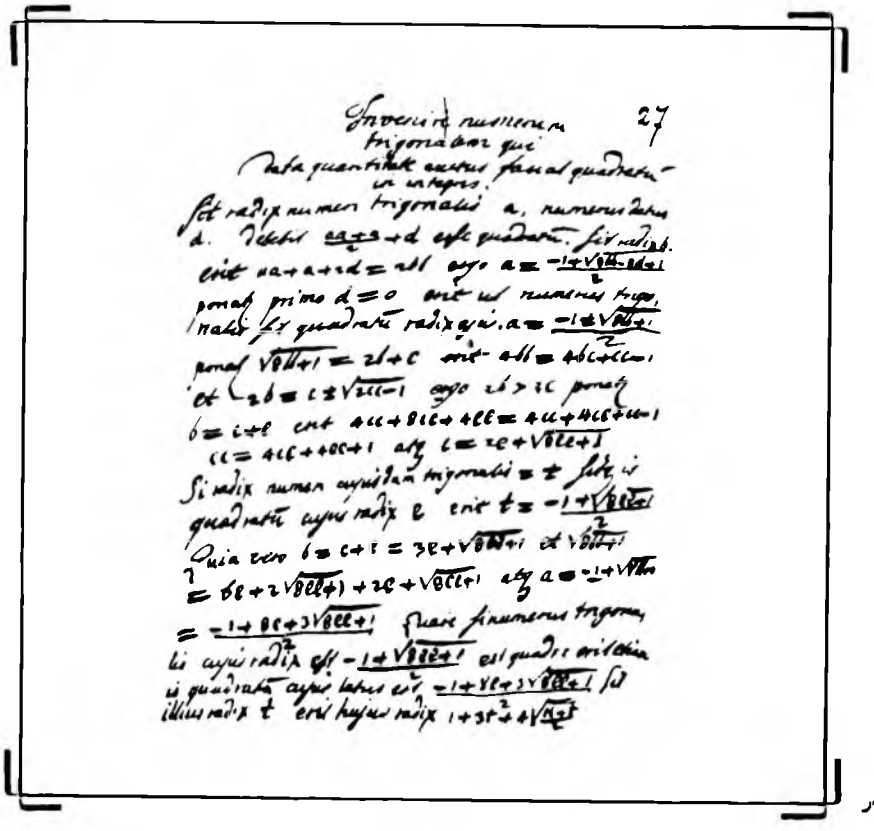
عدد n در قسمت سوم قضیهٔ فوق را بعد گلدی شبکهٔ $\mathcal{L}$ می‌نامیم.

مراجع

1. F. W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer - Verlag (1974).
2. K.E.Asano, "Arithemetische Idealtheorie innichtkcommutiven Ringen" *Japan.J.Math*, **15** (1939)1-36.
3. V.P.Camilo, "On a conjecture of Herstein", *J.Algebra*, **50**(1978) 274-275.
4. R.Croisot, L.Lesieur, "Sur les anneaux premier a gauch," *Ann. Sci.E'col Norm.Sup.*, **76** (1959)161-183.
5. J.Dauns and L.Fuchs., "Infinite Goldie dimension," *J.Algebra*, **155**(1988)297-302.
6. A.W.Goldie, "The structure of prime rings under ascending chain conditions,"*Proc.London Math.Soc.*,VIII(1958)589-608.
7. A.W.Goldie,"Semiprime rings with maximum condition," *Proc. London Math.Soc.*, X(1960)201-220.
8. P. Grzesczuk, and E. R. Puczylowski,"On infinite Goldie dimension of modular lattices and modules,"*J. Pure Applied Algebra*, **35** (1985) 151-155.
9. R.E.Johnson, "The extended centeralizer of a module,"*Proc. Amer.Math.Soc*,**2**(1951)891-895.
10. J.Lambek:"On the structure of semiprime rings and their rings of quotients," *Cand.J.Math.***13**(1961)237-244.
11. J. C-MConell and J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, J. Wiley & Sons (1987).
12. O. Ore, "Linear equation in non commutative fields." *Ann.of Math.*,**32** (1930) 463-477.
13. R.Peinado,"Note on modules", *Math.Mag.*, **37**(1964)266-267.
14. L.Rowen, *Ring Theory*, vol 1 Academic Press (1988).
15. B.Stenström,*Rings of Quotients.*,Springer Verlag (1975).
16. Y.Utumi,"On quotient rings," *Osaka Math.J.*,(1956)8-18.
۱۷. معتمدی، م. آشنایی با نظریهٔ حلقه‌ها. اهواز: انتشارات دانشگاه شهید چمران، ۱۳۶۷.

****

* منصور معتمدی، بخش ریاضی دانشگاه اهواز



دستنویسی از اویلر

آیندهٔ ریاضیات در روسیه

دگرگونیهای چند سال اخیر شوروی که آزادی سفر به خارج و مشکلات اقتصادی فراوان را در پی‌آورد، باعث شد که حتی قبل از فروپاشی کامل این کشور، گروه انبوهی از دانشمندان و از جمله ریاضیدانان به غرب مهاجرت کنند.این جریان که هنوز هم ادامه دارد، نگرانی زیادی را در محافل ریاضیدانان روسیه در مورد سرنوشت علم ریاضی در این کشور ــ که زمانی از اعتبار جهانی برخوردار بود ــ پدید آورده است.

در مجلهٔ *متمتیکال اینتلیجنسر*، شمارهٔ ۱ سال ۱۹۹۲، نظر سه تن از ریاضیدانان روس دربارهٔ راههای برون رفت از این بحران چاپ شده است.این نظرها در سالهای ۱۹۹۰ و ۱۹۹۱ (قبل از فروپاشی کامل شوروی) ابراز شده ولی هنوز هم تازگی دارد. *اینتلیجنسر* در جستجوی پاسخ این سؤال است که «چه‌کار باید کرد تا اتحاد شوروی تبدیل به جایی شود که ریاضیدانان نخواهند از آنجا مهاجرت کنند». ترجمهٔ مطلب را در زیر می‌خوانید.

اولین بخش این اظهار نظرها، خلاصه‌ای است از بحث ورشیک (Vershik) و ویرو (Viro) در کنفرانس رهبران علمی در بارهٔ «علم در دوران گذار به بازار آزاد» که در اکتبر ۱۹۹۰ در لنینگراد برگزار شد.

آ. م. ورشیک در حال حاضر استاد دانشگاه سن پترزبورگ (لنینگراد سابق) است و در رشته‌های گوناگونی از قبیل نظریهٔ عملگرها، نظریهٔ ارگودیک، تحدب، و نظریهٔ نمایش مطالعه و تحقیق کرده است.

او. یا. ویرو متخصص توپولوژی بعد پایین و توپولوژی واریته‌های جبری است. او در حال حاضر رئیس بخش هندسه و توپولوژی در شاخهٔ سن پترزبورگ مؤسسهٔ ریاضی استکلف است.

ورشیک: ریاضیات ما حیثیت زیادی در سراسر جهان به دست آورده است. ریاضیدانان اتحادشوروی از اعتبار بسیار برخوردارند.منظورم این نیست که به خودمان تبریک بگوییم بلکه می‌خواهم این واقعیت را یادآوری کنم که نظام کلی اقتصاد دولتی و متمرکز و مسائل ناشی از آن، در ریاضیات به اندازهٔ (مثلاً) زیست‌شناسی اثر مخرب نداشته است.

دلیلش این است که کار ریاضی کیفیتی مخصوص به خود دارد و ریاضیدان می‌تواند فقط با قلم وکاغذ امورش را بگذراند، گرچه مسلماً ارتباط با همکاران هم لازم است. تماسهای بین‌المللی، ولو فقط به صورت مکاتبه، در بدترین دوره‌ها هم قطع نشد.این تماسها ما را تقویت می‌کرد و مبنایی به دست ما می‌داد که ببینیم در چه سطحی هستیم.

در این کشور، استعداد زیادی وجود دارد.استعداد ریاضی از همه بارزتر است و بیشتر به چشم می‌خورد. گرچه فقط بخشی ازکسانی که استعدادی از خود بروز می‌دادند، می‌توانستند آموزش ریاضی ببینند، ولی همین مقدار هم برای ادامهٔ جریان ریاضیات کافی بوده است.

ویرو: درآموزش ریاضی درلنینگراد، که شاید در جهان منحصر به فرد باشد، ما سنّت باشگاههای ریاضی را داریم که معلمان آنها، شاگردانی هستند که خود ازاین‌گونه باشگاهها فارغ‌التحصیل شده‌اند.شاگردان لنینگرادی همواره در المپیادهای شوروی و بین‌المللی از بهترین شاگردان بودند.به‌خصوص، در شاخهٔ ریاضیات فرهنگستان علوم در لنینگراد، حدود ۹۰٪ از اعضای زیر چهل سال از این نظام بیرون آمده بودند: باشگاهها، المپیادها، و مدرسه‌های ریاضی.

این نظام، به دلیل اتکا به افراد معدودی که در هر سال باشگاهها را می‌گردانند، متزلزل است.همین امروز با مدرسان جوان این باشگاهها صحبت می‌کردم؛ آنها می‌گویند وضع از همان قرار است که در زمان تحصیل آنها بوده است.این باشگاهها فعلاً در"کاخ پیشگامان" استقرار دارند و به پایگاهی

در مرکز شهر نیازمند هستند.

ورشیک: لازم می‌دانم شرحی از وضع بسیار خطرناکی که با آن روبه‌رو شده‌ایم،بدهم. دوران شکوفایی ریاضیات در شوروی به سرعت به پایان خود نزدیک می‌شود.

به‌طورکلی ما با مسائلی در مورد انتقال به اقتصاد آزاد و تغییر وضع کلی کشور مواجه هستیم، ولی مسائل ما منحصر به اینها نیست. مسلماً مسائل بازار برای ما تازگی دارند و باید مورد توجه قرارگیرند ولی معضلات دیگری نیز داریم که از شیوه‌های ادارهٔ جامعه در چند دههٔ گذشته ناشی می‌شوند و به هیچ وجه ربطی به بازار ندارند.اگر بخواهیم بفهمیم که جریان اوضاع از چه قرار است، باید این را در نظر داشته باشیم.

اجازه بدهید به مشکلاتی اشاره کنم که ریاضیات ما از گذشته به ارث برده و فشار فزایندهٔ آنها را در آینده نیز حس خواهیم کرد.

نخست اینکه در کشور ما، ریاضیات (مانند همهٔ علوم دیگر) به طرزی غیر لازم متمرکز شده است. ما فرهنگستان علوم، چند مؤسسهٔ وابسته به فرهنگستان، و دانشگاهها را داریم. بیشترین فعالیت ریاضی ما در دو، سه و شاید پنج مکان متمرکز است. در جاهای دیگر متخصصانی هستند،ولی به طور استثنایی. اگر این وضع را مثلاً با ایالات‌متحده مقایسه کنید می‌بینید که کاملاً غیرطبیعی است. در آمریکا، علاوه بر حدود ده دانشگاه تراز اول، حدود سی دانشگاه دیگر هست که آنها هم تقریباً در همان سطح قرار دارند.

درلنینگراد، شاخهٔ ریاضیات فرهنگستان علوم فوق‌العاده قوی است ولی اساساً رقیبی ندارد و اکنون نقش آن به دلایل گوناگون روبه کاهش گذاشته است.درنتیجه، کل سیستم رو به افول می‌گذارد زیرا چیز دیگری وجود ندارد.دانشگاه، به خصوص پس از انتقال به پترهوف، تأثیر خودش را بر حیات علمی شهر از دست می‌دهد.

مسألهٔ دیگری هم هست که باید مورد توجه قرارگیرد.در فرهنگستان علوم، و به خصوص در بخش ریاضی، نیروهایی وجود داشته‌اند که جلو پیشرفت طبیعی کار را می‌گرفته‌اند.خوشبختانه، مدیران جوانی جای آنها را گرفته‌اند که دارند وضع را تغییر می‌دهند.ولی مسائلی چون ضدیت با یهود، و ناکامی در جذب افراد بااستعداد به کار تدریس و تصمیم‌گیری، پیامدهایی داشته‌اند که تا چندین دهه با آنها درگیر خواهیم بود.این مسائل، خیلیها را وادارکرده است که آنجا را ترک کنند، و به از هم پاشیدن تیمهای علمی انجامیده است.هیچ عذری برای سکوت در این باره وجود ندارد.

ما در حال حاضر در یک وضع بحرانی هستیم.عزیمت متخصصان برای کارکردن در کشورهای دیگر، خطری واقعی در بردارد.این عزیمت به دلیل علاقهٔ دانشمندان به مهاجرت نیست بلکه آنها فقط می‌خواهند زندگی کنند.آیا می‌توان چنین کسانی را سرزنش کرد؟ این امر کاملاً طبیعی است؛ مقامهای مسؤول موانع رفتن به خارج را برداشته‌اند و متأسفانه، این جریان به تضعیف ریاضیات در حدی باور نکردنی انجامیده است.

ویرو: نسل میانهٔ ریاضیدانان، از ۳۵ تا ۴۵ ساله، به سرعت در حال مهاجرت‌اند.قبلاً ممکن بود کسی برای مدت یک سال برود ولی حالا کسانی که برای اقامت یکساله می‌روند، سال بعد و سالهای بعد هم می‌مانند.این جریان، زیان عظیمی برای کل جامعهٔ ریاضی است.باید گامهایی برداشت تا این بخش از فرهنگ جهانی حفظ شود.

در مورد کسانی که برای کارکردن به غرب می‌روند، بخشی از مشکل به قوانین فعلی مربوط می‌شود که مانع از بازگشت آنها می‌شوند.مثلاً به درآمد بیشتر از ۳۰۰۰ روبل، ۶۰٪ مالیات تعلق می‌گیرد.پس از تبدیل ارز غربی به روبل، مالیات زیادی باید پرداخت.شخص نمی‌خواهد چنین مالیاتی بپردازد و بنابراین، برنمی‌گردد.

ورشیک: اولین پیشنهاد ما این است که باید مؤسسه‌ها و دانشگاههای دیگری باشند که برمبنای اصول و سیاستهای جدید ــ از جمله حضور متخصصانی از خارج ــ تأسیس شوند و با مؤسسات فعلی رقابت کنند. در این زمینه از طرح تأسیس دانشگاه ریاضی بین‌المللی می‌توان نام برد (که نباید آن را با مؤسسهٔ بین‌المللی اویلر که اخیراً تأسیس شده و وظایف دیگری دارد اشتباه کرد).

در لنینگراد تعداد زیادی ریاضیدان بااستعداد هستند که خوب آموزش دیده‌اند ولی موقعیت شغلی مناسبی ندارند و اوقات فراغت خود را صرف کارکردن در ریاضیات نظری در دانشگاه و مؤسسه می‌کنند.در میان این گنجینهٔ استعدادها که استفادهٔ کافی از آنها نمی‌شود، عده‌ای از شاگردان من هم هستند.باید برای آنها جایی در سیستمهای دیگر بیابیم.

قبل از عرضهٔ پیشنهاد بعدی، اشاره‌ای به تاریخ گذشته می‌کنم.زمانی ریاضیدانان لنینگراد خیلی بیشتر از امروز به تحقیقات کاربردی و سایر علوم می‌پرداختند.همین شاخهٔ ریاضیات فرهنگستان علوم در لنینگراد، وقتی آکادمیسین یو.و.لینیک و آکادمیسین ل.و.کانتورویچ در آنجا بودند، با مهندسان به صورتهای گوناگون ارتباط و مشاوره داشت.این سنت واقعاً از میان رفته است و با نابودی آن، ما چیز مهمی را از دست داده‌ایم.برای حفظ و ارتقای علم، باید ارتباطات دانشمندان با کسانی که در کار تولیدند بیشتر شود.متأسفانه، اتحادشوروی در این زمینه چیزی را که در آمریکا دیده می‌شود ندارد، یعنی یک گروه بزرگ واسطه بین مهندسان و ریاضیدانان نظری، که بتواند مسأله‌ای را برای ریاضیدان صورتبندی کند و نیز نیازهای تکنولوژی را بفهمد.در استنفرد یا ام.آی.تی، این نوع ارتباط، قوی و مؤثر است؛ دانشگاه نه تنها یک مؤسسهٔ آموزشی بلکه یک تولید کننده است.

یکی از مسائل قابل طرح، آموزش درمدارس فنی است. در این مدارس، اکثریت قاطع مدیران (و نیز سایر دست‌اندرکاران) بخشها، ریاضیکار حرفه‌ای نیستند.و این امر مانع از آن می‌شود که حتی عدهٔ کمی از افراد چنان آموزش ببینند که هم معلومات ریاضی و هم اطلاعات کاربردی داشته باشند.

یک اقدام مطلوب دیگر، اعطای تسهیلات مالی براساس «داوری همقطاران» است.مشکل ما کمبود وجوه تخصیص یافته برای علوم نبوده بلکه اشکال در توزیع آن بوده است.در شیوهٔ رایج در اینجا، شخصی که کار می‌کند هیچ‌گونه آزادی در دادن پول ندارد.

اجازه بدهید دوباره از آمریکا مثال بیاورم (به‌نظرم بهتر است از یک چیز معقول موجود پیروی کنیم تااینکه بی‌مطالعه چیزی را در ذهن بسازیم و بعد ببینیم بد است).در آنجا می‌توانید موضوعی را انتخاب کنید و از بنیاد ملی علوم تقاضای حمایت مالی کنید.دست کم پنج داور، که برای بنیاد ملی علوم کار نمی‌کنند، گزارشهایی دربارهٔ کار شما می‌نویسند.اگر به تعداد کافی گزارش مثبت در مورد کارتان به دست آورید، یک کمک مالی به شما ــ شخص شما ــ تعلق می‌گیرد.(یک جنبهٔ خوب این قضیه این است که درصدی از کمک مالی به دانشگاه شما تعلق می‌گیرد.بنابراین، به نفع دانشگاه است که استادانش را وادارکند از این کمکها بگیرند در حالی که در اینجا دانشگاه هیچ فایدهٔ مالی از استادانش نمی‌برد.) دانشمندی که کمک را دریافت می‌کند

برای دعوت از همکاران، مسافرت و مخارج متفرقه، پول خرج می‌کند.من از افراد دربارهٔ عملکرد این شیوه و بیطرفانه بودن «داوری همقطاران» سؤال کردم.بیشتر افراد موافق این شیوه بودند.البته طبیعی است که در این مورد محتاط باشیم؛ شخص باید به‌قدر کافی ارزیابیهای مستقل داشته باشد تا با چیزی که مورد توجه همه است مخالفت کند.

دومین بخش این مطلب، نظر ا.ل.ت.بوکوت است که به تاریخ ژوئن ۱۹۹۱ برای مجلهٔ اینتلیجنسر نوشته شده.بوکوت رئیس یکی از بخشهای مؤسسهٔ ریاضی فرهنگستان سیبریه در نووسیبرسک است.

متشکرم که از من دعوت کردید تا در این باره نظر بدهم که «چه کار باید کرد تا اتحادشوروی تبدیل به جایی شود که ریاضیدانان نخواهند از آن مهاجرت کنند.» من از این دعوت مفتخرم و آن را به عنوان شناسایی فعالیتهای ریاضی در سیبریه به حساب می‌آورم.از جملهٔ این فعالیتها، برگزاری کنفرانس بین‌المللی جبر به یادبود مالتسف در نووسیبرسک در ۱۹۸۹ بود و از ۱۹۸۷ به بعد دوره‌های سالانهٔ جبر و آنالیز در سیبریه برگزار شده است.

من دعوت شما را با خوشحالی پذیرفته‌ام ولی می‌دانم که چقدر مشکل است دربارهٔ مهاجرت وسیع و انبوه ریاضیدانان روس به غرب حرف سازنده و ثمربخشی بزنم.عوامل مؤثر در این مهاجرت فقط اقتصادی و سیاسی نیست بلکه ملی هم هست.آیا روسهای مقیم غرب احساس علاقه‌ای به وطن و تمایلی به کمک به هموطنان دارند؟ خیلی از ما (از جمله خود من) امیدواریم چنین باشد.فرهنگستان علوم طبیعی روس (RANS) که اخیراً تأسیس شده است، اعلام کرد به یاری و همکاری دانشمندان و هنرمندان خلاق روس که در خارج زندگی می‌کنند امیدوار است.منظور این فرهنگستان از «روس» از فهرست کسانی که به عضویت افتخاری خود پذیرفته، مشخص می‌شود: افرادی از قبیل سولژنتسین، برودسکی، روستروپویچ و منوهین. بوریس یلتسین رئیس جمهور روسیه بارها از روسهایی که در خارج زندگی می‌کنند یاری خواسته است.حالا عدهٔ بسیار زیادی مهاجر روس ــ روسها، یهودیان روسی، و دیگران ــ در کشورهایی چون اسرائیل، فرانسه، آمریکا، و کانادا زندگی می‌کنند.من در نوامبر گذشته در اسرائیل بودم و اطلاع دارم که خیلیها در آنجا علاقه‌مندند روابط خاصی با روسیه داشته باشند.در ماه مه گذشته، در امریکا با عده‌ای از روسها ـ از نسل اول و دوم مهاجران روس ـ ملاقات کردم و شاهد احساسات گرم آنها نسبت به کشورمان بودم.

باید گفت که دانشگاهها و ریاضیدانان غربی اهتمام زیادی در حفظ ریاضیات روسیه و فراهم آوردن شرایط مناسب کار برای بهترین ریاضیدانان روس دارند.برای کسانی که مهاجرت نکرده‌اند، سفرهای کم و بیش منظم به خارج این امکان را فراهم می‌کند که احساس منزوی شدن و دور ماندن از ریاضیات جهانی را نداشته باشند و به بهبود وضع مالی آنها هم کمک می‌کند.میزان افزایش این سفرها بیشتر از آن حدی است که فقط نتیجهٔ سیاستهای میخائیل گورباچف باشد.به عنوان مثال، پس از کنفرانس مالتسف که قبلاً ذکر کردم، برای دهها تن از جبردانها از شهرهای دانشگاهی سراسر روسیه و جمهوریهای دیگر، ترتیب سفرهایی به خارج داده شد.این خودش کمک فوق‌العاده‌ای است.هم باعث می‌شود از نتایج جدید مهم آگاهی یابیم و هم خیلیها را از فقر نجات می‌دهد.بعید است ریاضیدانان غربی بتوانند کاری بیش از این برای ریاضیدانان روس انجام بدهند.

ولی داستان به همین جا ختم نمی‌شود.همان‌طور که کنفرانس مالتسف (با بیش از ۲۰۰ شرکت کنندهٔ خارجی) نشان می‌دهد، هر چه ارتباطهای شخصی بین روسها و خارجیها بیشتر باشد، روسها بیشتر به خارج سفر خواهند کرد.پس ما در سیبریه نباید از فعالیت خود در زمینهٔ برگزاری کنفرانسهای بین‌المللی بکاهیم (من حتی می‌گویم که هیچ لزومی ندارد کنفرانسهای کاملاً داخلی ترتیب بدهیم).در ماه اوت امسال (۱۹۹۱) در بارنوال دومین کنفرانس جبر به یاد شیروف تشکیل خواهد شد و بلافاصله بعد از آن، پنجمین دورهٔ جبر و آنالیز سیبریه (با حضور شرکت کنندگان خارجی) در بایکال تشکیل می‌شود و سال آینده درهمین محل، ششمین دورهٔ بین المللی جبر و آنالیز برگزار خواهد شد.ما امیدواریم سومین کنفرانس بین‌المللی درزمینهٔ جبر را در ۱۹۹۳ (احتمالاً درکراسنویارسک) تشکیل دهیم.این فعالیتها فقط به سیبریه محدود نیست: مؤسسهٔ بین‌المللی اویلر در لنینگراد گشایش یافته است؛ در شهر مینسک در ماه مه امسال کنفرانسی کوچک ولی فوق‌العاده پربار در زمینهٔ گروههای جبری برگزار شد.در مسکو، از مه تا ژوئن، اجلاسی بین‌المللی به مناسبت پنجاهمین سال برگزاری سمینار پتروفسکی تشکیل شد، و غیره.

در حال حاضر، در جستجوی محلی دائمی برای برگزاری دوره‌های سالانهٔ جبر و آنالیز هستیم.پیشنهادی از یکی از شرکتهای سیبریه‌ای دریافت کرده‌ایم که حاضر است هتل مخصوصی برای کنفرانسها در بایکال بسازد ــ نوعی اوبروولفاخ سیبریه‌ای ــ که چشم‌انداز فریبنده‌ای است! این پروژه از ریاضیات فراتر می‌رود و در خدمت همهٔ علوم در روسیه خواهد بود.

پروژهٔ بین‌المللی دیگری که در سیبریه شروع کرده‌ایم، ترتیب دادن دوره‌های ریاضیات عالی سیبریه (به زبان انگلیسی) است.هدف از این کار این است که دانشجویان کارشناسی ارشد و دکتری، هم از کشورهای صنعتی و هم از کشورهای در حال رشد، بتوانند با هزینه‌ای مناسب دوره‌ها و سمینارهایی در نووسیبرسک و سایر شهرهای دانشگاهی سیبریه بگذرانند.بسیاری از ریاضیدانان از این پروژه حمایت کرده‌اند و یک نهاد دولتی یعنی شاخهٔ سیبریه‌ای آکادمی وزارت روابط اقتصادی خارجی آماده است آن را اجرا کند.

راهنمای درخواست اشتراک

خواهشمندیم قبل از تنظیم فرم اشتراک به موارد زیر توجه فرمایید:

۱.هر سال سه شماره منتشر می‌شود.
۲.بهای هر شماره ۶۰۰ ریال
۳.بهای اشتراک سالانه ۱۸۰۰ ریال
۴.هزینه پستی مجله‌های ارسالی به خارج از کشور جداگانه محاسبه می‌شود.
۵.لطفاً بهای اشتراک مجله را با مراجعه به یکی از بانکها در سراسر کشور به حساب جاری ۹۰۰۰۹ بانک ملی، شعبه خیابان پارک، کد ۱۸۳، به نام مرکز نشر دانشگاهی واریز و رسید آن را همراه با فرم تکمیل شده به نشانی:تهران، خیابان شهید بهشتی، خیابان پارک، شماره ۸۵، کد پستی ۱۵۱۳۴ و صندوق پستی ۴۷۴۸ ـ ۱۵۸۷۵، حوزهٔ بازرگانی ـ امور مشترکین بفرستید (تلفن:۶۲۴۶۵۲)
۶.در صورت تغییر نشانی لطفاً بی‌درنگ موضوع را به بخش اشتراک مجله اطلاع دهید.

ما مشغول تهیهٔ آگهی مربوطه برای ارائه به نشریهٔ نوتیسز انجمن ریاضی آمریکا هستیم.

گفتم که تماس با غرب برای ما اهمیت خاصی دارد. در عین حال، به نظر ما، سیبریه مرکزی طبیعی برای ارتباط بین ریاضیدانان روس و ریاضیدانان چین، ژاپن، هند، کرهٔ جنوبی، ویتنام، مغولستان، و سایر کشورهای آسیاست. من به این وسیله از خوانندگان هنتیکال اینتلیجنسر در دانشگاههای این کشورها دعوت می‌کنم در یکی از برنامه‌هایی که ما اعلام می‌کنیم شرکت کنند و در طرحهای مشترک آتی با ما همکاری کنند. مثلاً آیا یک دانشگاه یا مؤسسهٔ ژاپنی حاضر نیست طرح «اوبروولفاخ سیبریه‌ای» را که قبلاً گفتم اجرا کند؟ چنین مؤسسه‌ای در عوض کمک خود می‌تواند شرکت‌کنندگانی به کنفرانسهای ریاضی یا سایر کنفرانسها در بایکال بفرستد. توسعهٔ روابط ما با کشورهای آسیایی به علت کمبود تماسهای شخصی دچار مشکل است. ما امیدواریم این وضع با گذشت زمان بهتر شود. پس از برگزاری کنفرانس مالتسف، چندین ریاضیدان روس برای شرکت در کنفرانس ریاضیات آسیایی (۱۹۹۰) به هنگ‌کنگ دعوت شدند. چنین تماسهایی خیلی برای ما ارزشمند است. در مورد قاره‌های دیگر باید بگویم سنتی وجود داشته که ریاضیدانان روس در کشورهای افریقایی مختلفی تدریس کنند. تاکنون موجبات این کار به وسیلهٔ ارگانهای دولتی فراهم می‌شده ولی من فکر می‌کنم انجمنهای ریاضی نیز می‌توانند ترتیب این کار را بدهند. در حال حاضر، در فکر گسترش روابط خود با ریاضیدانان آمریکای جنوبی، استرالیا و زلاند جدید هستیم.

یکی از چیزهایی که خیلی برای ریاضیدانان ما ارزشمند است، برنامهٔ انجمن ریاضی آمریکا برای ترجمهٔ متنهای روسی است. این برنامه، انتشار ترجمهٔ مجله‌ها، کتابها، مقاله‌ها، و گزارشهای کنفرانسها، دوره‌ها، و سمینارها را در برمی‌گیرد. همچنین ترجمه‌هایی به وسیلهٔ ناشران زیادی در آمریکا، آلمان، بریتانیا، هلند، سنگاپور و جاهای دیگر صورت می‌گیرد. باید تأکید کرد که این کار نه تنها به سود روسها بلکه به سود تمام ملتهای نامبرده است.

فکر دیگری هم مطرح است و آن تأسیس دانشگاه بین‌المللی مسائل در نووسیبرسک است. این طرح را نسبت به طرحهای قبلی باید پروژهٔ قرن نامید. شاید این فکر با همکاری مجدانهٔ رهبران در همهٔ کشورهای علاقه‌مند در همین قرن قابل تحقق باشد.

من از آن بیم دارم که بیش از حد دربارهٔ موضوعات خاص صحبت کرده باشم حال آنکه شاید در این نوشته بهتر می‌بود به موضوعات کلیتر بپردازم. همکارانم از من انتقاد کرده‌اند که دربارهٔ فشار کار تدریس در دانشگاهها و مؤسسات روسیه (۲۰ تا ۲۵ ساعت در هفته، و حتی بیشتر) چیزی نگفته‌ام و نیز از کاهش بودجهٔ فعالیتهای علمی که از طریق فرهنگستان علوم تأمین می‌شود ذکری نکرده‌ام (هزینهٔ فرهنگستان از محل بودجهٔ فدرال تأمین می‌شود و به علت «جنگ بودجه» که بین حکومت مرکزی و جمهوریها در جریان است، ما فعلاً از حمایت مالی چندانی برخوردار نیستیم)، و از این قبیل مسائل. اگر اتحادیهٔ مستقلی از دانشمندان و معلمان دوره‌های پس از متوسطه وجود می‌داشت باید این‌قبیل موضوعات را مورد بحث قرار می‌داد. (البته در روسیه اتحادیه‌ای از دانشگاهیان وجود دارد که در دوران زندگی آندری ساخاروف پایه‌ریزی شد.)

به‌هر حال من نمی‌توانم همهٔ مشکلات را در این مختصر ذکر کنم. توجه من در این مقاله معطوف به کارهایی بوده است که خود ریاضیدانان می‌توانند برای حفظ ریاضیات در روسیه انجام دهند. من با نظر ویرو موافقم که در کنگرهٔ بین‌المللی کیوتو (۱۹۹۰) اظهار داشت: اضمحلال ریاضیات روس، ضایعه‌ای برای کل تمدن خواهد بود. امیدوارم بیشتر خوانندگان اینتلیجنسر با این نظر موافق باشند.

ترجمهٔ سیامک کاظمی

فرم درخواست اشتراک

با ارسال برگه بانکی شماره ..... مورخ ..... به مبلغ ..... ریال
تقاضای اشتراک مجلهٔ ریاضی از شماره ..... الی ..... سال ..... را دارم.
خواهشمند است مجلات درخواستی را به نشانی زیر بفرستید.
نام و نام خانوادگی: (حروف به تفکیک در جدول آورده شود)

نام:

نام خانوادگی:

نشانی:

کد پستی ..... صندوق پستی ..... تلفن ..... امضا

مهره‌ها، توپها و دیوارها: تحلیل یک بازی ترکیبیاتی *

ریچارد اندرسن، جوئل اسپنسر، شموئل وینوگراد
پیتر شور، لاسلولواش، اواتاردوش *
ترجمهٔ محمدصادق منتخب

۱. مقدمه

در این مقاله "بازی" بسیار ساده‌ای را بررسی می‌کنیم که به شرح زیر است. تعدادی مهره [به شکل مهره‌های تخته نرد] در ستونهایی روی هم چیده شده‌اند به طوری که ستونها در یک ردیف قرار دارند. در هر واحد زمان، هر یک از ستونها به دو نیم می‌شود و نصف آن به ستون سمت چپی و نصف دیگر به ستون سمت راستی افزوده می‌گردد. اگر تعداد مهره‌های موجود در ستونی فرد باشد، یکی از مهره‌های ستون ساکن می‌ماند، و بقیه به طوری مساوی تقسیم می‌شوند. اگر تعداد مهره‌ها کم باشد، می‌توان این بازی را به آسانی بر روی یک صفحهٔ کاغذ شبیه‌سازی کرد. این بازی می‌تواند در خلال سخنرانیهای طولانی یا گردهماییهای اعضای دانشکده موجب رفع خستگی شود. می‌توان فرایند اجرای این بازی را به صورت برنامه‌ای برای کامپیوترهای شخصی نیز تدوین کرد و برخی از پدیده‌هایی را که در اینجا شرح می‌دهیم به بهترین وجه و به طور "زنده" بر یک پایانهٔ کامپیوتری ملاحظه کرد.

می‌خواهیم ببینیم که اگر این بازی را فقط با استفاده از یک ستون مهره آغاز کنیم، چه اتفاقی می‌افتد. نمونه‌های کوچک به آسانی با دست قابل بررسی‌اند. به عنوان مثال، به ازای ۵ مهره داریم

		5		
	2	1	2	
1	0	3	0	1
1	1	1	1	1

پس از سه حرکت، ۵ ستون متوالی یک مهره‌ای به دست می‌آوریم، و بنابراین، حرکت دیگری انجام‌پذیر نیست. مثال بزرگتر زیر نیز به نتیجهٔ مشابهی ختم می‌شود:

				9				
			4	1	4			
		2	0	5	0	2		
	1	0	3	1	3	0	1	
	1	1	1	3	1	1	1	
	1	1	2	1	2	1	1	
	1	2	0	3	0	2	1	
	2	0	2	1	2	0	2	
1	0	2	0	3	0	2	0	1
1	1	0	2	1	2	0	1	1
1	1	1	0	3	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

با توجه به مثالهایی که با دست قابل بررسی‌اند، طبیعی است حدس بزنیم که، اگر وضعیت آغازی شامل فقط یک ستون متشکل از $2n+1$ مهره باشد، آنگاه آرایش نهایی مشتمل بر $2n+1$ ستون متوالی یک مهره‌ای خواهد بود. نخستین نتیجه‌گیری ما نشان می‌دهد که این حدس واقعاً صحیح است. مسألهٔ بعدی تعیین تعداد حرکتهای لازم برای نیل به آرایش نهایی است. اگر با $2n+1$ مهره شروع کنیم، می‌توانیم تعداد حرکتهای انجام شده را میان αn^2 و βn^2 محدود کنیم. به هنگام بررسی مثالهای بزرگتر، با الگوهای بسیاری مواجه می‌شویم. معلوم می‌شود که میان این الگوها و برخی از معادله‌های دیفرانسیل رابطه‌ای وجود دارد که به تعبیرهای جالب توجهی از مسأله می‌انجامد.

اگر تعداد مهره‌های ستون iام در لحظهٔ t را به صورت $a_{i,t}$ نشان دهیم، می‌توانیم این "بازی" را به صورتی ریاضی تعریف کنیم. شرطهای آغازی به

وسیلهٔ مقدار $a_{i,0}$ داده می‌شوند. توجه ما عمدتاً معطوف به حالتی است که در آن، $a_{0,0} = m$ و به ازای هر $i \neq 0$ ، $a_{i,0} = 0$.در این صورت، به ازای $t \geq 1$ ، مقدار $a_{i,t}$ از دستور

$$a_{i,t} = \left[\frac{a_{i-1,t-1}}{2}\right] + \left[\frac{a_{i+1,t-1}}{2}\right] + (a_{i,t-1} \bmod 2)$$

به دست می‌آید.مادامی که ستونی متشکّل از حداقل ۲ مهره موجود باشد، حرکتهایی می‌توان انجام داد.آرایش نهایی، وضعیّتی است که در آن، هر یک از ستونها حداکثر دارای یک مهره باشند.

برای مطالعهٔ مسألهٔ حرکت مهره، بازی به ظاهر کلیّتری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.در این بازی نیز با ستونهایی از مهره‌ها سر و کار داریم که در یک ردیف چیده شده‌اند.ولی در اینجا منظور از یک حرکت، انتخاب ستونی با حداقل دو مهره و انتقال یکی از مهره‌ها به راست و دیگری به چپ است.چه بسا در یک زمان بیش از یک حرکت امکان‌پذیر باشد.به این ترتیب، دنباله‌ای از حرکتها در بازی جدید به وجود می‌آید که نتیجهٔ آن با نتیجهٔ فقط یک حرکت در بازی قبلی یکسان است، و بنابراین، بازی قبلی را می‌توان به وسیلهٔ بازی جدید شبیه‌سازی کرد.مع‌الوصف، ممکن است وضعیّت نهایی در بازی جدید به ترتیب انجام شدن حرکتها بستگی داشته باشد.نشان خواهیم داد که ترتیب گرچه اهمیتی ندارد، کمک خواهد کرد تا با استفاده از بازی جدید به مطالعهٔ بازی قبلی بپردازیم.

۲.وضعیّت نهایی

بحث‌مان را با اثبات چند ویژگی سادهٔ دنبالهٔ حرکتها و آرایش نهایی آغاز می‌کنیم.به ویژه، باید نشان دهیم که بازی بالاخره به وضعیّتی می‌رسد که دیگر حرکتی نمی‌توان انجام داد.

در بقیهٔ این بخش فرض می‌کنیم که آرایش اولیه متشکّل از $2n + 1$ مهره واقع در مبدأ باشد.

لم ۱. ممکن نیست دو ستون تهی متوالی داشته باشیم که ستونهایی ناتهی در طرفین آنها باشند.

اثبات. فرض کنید ستونهای x و $x + 1$ تهی بوده مهره‌هایی در طرفهای راست و چپ آنها وجود داشته باشند.هر دوی x و $x + 1$ باید زمانی ناتهی بوده باشند.فرض کنید $x + 1$ دیرتر از x تهی شده باشد.در این صورت، لازم می‌آید که مهره‌هایی از $x + 1$ برداشته شده و یکی از آنها در x گذاشته شده باشد.نتیجه می‌شود که x بعد از تهی‌شدن $x + 1$ هنوز ناتهی بوده است، که متناقض با فرض است.
■

لم ۲.فقط ستونهایی می‌توانند مهره دریافت کنند که شمارهٔ آنها بین $-4n$ و $4n$ باشد.

اثبات. چون حداکثر یک فاصلهٔ خالی میان دو ستون ناتهی متوالی وجود دارد، این $2n + 1$ مهره می‌توانند در دامنه‌ای با حداکثر $4n + 1$ ستون پخش شوند.همین که نخستین حرکت صورت بگیرد، همواره مهره‌هایی در هر دو طرف ستون شمارهٔ ۰ موجود خواهند بود، و بنابراین، دامنه بایستی در داخل $[-4n, 4n]$ باشد.
■

اکنون که نشان داده‌ایم دامنه محدود است، نشان می‌دهیم که تعداد حرکتها نیز محدود می‌باشد.

لم ۳.تعداد حرکتها محدود به $32n^3 + 16n^2$ است.

اثبات. فرض کنید که به ازای هر i، تعداد مهره‌های موجود در ستون iام مساوی a_i باشد، و $\sum_i a_i i^2$، یعنی، مجموع مربعهای فاصله‌ها از مبدأ را در نظر بگیرید.حداکثر مقدار این مجموع وقتی است که همهٔ مهره‌ها در $-4n$ و $4n$ باشند، و در این صورت، این مجموع مساوی $32n^3+16n^2$ است.با هر حرکت، این مجموع دقیقاً به اندازهٔ ۲ افزایش می‌یابد.با هر انتقال از ستون i، عنصرهایی به ستونهای $i - 1$ و $i + 1$ افزوده و دو عنصر از ستون i کاسته می‌شود.تغییر حاصل از این انتقال در مجموع، مساوی $(i+1)^2 + (i-1)^2 - 2i^2 = 2$ است.بنابراین، تعداد حرکتها نمی‌تواند بیشتر از $16n^3 + 8n^2$ باشد، چه در غیر این صورت، مجموع از حداکثر مقدار خود تجاوز خواهد کرد.
■

قضیه ۱. وضعیّت نهایی مستقل از ترتیب انجام شدن حرکتهاست.

اثبات. کلید اثبات این است که اگر انجام دادن دو حرکت همزمان ممکن باشد، آنگاه ترتیب انجام دادن آنها اهمیتی ندارد.فرض کنید که هر دو موضع x و y دارای حداقل دو مهره باشند.اگر فاصلهٔ میان x و y بیش از یک باشد واضح است که انجام شدن حرکتها به ترتیب xy یا yx منجر به نتیجهٔ یکسانی خواهد شد.تنها حالتی که امکان تداخل میان حرکتها وجود دارد، وقتی است که فاصلهٔ میان آنها یک باشد، یعنی $x = y + 1$ یا $x = y - 1$.مع‌الوصف، ترتیب حرکتها به هر صورت که باشد، یعنی xy یا yx، موجب کاسته شدن از x و y به اندازهٔ یک و افزوده شدن به ستونهای واقع در طرفین به اندازهٔ یک می‌شود.

$$\begin{array}{ccccccccc}
- & \underset{x}{-} & \underset{y}{-} & - & \overset{x}{\Longrightarrow} & \underset{-}{+1} & \underset{x}{-2} & \underset{y}{+1} & - \\
 & & & & \overset{y}{\Longrightarrow} & \underset{-}{+1} & \underset{x}{-1} & \underset{y}{-1} & \underset{-}{+1} \\
- & \underset{x}{-} & \underset{y}{-} & - & \overset{y}{\Longrightarrow} & - & \underset{x}{+1} & \underset{y}{-2} & \underset{-}{+1} \\
 & & & & \overset{x}{\Longrightarrow} & \underset{-}{+1} & \underset{x}{-1} & \underset{y}{-1} & \underset{-}{+1}
\end{array}$$

اکنون نشان می‌دهیم که از ویژگی تعویض‌پذیری حرکتها، یکتابودن آرایش نهایی نتیجه می‌شود.آرایش B را تالی آرایش A می‌گوییم اگر دنباله‌ای از حرکتها وجود داشته باشد به طوری که آرایش A را به آرایش B تبدیل کند.آرایشی را که دیگر نتوان حرکتی در آن صورت داد، یک آرایش نهایی می‌گوییم.فرض کنید که حداقل دو آرایش نهایی وجود داشته باشد.همچنین فرض کنید A آرایشی است که در میان تالیهایش دو آرایش نهایی وجود دارند ولی هر تالی

سرهٔ A فقط یک آرایش نهایی در میان تالیهایش دارد.تصورکنید A' و A'' تالیهای بلافصلی از A باشند که تالیهای نهایی متفاوتی داشته باشند.نتیجه می‌شود که A' و A'' نمی‌توانند دارای تالی مشترکی باشند.فرض کنید A' در نتیجهٔ حرکت x از A و A'' در نتیجهٔ حرکت y به دست آمده باشند.آرایش B راکه در نتیجهٔ حرکتهای xy (یا حرکتهای هم‌ارز yx) از A به دست آمده است، در نظر بگیرید.چون B تالی هردوی A' و A'' است، به تناقض می‌رسیم.

■

با در اختیار داشتن قضیهٔ فوق، می‌توانیم وجود وضعیت نهایی را برای یک ورودی مفروض ثابت کنیم.اگر با $2n+1$ مهره در مبدأ آغازکنیم، آرایش نهایی عبارت از $2n+1$ ستون متوالی با اندازهٔ یک است که موضعهای از $-n$ تا n را اشغال کرده باشند.برای اثبات این امر می‌توانیم به دنبالهٔ ویژه‌ای از حرکتها که به آسانی قابل بررسی است، متوسّل شویم.

قضیهٔ ۲.اگر با ستونی به اندازهٔ $2n+1$ در موضع صفر آغاز کنیم آنگاه وضعیت نهایی متشکل از ستونهایی با اندازهٔ ۱ در موضعهای از $-n$ تا n خواهد بود.

اثبات. دنباله‌ای از حرکتها راکه منجر به آرایشهای میانی زیر می‌شوند، در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 2n+1 & & & \\ & & 1 & 2n-1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 2n-3 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 2n-5 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

فرض کنید به وضعیتی رسیده باشیم که ۳ را در موضع ۰ و j تا ۱ را در هر طرف ۳ داشته باشیم.در هر مرحله، همهٔ حرکتهای مجاز را به طور همزمان انجام می‌دهیم.الگو عبارت است از

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 1 & \\ & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & \\ & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

در این آرایش، ناحیه‌ای از یکهای متوالی و ناحیه‌ای از ۲ها و ۰ها به طور متناوب وجود دارد.۲ها و ۰ها با حرکت خود به سمت انتهای فهرست موجب افزایش طول آن می‌شوند، و سپس با بازگشت خود دنباله‌ای از یکهای متوالی برجای می‌گذارند.

اکنون می‌توانیم با ثابت گرفتن مهره‌های ستون صفر بجز سه تا از آنها، آرایشی متشکّل از $2j-1$ در موضع ۰ و j تا یک در هر طرف آن را به آرایشی متشکّل از $2(j+1)-1$ در موضع صفر و $j+1$ تا یک در هر طرف آن تبدیل کنیم.با تکرار این فرایند، می‌توانیم از $2n+1$ در موضع صفر به $2n+1$ یک متوالی برسیم.

■

هم‌اکنون حالتی را بررسی کردیم که در آن، با تعدادی فرد از مهره‌ها آغاز می‌کنیم.توجه کنید که در این دنباله از حرکتها، یکی از مهره‌ها در ستون صفر هرگز حرکت نمی‌کند.بنابراین، فقط با ندیده گرفتن مهره‌ای که همیشه در موضع صفر واقع است، می‌توانیم حالت زوج را نیز در نظر بگیریم.اگر کار را با $2n$ مهره آغاز کنیم، در پایان کار n مهرهٔ متوالی در موضعهای $-n$ الی ۱- داریم، موضع ۰ تهی خواهد بود، و n مهرهٔ متوالی دیگر در موضعهای ۱ الی n خواهیم داشت.

۳.مدت زمان اجرا

اکنون که می‌دانیم آرایش نهایی چیست، به بازی اولیه که در آن همهٔ حرکتها به طور همزمان انجام می‌پذیرند، باز می‌گردیم.می‌خواهیم ببینیم که برای رسیدن به آرایش نهایی به چه مقدار زمان نیازمندیم.نخست با دو استدلال ساده ثابت می‌کنیم که اگر با $2n+1$ مهره در موضع ۰ آغاز کنیم، آنگاه تعداد مرحله‌های مورد نیاز برای نیل به آرایش نهایی ناکمتر از $n^2/3$ و نابیشتر از n^2 است.

لم ۴.اگر آرایش اولیه متشکل از $2n+1$ مهره در موضع صفر باشد، آنگاه تعداد مرحله‌های لازم برای نیل به آرایش نهایی حداقل مساوی $n^2/3$ است.

اثبات.مانند لم ۳، مجموع $\sum_i a_i i^2$ را در نظر می‌گیریم.مقدار این مجموع در پایان کار درست مساوی $n(n+1)(2n+1)/3$ است.هر زوج از عنصرها که حرکت داده شوند، مجموع به اندازهٔ ۲ افزایش می‌یابد.بنابراین، بر اثر یک حرکت، مجموع می‌تواند حداکثر به اندازهٔ $2n+1$ افزایش یابد.پس، تعداد حرکتها حداقل مساوی $n(n+1)/3$ است.

■

اکنون کران بالایی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد که می‌توان با حداکثر n^2 مرحله به آرایش نهایی رسید.برای اثبات وجود چنین کرانی، به اندکی اطلاعات بیشتر دربارهٔ تعداد مهره‌های ستونها نیازمندیم.نخست توجه می‌کنیم که در هر مرحلهٔ زمانی زوج، حرکتها فقط از ستونهای با شماره‌های زوج صورت می‌گیرند، و در هر مرحلهٔ زمانی فرد، حرکتها فقط از ستونهایی با شماره‌های فرد انجام می‌پذیرند.ستونهایی را، که از آنها حرکتهایی رخ می‌دهد، فعال می‌نامیم.نمونه‌ای از یک آرایش میانی یک بازی چیزی شبیه

$$1\ 0\ 2\ 1\ 3\ 0\ 6\ 1\ 7\ 0\ 9\ 0\ 7\ 1\ 6\ 0\ 3\ 1\ 2\ 0\ 1$$

است.تعداد مهره‌های هر ستون برحسب فاصله از مبدأ، کاهش می‌یابد.شرطی رسمی که تعداد مهره‌های هر ستون در آن صدق می‌کند عبارت است از

قضیه ۱.اگر زمان زوج باشد دنباله‌های $a_0, a_2, a_4, \cdots$ و $a_0, a_{-2}, a_{-4}, \cdots$ غیر صعودی‌اند.اگر زمان فرد باشد دنباله‌های $a_1, a_3, a_5, \cdots$ و $a_{-1}, a_{-3}, a_{-5}, \cdots$ غیر صعودی‌اند.

اثبات این قضیه را به بعد موکول می‌کنیم.یک نتیجهٔ بلاواسطهٔ این قضیه این است که پیش از نیل به آرایش نهایی، تعداد مهره‌های ستون صفر را

نمی‌توان در یک مرحلهٔ زمانی زوج به فقط یک مهره تقابل داد.

لم ۵. اگر آرایش اولیه متشکل از $2n+1$ مهره در موضع صفر باشد، آنگاه با n^2+n حرکت می‌توان به آرایش نهایی دست یافت.

اثبات. مجموع $\sum_i a_i \mid i \mid$ را در نظر می‌گیریم. مقدار نهایی این مجموع درست n^2+n است. تنها حرکتهایی که این مجموع را افزایش می‌دهند آنهایی هستند که از موضع ۰ صورت می‌گیرند. در هر مرحلهٔ زمانی زوج، حداقل دو مهره از ستون صفر بیرون آورده می‌شوند، و بنابراین، مجموع حداقل به اندازهٔ ۲ افزایش می‌یابد. بنابراین، این مجموع بایستی تا زمان n^2+n از n^2+n فراتر رود. ■

لم ۶. تعداد مهره‌ها در ستونهای فعال نسبت به فاصله از مبدأ نزولی است.

اثبات. لم را فقط در مورد ستونهایی که شمارهٔ نامنفی دارند ثابت می‌کنیم، زیرا در مورد طرف دیگر مبدأ، آن را می‌توان بنا به تقارن نتیجه گرفت. اثبات به استقراست. نشان می‌دهیم که اگر حکم به ازای زمان مفروضی برقرار باشد، در واحد زمانی بعدی نیز برقرار است. کلید این اثبات، اتخاذ فرضی مناسبی برای استقراست، که در واقع، قویتر از نتیجه‌ای است که در این لم مد نظر ماست. نشان می‌دهیم که به ازای $i \geq 0$، اگر i و $i+2$ در زمان t فعال باشند، آنگاه $a_{i,t} \geq a_{i+2,t}$، و اگر $a_{i,t} = a_{i+2,t}$، آنگاه $a_{i+1,t}$ از نظر زوجیت [زوج بودن یا نبودن] با $a_{i,t}$ و $a_{i+2,t}$ همخوان است. بنابراین، ۸، ۰، ۸ و ۹، ۱، ۹ دنباله‌هایی قابل قبول‌اند، ولی ۸، ۱، ۸ و ۹، ۰، ۹ قابل قبول نیستند. (توجه کنید که چون $a_{0,t}$ همیشه فرد است، لزومی ندارد که $a_{0,t}$ با $a_{-1,t}$ و $a_{1,t}$ از نظر زوجیت همخوانی داشته باشد.)

حکم در زمان ۰ که تنها ستون ناتهی ستون ۰ است، به وضوح برقرار است. فرض کنید حکم در زمان $t-1$ برقرار باشد، نشان می‌دهیم که در زمان t نیز برقرار است. به برهان خلف متوسّل می‌شویم؛ بنابراین فرض کنید که i و $i+2$ ستونهایی فعال در زمان t باشند، ولی $a_{i,t} < a_{i+2,t}$. چون $a_{i-1,t-1} \geq a_{i+3,t-1}$، تعداد مهره‌هایی که i از $i+1$ دریافت کرده است حداقل مساوی با تعدادی است که $i+2$ از $i+3$ دریافت نموده است. ستونهای i و $i+2$ نیز تعداد یکسانی مهره از $i+1$ دریافت کرده‌اند. بنابراین، $a_{i,t} < a_{i+2,t}$ وقتی می‌تواند برقرار باشد که $a_{i,t-1} = 0$ و $a_{i+2,t-1} = 1$. برای اینکه i همان تعداد مهره از $i-1$ دریافت کند که $i+2$ از $i+3$ می‌کند، باید یکی از این دو حالت برقرار بوده باشد: یا $a_{i-1,t-1} = a_{i+3,t-1}$ و یا $a_{i-1,t-1} = a_{i+3,t-1}+1$. در هر دو حالت، مادامی که $i \neq 0$، شرط زوجیت در زمان $t-1$ نقض می‌شود. چون نشان داده‌ایم که $a_{i,t-1} = 0$، حالت $i = 0$ را نیز به این ترتیب رد کرده‌ایم پس، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $a_{i,t} \geq a_{i+2,t}$.

اکنون باید نشان دهیم که شرط زوجیت در زمان t نیز برقرار است. فرض کنید برقرار نباشد. دو حالتی را، که ممکن است این شرط نقض شود در نظر می‌گیریم.

۱) $a_{i,t} = a_{i+2,t}$، $a_{i,t}$ زوج است و $a_{i+1,t} = 1$.

برای اینکه چنین حالتی رخ بدهد، لازم است که $a_{i+1,t-1} = a_{i,t+1}$. ولی در آن صورت $a_{i-1,t-1} = a_{i+1,t-1}$، وگرنه، لازم می‌آید که $a_{i,t}$ بزرگتر باشد. بنابراین، بایستی $a_{i,t} = 0$. این نتیجه به ازای $i = 0$ ممکن نیست، و به ازای $i > 0$ با شرط زوجیت سازگار نیست.

۲) $a_{i,t} = a_{i+2,t}$، $a_{i,t}$ فرد است و $a_{i+1,t} = 0$. در این صورت می‌توانیم نتیجه بگیریم که $a_{i+1,t-1} = a_{i,t}-1$. مع‌الوصف، از این نتیجه می‌شود که، $a_{i+3,t-1} = a_{i+1,t-1}$ و $a_{i+2,t-1} = 1$، که متناقض با شرط زوجیت است.

بنابراین، در هر یک از دو حالت، نقض زوجیت در زمان t ناشی از نقض زوجیت در زمان $t-1$ است.

اکنون کران بالای بهتری برای تعداد حرکتهای لازم باری ارائه می‌کنیم. این کران بالا نیز با استفاده از مجموع $\sum ia_i \mid i \mid$ به دست می‌آید و مبتنی است بر تحلیل دقیقتری از آهنگ رشد مجموع مزبور برای به دست آوردن یک کران بهتر.

قضیهٔ ۳. اگر آرایش اولیهٔ مهره‌ها متشکل از $2n+1$ مهره در موضع صفر باشد آنگاه تعداد مرحله‌های لازم برای نیل به آرایش نهایی حداکثر $(\pi^2/6-1)n^2+O(n)$ است.

اثبات. فرض کنید $S^1 = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i i$. در آغاز $S^1 = 0$ و در پایان $S^1 = (1/2)(n^2+n)$. مقدار تغییر S^1 در زمان t مساوی $[a_{0,t}/2]$ است. بنابراین، هرچه a_0 بزرگتر باشد، S^1 سریعتر رشد می‌کند. با نشان دادن این مطلب که این مجموع بایستی به میزانی معقول رشد کند، کران بالایی برای زمان کل به دست می‌آوریم.

یک کوچکترین مقدار ممکن برای S^1 وجود دارد به طوری که $a_0 = 2k-1$ (با توجه به شرط غیر صعودی بودن ستونها). این مقدار، مقداری از S^1 است که در صورت پخش شدن "یکنواخت" مهره‌ها با استفاده از حداقل تعداد ممکن از ستونها به دست می‌آید. پس $a_0 = a_2 = \cdots = a_{2j} = 2k-1$، $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2j+1} = 1$، و به ازای r با ضابطهٔ $r \leq 2k-1$، $a_{2j+2} = r$. این مقدار S^1 را به صورت $\hat{S}$ نشان می‌دهیم. مقدار j مساوی $j = [n-k/2k]$ است.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{j}(2i+1) + (2k-1)\sum_{i=1}^{j} 2j + (2j+2)r \\ &= 2kj^2 + (2k+2r+1)j + 2r + 1 \\ &\geq 2k\left(\frac{n-k}{2k} - 1\right)^2 \\ &\geq \frac{n^2}{2k} - 3n. \end{aligned}$$

بنابراین، اگر $S^1 < (n^2/2k) - 3n$، آنگاه $a_0 \geq 2k+1$. در حالی که $n^2/(2n+2) - 3n \leq S^1 < (n^2/2k) - 3n$، S^1 به ازای هر دو مرحله، حداقل به اندازهٔ k افزایش می‌یابد، و بنابراین، زمان لازم میان $n^2/(2k+2) - 3n$ و $(n^2/2k) - 3n$ حداکثر

$$n^2\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}\right)\frac{2}{k} = \frac{n^2}{k^2(k+1)}$$

است.می‌توانیم به کمک جمع نسبت به k، کران بالایی به دست آوریم.بایستی $7n$ را نیز اضافه کنیم زیرا دامنهٔ از $(n^2/2) - 3n$ تا $(n^2/2) + 3n$ را به حساب نیاورده‌ایم.بنابراین، کران b برابر است با

$$n^2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2(k+1)} + 7n = n^2 \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k+1)} \right) + 7n$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) n^2 + 7n < 0{,}65n^2 + 7n$$

■

۴.یک تعبیر فیزیکی

اکنون به بیان رابطه‌ای میان این بازی و یک معادلهٔ دیفرانسیل می‌پردازیم.با استفاده از این رابطه خواهیم توانست نشان دهیم که اگر n به بینهایت میل کند، به ازای ثابت c ی معیّنی، تعداد حرکتها مساوی $cn^2 + o(n^2)$ است.این رابطه را می‌توان به منظور استخراج کرانهای بهتری برای ثابت c به کار برد.این معادلهٔ دیفرانسیل از بررسی الگویی که پس از تقریباً n مرحلهٔ بازی حاصل می‌شود، به دست می‌آید.با تقریب زدن رفتار این الگو با یک معادلهٔ دیفرانسیل، می‌توانیم تقریبی از تعداد مرحله‌ها به دست آوریم که با افزایش n بهتر می‌شود.

این الگو را می‌توان به سادگی توصیف کرد.گرچه تعیین نقطهٔ دقیق ظهور آن مشکل است، ولی تا زمانی که تفاضل تعداد مهره‌های ستونهای همجوار فعّال، حداکثر ۳ نشود، این الگو حاصل نخواهد شد، و اندکی پس از آن ظاهر می‌شود.به خاطر داشته باشید که بنا به لم ۶، تعداد مهره‌های واقع در ستونهای فعّال با افزایش فاصله از مبدأ کاهش می‌یابد.وقتی تعداد مهره‌های واقع در مبدأ کم می‌شود، باید ستونهای متعدّدی با تعداد مساوی مهره موجود باشند.اثبات لم ۶ نشان می‌دهد که اگر تعداد مهره‌ها در دو ستون فعّال همجوار یکی باشد، آنگاه، برحسب فرد یا زوج بودن تعداد مهره‌های این دو ستون، ستون غیر فعّال واقع در میان آنها داری یک یا صفر مهره خواهد بود.بنابراین، بایستی ناحیه‌های طویلی حاوی ستونهای فعال با تعداد مهرهٔ یکسان موجود باشند، و بنابراین یک وضعیّت نمونه‌وار به صورت

$$\ldots, 2k+1, 1, 2k+1, 1, 2k+1, \ldots, 2k, 0, 2k, 0, 2k, \ldots,$$
$$2k-1, 1, 2k-1, 1, 2k-1, \ldots$$

خواهد بود.

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که هر ناحیه‌ای که در آن، ستونها متناوباً $2k+1$ مهره‌ای و ۱ مهره‌ای (یا $2k$ مهره‌ای و ۰ مهره‌ای) باشند، ثابت می‌ماند؛ بنابراین کُل فعالیّت بایستی به مرزهای ناحیه‌ها محدود شود.معلوم می‌شود که در هر مرحله، بسته به زوجیتهای نسبی در مرزهای ناحیه‌ها، مرز به اندازهٔ یک موضع به سمت چپ یا به سمت راست حرکت خواهد کرد، یا ساکن خواهد ماند.در مثال زیر، قسمتی از وضعیّت به ازای $n = 175$ را نشان می‌دهیم.

به طوری که ملاحظه می‌شود، مرزهای متحرّک الگوی زیبایی از مثلثها به وجود می‌آورند.برای توضیح این الگو لازم است رفتار دقیق همهٔ مرزهای میان ناحیه‌ها را بدانیم.به آسانی می‌توان همهٔ حالتها را بررسی کرد زیرا تعدادشان زیاد نیست.نتیجه می‌گیریم که مرز میان هر دو ناحیه که شامل ستونهای فعالی به اندازهٔ $2k+1$ و $2k$ هستند ساکن است، و مرز میان ناحیه‌های شامل ستونهایی به اندازهٔ $2k$ و $2k-1$، برحسب اینکه ستون غیر فعّال میان آنها شامل صفر یا یک مهره باشد، به‌ترتیب به مبدأ نزدیک یا از مبدأ دور خواهد شد.وقتی مرز متحرّکی با مرزی ساکن برخورد کند، منعکس می‌شود و مرز ساکن به اندازهٔ یک ستون آن طرف‌تر می‌رود.به عنوان مثال، در زیر مرز متحرّکی میان $2k$ و $2k-1$ که با مرز ساکنی میان $2k+1$ و $2k$ برخورد می‌کند، ملاحظه می‌شود.آرایهٔ سمت چپی نمایشگر یک آرایش نمونه‌وار به ازای $k = 4$، و آرایهٔ دست راستی نمایشگر مرز حرکت یافته است.

9	1	9	1	8	0	8	0	7	—	—	—	—	—	—	—	—	<	—
1	9	1	9	0	8	0	7	1	—	—	—	—	—	—	<	—	—	—
9	1	9	1	8	0	7	1	7	—	—	—	—	—	<	—	—	—	—
1	9	1	9	0	7	1	7	1	—	—	—	—	<	—	—	—	—	—
9	1	9	1	7	1	7	1	7	—	—	—	>	—	—	—	—	—	—
1	9	1	8	1	7	1	7	1	—	—	—	—	>	—	—	—	—	—
9	1	9	0	8	1	7	1	7	—	—	—	—	—	>	—	—	—	—
1	9	1	8	0	8	1	7	1	—	—	—	—	—	—	>	—	—	—
9	1	9	0	8	0	8	1	7	—	—	—	—	—	—	—	>	—	—

اگر به مرزها به چشم "توپ" و"دیوار" نگاه کنیم، می‌توانیم این الگو را به طریقی "فیزیکی" تعبیر کنیم.فرض کنید هر مرز متحرّک یک توپ و هر مرز ساکن یک دیوار باشد.در این صورت، یک توپ همیشه به اندازهٔ یک موضع در هر مرحله حرکت می‌کند.اگر توپی به دیواری برخورد کند، دیوار به اندازهٔ یک موضع عقب‌نشینی می‌کند، و توپ تغییر جهت داده از دیوار دور می‌شود.به‌آسانی معلوم می‌شود که اگر دو توپ به طور همزمان با دیواری برخورد کنند، آنچه که باید بشود، می‌شود:هردوی توپها تغییر جهت می‌دهند و دیوار تکان نمی‌خورد.اگر الگوها را به‌ناحیه‌های میان دیوارها تجزیه کنید، ناحیهٔ مرکزی تنها ناحیه‌ای است که توپی در آن نیست.از اینجا قاعدهٔ دیگری برای تعیین کامل وضعیت بازی به دست می‌آید:اگر دو دیوار در مرکز به هم برسند، هر دو ناپدید می‌شوند (عین رفتاری که توپهای واقع در ناحیه‌های همجوار دارند).

اکنون تعداد معیّنی دیوار داریم که توپهایی میان آنها در حال برخورد با دیوارها هستند.اگر فاصلهٔ میان دو دیوار مجاور d باشد، توپ محبوس میان این دو دیوار در هر $2d$ مرحله با هر دیوار یک بار برخورد می‌کند و با "فشاری" که به این ترتیب وارد می‌کند، در هر $2d$ مرحله، دیوار را به‌اندازهٔ یک موضع حرکت می‌دهد.این را می‌توانیم به کمک معادلهٔ دیفرانسیلی که نشان می‌دهد دیوار با آهنگ $1/2d$ حرکت می‌کند، تقریب بزنیم.

هر دیوار در معرض اصابت یک یا دو توپ است.به دیوارهای انتهایی و میانی فقط یک توپ برخورد می‌کند، ولی به دیوارهای دیگر دو توپ اصابت می‌کند.کافی است فقط به یک طرف مبدأ، مثلاً، طرف راست (مثبت)، نگاه کنیم.فرض کنید k دیوار داشته باشیم، و موضع iامین دیوار نسبت به مرکز را با w_i نشان دهیم.در این صورت معادله‌های دیفرانسیل زیر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{-1}{2(w_2 - w_1)},$$
$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{1}{2(w_i - w_{i-1})} - \frac{1}{2(w_{i+1} - w_i)}, \qquad 1 < i < k,$$
$$\frac{dw_k}{dt} = \frac{1}{2(w_k - w_{k-1})}$$

تا زمانی که دیوار میانی (w_1) با مبدأ برخورد نکرده و حذف نشده باشد، جریان این بازی را می‌توان براساس رفتار این دستگاه معادله‌های دیفرانسیل تقریب زد.سپس به جای این معادله‌های دیفرانسیل، مجموعهٔ معادله‌های متناظری را که فقط شامل $k-1$ دیوارند به کار می‌گیریم.

این دستگاه معادله‌ها مستقل از مقیاس‌بندی است و این استقلال بسیار مفید است.اگر هر یک از ناحیه‌ها را با ضریب α منبسط کنیم و زمان را با ضریب α^2 تقلیل دهیم، به طوری که $w'_k = \alpha w_k$ و $t' = t/\alpha^2$، آنگاه هر جواب دستگاه معادله‌ها به جواب دیگری از آن تبدیل می‌شود.به نظر می‌رسد که این نکته دربارهٔ بازی ما نیز صادق باشد.یعنی اگر با α برابر مهره‌ها آغاز کنیم، جواب به این طریق مقیاس‌بندی خواهد شد.یعنی، α برابر مهره‌ها در عرض α^2 برابر زمان قبلی در محدوده‌ای α برابر محدودهٔ قبلی توزیع خواهد شد.البته، به دو دلیل، نمی‌توان فوراً چنین حکمی داد:در وضعیت آغازی یک نقطهٔ تکین وجود دارد، یعنی، همهٔ "دیوارها" مبدأ را در $t = 0$ اشغال می‌کنند، و الگوی "توپهای برخوردکننده با دیوارها" تا زمان $O(n)$ ظاهر نمی‌شود.این اشکالها را می‌توان با تغییر وضعیت آغازی و اثبات لمی مبنی بر استقلال نتیجه از وضعیت آغازی رفع کرد.

می‌توانیم این بازی را تقریبی از معادلهٔ دیفرانسیل به حساب آوریم.اگر وضعیت آغازی ثابتی برای معادلهٔ دیفرانسیل اختیار کنیم، و بگذاریم n به بینهایت میل کند، و اگر معادلهٔ دیفرانسیل را از طریق بازی مقیاس‌بندی شدهٔ خود تقریب بزنیم، آنگاه جریان بازی به رفتار معادلهٔ دیفرانسیل میل خواهد کرد.به عنوان مثال، اگر مقیاس را با ضریب $\alpha = 2$ تغییر دهیم، آنگاه تعداد دفعات برخورد توپ به دیوار دوبرابر قبل است، و مقدار گسستهٔ حرکت دیوار به نصف قبل تقلیل می‌یابد.درست مثل این است که معادلهٔ دیفرانسیل را در مرحله‌هایی با اندازهٔ نصف و به تعداد دوبرابر تقریب بزنیم.

اکنون به لمی نیازمندیم که در اصل یک نابرابری مثلثی است.این لم می‌گوید که اگر بتوانیم با m حرکت از وضعیت s به وضعیت s' برسیم به طوری که در هر حرکت مجاز به حرکت دادن هر زیرمجموعه از مهره‌ها باشیم، به شرطی که تعداد مهره‌های حرکت داده شده از یک ستون به راست و چپ همیشه یکسان باشد، آنگاه تفاضل حرکتهای لازم برای اینکه از s به پایان بازی برسیم با تعداد حرکتهای لازم از s' تا پایان بازی حداکثر به اندازهٔ m اختلاف دارد.بنابراین، اگر m را کوچک کنیم، تعداد حرکتهای لازم برای رسیدن به پایان بازی از s و از s' تقریباً مساوی است.تعداد حرکتهایی را که لازم است تا از وضعیت آغازی s به پایان بازی برسیم با $M(s)$ نشان می‌دهیم.

لم ۷.اگر منظور از یک حرکت اختیار کردن یک عدد صحیح نامنفی r_i به ازای هر ستون i و انتقال $2r_i$ مهره از ستون i به r_i مهره به ستون $i-1$ و r_i مهره به ستون $i+1$ باشد، و اگر بتوان با m حرکت از وضعیت s به وضعیت s' رسید، آنگاه $M(s') \le M(s) \le M(s') + m$.

اثبات.هر قسمت نابرابری را جداگانه ثابت خواهیم کرد.اثبات هر دو قسمت مشابه اثبات قضیهٔ ۱ و به استقراست.

بنا به قضیهٔ ۱، در صورتی که ناچار به انتقال همهٔ مهره‌ها نباشید، این بازی همیشه به وضعیت یکسانی ختم می‌شود.نخست نشان می‌دهیم که در این بازی، سریعترین راه ممکن برای اتمام بازی، انتقال همهٔ مهره‌های ممکن در هر حرکت است، یعنی به همان صورتی که در بازی اوّلیهٔ ما عمل می‌شود.بنابراین، $M(s') + m \ge M(s)$، زیرا می‌توانیم از وضعیت s، نخست با m حرکت به s' برسیم و بازی را با $M(s') + m$ حرکت به پایان برسانیم.به این ترتیب قسمت دوّم نابرابری ما ثابت می‌شود.

فرض کنید همهٔ مهره‌های قابل انتقال را در مرحلهٔ نخست انتقال ندهیم.به طور مشخص فرض کنید که همهٔ مهره‌های ممکن را از ستون i انتقال ندهیم.چون بازی وقتی پایان می‌یابد که در هیچ ستونی بیش از یک مهره نمانده باشد، بایستی سرانجام مهره‌های بیشتری از ستون iام انتقال یابند.فرض کنید این امر نخستین‌بار در مرحلهٔ jام رخ دهد.بدون تغییر هیچ حرکت دیگری، می‌توانیم از مهره‌های ستون i در مرحلهٔ jام دو مهره کمتر و در مرحلهٔ نخست دو مهره بیشتر انتقال دهیم.با تکرار این فرایند راندن انتقالها به مرحلهٔ نخست، بالاخره در مرحلهٔ نخست، همهٔ مهره‌های ممکن را انتقال می‌دهیم، و حداکثر همان تعداد مرحله طول می‌کشد.به طوری که ملاحظه می‌شود، بنا به استقرا، انتقال حداکثر مهره‌ها در هر مرحله به سرعت هر روش دیگری موجب پایان رسیدن بازی می‌شود.

اکنون باید ثابت کنیم که $M(s) \ge M(s')$.نشان خواهیم داد که اگر $M(s) < M(s')$، آنگاه چنانچه از s' شروع کنیم، راهی برای خاتمهٔ بازی با $M(s)$ حرکت وجود دارد، که یک تناقض است.

فرض کنید که وضعیت بعد از نخستین حرکت از s در بازی اوّلیه (انتقال همهٔ مهره‌های ممکن) عبارت از s_1 باشد.با انتقال آن عده از مهره‌های انتقال‌یافته جهت نیل از s به s_1 که در نیل از s به s' منتقل نشدند، از s' به s'_1 می‌رسیم.سپس نشان می‌دهیم که می‌توانیم با $m-1$ حرکت از s_1 به s'_1 برسیم، که در این صورت قضیهٔ به استقرا ثابت می‌شود.

فرض کنید تعداد کل مهره‌های برداشته شدهٔ در هنگام انتقال از وضعیت s به s' مساوی $2d_i$ و تعداد مهره‌های ستون i در وضعیت s مساوی p_i باشد.برای نیل به s'_1 حداکثر $(2[p_i/2] - 2d_{i,0})$ مهره را از ستون i در

وضعیت s' منتقل کنید.واضح است که این تعداد مهره در ستون i در وضعیت s' وجود دارند، زیرا با p_i مهره آغاز کردیم و $2d_i$ مهره را برداشتیم.

لازم است نشان دهیم که می‌توانیم از s_1 به s'_1 برسیم.نخست نشان خواهیم داد که می‌توانیم فرض کنیم در فرایند نخستین حرکت از s به s'، $\max(2[p_i/2], 2d_i)$ مهره از ستون i، انتقال دهیم.این کار را با راندن حرکتها به مرحله‌های قبلی انجام می‌دهیم.اگر مهره‌هایی را از یک ستون در مرحلهٔ j، که حاوی همهٔ مهره‌های ممکن انتقال یافته در مرحلهٔ $j-1$ نباشد، انتقال دهیم، آنگاه می‌توانیم، بی‌آنکه چیزی تغییر کند، از آن ستون دو مهره بیشتر در مرحلهٔ $j-1$ و دو مهره کمتر در مرحلهٔ jام انتقال دهیم.با تکرار این فرایند، بالاخره به آخر خط می‌رسیم، زیرا به این ترتیب فقط حرکتها را به مرحله‌های قبلی میل می‌دهیم.هرگاه با مشکلی مواجه شویم، آنگاه به ازای هر i، یا همهٔ مهره‌های ممکن را در مرحلهٔ نخست از ستون i منتقل می‌کنیم، یا به هنگام نیل از s به s' پس از مرحلهٔ نخست، مهرهٔ دیگری از ستون i برنمی‌داریم.حالت اول وقتی رخ می‌دهد که $d_i \leq [p_i/2]$، و دوّمی وقتی که $d_i \geq [p_i/2]$.

اکنون به آسانی می‌توان ملاحظه کرد که می‌توانیم با استفاده از فرایندی که کم و بیش مانند فرایند مورد استفاده برای نیل از s به s' است، از s_1 به s'_1 برسیم.اگر در نخستین حرکت از s به s' بیش از یک مهرهٔ انتقال نیافته در ستون i وجود داشته باشد، آنگاه چنین مهره‌هایی را در نخستین حرکت انتقال می‌دهیم و سپس، تا زمانی که به s'_1 نرسیده‌ایم، به آنها دست نمی‌زنیم. به این ترتیب راهی m مرحله‌ای از s به s'_1 حاصل می‌شود به طوری که در حرکت نخست، $2[p_i/2]$ مهره از ستون i برمی‌داریم، یعنی، بعد از مرحلهٔ نخست به s_1 می‌رسیم.چون $M(s_1) = M(s) - 1$، و چون حکم در حالت $M(s) = 1$ بدیهی است، حکم لم ۷ به استقرا نتیجه می‌شود. ■

اکنون با استفاده از این لم می‌توانیم ثابت کنیم ثابت cیی وجود دارد به طوری که تعداد حرکتهای لازم برای اتمام بازی مساوی $cn^2 + o(n^2)$ است.پیشتر نشان داده‌ایم که $1/3 \leq c \leq (\pi^2/6) - 1$.با استفاده از تکنیکهای عددی برای حل معادله‌های دیفرانسیل، می‌توان این مقدار ثابت را با هر تقریب دلخواهی به دست آورد.

قضیهٔ ۴.اگر وضعیت آغازی متشکل از ستونی $2n+1$ مهره‌ای و $M(n)$ تعداد حرکتهای لازم برای به پایان رساندن بازی باشد آنگاه ثابت cیی وجود دارد به طوری که

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{M(n)}{n^2} = c$$

اثبات.از این نکته استفاده می‌کنیم که بازی.معادلهٔ دیفرانسیل را تقریب می‌کند.رفتار معادلهٔ دیفرانسیل را در حالتی که دیوارها در موضعهای $w = (w_1, w_2, \cdots, w_k)$ باشند، در نظر بگیرید.اگر از w آغاز کنیم، معادلهٔ دیفرانسیل زمان مقیّن c_wیی لازم دارد تا به جواب برسد.اگر بازی خود را در حالتی که دیوارها در موضعهای $[\alpha w] = (\pm[\alpha w_1], \pm[\alpha w_2], \cdots + [\alpha w_k])$ باشند شروع کنیم، می‌توانیم معادلهٔ دیفرانسیل را به وسیلهٔ بازی خودمان تقریب بزنیم.در اینجا، α عدد حقیقی دلخواه بزرگی است، و $[\alpha w_i]$ گرده شدهٔ αw_i به صورت یکی از عددهای صحیح مجاور خود می‌باشد.گرد کردن به هر طریق مناسب را مجاز می‌شماریم.این وضعیت آغازی را که دیوارها در $[\alpha w]$ هستند با $s_{\alpha w}$ نشان می‌دهیم.با استفاده از ویژگی معادلهٔ دیفرانسیل در مورد مقیاسبندی، ملاحظه می‌کنیم که α اثری بر رفتار معادلهٔ دیفرانسیل ندارد، یعنی، رفتار معادلهٔ دیفرانسیل در حالتی که با αw آغاز کنیم، عین رفتار آن در حالتی است که با w شروع کنیم.به علاوه، اگر اجازه دهیم که α در بازی به بینهایت میل کند، و به بازی به چشم تقریبی برای معادلهٔ دیفرانسیل با وضعیت آغازی w نگاه کنیم، ملاحظه می‌کنیم که، تعداد دفعه‌های برخورد توپها به دیوارها افزایش می‌یابد و دیوارها در نتیجهٔ برخورد با توپها کمتر حرکت می‌کنند.بنابراین، رفتار بازی به سمت رفتار معادلهٔ دیفرانسیل میل می‌کند، و $(1/\alpha^2)M(s_{\alpha w}) \to c_w$.

اکنون به رابطه‌ای میان n و α نیازمندیم.به آسانی می‌توان تعداد مهره‌ها در $s_{\alpha w}$ را حساب کرد.به ازای هر جفت از ستونهای همجوار، بجز احتمالاً یکی از این جفتها (مکان "توپ")، ناحیهٔ میان $[\alpha w_i]$ و $[\alpha w_{i+1}]$ حاوی $2(k-i)$ مهره است.بنابراین، تعداد کلّ مهره‌ها در یک طرف مبدأ مساوی

$$\begin{aligned} & k.([\alpha w_1] - 0) + (k-1).([\alpha w_2] - [\alpha w_1] + \cdots \\ & + 1.([\alpha w_k] - [\alpha w_{k-1}]) \\ & + O(1) = \sum_{i=1}^{k} [\alpha w_i] + O(1), \end{aligned}$$

است که در آن، ثابت موجود در نماد Oی بزرگ می‌تواند وابسته به k و w باشد، ولی مستقّل از α است.بنابراین، n مناسب برای $s_{\alpha w}$، $n = \sum_{i=1}^{k} [\alpha w_i]$ است.

اکنون لم ۷ را به کار می‌بریم.برای این کار، باید نشان دهیم که اگر با تعداد مناسبی از مهره‌ها در مبدأ آغاز کنیم، می‌توانیم با استفاده از بازی توصیف شده در لم ۷، بی‌آنکه نیازی به‌انتقال همهٔ مهره‌های ممکن باشد، سریعاً به $s_{\alpha w}$ برسیم.اگر با $2n+1 = \sum_{i=1}^{k}(2[\alpha w_i] + 1)$ مهره آغاز کنیم، و به ازای هر i، بازی اوّلیّه را با $2[\alpha w_i] + 1$ مهره در مبدأ آغاز کرده و جداگانه اجرا کنیم، آنگاه در پایان کار، $k-i$ مهره در هر ستون میان $[\alpha w_i]$ و $[\alpha w_{i+1}]$ خواهیم داشت.اگر سپس همهٔ مهره‌های ممکن در ستونهای واقع در موضعهای زوج را انتقال دهیم، مشابه مثال زیر، به وضعیت $s_{\alpha w}$ با توپهای مستقّر در دیوارهای حایل $2j-1$ و $2j$ دست می‌یابیم:

1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1	1	1	1	2	0	4	0	4	0	5	1	5	1	5	0	4	0	4	0	2	1	1	1	1

اگر با $2[\alpha w_i] + 1$ در مبدأ آغاز کنیم، به‌ازای $1 \leq i \leq k$، تعداد مرحله‌های لازم برای نیل به $s_{\alpha w}$ یک واحد بیشتر از حداکثر زمان لازم برای اتمام بازی است.این تعداد، بنا به لم ۵، حداکثر $\alpha^2 w_k^2 + \alpha w_k + 1$ است.بنا به لم ۷ داریم

$$\frac{1}{\alpha^2} \mid M(s_{\alpha w}) - M(n) \mid \leq w_k^2 + \frac{w_k}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$$

به‌ازای αی به‌اندازهٔ کافی بزرگ، به دست می‌آوریم

$$\left| \frac{1}{\alpha^2} M(s_{\alpha w}) - c_w \right| \leq \varepsilon$$

بنابراین از ترکیب این معادله‌ها نتیجه می‌شود

$$\left| \frac{1}{\alpha^2} M(n) - c_w \right| \leq w_k^2 + \varepsilon$$

توجه داشته باشید که $n/a \approx \sum_{i=1}^{k} w_i$، و بنابراین، به ازای nهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ،

$$\left| \frac{1}{n^2} M(n) - \frac{c_w}{\left(\sum_1^k w_i\right)^2} \right| \leq 2\left(\frac{w_k}{\sum_1^k w_i}\right)^2$$

با بزرگ کردن k و انتخاب w_iهای همفاصله، می‌توانیم $w_k / \sum_{i=1}^{k} w_i$ را به اندازهٔ دلخواه کوچک نماییم.چون هیچ یک از c_w و w_i به n بستگی ندارند،نتیجه می‌شود که $M(n)/n^2$ به سمت یک ثابت میل می‌کند.

■

در واقع، می‌توان نشان داد رفتار دقیقی برای دیوارها وجود دارد که، وقتی $w_k / \sum_{i=1}^{k} w_i$ به صفر میل کند، معادلهٔ دیفرانسیل به آن میل می‌نماید.به این منظور می‌توان نشان داد که اگر یک بازی تقریبی را در وضعیتی نزدیک به وضعیت آغازی واقعی با $2n+1$ مهره در مبدأ شروع بکنید (یعنی، اگر بتوان مطابق لم ۷، در m مرحله به آن رسید)، آنگاه در هر لحظهٔ t، وضعیت بازی تقریبی به وضعیت بازی واقعی نزدیک خواهد بود (باز یعنی در m مرحله می‌توان به آن رسید).از این واقعیّت که جریان بازی مهره، وقتی $w_k / \sum_{i=1}^{k} w_k \to 0$، به سمت یک حّد میل می‌کند، نتیجه می‌شود که رفتار معادلهٔ دیفرانسیل نیز، وقتی $w_k / \sum_{i=1}^{k} w_i \to 0$ ، به سمت حّدی میل می‌کند.به‌ازای $t > 0$، این رفتار حدّی در معادلهٔ دیفرانسیل صدق می‌کند.به ازای $t = 0$، یک نقطهٔ تکین وجود دارد؛ وضعیت در $t = 0$ را می‌توان به صورت بینهایت دیوار در مبدأ در نظر گرفت.در این صورت، "مهبانگی" رخ می‌دهد:دیوارهایی شروع به ناپدید شدن می‌کنند و میان بقّیهٔ دیوارها فاصله به وجود می‌آید.بنابراین، به ازای tهای خیلی کوچک، تعدادی بسیار زیاد (ولی متناهی) دیوار وجود دارند که همگی خیلی به مبدأ نزدیک‌اند (ولی در مبدأ نیستند).

۵.نتیجه‌گیری

در این مقاله ثابت کرده‌ایم که تعداد حرکتهای لازم برای نیل به وضعیّت نهایی بازی، $cn^2 + o(n^2)$ ، $0.33 \leq c \leq 0.65$ است.می‌توان با استفاده از استدلالهای پیچیده‌تر فاصلهٔ میان کرانها را کمتر کرد.روش دیگر برای تعیین مقدار c استفاده از شبیه‌سازی کامپیوتری است.زمان اجرای الگوریتم شبیه‌سازی ساده که در آن، وضع هر ستون در هر واحد زمانی مشخص می‌شود، مساوی $\Omega(n^3)$ است و بنابراین، این الگوریتم فقط برای nهای نسبتاً کوچک مناسب است.شبیه‌سازی بهتری را می‌توان بر اساس نظرگاه فیزیکی توپهای در حال حرکت میان دیوارها پایه‌ریزی کرد.براساس این مدل، می‌توان برنامه‌ای نوشت که وضعیت بازی را هر بار که توپی به دیواری برخورد می‌کند، مشخص کند.این امر موجب صرفه‌جویی قابل توجهی در زمان می‌شود و در نتیجه موجب افزایش محدوده‌ای می‌شود که می‌توان شبیه‌سازی نمود.اما بازی را به ازای مقدارهای تا $n = 10000$ شبیه‌سازی کرده‌ایم.به ازای $n = 10000$، تعداد مرحله‌ها مساوی ۵۹۷۳۰۵۳۳ است، و در نتیجه، $c \simeq 0.5973$.

****

• Richard Anderson, Lászlo′ Lovász, Peter Shor, Joel Spencer, Eva Tardos, Shmuel Winograd, " Disks, balls, and walls: analysis of a combinatorial game", *Amer.Math.Monthly*,(6) **96**(1989)481-493.

* ریچارد اندرسن، دانشگاه واشینگتن آمریکا
جوئل اسپنسر، مؤسسهٔ کورانت آمریکا
شموئل وینوگراد، مرکزپژوهشی واتسن آی.بی.ام در آمریکا
پیترشور، آزمایشگاههای بل در آمریکا
لاسلولواش، دانشگاه اوتووش لورانت مجارستان و دانشگاه پرینستن آمریکا
اوا تاردوش، دانشگاه ام.آی.تی امریکا

تحلیلی از روشهای مرتب کردن*

جاناتان آمستردام *
ترجمهٔ سیدغلامرضا پناهی

چندی پیش دوستی به من گفت که ۹۰٪ کلیهٔ برنامه‌های کامپیوتری دنیا عمل مرتب کردن را انجام می‌دهند.این حرف را می‌توان باور کرد.علاقهٔ وافر جوامع به نظم و سازمان، باعث شده است که عمل سادهٔ قراردادن هر چیزی در جای مناسب آن اهمیت زیادی پیدا کند و چه وسیله‌ای برای این منظور بهتر از حاملان مطیع اطلاعات ـ کامپیوترها ـ ؟ الگوریتمهای مرتب کردن به علت اهمیت زیادشان به تفصیل مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.بعضی از این الگوریتمها کند و برخی دیگر سریع هستند.تعدادی از آنها فقط چند داده را مرتب می‌کنند وگروهی میلیونها داده را.در این مقاله، سه نوع الگوریتم مرتب کردن را بررسی می‌کنیم.مرتب کردن انتخابی برای فهرستهای کوچک و مرتب کردن سریع برای فهرستهای بزرگتر و مرتب کردن ادغامی برای فهرستهایی که آنقدر بزرگ‌اند که نمی‌توان آنها را همزمان در حافظه قرار داد.اما ابتدا به مفاهیم ساده‌ای نیاز داریم که ما را در تحلیل الگوریتمها یاری کنند.

تحلیل

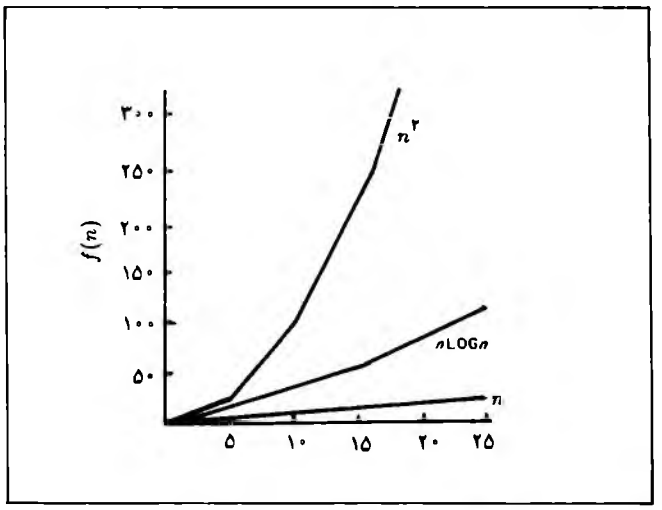
هدف ما بررسی میزان کارایی بعضی از الگوریتمهای مرتب کردن است، اما در آغاز کار با مسأله‌ای مواجه می‌شویم:چگونه می‌توانیم الگوریتمی را به طور مجرد مطالعه کنیم بدون اینکه به زبانی که الگوریتم با آن زبان نوشته می‌شود و به ماشینی که در آن اجرا خواهد شد توجه کنیم؟به عنوان مثال، اگر الگوریتمی به زبان اسمبلی نوشته شود سریعتر اجرا می‌شود تا اینکه به یکی از زبانهای سطح بالا نوشته شود و هر برنامه‌ای که در یک ریزکامپیوتر اجرا می‌شود در کامپیوترهای بزرگ سریعتر اجرا خواهد شد.ما می‌خواهیم بدون پرداختن به این موضوعات در مورد مدت اجرای الگوریتمها مستقل از ماشین و زبان به کار رفته صحبت کنیم.

دانشمندان کامپیوتر قواعد ساده‌ای به دست آورده‌اند که این کار را ممکن می‌سازد.اولین قاعده این است که مدت اجرا با تعداد عملیات اساسی لازم برای اجرای الگوریتم اندازه‌گیری شود و نه با سرعت یک کامپیوتر یا تعداد دستورالعملهایی که باید اجرا شود.به عنوان مثال، در عمل مرتب کردن، عملیات اساسی عبارت‌اند از مقایسهٔ دو داده و جابه‌جاکردن آنها با هم.این قاعده از اینجا به دست می‌آید که هر برنامه‌ای که از این الگوریتم استفاده کند، بدون توجه به اینکه به چه زبانی نوشته شده یا در چه کامپیوتری انجام شود باید تعداد یکسانی عملیات اساسی را انجام دهد.تعداد مقایسه‌ها معمولاً شاخص بهتری از مدت زمان اجراست زیرا در الگوریتمهای مرتب کردن، تعداد مقایسه‌ها غالباً از تعداد جابه‌جاییها بیشتر است.

قاعدهٔ مهم دیگر، اندازه‌گیری سرعت الگوریتم برحسب اندازهٔ ورودی آن است، و این چیزی است که عقل سلیم حکم می‌کند زیرا مثلاً نمی‌خواهیم مدت زمان لازم برای اجرای الگوریتمی که ۱۰ داده را مرتب می‌کند با مدت اجرای الگوریتمی که ۱۰۰ داده را مرتب می‌کند مقایسه شود.بلکه می‌خواهیم جدولی برای مقایسهٔ زمان مرتب کردن ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ داده یا بیشتر توسط الگوریتمهای مختلف داشته باشیم.

ولی در عمل به چیزی کاراتر از جدول نیاز داریم.ایده‌آل آن است که تابعی داشته باشیم که به ازای هر اندازهٔ ورودی، مدت اجرا را به ما بدهد.در این صورت خواهیم توانست آهنگ رشد تابع را بررسی کنیم و قضاوت نماییم که وقتی تعداد داده‌ها زیاد است کدام الگوریتم بهتر است.مثلاً، تابع $f(n) = n^2$ سریعتر رشد می‌کند تا تابع $g(n) = 100n$.به عبارت دیگر، به ازای مقادیری از n که به اندازهٔ کافی بزرگ باشند، در مورد این مثال $n > 100$، مقدار f از g بیشتر خواهد بود.مقایسهٔ آهنگ رشد به کمک نمودار توابع ساده‌تر می‌شود.در شکل ۱ نمودار چند تابع متداول و از جمله تابعهایی که مورد بحث ما خواهند بود، نشان داده شده است.

مفهوم مقدار یک تابع به ازای داده‌های زیاد (n به قدرکافی بزرگ)، که آن را آهنگ رشد مجانبی می‌گویند، مفهوم اساسی در تحلیل الگوریتمهاست.در مقایسهٔ دو الگوریتم معمولاً حالتی را که n کوچک است بررسی نمی‌کنیم زیرا مسأله در این حالت ساده است.حالت مهم حالتی است که تعداد داده‌ها زیاد می‌شود و می‌خواهیم بدانیم در این حالت الگوریتمها چگونه عمل می‌کنند مدت زمان لازم برای مرتب کردن یک فهرست ده‌تایی به وسیلهٔ هر یک



شکل ۱. آهنگ رشد بعضی توابع متداول

از الگوریتمهای مرتب کردن عملاً ناچیز است ولی با بزرگ شدن فهرست، الگوریتمهایی که ذاتاً کندترند مشخص می‌شوند.

بنابراین، برای تحلیل یک الگوریتم می‌توانیم تابعی به دست آوریم که عملیات اساسی الگوریتم را به اندازهٔ فهرست ورودی مربوط کند، و آنگاه آهنگ رشد مجانبی آن را تعیین کنیم.ولی اغلب، حتی این اندازه تجرید هم کافی نیست و تحلیل الگوریتم به این ترتیب بسیار طولانی خواهد بود.در یک مسألهٔ بزرگ مهم نیست که طبق یک الگوریتم مثلاً تعداد $37n + 4$ و یا $24n - 6$ مقایسه انجام می‌شود.مهم این است که تعداد مقایسه‌ها متناسب با اندازهٔ ورودی است. به عبارت دیگر، آهنگ رشد مجانبی هر دو تابع از مرتبهٔ n است.اگر به هنگام تحلیل الگوریتمها از مقادیر ثابت در توابع مورد بررسی صرف نظر کرده و تقریبهایی را با توجه به مرتبهٔ بزرگی این توابع در نظر بگیریم به بیراهه نرفته‌ایم.برای این مفهوم نمادی متداول است که می‌توان به سهولت از آن استفاده کرد: اگر آهنگ رشد تابع از مرتبهٔ n باشد، می‌نویسیم $f = O(n)$ (و می‌خوانیم تابع f از مرتبهٔ n است) تعریف دقیقتر نماد O ی بزرگ این است:

اگر f و g دو تابع باشند، آنگاه $f = O(g)$ اگر و تنها اگر دو مقدار ثابت c و k وجود داشته باشند به طوری که $f \leq cg + k$.

به عنوان مثال، اگر f تابعی باشد برابر $37n + 4$ آنگاه $f = O(n)$، زیرا می‌توانیم مقادیر ثابت c و k را به ترتیب ۳۷ و ۴ اختیار کنیم و در این صورت داریم $37n + 4 = 37n + 4$. مثال دیگری که به اندازهٔ مثال قبلی واضح نیست، تابع $150n^2 + 97n - 34$ است که عبارت است از $O(n^2)$، زیرا در این حالت می‌توانیم مقادیر ثابت c و k را به ترتیب برابر با ۲۰۰ و ۱۳ اختیار کنیم ($150n^2 + 97n - 34 \leq 200n^2 + 13$) مقادیر فراوان دیگری نیز می‌توان برای c و k اختیار کرد.

نماد O محاسن زیادی دارد.از جمله اینکه، به کمک آن، ثابتها و جملاتی که به کندی رشد می‌کنند از توابع کنار گذاشته می‌شوند و در نتیجه مقایسهٔ توابع آسانتر انجام می‌شود.با استفاده از آن، می‌توان از جزئیات کم‌اهمیت صرف نظر کرد و الگوریتم را در ساده‌ترین شکلش مطالعه کرد و به علاوه چون کار خسته‌کنندهٔ شمارش دقیق لازم نمی‌آید، تحلیل الگوریتم ساده‌تر می‌شود.پس از کار و تجربهٔ کافی، قضاوت دربارهٔ زمان اجرای یک الگوریتم با یک نگاه به O امکان‌پذیر می‌شود.

مرتب کردن انتخابی

این الگوریتم در تابلو ۱ نشان داده شده است.در این الگوریتم، برای مرتب کردن فهرست به ترتیب صعودی، کوچکترین عضو فهرست مشخص شده و با عضو اول تعویض می‌شود.در مرحلهٔ بعدی لازم نیست که عضو اول بررسی شود، بلکه کوچکترین مقدار در میان عضوهای دوم تا n ام فهرست معین و با عضو دوم جابه‌جا می‌گردد.پیدا کردن کوچکترین عضو به طریق زیر انجام می‌شود:عضو اول را کوچکترین عضو می‌گیریم؛ این عضو با تمام عضوهای فهرست مقایسه می‌شود و هر جا عضوی کوچکتر از آن پیدا شد، این مقدار به عنوان کوچکترین مقدار جدید در نظر گرفته می‌شود.

حال برای تحلیل این الگوریتم ببینیم چند مقایسه انجام می‌شود.هر بار که می‌خواهیم کوچکترین عضو را بیابیم دست به مقایسه می‌زنیم.به ازای هر مقدار ممکن i و j یک مقایسه انجام می‌شود.به ازای $i = 1$، مقدار j بین ۲ و n تغییر می‌کند که عبارت از $(n - 1)$ مقدار برای j است؛ لذا در این مرحله $(n - 1)$ مقایسه داریم.به ازای $i = 2$، j بین ۳ و n تغییر می‌کند یعنی جمعاً $(n - 2)$ مقدار اختیار می‌کند و لذا در این مرحله، $(n - 2)$ مقایسه انجام می‌گیرد.وقتی $i = n - 1$ ، j فقط یک مقدار اختیار خواهد کرد و بالاخره به ازای $i = n$، حلقهٔ j انجام نخواهد شد.بنابراین، تعداد کل مقایسه‌ها عبارت است از

$$(n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \cdots + 1$$

که این مجموع مساوی است با $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - n)$.

با توجه به مطالب بالا در مورد نماد O،این تابع $O(n^2)$ است.پس مرتب کردن انتخابی از مرتبهٔ n^2 است یعنی برای فهرستی به اندازهٔ n، تعداد

تابلو ۱: ***الگوریتم مرتب کردن انتخابی***

مرتب کردن انتخابی.
ورودی:آرایه‌ای چون A با n عضو
خروجی: همان فهرست که مرتب شده است

۱.دستور i = ۱ را اجراکن.
۲.دستور m = i را اجراکن.
۳.دستور j = i + ۱ را اجراکن.
۴.اگر A(j) کوچکتر از A(m) است، دستور m=j را اجراکن و به شمارهٔ ۶ برو.
۵.جای A(j) و A(m) را عوض کن.
۶.اگر j < n، دستور j = j + ۱ را اجراکن.
۷.اگر i < n،دستور i = i + ۱ را اجراکن و به دستور ۲ برو.
۸.پایان.

مقایسه‌های لازم از مرتبهٔ n^2 است.ضمناً الگوریتم مشهور مرتب کردن حبابی هم $O(n^2)$ است.

غلبه بر n^2 : مرتب کردن ادغامی

آیا می‌توانیم نتیجه‌ای بهتر از $O(n^2)$ به دست آوریم؟بله، و الگوریتمی که این امر را تحقق می‌بخشد، الگوریتم مرتب کردن ادغامی است.در این روش از قاعدهٔ معروف «تجزیه و حل » برای حل مسائل بزرگ استفاده می‌شود به این معنی که یک مسألهٔ بزرگ را به چند مسألهٔ کوچکتر از همان نوع تقسیم می‌کنند و آنها را به طور مشابه حل می‌کنند.

در الگوریتم ادغامی، دو فهرست مرتب شده مانند A و B در هم ادغام می‌شوند و یک فهرست مرتب شده مانند C حاصل می‌شود.به این منظور، ابتدا عضوهای اول دو فهرست با هم مقایسه می‌شوند و چون فهرستها مرتب شده هستند، عضو کوچکتر از میان این دو، کوچکترین عضو فهرست کلی خواهد بود.اگر مثلاً، عضو اول A کوچکتر باشد، این عضو به عنوان عضو اول C قرار می‌گیرد.آنگاه عضو بعدی A با عضو اول B مقایسه می‌شود و مجدداً آنکه کوچکتر است به عنوان عضو بعدی C قرار داده می‌شود.این عمل ادامه می‌یابد تا آنکه تمام عضوهای A و B مقایسه شوند.در پایان این کار، C شامل همهٔ عضوهای A و B به ترتیب صعودی خواهد بود.

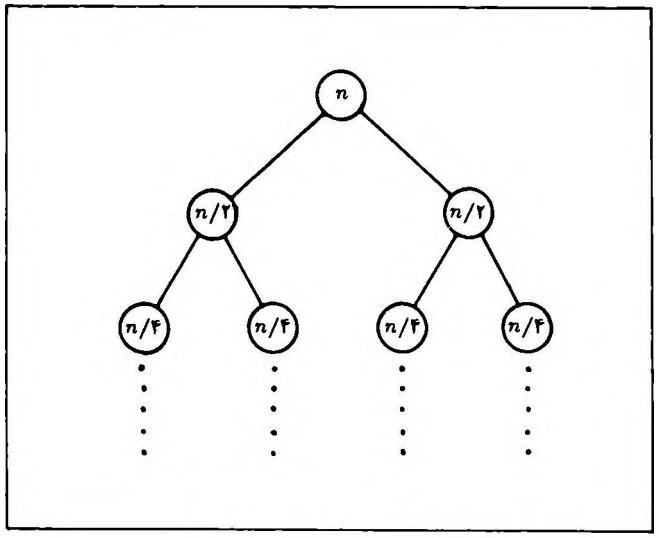
حال که چگونگی ادغام کردن دو فهرست مرتب شده معلوم شد، ببینیم چگونه باید یک فهرست را مرتب کرد.اگر فهرستی که باید مرتب شود بیش از یک عضو داشته باشد آن را به دو نیم (یا تقریباً به دو نیم) تقسیم می‌کنیم و این دو نیم را به وسیلهٔ الگوریتم ادغامی مرتب می‌کنیم.الگوریتم مرتب کردن ادغامی در تابلو ۲ نشان داده شده است.اگر فهرستی که باید مرتب شود فقط یک عضو داشته باشد کاری برای انجام دادن نیست.به عبارت دیگر، فهرست خود به خود مرتب است.

تحلیل الگوریتم مرتب کردن ادغامی مشکلتر از الگوریتم مرتب کردن انتخابی است زیرا این الگوریتم، بازگشتی است.ابتدا به مرحلهٔ ادغام در این الگوریتم توجه کنید.حداکثر n مقایسه لازم است تا دو فهرست مرتب شده

تابلو ۲ *الگوریتم مرتب کردن ادغامی*

مرتب کردن ادغامی.
ورودی: فهرستی به نام L.
خروجی: فهرستی به نام S.

۱. اگر L فقط یک عضو دارد، آنگاه S=L در غیر این صورت،
۲. L را به دو فهرست L۱ و L۲، هر کدام تقریباً به اندازهٔ نصف L، تقسیم‌کن.
۳. L۱ را به وسیلهٔ الگوریتم ادغامی مرتب کن و مرتب شدهٔ آن را در S۱ قرار بده.
۴. L۲ را به وسیلهٔ الگوریتم ادغامی مرتب کن و مرتب شدهٔ آن آن را در S۲ قرار بده.
۵. S۱ و S۲ را ادغام کن و حاصل را در S قرار بده.
۶. پایان



شکل ۲.الگوریتم مرتب کردن ادغامی

به اندازهٔ $n/2$ را در فهرستی به اندازهٔ n قرار دهیم.برای پی بردن به دلیل این امر، توجه کنید که هر بار که یک مقایسه انجام می‌دهیم یک عضو در فهرست نهایی وارد می‌کنیم.لذا تعداد مقایسه‌ها نمی‌تواند بیش از تعداد کل عضوهای فهرست باشد.پس، این قسمت الگوریتم،$O(n)$ است.

اما در مورد " بقیهٔ الگوریتم " وضع چگونه است؟از یک نظر در واقع "بقیهٔ الگوریتم" درکار نیست.تنها کار واقعی (یعنی مقایسه) در مرحلهٔ ادغام صورت می‌گیرد.پس سؤال این است که ادغام چند دفعه صورت می‌گیرد و هر دفعه، چند عضو ادغام می‌شوند.

بهترین راه برای جواب دادن به این سؤال در مورد الگوریتم ادغامی، این است که آن را به صورت درختی دودویی در نظر بگیریم (شکل ۲).در این درخت، هر گره نمایندهٔ یک بار فراخوانی الگوریتم ادغامی است.قلهٔ (ریشهٔ) درخت، نمایندهٔ فراخوانی اولیهٔ الگوریتم ادغامی برای فهرستی با اندازهٔ n است.سپس این الگوریتم دوبار به طور بازگشتی، هر بار برای فهرستی به اندازهٔ $n/2$ فرا خوانده می‌شود.هر یک از این فراخوانیها نیز باعث دوبار فراخوانی الگوریتم می‌شود تا آنکه بالاخره به فهرستهایی با اندازهٔ یک عضو برسیم.

در هر یک از سطوح این درخت، تعداد مقایسه‌ها$O(n)$ است.در سطح اول (قله) مقایسه‌ها تنها هنگامی انجام می‌شوند که دو فهرست هر یک به اندازهٔ $n/2$ در هم ادغام می‌شوند و فهرستی به اندازهٔ n حاصل می‌شود.در این عملیات، حداکثر n مقایسه انجام می‌گیرد.در سطح بعد، دو ادغام انجام می‌شوند که بر اثر هر یک، فهرستی با اندازهٔ $n/2$ تولید می‌شود.چون در هر یک از این ادغامها $n/2$ مقایسه انجام می‌گیرد، جمعاً n مقایسه صورت می‌پذیرد.سطح سوم معرف چهار عمل ادغام است که در هر یک $n/4$ مقایسه انجام می‌شود، و به همین ترتیب برای سطوح بعدی.

بنابراین، می‌توانیم بگوییم مدت اجرای الگوریتم ادغامی عبارت است از $O(nk)$که در آن k نمایندهٔ تعداد سطوح درخت مربوطه است.چون تعداد سطوح درخت درست مساوی تعداد دفعاتی است که می‌توان فهرستی به اندازهٔ n را مکرراً نصف کرد تا جایی که فهرستی به اندازهٔ ۱ حاصل شود،

k را می‌توان برحسب n بیان کرد.به عبارت دیگر، این تعداد عبارت است از تعداد دفعاتی که می‌توانیم n را بر ۲ تقسیم کنیم تا به عدد ۱ برسیم.این تعداد تقریباً مساوی $\log_2 n$ است.برای روشن شدن مطلب، فرض کنیم n توانی از ۲ باشد.به عنوان مثال، $4 = 2^2$.در این صورت، ۴ تقسیم بر ۲ مساوی است با ۲ و ۲ تقسیم بر ۲ مساوی است با ۱، و تعداد دفعات تقسیم، ۲ است.

با معلوم شدن این خاصیت، می‌توان نتیجه گرفت که الگوریتم ادغامی، $O(n\log_2 n)$ است که در آن، $\log_2 n$ تعداد سطوح درخت و n تعداد مقایسه‌ها در هر سطح است.این نتیجه بهتر از $O(n^2)$ است و هرچه n بیشتر باشد، باز هم بهتر خواهد بود.نگاهی به شکل ۱ نشان می‌دهد که تابع n^2 به مراتب سریعتر از تابع $n\log_2 n$ افزایش می‌یابد.همچنین با استفاده از چنین شکلی می‌توان این توابع را به ازای مقادیر مخصوصی مقایسه کرد.به ازای $n = 8$ داریم $n^2 = 64$ در حالی که $n\log_2 n = 24$ که اختلاف زیادی با هم ندارند.اما برای $n = 256$ داریم $n^2 \sim 65000$ در حالی که $n\log_2 n \sim 2000$.

دوباره این سؤال مطرح می‌شود که آیا می‌توانیم روشی بهتر از این داشته باشیم؟اگر از قبل بدانیم مقادیری که باید مرتب شوند در حدود معینی واقع هستند، مثلاً اعداد صحیح بین ۱ و ۱۰۰، می‌توان آنها را در مدتی از مرتبهٔ n مرتب کرد و به علاوه، احتیاجی به مقایسهٔ آنها نیست.در غیر این صورت، تنها راه مرتب کردن، مقایسهٔ اعداد خواهد بود.ثابت می‌شود که اگر مرتب کردن تنها به وسیلهٔ مقایسه انجام شود، تعداد بهینهٔ مقایسه‌ها $O(n\log_2 n)$ است.اثبات این مطلب از حوصلهٔ این مقاله خارج است ولی می‌توان این اثبات را در کتاب ساختارهای داده‌ها ، و الگوریتمها [۱] یافت.مفصلترین بحث دربارهٔ الگوریتمهای مرتب کردن در کتاب دانلد کنوت به نام هنر برنامه‌نویسی ، جلد ۳، مرتب کردن و جستجو [۲] به عمل آمده است.

گرچه از لحاظ نظری ، الگوریتم ادغامی بهترین الگوریتم ممکن برای مرتب کردن است ، به هنگام کاربرد آن درمی‌یابیم مشکلاتی که در بحث نظری از نظر دور می‌مانند باعث کندشدن آن می‌شوند (به خصوص لزوم به کاربردن یک آرایهٔ اضافی در مرحلهٔ ادغام). الگوریتمی وجود دارد که مانند الگوریتم ادغامی، $O(n\log_2 n)$ است.اما در همهٔ کامپیوترهای امروزی ، مدت اجرای آن کسری ثابت از مدت اجرای الگوریتم ادغامی است (به خاطر آوریم که $2n\log_2 n$ و $1000n\log_2 n$ هر دو $O(n\log_2 n)$ می‌باشند).این الگوریتم، موسوم به الگوریتم مرتب کردن سریع، سریعترین تکنیک شناخته شده برای مرتب کردن براساس مقایسه است.

مرتب کردن سریع

در الگوریتم سریع به صورت زیر عمل می‌کنیم: اگر فهرستی که قرار است مرتب شود فقط یک عضو داشته باشد، کاری انجام نمی‌دهیم.در غیر این صورت عضوی از فهرست را انتخاب کرده نام آن را مبدأ می‌گذاریم.حال فهرست را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم، عضوهایی که کوچکتر از ، یا مساوی با، مبدأ هستند و عضوهایی که از این عضو بزرگترند.سپس این دو قسمت را مرتب می‌کنیم.پس از مرتب کردن دو قسمت کار دیگری لازم نیست انجام دهیم زیرا در هنگام قسمت کردن، تمام عضوهای کوچکتر را در ابتدا و تمام عضوهای بزرگتر در انتهای فهرست قرار داده‌ایم.

الگوریتم سریع شبیه الگوریتم ادغامی است و در واقع از آن نشأت گرفته‌است.اختلاف اصلی دو الگوریتم آن است که در الگوریتم ادغامی عمل ادغام پس از عملیات بازگشتی صورت می‌گیرد اما در الگوریتم سریع، عمل قسمت کردن قبل از عملیات بازگشتی صورت می‌گیرد.چیزی که باعث کارایی بیشتر الگوریتم سریع نسبت به الگوریتم ادغامی می‌شود آن است که مانند الگوریتم مرتب کردن انتخابی، تمام عملیات درجا صورت می‌گیرد.به عبارت دیگر، همهٔ عملیات را در فهرست اصلی انجام می‌دهیم.تابلو ۳ الگوریتم مرتب کردن سریع را نشان می‌دهد.

فهرست را به طریق زیر تقسیم می‌کنیم.ابتدا و انتهای فهرست را در نظر می‌گیریم.مثلاً فرض کنید i نشان‌دهندهٔ ابتدا و j نشان‌دهندهٔ انتهای فهرست باشد.i را به جلو حرکت می‌دهیم تا به عضوی بزرگتر از مبدأ برسیم؛ j را به طرف عقب حرکت می‌دهیم تا به عضوی کوچکتر از مبدأ برسیم.آنگاه عضوی را که i نشان‌دهندهٔ آن است با عضوی که j آن را نشان می‌دهد. تعویض می‌نماییم.این کار را تکرار می‌کنیم تا i و j به هم برسند؛ در این هنگام فهرست به نحو دلخواه تقسیم شده است.شکل ۳ نشان می‌دهد که چگونه فهرستی شامل پنج عضو به این روش تقسیم می‌گردد.

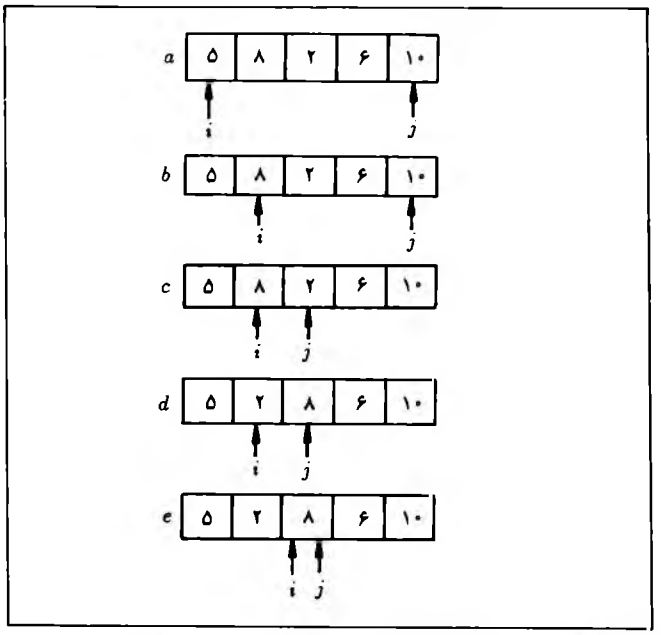
تحلیل الگوریتم سریع مشابه تحلیل الگوریتم ادغامی است.در مرحلهٔ تقسیم، $O(n)$ مقایسه انجام می‌شود و در صورتی که فهرست به دو قسمت تقریباً مساوی تقسیم شود، درخت الگوریتم سریع دارای $\log_2 n$ سطح خواهد بود.بنابراین، الگوریتم سریع در اغلب موارد، $O(n\log_2 n)$ است.این تحلیل متکی به این فرض است که فهرست به دو قسمت نسبتاً مساوی تقسیم شود.این فرض نیز بستگی به چگونگی انتخاب مبدأ خواهد داشت.گیریم همیشه عضو اول را به عنوان مبدأ انتخاب کنیم.حال اگر فهرستها را دارای توزیع تصادفی فرض کنیم، عضو اول به طور متوسط، در اطراف میانهٔ بزرگترین و کوچکترین عضوها خواهد بود و لذا فهرست تقریباً به دو نیم تقسیم خواهد شد.به این ترتیب می‌توان گفت که روش سریع، به طور متوسط، $O(n\log_2 n)$ خواهد بود.

حال نگاهی به بدترین حالت بکنیم.فرض کنیم مبدأ انتخاب شده همواره بزرگترین (کوچکترین) عضو فهرست باشد.به این ترتیب، فهرست به دو

تابلو ۳ *الگوریتم مرتب کردن سریع*

مرتب کردن سریع.
ورودی: آرایه‌ای چون A با عضوهایی از ۱ تا n.
خروجی: همان آرایه که مرتب شده است.

۱.مبدئی انتخاب کن.
۲.فهرست را به دو قسمت کن و تمام عضوهای نابیشتر از مبدا را در خانه‌های ۱ تا $i - 1$ قرار بده.
۳.مرتب کردن سریع را در مورد عضوهای A به ازای ۱ تا $i - 1$ انجام بده.
۴.مرتب کردن سریع را در مورد عضوهای A به ازای i تا n انجام بده.
۵.پایان



شکل ۳. تقسیم کردن یک آرایه در الگوریتم سریع : در ردیف (الف)، i و j به ترتیب ابتدا و انتهای آرایه را نشان می‌دهند.عضو اول، یعنی ۵، را به عنوان مبدأ در نظر گرفته‌ایم.در ردیف (ب)، i به طرف جلو می‌رود تا جایی که عضو نظیر آن بزرگتر از مبدأ باشد.در ردیف (پ)، j به طرف عقب حرکت می‌کند تا به عضوی برسد که کمتر از، یا مساوی با، مبدأ است.در ردیف (ت)، دو عضوی که با i و j نشان داده شده بودند، تعویض شده‌اند.در ردیف (ث)، i مجدداً به طرف جلو می‌رود و به j می‌رسد.به این ترتیب، مرحلهٔ تقسیم تمام می‌شود.

قسمت تقسیم می‌شود که یکی به اندازهٔ ۱ و دیگری به اندازهٔ $n - ۱$ است.فهرست دومی نیز به دو قسمت تقسیم می‌شود که یکی به اندازهٔ ۱ و دیگری به اندازهٔ $n - ۲$ خواهد بود و الی آخر.مجموعاً n بار عمل تقسیم و برای آنها به ترتیب، تعداد $n - ۱$، $n - ۲$، و ... مقایسه لازم خواهد بود.ملاحظه می‌شود که تحلیل این الگوریتم شبیه الگوریتم انتخابی است و البته، نتیجهٔ این دو تحلیل هم یکی است.پس در بدترین حالت، الگوریتم سریع، $O(n^۲)$ است.

تا اینجا معلوم شد که انتخاب مبدأ بسیار مهم است.اگر این نقطه را خوب انتخاب کنیم می‌توانیم این احتمال را که الگوریتم مرتب کردن کند باشد کاهش دهیم.روشهای متعددی وجود دارند که این نقطه خوب انتخاب شود.مثلاً ممکن است سه عضو را به تصادف انتخاب کنیم و سپس میانهٔ آن سه عضو (عضو وسطی) را به عنوان مبدأ در نظر بگیریم.با این کار، احتمال اینکه مدت اجرای الگوریتم سریع از مرتبهٔ $O(n\log_۲ n)$ باشد و در عین حال، چندان هم به درازا نکشد، افزایش خواهد یافت.در صورتی که فهرست مفروض، مرتب شده یا دارای ترتیب عکس باشد، روش انتخاب عضو اول به عنوان مبدأ به همان بدترین حالت منجر می‌شود.بنابراین، اگر قرار باشد فهرستهای زیادی که تقریباً مرتب‌اند با الگوریتم سریع مرتب شوند، بهتر است مبدأ با دقت بیشتری انتخاب شود.

مسألهٔ دیگری در مورد الگوریتم سریع مربوط به مقدار فضایی است که اشغال می‌کند.تا این مرحله از بحث ، مقدار فضای مصرفی را بررسی نکرده‌ایم ولی این موضوع می‌تواند مهم باشد.در الگوریتم انتخابی فضای کمی اشغال می‌شود و از آن مهمتر، فضای اشغال‌شده در این الگوریتم مستقل از اندازهٔ فهرست است.اما به دلیل اینکه الگوریتم سریع بازگشتی است، هر دفعه که روند به کار رفته فراخوانده می‌شود مقداری اطلاعات در پشتهٔ حین اجرا قرار می‌گیرد.در بدترین حالت، الگوریتم سریع ممکن است n دفعه به طور بازگشتی فرا خوانده شود و لذا پشتهٔ مذکور ممکن است $O(n)$ فضا اشغال نماید.برای مقابله با این مسأله، روش زیرکانه‌ای را می‌توان به کار برد که تضمین می‌کند فضای اشغال‌شده به وسیلهٔ پشته بیش از $O(\log_۲ n)$ نباشد.به این منظور، اولین فراخوان بازگشتی را به قسمت کوچکتر فهرست اختصاص داده و به جای فراخوان قسمت بزرگتر، این عمل را به وسیلهٔ یک حلقهٔ بازگشتی انجام می‌دهیم.این کار خسته کننده و تا حدی پیچیده است و در مواردی ممکن است ارزش نتیجهٔ به دست آمده را نداشته باشد.لذا بهتر است تنها در مواردی که فضای به کار رفته واقعاً مهم است، آن را به کار برد.

کار با داده‌های واقعی

گرچه دستیابی به تقریبی از مدت اجرای الگوریتم‌ها، با توجه به مرتبهٔ این مدت، مفید است، دیدن مثالی واقعی نیز جالب است.به این منظور، الگوریتهای سریع در مورد فهرستهایی با اندازه‌های متفاوت که عضوهای آنها به تصادف از میان اعداد صحیح انتخاب شده بودند، اعمال شد.نتایج را در جدول زیر می‌بینید.از این جدول معلوم است که تفاوت مدت اجرا در مورد فهرستهای کوچک قابل صرف نظر کردن است اما در مورد فهرستهای بزرگ این تفاوت خیلی زیاد است.زبان برنامه‌نویسی به کار رفته، مک پاسکال و کامپیوتر مورد استفاده، مکینتاش بوده است.

جدول ۱. مقایسهٔ مدت اجرای الگوریتمهای انتخابی و سریع (برحسب دقیقه:ثانیه)

اندازهٔ فهرست	مرتب کردن انتخابی	مرتب کردن سریع
۱۰	۰/۰۱	۰/۰۱
۵۰	۰/۰۵	۰/۰۵
۱۰۰	۰/۲۰	۰/۰۹
۵۰۰	۷/۴۹	۱/۰۲
۱۰۰۰	۳۱/۰۱	۲/۱۰

مراجع

1. Aho, Hopcroft, and Ullman, *Data Structures and Algorithms* (Reading, MA: Addison - Wesley.1983, p. 382).
2. Donald E. Knuth, *Art of Computer Programming, Volume 3: Sorting and Searching* (Reading, MA: Addison - Wesley.1973).

****

• Jonathan Amsterdam. " An analysis of sorts, " *Byte*, September 1985, 105 -112.

قسمتهایی از اواخر این مقاله که برای خوانندگان نشر ریاضی چندان جالب‌تشخیص داده نشده در ترجمه حذف شده است.

* جاناتان آمستردام در هنگام نوشتن این مقاله در دانشگاه ام.آی.تی. دانشجوی دکتری بوده است.

صد مسأله از آرنولد

ترجمهٔ علی عمیدی

ولادیمیر آرنولد، ریاضیدان شهیر روس، اخیراً شرحی در انتقاد از روشهای امتحان کردن در شوروی سابق همراه با صد مسألهٔ پیشنهادی منتشر کرده است.متن اصلی در

Uspekhi Mat. Nauk, (1)46(1991)225-232

چاپ شده و در اینجا ترجمهٔ فارسی مطلب را که از روی ترجمهٔ فرانسوی آن در *Gazette des Mathémiticien* انجام شده، می‌خوانید.شرح مزبور در ترجمه تلخیص شده است.

****

سطح فرهنگ ریاضی در دانشگاههای ما مرتباً پایین می‌آید.دانشجویانی که در تمام سطوح از دانشکده‌های مختلف من‌جمله از بخش ریاضی و مکانیک دانشگاهها فارغ‌التحصیل می‌شوند به اندازهٔ کافی با معلومات نیستند.علل این پدیده چیست؟یکی از این علل نظام امتحانات ماست که دانشجو برای گذراندن آنها فرمولها را بدون درک به کار می‌برد و پاسخ سؤالها را حفظ می‌کند.در تمام دنیا امتحان ریاضی به صورت کتبی است، چرا که در امتحان شفاهی دانشجو مطلقاً بی‌دفاع است.کتبی بودن امتحان، نشانه‌ای از دموکراسی است که باید درکشور همه‌گیر شود.یک برگه کتبی به مثابه یک سند است و ممتحن اجباراً به صورتی عینی‌تر عمل می‌کند.امتحانات کتبی مزیتی دیگر نیز دارند.می‌توان موضوعهای آنها را منتشر کرد تا دانشجویان آینده برای کسب آمادگی در امتحانات بعد، از آنها بهره‌مند شوند.چگونه می‌توان میزان یادگیری دانشجو را اندازه گرفت؟لیست نمرات و برنامهٔ دروس وسائل مناسبی نیستند.تنها راه سنجش معلومات دانشجویان در درس، تهیهٔ فهرستی است از مسائلی که بعد از تدریس باید بتوانند حل کنند.مقصود من، مسائل مشکل نیست، بلکه مسائلی است که شامل مطالب ضروری‌اند.این گونه مسائل، سطح درس و سطح معلومات استاد طراح را تعیین می‌کنند.نقاط قوت و ضعف او را مشخص می‌نمایند و متخصصین می‌توانند فوراً خود معلم، آنچه راکه مایل بوده است به دانشجو بیاموزد، و آنچه راکه موفق به آموختن آنها شده است، ارزیابی کنند.در امتحانات شفاهی ما، هیچ سابقه‌ای ضبط نمی‌شود و لذا نمی‌توان آنها را به‌طور عینی با ارزیابیهای دیگر مقایسه کرد.ارزش این امتحانات فوق‌العاده مبهم و نسبی است و کاملاً به سطح آموزش و سؤالات هر بخش آموزشی بستگی دارد.

اساس برنامه و نارساییهای نظام آموزش ریاضی ما مصداق گفته‌های ریچارد فاینمن فیزیکدان معروف دربارهٔ آموزش فیزیک در برزیل است، یعنی به‌گونه‌ای است که دانشجویان آن طور که باید درس ریاضی را نمی‌فهمند، امّا هرگز سؤالی نمی‌کنند و چنین وانمود می‌کنند که همه را فهمیده‌اند.اگر دانشجویی سؤالی را مطرح کند به سرعت او را به جایش می‌نشانند زیرا وقت استاد را می‌گیرد.نتیجه آنکه هیچکس قادر به کاربرد آموزشی که گرفته است نیست.برای خاتمه دادن به این مشکلات باید فهرستی از قضایا و مسائلی که دانشجویان لازم است حل کنند تهیه کنیم و آنها را همه ساله منتشر نماییم و تمام امتحانات را به صورت کتبی انجام دهیم.مسائل باید از سالی به سال دیگر تغییر کنند.بدین طریق می‌توان سطح دانش استادان مختلف و حاصل سالهای مختلف را با هم سنجید.طرح مسائل نوعی، کاری ساده نیست.من به عنوان نمونه، صورت صد مسأله را که حاوی حداقل مطالب ریاضی است که یک دانشجوی فیزیک باید بداند، عرضه می‌کنم.امید دارم در آتیه مسائل نوعی‌هر درس را در بدو ترم به دانشجویان بدهند و از این پس، امتحان شفاهی چیزی مربوط به گذشته باشد.

۱.تابعی با خم نمایشش مشخص شده است.خم مشتق و خم انتگرال آن را رسم کنید.

۲.حدّزیر را بیابید

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\tan x-\tan\sin x}{\arcsin\arctan x-\arctan\arcsin x}$$

۳.مقادیر بحرانی ونقاط بحرانی نگاشت $z\to z^2+2\bar{z}$ را بیابید (پاسخ را با شکل نمایش دهید)

۴.مشتق مرتبهٔ صدم تابع

$$\frac{x^2+1}{x^3-x}$$

را حساب کنید.

۵.مقدار مشتق مرتبهٔ صدم تابع

$$\frac{1}{x^2+3x+2}$$

را با تقریب ۱۰٪ در $x=0$ حساب کنید.

۶.در صفحهٔ (x, y)، خم به معادلهٔ پارامتری

$$\begin{cases} x = 2t - 4t^3 \\ y = t^2 - 3t^4 \end{cases}$$

را رسم کنید.

۷.از نقطه‌ای واقع در صفحه‌ای، چند قائم می‌توان بر یک بیضی رسم کرد؟ ناحیه‌ای را تعیین کنید که در آن، تعداد قائمها ماکسیمم باشد.

۸.تابع $x^4 + y^4 + z^4 + u^4 + v^4$ روی رویهٔ

$$x + \ldots + v = 0, x^2 + \ldots + v^2 = 0, x^3 + \ldots + v^3 = c$$

چند ماکسیمم، مینیمم، ونقطهٔ زینی دارد؟

۹.آیا هر چند جمله‌ای مثبت دو متغیرهٔ حقیقی، بزرگترین کران پایین خود را در صفحه اتخاذ می‌کند؟

۱۰.رفتار مجانبی آن جوابهای y از معادلهٔ $x^5 + x^2y^2 = y^6$ را که وقتی $x \to 0$، به صفر میل می‌کنند بررسی کنید.

۱۱.همگرایی انتگرال

$$\iint_{R^2} \frac{dxdy}{1 + x^4y^4}$$

را بررسی کنید.

۱۲.شار میدان برداری $\vec{r}/r^3$ گذرنده از رویهٔ

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 2$$

را بیابید.

۱۳.مقدار

$$\int_1^{10} x^x dx$$

را با تقریب ۵٪ حساب کنید.

۱۴.مقدار

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x^4 + 4x + 4)^{-100} dx$$

را با خطای نسبی حداکثر ۱۰٪ حساب کنید.

۱۵.مقدار

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(100(x^4 - x))dx$$

را با تقریب ۱۰٪ حساب کنید.

۱۶.چه نسبتی از حجم یک مکعب پنج بعدی، معرّف حجم کرهٔ محاط در آن است؟اگر مکعب ده‌بعدی باشد، این نسبت چقدر است؟

۱۷.فاصلهٔ مرکز ثقل یک نیم کرهٔ توپر ۱۰۰ بعدی همگن به شعاع ۱ را از مرکز کره، با تقریب ۱۰٪ بیابید.

۱۸.مطلوب است محاسبهٔ

$$\int \cdots \int \exp(-\sum_{1 \le i \le j \le n} x_i x_j) dx_1 \ldots dx_n$$

۱۹.مسیر یک شعاع نورانی در یک محیط مسطح با ضریب شکست $n(y) = y^4 - y^2 + 1$ را با استفاده از قانون اسنل: $n(y)\sin\alpha =$ ثابت معین کنید.در این قانون، α زاویه‌ای است که شعاع با محور yها می‌سازد.

۲۰.جوابی از معادلهٔ $\ddot{x} = x + A\dot{x}^2$ راکه در شرایط اولیهٔ $x(0) = 1$، $\dot{x}(0) = 0$ صادق است در نظر بگیرید.مشتق این جواب را نسبت به A به ازای $A = 0$ بیابید.

۲۱.جوابی از معادلهٔ $\ddot{x} = \dot{x}^2 + x^3$ راکه در شرایط اولیهٔ $x(0) = 0$، $\dot{x}(0) = A$ صدق می‌کند در نظر بگیرید.مشتق این جواب را نسبت به A به ازای $A = 0$ بیابید.

۲۲.در فضای ضرایب معادلهٔ $\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$، مرز حوزهٔ پایداری $(\max \mathrm{Re}\lambda_j < 0)$ را بررسی کنید.

۲۳.معادلهٔ شبه‌همگن

$$\frac{dx}{dy} = x + \frac{x^3}{y}$$

را حل کنید.

۲۴.معادلهٔ شبه‌همگن $\ddot{x} = x^5 + x^2\dot{x}$ را حل کنید.

۲۵.آیا ممکن است یک وضع تعادل مجانباً پایدار به وسیلهٔ خطی‌سازی، به مفهوم لیاپونوف ناپایدار شود؟

۲۶.وقتی $t \to +\infty$، رفتار جوابهای هر یک از دستگاههای

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2\sin y - y - x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2x - x^3 - x^2 - \varepsilon y, \varepsilon \ll 1 \end{cases}$$

را بررسی کنید.

۲۷.تصاویر جوابهای معادلهٔ

$$\ddot{x} = F(x) - k\dot{x}, \qquad F = -dU/dx$$

را در صفحهٔ (x, E) رسم کنید، که در آن، نزدیک نقاط بحرانی ناباهیده پتانسیل U،

$$E = \dot{x}^2/2 + U(x)$$

۲۸.رخسارهٔ فاز (phase portrait) معادلهٔ دیفرانسیل زیر را رسم کنید وتغییرات آن تحت تغییر پارامتر مختلط کوچک ϵ را بررسی کنید.

$$\dot{z} = \epsilon z - (1 + i)z \mid z \mid^2 + z^{-4}$$

۲۹.ذرهٔ بارداری تحت اثر یک میدان مغناطیسی قوی $B(x,y)$، با سرعت۱ در صفحه‌ای عمود بر جهت میدان حرکت می‌کند.مرکز همسایگی لارمور به کدام طرف رانده می‌شود؟سرعت این حرکت را(به تقریب اول) حساب کنید.[از لحاظ ریاضی، این مطلب مربوط می‌شود به خمهای با خمیدگی NBوقتی که $N \to \infty$.]

۳۰.مطلوب است مجموع شاخصهای نقاط تکین میدان برداری $z\bar{z}^2 + z^4 + 2\bar{z}^4$، به غیراز صفر.

۳۱.مطلوب است شاخص نقطهٔ تکین صفر میدانی برداری با مؤلفه‌های

$$(x^4 + y^4 + z^4, x^3y - xy^3, xyz^2)$$

۳۲.مطلوب است شاخص نقطهٔ تکین صفر میدان برداری،

$$\mathrm{grad}(xy + yz + xz)$$

۳۳.ضریب پیوند مسیرهای فاز معادلهٔ نوسانات کوچک $\ddot{x} = -4x$، $\ddot{y} = -9y$ را روی یک رویهٔ تراز از انرژی کل بیابید.

۳۴.نقاط تکین روی خم $y = x^3$ در صفحهٔ تصویری را بررسی کنید.

۳۵.ژئودزیکهای روی رویهٔ

$$(x^2 + y^2 - 2)^2 + z^2 = 1$$

را رسم کنید.

۳۶.گسترندهٔ سهمی درجه سوم $y = x^3$ را رسم کنید (گسترنده، مکان نقاط $\vec{r}(s) + (c - s)\vec{r}$ است، که در آن s، در ازای کمان خم $\vec{r}(s)$ است و c مقداری است ثابت).

۳۷.نشان دهید که در فضای اقلیدسی، رویه‌های

$$((A - \lambda E)^{-1}x, x) = 1$$

که از نقطهٔ x می‌گذرند به ازای مقادیر مختلف λ، دو به دو برهم عمودند (A، عملگری متقارن است که ویژه مقدار چندگانه ندارد).

۳۸.انتگرال خمیدگی گاوسی رویهٔ

$$z^4 + (x^2 + y^2 - 1)(2x^2 + 3y^2 - 1) = 0$$

را حساب کنید.

۳۹.انتگرال گاوس

$$\oint \frac{(d\vec{A}, d\vec{B}, \vec{A} - \vec{B})}{|\vec{A} - \vec{B}|^2}$$

را حساب کنید.$\vec{A}$، خم $x = \cos\alpha$، $y = \sin\alpha$، $z = 0$ را می‌پیماید و $\vec{B}$ خم $x = 2\cos^2\beta$، $y = \frac{1}{2}\sin\beta$، $z = \sin 2\beta$ را.

۴۰.جهت برداری در لنینگراد (به‌عرض جغرافیایی ۶۰°)رو به شمال است.حاصل تغییر مکان موازی این بردار را پس از طی کردن یک مداربسته از غرب به شرق پیدا کنید.

۴۱.خمیدگی ژئودزیک خط $y = 1$ را در نیم صفحهٔ فوقانی مجهز به متریک لباچفسکی ـ بوانکارهٔ

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$$

بیابید.

۴۲.آیا در صفحهٔ لباچفسکی، میانه‌های یک مثلث متقارب‌اند؟ارتفاعها چطور؟

۴۳.اعداد بتی رویهٔ $x_1^2 + \ldots + x_k^2 - y_1^2 - \ldots - y_l^2 = 1$ و مجموعهٔ $x_1^2 + \ldots + x_k^2 \leq 1 + y_1^2 + \ldots + y_l^2$ را در یک فضای برداری $(k + l)$ بعدی بیابید.

۴۴.اعداد بتی رویهٔ $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ را در فضای تصویری سه بعدی بیابید.همین مسأله را برای رویه‌های $z = xy$ ، $z = x^2$، $z^2 = x^2 + y^2$ حل کنید.

۴۵.شاخص تقاطع رویهٔ $x^4 + y^4 = 1$ با خودش را در صفحهٔ تصویری CP^2 بیابید.

۴۶.نگاشت همدیسی پیدا کنید که درون قرص واحد را بر روی ربع اول مختصات بنگارد.

۴۷.نگاشت همدیسی پیدا کنید که بیرون قرص واحد را بر روی بیرون یک بیضی مفروض بنگارد.

۴۸.نگاشت همدیسی بیابید که نیمصفحه‌ای متهای یک پاره‌خط عمود بر مرز آن را بر روی نیمصفحه بنگارد.

۴۹.مطلوب است محاسبهٔ

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{\sqrt{1 + z^{10}}}$$

۵۰.مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1 + x^2} dx$$

۵۱.مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx$$

۵۲.اولین جملهٔ بسط مجانبی انتگرال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{1 + x^{2n}}} dx$$

را وقتی $k \to \infty$، حساب کنید.

۵۳.نقاط تکین صورت دیفرانسیلی $dt = dx/y$ را روی رویهٔ ریمانی فشردهٔ $y^2/2 + U(x) = E$ بیابید.U یک چند جمله‌ای است و E یک مقدار بحرانی نیست.

۵۴.فرض کنید $\ddot{x} = 3x - x^3 - 1$.درکدام چاه پتانسیلی(چاه عمیقتر یا کم‌عمقتر)، دورهٔ نوسانها برای انرژی کل ثابت، بزرگتر است؟

۵۵.توپولوژی رویهٔ ریمانی تابع

$$w = \arctan z$$

را بررسی کنید.

۵۶.رویهٔ ریمانی تابع

$$w = \sqrt{1 + z^n}$$

دارای چند دسته است؟

۵۷.بعد فضای جوابهای مسألهٔ $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \delta(z - i)$ را روی $\mathrm{Im} z \geq 0$، با شرط $\mathrm{Im} u(z) = 0$ و به ازای $\mathrm{Im} z = 0$، $u \to 0$ وقتی $z \to \infty$، بیابید.

۵۸.بعد فضای جوابهای مسألهٔ $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = a\delta(z - i) + b\delta(z + i)$ را روی $|z| \leq 2$ با شرط $\mathrm{Im} u = 0$ به ازای $|z| = 2$ بیابید.

۵۹.وجود و یکتایی جواب مسألهٔ $yu_x = xu_y$، $u|_{x=1} = \cos y$ را در همسایگی نقطهٔ $(1, y_0)$ بررسی کنید.

۶۰. آیا مسألهٔ کوشی

$$x(x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + y^3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$u|_{y=0} = 1$$

در همسایگی نقطهٔ $(x_0, 0)$ از محور xها دارای جواب است؟ آیا این جواب یکتاست؟

۶۱.بزرگترین مقدار t، برای اینکه جواب مسألهٔ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \sin x$$

$$u|_{t=0} = 0$$

بتواند در بازهٔ $[0, t)$ ادامه یابد، کدام است؟

۶۲.تمام جوابهای معادلهٔ $y\partial u/\partial x - \sin x \partial u/\partial y = u^2$ را در یک همسایگی نقطهٔ $(0, 0)$ بیابید.

۶۳.آیا مسألهٔ کوشی

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + \sin x \frac{\partial u}{\partial y} = y \qquad u|_{x=0} = y^2$$

در تمام صفحهٔ (x, y) جواب دارد؟ آیا این جواب یکتاست؟

۶۴.آیا مسألهٔ کوشی $u|_{y=x^2} = 1$، $(\nabla u)^2 = 1$، در حوزهٔ $y \geq x^2$ جواب C^∞ دارد؟ در حوزهٔ $y < x^2$ چطور؟

۶۵.مقدار متوسط تابع $\log r$ را روی دایرهٔ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ بیابید (وهمین طور مقدار متوسط $\frac{1}{r}$ را روی کره).

۶۶. مسألهٔ دیریکلهٔ

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 && x^2 + y^2 < 1 \\ &u = 1 && x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0 \\ &u = -1 && x^2 + y^2 = 1, \quad y < 0 \end{aligned}$$

را حل کنید.

۶۷.برای مسأله

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0, && x^2 + y^2 > 1 \\ &\frac{\partial u}{\partial n} = 0, && x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

بعد فضای جوابهای پیوسته روی $x^2 + y^2 \geq 1$ چقدر است؟

۶۸.برای تمام تابعهای u ی C^∞، چنانکه u در 0 مساوی صفر و روی $x^2 + y^2 = 1$ مساوی ۱ باشد، مطلوب است

$$\inf \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (\frac{\partial u}{\partial n})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 dxdy$$

۶۹.نشان دهید زاویه‌ای فضایی که به وسیلهٔ خم بستهٔ ثابتی معین شده است تابعی از رأس زاویه است که در خارج از صفحهٔ خم، همساز است.

۷۰.مقدار متوسط زاویه‌ای فضایی را حساب کنید که تحت آن ، قرص $x^2 + y^2 \leq 1$ در صفحهٔ $z = 0$، از نقاط کرهٔ $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$ دیده می‌شود.

۷۱.در درون حفره‌ای، یک بار $q = 1$ به فاصلهٔ r از مرکز قرار دارد.توزیع بار روی مرز هادی حفره، $x^2 + y^2 + z^2 = 1$، را حساب کنید.

۷۲.پخ بودن قطبین زمین ($\varepsilon \approx 1/300$) بر میدان گرانشی زمین اثر می‌گذارد.نتیجهٔ این تأثیر را بر فاصلهٔ زمین و ماه(به تقریب مرتبهٔ اول برحسب ε)بیابید.(زمین همگن فرض می‌شود.)

۷۳.اثرِ کرویِ کامل نبودنِ خازن تقریباً کروی $R = 1 + \varepsilon f(\varphi, \theta)$ را بر ظرفیتش (به تقریب مرتبهٔ اول بر حسب ε) بیابید.

۷۴.خم $u(x, 1)$ را به ازای $0 \leq x \leq 1$ رسم کنید، به شرط آنکه

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad u|_{t=0} = x^2 \quad , \quad u|_{x^2=x} = x^2$$

۷۵.زمین شهر N به علت تغییرات سالیانهٔ درجهٔ حرارت، تا عمق ۲متر یخ می‌بندد.اگر تغییراتی با همین دامنه، روزانه باشند، زمین شهر تا چه عمقی یخ خواهد زد؟

۷۶.رفتار جواب مسألهٔ

$$u_t + (u\sin x)_x = \varepsilon u_{xx} \qquad u|_{t=0} \equiv 1 \qquad \varepsilon \ll 1$$

را به ازای $t \to +\infty$ بررسی کنید.

۷۷.مطلوب است ویژه مقدارهای عملگر لاپلاس $\Delta = \mathrm{div\ grad}$، روی کره‌ای به شعاع R در فضای اقلیدسی به بعد n ، وچندگانگی (درجهٔ تکرار) آنها.

۷۸. مسألهٔ کوشی

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2B \quad , \quad \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 6\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - 2A$$

$$A\,|_{t=0} = \cos x,\ B\,|_{t=0} = 0,\ \frac{\partial A}{\partial t}\,|_{t=0} = \frac{\partial B}{\partial t}\,|_{t=0} = 0$$

را حل کنید.

۷۹.مسألهٔ مقدار مرزی

$$u_{xx} + \lambda u = \sin x \qquad u(0) = x(\pi) = 0$$

دارای چند جواب است؟

۸۰.معادلهٔ

$$\int_0^1 (x+y)^2 u(x)dx = \lambda u(y) + 1$$

را حل کنید.

۸۱.تابع گرین عملگر $d^2/dx^2 - 1$ را بیابید و معادلهٔ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} u(y)dy = e^{-x^2}$$

را حل کنید.

۸۲.برای چه مقادیری از سرعت c ، معادلهٔ $u_t = u - u^2 + u_{xx}$، جوابی به صورت یک موج «روندهٔ» $u = \varphi(x - ct)$، $\varphi(-\infty) = 1$، $\varphi(\infty) = 0$، $0 \le u \le 1$ دارد؟

۸۳.جوابهایی از معادلهٔ $u_t = u_{xxx} + uu_x$ را که به صورت یک موج «روندهٔ» $u = \varphi(x - ct)$، $\varphi(\pm\infty) = 0$ هستند بیابید.

۸۴.تعداد مربعهای مثبت و منفی را در شکل متعارف یک صورت درجهٔ دوم n متغیرهٔ $\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2$ بیابید.همین مسأله را در مورد صورت $\sum_{i<j} x_i x_j$ حل کنید.

۸۵.طول قطرهای اصلی بیضیوار $\sum_{i\le j} x_i x_j = 1$ را به دست آورید.

۸۶.خطی از مرکز یک مکعب (یا چهار وجهی یا بیست وجهی) به طریقی عبور دهید که مجموع مربعات فواصلش از رئوس ، الف)مینیمم باشد؛ ب)ماکسیمم باشد.

۸۷.مشتقات درازای نیم قطرهای بیضیوار

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 1 + \varepsilon xy$$

را نسبت به ε در $\varepsilon = 0$ بیابید.

۸۸. از برش مکعب نامتناهی‌البعد $|x_k| \le 1$ ، $(k = 1, \ldots)$ به وسیلهٔ صفحه‌ای ۲بعدی ، چند شکل مختلف به دست می‌آیند؟

۸۹.مجموع حاصلضربهای برداری

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y]$$

را حساب کنید.

۹۰.مجموع تعویضگرهای ماتریسی

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]]$$

را که در آن $[A,B] = AB - BA$، حساب کنید.

۹۱.صورت نرمال ژوردان عملگر $\exp\frac{d}{dt}$ در فضای شبه چند جمله‌ایهای $\{e^{\lambda t}p(t)\}$ را بیابید.درجهٔ چندجمله‌ای p کمتراز ۵ است.همین مسأله را در مورد عملگر ad_A، $B \longmapsto [A,B]$ در فضای ماتریسهای B که مربعی از مرتبهٔ nاند، حل کنید.A ماتریسی قطری است.

۹۲.مرتبه‌های زیرگروههای گروه دورانهای مکعب را بیابید و زیرگروههای نرمال آن را پیدا کنید.

۹۳.فضای توابعی راکه روی مجموعهٔ رئوس یک مکعب تعریف شده است به زیر فضاهای ناوردای تحویلناپذیر نسبت به گروه الف)تقارنهای مکعب؛ ب)دورانهایش، تجزیه کنید.

۹۴.یک فضای برداری حقیقی ۵ بعدی رابه زیر فضاهای ناوردای تحویلناپذیر گروه پدید آمده از جایگشتهای دوری بردارهای پایه، تجزیه کنید.

۹۵.فضای چندجمله‌ایهای همگن درجهٔ ۵ بر حسب (x,y,z) را به زیر فضاهای ناوردای تحویلناپذیر نسبت به گروه دورانهای $SO(3)$ تجزیه کنید.

۹۶.به هر یک از ۳۶۰۰ نفری که مشترکین یک مرکز تلفن هستند به طور متوسط یک بار در ساعت تلفن می‌زنند.احتمال اینکه مرکز در ثانیه‌ای مفروض، ۵ تلفن (یا بیشتر)دریافت کند چقدر است؟فاصلهٔ زمانی متوسط بین دو تا از این گونه ثانیه‌ها، $[i, i+1]$، را برآورد کنید.

۹۷.ذره‌ای به تصادف روی نقاط به طول صحیح واقع بر نیم محور $x \ge 0$ جابه‌جا می‌شود، بدین طریق که مسافتی به اندازهٔ یک واحد، با احتمال a به سمت راست و با احتمال b به سمت چپ حرکت می‌کند و در سایر حالتها در جای خود می‌ماند(اگر $x = 0$ ، به‌جای رفتن به‌چپ در جای خود می‌ماند).اگر ذره از نقطهٔ ۰ حرکت کند، توزیع حدی احتمال، و امید ریاضی xوx^2 را پس از زمانی به قدر کافی طولانی، معین کنید.

۹۸.دریک بازی ،N بازیکن روی دایره‌ای می‌ایستندو همزمان دست راست خود را با تعدادی انگشت باز بالا می‌برند.(انتخاب تعداد انگشتها، ۰ تا ۵ ، متساوی الاحتمال است).تعداد انگشتهای باز بازیکنان را جمع می‌کنند.سپس از رهبر بازی شروع می‌کنند و بازیکنان را تا عدد حاصل از جمع در طول دایره می‌شمارند.بازیکنی که شمارش به او ختم می‌شود، برنده بازی است.کمترین تعداد بازیکنها، N، که به ازای آن، گروهی مرکب از $\frac{N}{10}$ از بازیکنان که به‌طور مناسبی انتخاب شده، با احتمال ۹۷٪ دارای یک برنده باشد چقدر است؟وقتی $N \to \infty$، رفتار احتمال برنده شدن رهبر بازی چگونه است؟

۹۹.بازیکنی یک سکهٔ ۱۰ ریالی یا ۲۰ ریالی به تصادف انتخاب می‌کند، و بازیکن مقابل مقدار آن را حدس می‌زند.اگر حدس او درست باشد همان سکه را می‌بردو اگر اشتباه کند ۱۵ ریال می‌پردازد.آیا این بازی منصفانه است؟خط مشی اپتیمال هر یک از دو بازیکن چیست؟

۱۰۰.امید ریاضی مساحت تصویر مکعبی به ضلع ۱ را روی صفحه‌ای با این فرض که امتداد تصویر،تصادفی با توزیع یکنواخت است بیابید.

مجله‌های ریاضی جهان و کتابخانه‌های ریاضی ایران

سیاوش شهشهانی *

یکی از نگرانیهای گروههای ریاضی دانشگاههای کشور، به خصوص آنهایی که دورهٔ دکتری ریاضی تأسیس کرده‌اند یا در صدد تأسیس آن هستند، ضعف کتابخانه‌ها در زمینهٔ مجلات تحقیقی است.هر ریاضیکار ایرانی که اندک مدتی را در یک دانشگاه آبرومند اروپا یا آمریکا گذرانده باشد، این ضعف را درکتابخانه‌های دانشگاهی ایران به‌وضوح مشاهده می‌کند ولی میزان کمبود، نتایج احتمالی آن، و توجیه نیاز این کتابخانه‌ها به اندوختهٔ قابل ملاحظه‌ای از مجلات تحقیقی، مستلزم آگاهی جامع از جنبه‌های گوناگون موضوع و در دست داشتن آمار و ارقام لازم از کتابخانه‌های سایر کشورهاست.آماری که اخیراً انجمن ریاضی آمریکا منتشر کرده است [۱] نشان می‌دهد که هشتاد درصد کتابخانه‌های گروههای ریاضی دانشگاههای آمریکا و کانادا که درجهٔ دکتری ریاضی اعطا می‌کنند، بیش از صد مجلهٔ ریاضی را مشترک هستند.این رقم به اندازهٔ کافی گویا نیست زیرا که بیش از صد دانشگاه در این کشورها، با کیفیتهای بسیار متفاوت، ارائه کنندهٔ درجهٔ دکتری ریاضی محسوب می‌شوند.چنانچه فقط ده درصدی را که از همه قویترند در نظر بگیریم، میانگین تعداد عناوین مجله‌های جاری ریاضی ۴۸۰ است.در یک مورد، کتابخانه‌ای متجاوز از ۷۵۰ عنوان مجلهٔ ریاضی را مشترک است.در مقایسه، تعداد عناوین مجله‌های ریاضی کتابخانه‌های گروههای ریاضی در ایران، به استثنای سه مورد، پایینتر از صد تاست، و در سه مورد استثنایی هم از حدود ۲۰۰ تجاوز نمی‌کند.تأثیر نامطلوب این کمبود در واقع بیش از آن است که مقایسهٔ عددی نشان می‌دهد زیرا به سبب دوری از مراکز مهم ریاضی جهان، عمده‌ترین وسیلهٔ ارتباط تحقیقاتی در ایران، همین مجلات تحقیقی هستند.

اینکه چند مجلهٔ تحقیقی در جهان منتشر می‌شود دقیقاً روشن نیست و مسلماً لازم است تعریف دقیقی از مجلهٔ تحقیقی داشته باشیم.طبق نظر مؤسسه‌ای به نام «گروه کتابخانه‌های تحقیقاتی» در آمریکا، حدوداً ۹۰۰ عنوان مجلهٔ تحقیقی ریاضی در جهان وجود دارد که به آنها ارجاعات زیادی می‌شود.مجلهٔ مثمتیکال ریویوز حدوداً ۱۸۰۰ مجله را برای نقد و معرفی مقالاتشان مورد بررسی قرار می‌دهد که از این عده، مقالات تقریباً ۴۰۰ مجله کلاً نقد می‌شود.در میان این ۱۸۰۰ عنوان، تعدادی مجلهٔ «میان رشته‌ای» و مجلهٔ علمی عمومی وجود دارند که فقط در بخشی از صفحات خود به ریاضیات می‌پردازند.

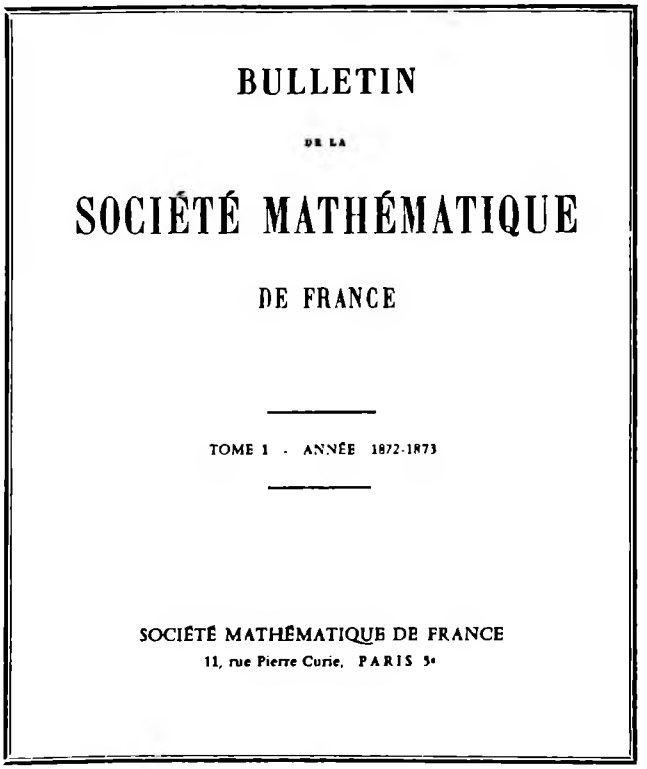
در این مقاله کوشش خواهیم کرد با ارائهٔ اطلاعاتی پیرامون مجله‌های ریاضی جهان، ریاضیکاران ایران، به خصوص دانشگاهیان، را در دو امر زیر یاری کنیم.

(۱) توجیه مقامات دانشگاهی و مسؤولان پژوهش و آموزش در کشور به لزوم تأمین ارز مورد نیاز برای اشتراک تعداد کثیری مجلهٔ پژوهشی ریاضی و پیشینه‌ها(شماره‌های قبلی)آنها.

(۲) انتخاب منطقی مجله‌ها در شرایطی که کمبود ارز، امکان اشتراک همهٔ مجله‌های مورد نظر را میسر نمی‌سازد.

نظری اجمالی و سرتاسری

همان‌طور که اشاره کردیم، در یک کتابخانهٔ مجهز ریاضی در کشوری پیشرفته ممکن است بتوان چند صد عنوان مجله در رشتهٔ ریاضی و رشته‌های وابسته به آن یافت.در این میان، علاوه بر نشریاتی که مقالات پژوهشی جدید چاپ می‌کنند، می‌توان مجله‌هایی را مشاهده کرد که عمدتاً به اخبار و رویدادهای ریاضی(محلی و جهانی)، مقاله‌های توصیفی، نظرگاهها، تحقیقات آموزشی، فلسفه و تاریخ ریاضی، نقد و بررسی، چکیده‌نگاری و غیره اختصاص دارند.در میان مجله‌های پژوهشی، مجله‌هایی هستند که تاریخ تأسیس آنها به بیش از یک قرن پیش باز می‌گردد و وجودشان از تداوم سنتهای علم ریاضی حکایت می‌کند.اکثر این نشریات هنوز هم از شهرت و حیثیت زیادی برخوردارند و بعضی از آنها کوشش می‌کنند صورت ظاهری سنتی خود را حفظ کنند.قدیمترین این مجله‌ها، جورنال فوردی راینه‌اوند انگواندته ماتماتیک(*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*)معروف به مجلهٔ کرله (Crelle)است که در سال ۱۸۲۶ تأسیس شد و اولین شماره‌های آن حاوی مقالات پر ارزشی از افرادی چون آبل است.همتای فرانسوی این مجله، با همان قطع بزرگ و حاشیه‌های جادار برای حاشیه‌نویسی، ژورنال دومتمتیک پور ا اپلیکه(*Journal de mathématiques pures et appliquées*) است که لیوویل به سال ۱۸۷۴ بنا نهاد و به مجلهٔ لیوویل معروف شده است.این دو مجله که در جریان پیشرفت ریاضیات قرن نوزدهم سهم مهمی داشتند [۲] هنوز هم از مجلات بسیار معتبر ریاضی محسوب می‌شوند.جالب توجه است که بعضی از مجله‌های قدیمی کماکان گرایشهای سابقه‌ای اولیهٔ خود را حفظ کرده‌اند.مجلهٔ پر اهمیت آکتاماتماتیکا(چاپ سوئد)که توسط میتاگ لفلر تأسیس شد، تمایلات اسکاندیناویایی واضحی دارد(تاکید بر آنالیز، به‌خصوص


BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

TOME 1 - ANNÉE 1872-1873

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
11, rue Pierre Curie, PARIS 5e

چاپ مجددی از روی جلد اولین شمارهٔ بولتن انجمن ریاضی فرانسه

آنالیز مختلط).همین‌طور مجلهٔ آنالز آو هتمتیکس(چاپ پرینستن)تا سالهای اخیر تریبون انتشار مهمترین آثار توپولوژی بود و می‌شد آن را آیینه‌ای از تحولات علم توپولوژی در آمریکا و به خصوص در پرینستن تلقی کرد.بیشتر مجلاتی که در بیست سال اخیر تأسیس شده‌اند به شاخه یا شاخه‌های خاصی از ریاضیات اختصاص دارند.روند چشمگیر دیگر، توسعه و رواج مجلاتی است که به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم با ریاضیات متأثر از کامپیوتر سروکار دارند.در سال جاری(۱۹۹۲)شاهد تأسیس مجله‌ای به نام مجلهٔ ریاضیات تجربی (*Journal of Experimental Mathematics*) بوده‌ایم که تنی چند از برجسته‌ترین ریاضیدانان جهان را در میان هیأت ویراستاران خود دارد.

ناشران مجلات ریاضی کیستند؟

انتشار مجله‌های ریاضی توسط سازمانهای ریاضی، دانشگاهها، مؤسسات تحقیقاتی، آکادمیها، و در سالهای اخیر به‌طور فزاینده‌ای توسط شرکتهای مهم انتشاراتی صورت می‌گیرد؛ صرف‌نظر از بحثهای ایدئولوژیک پیرامون مداخلهٔ شرکتهای تجاری در انتشار مجلات، آثار این روند کاملاً مشهود است.نتایج این امر را در چاپ و نشر مجله می‌توان به‌طور کلی زیر عنوان«حرفه‌ای شدن»امر تولید خلاصه نمود:انتشار مجلات و توزیع جهانی آنها به‌طور چشمگیری منظم‌تر و بهتر شده است، نیازهای جانبی خواننده بیشتر رعایت می‌شود(درج مشخصات مقاله در صفحهٔ آغازی، برچیده شدن پاورقیهای طولانی...)، و مدت زمانی که مقالهٔ تایید شده در انتظار چاپ می‌ماند، در مجلاتی که توسط ناشران حرفه‌ای چاپ می‌شوند کوتاهتر است.در جهت منفی، قیمت مجلات افزایش یافته است، بعضی زیباییها و خصوصیتهای سنّتی(حروف درشت، حاشیهٔ وسیع، ...)که اقتصادی نیستند، یا از بین رفته‌اند و یا بر قیمت مجله افزوده‌اند.

مجله‌های مسلط بر صحنه کدام‌اند؟

در ریاضیات می‌توان به این سؤال پاسخ ساده‌ای داد:هیچ یک.البته باید معیاری برای «مسلط بودن» بر عرصهٔ تحقیقات ریاضی ارائه کرد.دو ضابطه به ذهن خطور می‌کند: (۱) نشر تعداد قابل ملاحظه‌ای مقالهٔ ریاضی در زمینه‌های تخصصی گوناگون به‌طوری که مجله نوعی فراگیری داشته‌باشد، و (۲) «کیفیت و اهمیت»مندرجات.هر چند که ارائهٔ یک معیار کمّی دقیق برای سنجش«کیفیت و اهمیت»ممکن نیست ولیکن مؤسسهٔ اطلاعات علمی (Institute for Scientific Information یا اختصاراً ISI)در امریکا ضریبی به نام ضریب تأثیر (Impact Factor یا اختصاراً IF)ابداع کرده است،که معیار عملی و تقریبی معقولی است [۳].به اجمال، این ضریب عبارت است از نسبت تعداد ارجاعات به یک مجله بر تعداد مقالاتی که آن مجله چاپ می‌کند.در جدول ۱ این مقاله، فهرست صد مجلهٔ تحقیقی اول جهان را بر مبنای کمیّت مشابهی که آن را نسبت تأثیر (Impact Quotient یا اختصاراً IQ)می‌خوانیم درج کرده‌ایم.مجلاتی را که بیشتر فعالیتشان در زمینهٔ مقالات نقد و بررسی، توصیف و چکیده‌نگاری متون تحقیقی است در این جدول وارد نکرده‌ایم.همچنین مجلاتی که در چند سال اخیر شروع به انتشار کرده‌اند، به سبب فقدان دادهٔ کافی، در جدول ظاهر نمی‌شوند.تفاوت میان IF و IQ زیاد نیست و بعداً تشریح خواهد شد.در ستون آخر جدول ۱، رتبهٔ همین مجلات براساس تعداد کل ارجاعات سالانه آمده است.توجه کنید که فقط دو مجله (ردیفهای ۲ و ۶) در میان ده مجلهٔ اول، از نظر تعداد کل ارجاعات نیز در بین ده مجلهٔ اول هستند.به‌علاوه فقط یکی از اینها(*Inventiones*) در سال بیش از صد مقاله چاپ می‌کند.مجلهٔ آنالزآوهتمتیکس سالانه کمتر از چهل مقاله چاپ می‌کند، و آکتا ماتماتیکا که با نسبت تأثیر ۱٫۹۵ در صدر جدول ۱ قرار دارد، در سال حدوداً فقط ۱۴ مقاله به چاپ می‌رساند.سه مجلهٔ فرانسوی نیز که رتبه‌های سوم تا پنجم را به خود اختصاص داده‌اند فقط تعداد قلیلی مقاله در سال منتشر می‌کنند.بدین ترتیب پنج مجلهٔ اول از نظر نسبت تأثیر، از نظر تعداد کل مقالات چاپ شده در رتبه‌های بالا قرار ندارند.از این لحاظ ریاضیات نسبت به سایر علوم وضعی استثنایی دارد.مثلاً در فیزیک، مجلهٔ نوکلیر فیزیکس بی (*Nuclear Physics B*) که معمولاً مهمترین مجلهٔ فیزیک ذرات محسوب می‌شود، صاحب ضریب تأثیری افزون بر شش است در حالی که به‌طور هفتگی منتشر می‌شود و سالانه بیش از ۳۰۰ مقاله ارائه می‌کند!این اختلاف، در مقایسه با رشته‌های تجربی مانند شیمی و زیست‌شناسی حتی چشمگیرتر است.بعداً در مورد این اختلاف سطح ضرایب تأثیر در رشته‌های مختلف، که ناشی از سنتها و فرهنگهای متفاوت اجتماعی حاکم در این رشته‌هاست، صحبت خواهیم کرد.نکتهٔ مهم فعلاً این است که در ریاضیات آنقدر هماهنگی میان کمیّت و کیفیت (ضوابط (۱) و (۲) بالا) وجود ندارد که بتوان از این طریق ژورنالهای مسلط را تعیین کرد.در همین زمینه، اشاره به نشریهٔ پروسیدینگز انجمن ریاضی امریکا بیجا نیست.این مجله با حدود ۴۰۰ مقاله در سال، بیشترین تعداد مقالات ریاضی را به چاپ می‌رساند و از نظر تعداد کل ارجاعات مقام سوم را دارد، ولی رتبهٔ کیفی آن(نسبت تأثیر) هفتاد و چهارم است!

مقصود از ملاحظات بالا انتقاد از روند انتشارات ریاضی نیست.اینکه

جدول ۱

رتبه	مجله	IQ	تعداد کل ارجاعات	رتبه	مجله	IQ	تعداد کل ارجاعات
1	Acta Math (Sweden)	1.936	15	51	Canad J Math	0.345	24
2	Ann Math	1.843	2	52	Nonlin Anal	0.338	54
3	Publ Math IHES	1.826	51	53	J Math Soc Japan	0.324	50
4	Astérisque	1.685	49	54	Nagoya Math J	0.315	64
5	J Math Pure Appl	1.321	57	55	J Numb Theo	0.308	76
6	Invent Math	1.189	5	56	Illinois J Math	0.301	46
7	Comm Pure Appl Math	1.101	13	57	J Graph Theo	0.298	87
8	SIAM J Num Anal	0.980	12	58	Pacific J Math	0.294	9
9	Advances Math	0.957	26	59	Siberian Math J	0.294	69
10	Memoirs Am Math Soc	0.878	41	60	Stud Appl Math	0.293	92
11	J Diff Geom	0.871	32	61	J Comb Theo A	0.292	61
12	Duke Math J	0.824	19	62	J Math Kyoto U	0.285	78
13	Comment Math Helv	0.798	39	63	J Approx Theo	0.283	47
14	P Lond Math Soc	0.733	17	64	J Math Anal Appl	0.282	7
15	J Funcl Anal	0.715	14	65	Math P Camb Phil Soc	0.281	45
16	Topology	0.711	28	66	SIAM J Alg Disc [1]	0.265	88
17	Am J Math	0.688	8	67	Funcl Anal Appl	0.257	36
18	Num Math	0.646	16	68	Adv Appl Math	0.254	100
19	B Soc Math France	0.632	44	69	Tohoku Math J	0.251	72
20	Math Comput	0.617	11	70	J Symb Logic	0.250	42
21	Math Ann	0.616	4	71	Math USSR Sb	0.248	21
22	Arch Rat Mech Anal	0.613	23	72	Ann Sci Éc Norm Sup	0.247	98
23	Ann Inst Fourier	0.576	43	73	Mathematika	0.246	86
24	Indiana U Math J	0.573	33	74	P Am Math Soc	0.230	3
25	Comm PDE	0.572	73	75	Ann Acad Sci Fenn	0.226	77
26	Compos Math	0.558	52	76	Math Nachr	0.214	48
27	SIAM J Cont Opt	0.552	31	77	Monat Math	0.210	91
28	T Am Math Soc	0.520	1	78	Discrete Math	0.210	37
29	Math Zeit	0.518	6	79	Osaka J Math	0.208	74
30	J Reine Angew Math	0.504	18	80	Comm Algebra	0.203	58
31	J Lond Math Soc	0.502	20	81	Quart J Math	0.200	68
32	J Diff Eqns	0.493	22	82	Rocky Mt J Math	0.200	83
33	SIAM J Sci Stat Comput	0.467	63	83	P K Ned Akad	0.192	79
34	Israel J Math	0.458	29	84	J Aust Math Soc B	0.192	99
35	Math Scand	0.455	55	85	Archiv Math	0.170	40
36	J Analyse Math	0.442	71	86	Quart Appl Math	0.169	75
37	Michigan Math J	0.437	59	87	Acta Math (Hungary)	0.168	65
38	SIAM J Math Anal	0.436	38	88	P Edinb Math Soc	0.166	93
39	J Algebra	0.434	10	89	Houston J Math	0.166	97
40	Manusc Math	0.432	60	90	P Japan Acad	0.166	85
41	Fund Math	0.429	30	91	Math Notes	0.152	62
42	SIAM J Appl Math	0.417	27	92	Abh Math Sem Hamb	0.143	90
43	SIAM J Comput	0.414	53	93	Diff Eqns	0.141	34
44	Arkiv Math	0.396	82	94	Semigp Forum	0.138	89
45	J Comb Theo B	0.381	67	95	J Aust Math Soc A	0.138	94
46	P Roy Soc Edinb A	0.375	66	96	Canad Math B	0.130	80
47	Acta Arithm	0.374	70	97	B Aust Math Soc	0.127	81
48	J Pure Appl Algebra	0.366	56	98	Topolgy Appl	0.127	96
49	Lin Algebra Appl	0.357	25	99	Math USSR Izv	0.124	84
50	Stud Math	0.356	35	100	Z Math Logik	0.113	95

۱.این مجله از ۱۹۸۸ به دو مجله تفکیک شده که یکی در زمینهٔ ریاضیات گسسته و دیگری دربارهٔ نظریهٔ ماتریسهاست.

اختصارات B : Bulletin ، J : Journal ، P : Proceedings ، T : Transactions U : University ، Comm : Communications

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet 1826 von

August Leopold Crelle

fortgeführt von
C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger, H. Rohrbach

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse
Otto Forster · Willi Jäger · Martin Kneser
Horst Leptin · Peter Roquette

unter Mitwirkung von
M. Deuring, P. R. Halmos, O. Haupt,
F. Hirzebruch, G. Köthe, K. Krickeberg, K. Prachar,
H. Reichardt, F. W. Schäfke, L. Schmetterer,
B. Volkmann

JRMAA8

Band 307/308

Walter de Gruyter · Berlin · New York 1979

تعداد انگشت شماری مجله بر عرصهٔ تحقیقات ریاضی تسلط ندارند شاید حاکی از یک وضعیت سالم در جامعهٔ ریاضی باشد که در آن تنوع سلیقه بر تقلید، غالب است. شایان توجه است که اکثر مجله‌های صدر جدول ۱، ژورنالهای به نسبت قدیمی‌اند که متأثر از سنتهای دانشگاهها یا مؤسسات تحقیقاتی به‌خصوصی هستند و تصور اینکه این مجله‌ها از مجلات فصلی یا شش بار در سال به مجلات هفتگی یا دو هفته یک بار تبدیل بشوند بی آنکه سرشت خاص خود را از دست بدهند، مشکل است. حتی مجله اینونسیونز که به دانشگاه خاصی وابسته نیست (و توسط ناشر آلمانی اشپرینگر چاپ می‌شود) احتمالاً امکان توسعهٔ کمّی بیشتری را ندارد زیرا که انسجام این مجله (یا هر مجلهٔ تحقیقی) ناشی از نوعی هماهنگی میان اعضای هیأت ویراستاران آن مجله است که خودبه‌خود رشته‌های مورد نظر را محدود می‌کند. هریک از هشت مجلهٔ اول جدول ۱ به زمینه یا زمینه‌هایی از ریاضیات توجه بیشتری دارد و توسعهٔ هیأت ویراستاران هریک بدون شک هماهنگ ساختن کیفیت مقالات درج شده را دشوار می‌سازد. این مشکل در مجلاتی که به سازمانهای بزرگ ریاضی (مانند انجمن ریاضی امریکا) وابسته‌اند هم‌اکنون به چشم می‌خورد. از آنجا که چنین سازمانی پاسخگوی هزاران عضو است به ناچار اصول دمکراسی را بیشتر از سختگیری کیفی (که ممکن است در واقع به پوششی برای تمایلات سلیقه‌ای تبدیل شود یا دست کم چنین بنماید) رعایت می‌کند. و از این رو در مجلات این سازمانها نوعی تعادل ظاهری میان رشته‌ها (صرف‌نظر از میزان فعالیت جاری در سطوح بالای آن رشته) وجود دارد در حالی که یکنواختی کیفی وجود ندارد.

نتیجه‌ای که از بحث بالا برای کتابخانهٔ ریاضی دانشگاهها می‌گیریم این است که اشتراک تعداد زیادی مجله کاملاً ضروری است. مجله‌های ریاضی عمدتاً به‌طور فصلی یا دو ماه یک بار منتشر می‌شوند و بنابراین در مقایسه با رشته‌های دیگر که مجله‌های هفتگی یا دوهفتگی دارند، چند عنوان مجلهٔ ریاضی را باید معادل یک عنوان در علوم تجربی تلقی نمود.

ارجاع، وطول عمر مقالات

در بعضی رشته‌ها به تعداد ارجاعاتی که درکوتاه مدت به یک مقاله می‌شود، ارج بسیاری می‌نهند. نشریه ساینس سایتیشن ایندکس (*Science Citation Index* یا اختصاراً *SCI*)، که توسط ISI منتشر می‌شود و حاوی فهرست ارجاعات به مقالات علمی است، در این رشته‌ها یکی از منابع ارزیابی کار تحقیقاتی محسوب می‌شود. برعکس در ریاضیات نام این نشریه به گوش خیلیها نخورده است و این‌گونه ارزیابیهای کمّی کمتر مورد اعتماد قرار می‌گیرد. تفاوت فرهنگی که به آن قبلاً اشاره شد در اینجا کاملاً مشهود است. طبق گزارش *SCI*، میانگین تعداد مراجع یک مقالهٔ ریاضی حدود ۱۰ است (یعنی هر مقاله حدوداً به ده مقاله یا منبع دیگر ارجاع می‌دهد) در حالی که مثلاً در بیوشیمی عدد متناظر حدود ۳۰ می‌باشد (ضمناً میانگین ارجاعات در مجلات ریاضیات کاربردی بین ۱۵ تا ۲۰ است، یعنی از میانگین کل ریاضیات به‌طور قابل ملاحظه‌ای بالاتر است). اثر واضح این پدیده، پایین بودن «ضریب تأثیر» مجلات ریاضی در مقایسه با بیوشیمی (و سایر رشته‌های علوم) است. بدین ترتیب مقایسه‌های بین‌رشته‌ای براساس آمار *SCI* یا مشابه آن بی‌معنی است و این آمار، چنانچه حائز اهمیت باشد آن اهمیت نسبی است و فقط در درون یک رشته می‌تواند مبنای مقایسه باشد. یکی از تفاوتهای «نسبت تأثیر» (که جدول ۱ براساس آن تنظیم شده است) با «ضریب تأثیر» *SCI* این است که در محاسبهٔ نسبت تأثیر از ارجاعاتی که از خارج رشته به مقالات ریاضی می‌شود به دلایل زیر صرف‌نظر کرده‌ایم:

(الف) از آنجا که سنت ارجاع دادن در ریاضیات و سایر رشته‌ها یکسان نیست، جمع عددی تعداد ارجاعات بدون ملحوظ کردن ضریب تطبیق مناسب درست نیست.

(ب) هدف ما از تهیهٔ جدول ۱، تنظیم فهرستی مناسب کار ریاضیدان است، یعنی در اینجا می‌توان ارجاعات از خارج رشته را نادیده گرفت.

مشکل اسلوب شناختی که در اینجا مطرح می‌شود، تعریف دقیق «منابع برون رشته‌ای» است. بسیاری مجلات میان رشته‌ای و مرزی دیگر هستند که نمی‌توان جایگاه آنها را به صراحت مشخص کرد. ما در اینجا کلیهٔ مجلات SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) را درون‌رشته‌ای و کلیهٔ مجلات ACM (Association for Computing Machinery) را برون رشته‌ای محسوب کرده‌ایم. در بیشتر موارد، از قاعدهٔ تقریبی زیر استفاده کرده‌ایم: منابعی را برون رشته‌ای تلقی کرده‌ایم که نشانی بیشتر نویسندگان مقالات آنها، یک مؤسسهٔ ریاضی نیست. البته این رده‌بندی، جای بحث بسیار دارد. مثلاً مقاله‌های مجلهٔ کامیونیکیشنز این ماتماتیکال فیزیکس (*Communications in Mathematical Physics*) در سالهای اخیر تقریباً نصف به نصف بین ریاضیات و فیزیک تقسیم می‌شود ولی از آنجا که این مجله درگذشته یک مجلهٔ فیزیک محسوب می‌شده است، ما آن را منبعی برون رشته‌ای به شمار آورده‌ایم. در وهلهٔ اول به نظر می‌رسد که با این عمل حذف کردن، نسبت

تأثیر مجله‌های ریاضی کاربردی تقلیل می‌یابد، ولی این کاهش محدود به ریاضیات کاربردی سنتی نیست، بلکه IQی مجلاتی هم که مقالات زیادی در هندسه و توپولوژی چاپ می‌کنند نقصان می‌یابد. زیرا این گونه مقاله‌ها در سالهای اخیر بسیار مورد ارجاع فیزیکدانها قرارگرفته‌اند.در مجموع، با توجه به عواملی که بعداً ذکر خواهد شد و در محاسبهٔ IQ دخیل است، می‌توان گفت که روش ما از لحاظ نتیجه‌گیری نهایی در مورد رده‌بندی مجلات تحقیقی ریاضی تفاوت زیادی با روش SCI ندارد.به‌خصوص، سه مجلهٔ اول فهرست ما در ده سال اخیر همواره در صدر فهرست SCI نیز بوده‌اند.هر چند که ترتیب این سه مجله نسبت به هم مرتباً جابه‌جا می‌شود.

اکنون تفاوت دیگری را که بین IQ و IF وجود دارد توضیح می‌دهیم. روش SCI این است که در مورد هر مجله، نسبت تعداد ارجاعات به مقالات چاپ شده در دو سال قبل را بر تعداد مقالات چاپ شده در همان دو سال مبنا قرار می‌دهد.این روش برای رشته‌هایی که سرعت منسوخ شدن مقالات در آنها زیاد است اعتبار دارد ولی در مورد رشتهٔ ریاضی، شاخص گویایی نیست.برای درک این موضوع به شاخص دیگری که آن نیز توسط SCI ابداع شده ونیم‌عمر یک مجله خوانده می‌شود، اشاره می‌کنیم.به عنوان مثال، فرض کنید که در سال ۱۹۹۰، تعداد ۲۹۹۹ ارجاع به کلیهٔ مقالاتی که مجلهٔ J از آغاز تأسیس تا آخر سال ۱۹۸۹ چاپ کرده صورت می‌گیرد.مقالات مورد ارجاع را به ترتیب تاریخ چاپ تنظیم می‌کنیم(هر مقاله به تعداد دفعات ارجاع ظاهر می‌شود).فرض کنید میانگین تاریخ ارجاعها(یعنی تاریخ مقالهٔ ردیف ۱۵۰۰)سال ۱۹۸۳ باشد، در این صورت نیم‌عمر مجلهٔ J (درسال ۱۹۹۰)برابر ۷=۱۹۸۳-۱۹۹۰ تعریف می‌شود.فهرست SCI نشان می‌دهد که نیم‌عمر مقالات ریاضی چاپ شده در مجلات ردیف بالا از ده سال تجاوز می‌کند.بدین ترتیب ارجاع به مقالات به نسبت قدیمی در ریاضیات امری متداول است.در مقابل، نیم‌عمر مجلات ردیف بالای علوم تجربی ۳ الی ۴ سال است.بنابراین با محدود کردن بررسی ارجاعات به مقالات دو سال قبل، در ریاضیات شاخص دقیقی به دست نمی‌آید.برای رفع این نقیصه، در محاسبهٔ IQ، تعداد ارجاعات در دورهٔ دو ساله ۸۷ ـ ۱۹۸۶ به کلیهٔ مقالات چاپ شده در دورهٔ ده ساله ۸۶ ـ ۱۹۷۷ را به تعداد کل مقالات چاپ شده در آن سالها تقسیم کردیم.(این کار در بعضی موارد با مشکلاتی ناشی ازکمبود آمار دقیق همراه بود.)به‌طور خلاصه، IQ از دو نظر با IF متفاوت است، یکی حذف ارجاعهای برون رشته‌ای(که باعث کاهش ضریب می‌شود)، و دیگری، در نظر گرفتن ارجاعها به مقالات چاپ شده در ده سال گذشته به جای فقط دو سال پیشین(که موجب افزایش ضریب است).در مجموع، همان‌طور که قبلاً اشاره شد، نتایج نهایی دو روش تفاوت چندانی ندارد.

در این زمینه یکی دو موضوع دیگر قابل ذکر است.با استفاده از آمار SCI این موضوع را بررسی کردیم که اوج ارجاع دادنها به یک مقالهٔ ریاضی، یعنی حداکثر شناخت آن اثر، چه مدت پس از چاپ آن است.در ریاضیات این اوج بین سه تا هشت سال پس از انتشار مقاله است که باز با آنچه که در علوم تجربی مشاهده می‌شود بسیار متفاوت است.در علوم تجربی، اوج ارجاع دادن دو سال پس از انتشار مقاله است و از سال سوم معمولاً تعداد ارجاعات به یک مقاله شدیداً کاهش می‌یابد.موضوع دیگری که می‌توان با استفاده از بانک اطلاعاتی SCI بررسی کرد، سیر اعتلا و افول مجله‌هاست.فرض کنید مجله‌ای مدت زمان مدیدی منتشر می‌شود(مثلاً دست کم نیم قرن).اگر نسبت ارجاعاتی که به مقالات ده سال اخیر این مجله می‌شود به تعداد کل ارجاعات به آن را هر ساله بررسی کنیم، افت‌وخیز این نسبت چه چیزی را نشان می‌دهد؟طبیعی است که فرض کنیم صعود این نسبت به معنای اعتلای نسبی کیفیت مجله و نزول آن به مفهوم افول نسبی کیفیت است.در این زمینه، کار آماری دقیقتری لازم است تا بتوان سیر تحوّل تعدادی از مجلات معروف ریاضی را مشخص نمود.یک مثال قابل توجه مجلهٔ آنالز آوه‌متیکس است که ارقام مربوط به آن را به دقت بررسی کرده‌ایم.آمار موجود در فهرستهای SCI نشان می‌دهد که هر ساله حدود ۷۵ درصد از ارجاعات به این مجله مربوط به مقالاتی است،که بیش از ده سال از تاریخ چاپشان می‌گذرد.این نسبت به طرز چشمگیری ثابت مانده است و تعداد زیاد ارجاعاتی که به این مجله می‌شود، مؤید این است که این نشریه موفق شده است به گونه‌ای مستمر مقالات پر مایه و ماندنی به چاپ برساند.

نتیجهٔ بحث بالا برای کتابخانه‌های ریاضی روشن است:از آنجا که مقالات ریاضی به سرعت منسوخ نمی‌شوند، یک کتابخانهٔ مجهز ریاضی باید علاوه بر اشتراکهای جاری، مجموعهٔ قابل‌ملاحظه‌ای از شماره‌های پیشین ژورنالهای مهم را نیز در اختیار داشته باشد.البته می‌توان در صورت امکان از صورتهای میکروفیلم و میکروفیش این مجلات نیز استفاده کرد.

زبان مجله‌های تحقیقی ریاضی

در بسیاری رشته‌ها، به خصوص رشته‌های تجربی، موقعیت زبان انگلیسی به عنوان زبان بین‌المللی در حدی است که توانایی خواندن و درک مقالات علمی به آن زبان نیازهای محقق را کاملاً برآورده می‌کند.در ریاضیات وضع پیچیده‌تری حکمفرماست که به آن می‌پردازیم.پیش از جنگ جهانی دوم، زبانهای آلمانی و فرانسه به عنوان زبانهای ارتباطی جهانی در ریاضیات بر زبان انگلیسی پیشی داشتند.شکست آلمان و ویرانی دستگاه علمی آن کشور و مهاجرت وسیع دانشمندان اروپای مرکزی به آمریکا، انگلیسی را تدریجاً به عنوان زبان اول ریاضیات مطرح نمود.در حال حاضر، با آنکه سیاست رسمی اکثر مجله‌های ریاضی اروپا و آمریکا چاپ مقاله به هر یک از سه زبان انگلیسی، فرانسه و آلمانی است، زبان انگلیسی در این زمینه برتری واضحی دارد و موضع زبان فرانسه نیز در مقام دوم مستحکم است.ولی با اینکه بزرگترین ناشرکتابها و مجلات ریاضی در جهان آلمانی است، مهمترین مقالات تحقیقی ریاضیدانان آلمانی و حتی بسیاری از رساله‌های دکتری ریاضی آن کشور به زبان انگلیسی نگاشته می‌شود.اینکه زبان فرانسه در مقایسه با آلمانی مقاومت بیشتری در برابر تهاجم زبان انگلیسی نشان داده است زاییدهٔ چند علت است:۱)نهادها و سنتهای علمی فرانسه در طول جنگ جهانی دوم دستخوش ویرانیهای مشابه آلمان و اروپای مرکزی نشد؛ ۲)ظهور مکتب بورباکی در فرانسه و نفوذ آن در عالم ریاضیات، زبان فرانسه را به عنوان یک زبان بین‌المللی ریاضی زنده نگاه‌داشت؛ ۳)به سبب شباهت اصطلاحات ریاضی فرانسه و انگلیسی، خواندن متون فرانسه برای انگلیسی خوانان دشوار نیست در حالی که اصطلاحات ریاضی آلمانی، علی‌رغم قرابت خانوادگی زبانهای انگلیسی و آلمانی، از انگلیسی فاصلهٔ بیشتری دارد که خواندن متون آلمانی را برای کسانی که به آن زبان مسلط نباشند دشوار می‌سازد؛ و ۴)دولت فرانسه و نهادهای فرهنگی آن کشور حساسیت خاصی نسبت به زنده نگاه‌داشتن زبان فرانسه به عنوان مظهر استقلال فرهنگی نشان داده‌اند.

ولی بحث زبان در ریاضیات به زبانهایی که از حروف لاتین استفاده

می‌کنند ختم نمی‌شود.تا آغاز تحولات سیاسی اخیر در شوروی سابق، تقریباً تمامی آثار ریاضی دانشمندان ریاضی آن کشور به زبان و الفبای روسی منتشر می‌شد.با توجه به تولید کمّی و کیفی ریاضیدانان شوروی که آن کشور را به عنوان یک ابرقدرت در صحنهٔ ریاضیات مطرح کرده بود، زبان روسی را می‌بایست یکی از زبانهای مهم بین‌المللی در ریاضیات به‌شمار آورد.ولی تعداد روسی خوانان خارج از بلوک کشورهای سوسیالیستی سابق چندان زیاد نیست و علی‌رغم ترجمه‌هایی از آثار ریاضیدانان روسی به زبان انگلیسی، آثار ریاضیدانان روسی در خارج بلوک شرق آن‌طور که باید و شاید شناخته شده نبود(به «گفتگو با آرنولد»، نشر ریاضی، شمارهٔ ۲، سال ۲، مراجعه کنید).این واقعیت با نگاهی به جدول ۱ به راحتی معلوم می‌شود. ضریب IQ برای مجلات روسی(در واقع ترجمهٔ روسی آنها)خیلی پایینتر از آن است که مورد قبول دست اندرکاران باشد.مثلاً مجلهٔ فونکسیونالنی آنالیز ای یوو پریلژنیا، به زعم بعضیها در ربع قرن گذشته از مهمترین مجلات بدعت‌گذار تحقیقی جهان بوده است ولیکن رتبهٔ این مجله در جدول، شصت و هفتم است!مجله پرنفوذ دوکلادی، حتی در فهرست صد مجله اول قرار نگرفت که بسیار باعث شگفتی است.مسلماً یک عامل مؤثر در این پدیده، عدم دسترسی بانک اطلاعاتی ISI به منابع ارجاع دهندهٔ بلوک شرق سابق است، ولی شکی نیست که مهمترین عامل در این عدم شناخت، جدایی فرهنگی و فیزیکی غرب و شرق در بیشتر قرن بیستم است.پیش‌بینی اینکه تحولات سیاسی اخیر چگونه بر ارزیابی مجله‌های روسی اثر خواهد گذاشت پیچیده است زیرا که از یک سو عده‌ای از برجسته‌ترین ریاضیدانان شوروی به غرب مهاجرت کرده‌اند و مقالات آنان از این پس عمدتاً به زبان انگلیسی و در مجله‌های غیرروسی چاپ خواهد شد.از سوی دیگر ارتباط نزدیکی که بین غرب و شرق برقرار شده است ممکن است موجب شناخت بهتری از منابع روسی بشود.

در مورد کشور ژاپن باید گفت که مقالات بیشتر مجلات تحقیقی مهم این کشور به زبانهای اروپایی به‌ویژه انگلیسی و فرانسه هستند و از این رو مسالهٔ عدم شناخت مانند شوروی سابق مطرح نیست.کشور چین نشریات متعددی به زبان چینی دارد که بعضی از مهمترین آنها به انگلیسی ترجمه می‌شود.در حال حاضر، با وجود پیشرفتهای چین در ریاضیات، اهمیت تولید بومی آن کشور احتمالاً در سطحی نیست که عدم آشنایی با زبان چینی موجب عقب ماندن از جریانهای اصلی ریاضیات گردد.انتشار مجلات تحقیقی در ایران و سایر کشورهای جهان سوم موضوعی است که باید به آن اشاره شود [۴].هر چند تعدادی مقالهٔ با اهمیت و حتی کلاسیک هر از چندی در چند نشریهٔ هندی و امریکای لاتین منتشر شده است، ولی واقعیت این است که به سبب کثرت مجلات ریاضی، امکان شناخته شدن یک کار تحقیقی که در مجله‌ای از جهان سوم چاپ شود در سطح جهانی بسیار اندک است، هر چند که زبان این اثر انگلیسی یا فرانسه باشد.بعضی راههای اصلاح این وضع عبارت‌اند از انتشار مجله‌های منطقه‌ای، چاپ مقاله از ریاضیدانان شناخته شدهٔ بین‌المللی در مجلات جهان سوم، و تشویق ناشران بزرگ به حمایت و توزیع این مجلات.در همین راستا، اخیراً اشپرینگر ناشر آلمانی چاپ و توزیع بولتن انجمن ریاضی برزیل را به عهده گرفته است، و در مقابل، هیأت ویراستاران این مجله از یک هیأت کاملاً برزیلی به یک هیأت بین‌المللی تغییر یافته است.

به عنوان نتیجه‌گیری باید گفت که زبان انگلیسی امروزه مهمترین وسیلهٔ ارتباطی تحقیقات ریاضی در جهان است ولی این نقش در حدی نیست که در همهٔ رشته‌ها، ریاضیدانان مستغنی از یادگیری زبانهای دیگر به‌ویژه فرانسه و روسی باشند.با گسترش ارتباط بین‌المللی به‌وسیلهٔ شبکه‌های پست الکترونیکی و ایجاد مجله‌های خبری و تحقیقی الکترونیکی که در این مقاله فرصت کافی برای پرداختن به آنها نیست، گرایش زیادی به یکی شدن زبان ارتباطی به وجود آمده است و بعید نیست که در آینده نقش غالب زبان انگلیسی در ریاضیات از این هم بیشتر شود.

چند توصیه

با توجه به آنچه گفته شد، به اهداف ذکر شده در آغاز مقاله باز می‌گردیم.نخستین هدف ما ذکر استدلالهایی است که گروههای ریاضی و مسؤلان کتابخانه‌های آنها می‌توانند در توجیه نیازهای خود ابراز کنند.اهم اینها عبارت‌اند از :

۱.در مقایسه با سایر رشته‌های علمی و فنی، رشتهٔ ریاضی خرید تجهیزاتی چندانی ندارد.ازاین‌رو باید تمهیدات ویژه‌ای در جهت تأمین نیازهای کتابخانه‌ای این رشته به عمل آید.این مهم برای آن گروههای ریاضی که دوره‌های دکتری و کارشناسی ارشد دارند حیاتی است زیرا که کتاب و مجله در بسیاری موارد تنها مجرای ارتباط بین‌المللی هستند.

۲.در ریاضیات، بیشتر از سایر رشته‌های علمی و فنی، سرمایه‌گذاری در کتابخانه یک سرمایه‌گذاری طویل‌المدت است زیرا که سرعت منسوخ شدن آثار ریاضی بسیار کندتر از آثار تحقیقی در رشته‌های علوم تجربی، مهندسی یا پزشکی است.دانش ریاضی پایدارترین دانشهاست، به سادگی به دست نمی‌آید و به سادگی به بوتهٔ فراموشی سپرده نمی‌شود.به‌علاوه، استفاده از مراجع ریاضی به ریاضیدانان محدود نیست و متخصصین سایر رشته‌های علم و فن نیز می‌توانند سالها از این سرمایه‌گذاری بهره بگیرند.با همین استدلال می‌توان نیاز به تأمین پیشینه‌های مجلات ریاضی را توجیه نمود.

۳.از آنجا که اکثر مجله‌های ریاضی در سال فقط ۴ یا ۶ شماره منتشر می‌شوند، تعداد عناوین مجله‌های ریاضی باید چند برابر تعداد مجله‌ها در هر یک از رشته‌های دیگر علمی باشد تا به همان اندازه، تحقیقات روز را عرضه کند.آن دسته از مجله‌های ریاضی که توسط دانشگاهها و سایر مؤسسات غیرانتفاعی منتشر می‌شوند به نسبت ارزان قیمت هستند ولی مجله‌هایی که توسط ناشران حرفه‌ای چاپ می‌شوند، از نظر نرخ به ازای هر صفحه، گرانتر از مجله‌های علوم تجربی، مهندسی و پزشکی هستند.این گرانی نسبی به سبب تیراژ محدود و نداشتن آگهی است ولی با توجه به استدلالهای (۱) و (۲)، تفاوت، قابل چشم‌پوشی است.

هدف بعدی که در مقدمه به آن اشاره شد، ارائهٔ منطقی برای انتخاب مجله در شرایطی است که امکان خرید همهٔ عناوین مورد نظر موجود نیست.در اینجا دو عامل اصلی باید مورد نظر باشد.یکی نیازهای فوری افرادی است که در یک گروه ریاضی اشتغال جدی به تحقیق دارند، و دوم موضوع سرمایه‌گذاری درازمدت و آینده‌نگری به‌خصوص در آن گروههای ریاضی است که در جهت توسعهٔ پژوهش و دوره‌های دکتری و کارشناسی ارشد گام برمی‌دارند.در این زمینه توصیه‌های خاص زیر را می‌توان عنوان کرد:

(الف)چنانچه گروه ریاضی گرایش تحقیقاتی دارد یا در آن جهت گام برمی‌دارد لازم است دست کم حدود ۱۰۰ مجله را مشترک شود.توصیه می‌شود که از این تعداد، حدوداً دو سوم از ژورنالهای جدول ۱ باشند، که استمرار کیفیت آنها کمابیش به اثبات رسیده است، ولو اینکه بعضی از آنها

جدول ۲

	مجله	نوع
	Am Math Monthly	E
	Arch Hist Exact Sci	H
*	B Am Math Soc	SA
*	B Lond Math Soc	SA
*	C R Acad Sci (Math)	A
*	Current Math Publ	I
	Enseign Math	E
	Exposit Math	E
	Hist Math	H
	Math Intelligencer	EN
*	Math Review	R
*	Notices Am Math Soc	N
*	Russ Math Surveys	SA
*	SIAM Review	SA
*	Zent Math	IR

اختصارات (مربوط به نوع محتویات مجله)
A : اعلام تحقیقات ، E : مطالب توصیفی ، H : مطالب تاریخی ، I : فهرست مقاله‌های تحقیقی ، N : خبر ، R : نقد مقاله‌های چاپ شده ، S : مقاله‌های مروری

فوراً موردنیاز نباشند.بقیهٔ سفارشها را می‌توان به نیازهای فوری محققین، مجله‌های جدیدی که به سبب کمبود آمار اسامی آنها در جدولها نیامده و مجله‌های جدول ۲ اختصاص داد.از جدول ۲، مجله‌هایی که با * مشخص شده‌اند در هر کتابخانهٔ ریاضی ضروری هستند.

(ب)با توجه به اهمیت سرمایه‌گذاری درازمدت در کتابخانه، به تهیهٔ پیشینه‌های مجلات نیز باید توجه شود.اینکه تا شماره‌های چند سال قبل یک ژورنال را باید تهیه کرد بستگی به بودجه، امکان استفاده از میکروفیلم و میکروفیش و نیازهای تحقیقاتی گروه دارد.یک توصیهٔ عملی برای کتابخانه‌های جدیدالتأسیس این است که تعداد سالهای پشینه را متناسب با حاصلضرب نیم‌عمر یک ژورنال در IQی آن در نظر بگیرند.

(پ)به گروههای ریاضی که گرایش تحقیقاتی ندارند توصیه می‌کنیم که بیشتر مجله‌های جدول ۲ را به عنوان استخوانبندی فرهنگی ریاضی خود تهیه کنند.به‌علاوه، تعداد زیادی مجلات آموزشی برای استفادهٔ دانشجویان دورهٔ کارشناسی نیز هستند که در این مقاله به آنها نپرداخته‌ایم ولی در کتابخانهٔ یک گروه ریاضی که گرایش آموزشی دارد باید وجود داشته باشند.

(ت)در همه شرایط به‌خصوص در شرایط کمبود ارزی، ارتباط بین کتابخانه‌های دانشگاهها می‌تواند کمک بسیار مؤثری در رفع نیازها باشد.در دانشگاههایی که فاصلهٔ جغرافیایی کمی از هم دارند حتی می‌توان سفارشها را طوری تقسیم و هماهنگ کرد که عملاً به همهٔ مجله‌های موردنیاز دسترسی حاصل شود.

نکته‌هایی در مورد جدول ۱

(۱)هر نوع رتبه دادن، مطمئناً اعتراض و ناخشنودی عده‌ای را به همراه دارد.خود نگارنده از همهٔ نتایج جدول ۱ راضی نیست و بالاخص نظر خود را در مورد پایین بودن رتبهٔ مجله‌های روسی قبلاً بیان کرده است.طبعاً نباید ترتیب دقیق ژورنالها را جدی گرفت.عوامل زیادی بر این ترتیب اثر گذاشته‌اند: نقصهای بانک اطلاعاتی ISI، روش محاسبه، و کمبود داده‌ها در بعضی موارد.در مورد اخیر، آمار مربوط به حدوداً سی ژورنال اول فهرست نسبتاً کامل بود ولی در پاره‌ای موارد دیگر ناچار شدیم از روشهای برونیابی استفاده کنیم.از افراد علاقه‌مندی که در زمینه‌های آماری خبرگی بیشتری دارند دعوت می‌شود بررسی دقیقتری از این مقوله به عمل آورند.

(۲)ژورنالهای فرانسوی رتبهٔ ۳ و ۴ در بعضی کتابخانه‌ها در مجموعهٔ کتابها نگاهداری می‌شوند ولی ما هر دو را در جدول آوردیم زیرا که هر دو رسماً مجله هستند.مجلهٔ آستریسک (*Astérisque*) علاوه بر مقاله‌های تحقیقی جدید (که عموماً طولانی هستند)گزارش سمینارهای بورباکی را نیز به چاپ می‌رساند.می‌توان این ژورنال را به جدول ۲ منتقل کرد.

(۳)همان‌طور که گفته شد، تعدادی از ژورنالهای واجد کیفیت بالا، به‌خصوص ژورنالهای به نسبت جدیدالتأسیس، به سبب کمبود داده‌ها از جدول ۱ حذف شده‌اند.یک مورد خاص مجلهٔ(*Annals of Pure and Applied Logic*) است که مجلهٔ جدیدی نیست ولی به سبب تغییر نام، داده‌های مربوط به آن در بانک اطلاعاتی ISI پراکنده است.این ژورنال بر مبنای داده‌های موجود به‌راحتی در فهرست صد مجلهٔ اول قرار می‌گیرد.

یادداشتها و مراجع

1.Anderson,N.D. and J.L.Rovnyak,"Mathematics recent libraries:a 1990 snapshot", *Notices Am.Math.Soc* **38** (1991),1258-1262.

۲.به کتاب معروف فیلکس کلاین

Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert,(Berlin (1928)

یا ترجمهٔ انگلیسی آن

Development of Mathematics in 19th Century, Math SCI Press, Brookline, Mass.(1979)

مراجعه شود.بررسی و نقدی از این کتاب توسط سیف‌الله رنجبر در شمارهٔ ۱ و ۲ سال ۳ نشرریاضی آمده است.

۳.مؤسسهٔ اطلاعات علمی در فیلادلفیا توسط یوجین گارفیلد (Eugene Garfield) تأسیس شده و اداره می‌شود.این مؤسسه به جمع آوری و تحلیل آماری داده‌های مربوط به انتشارات رشته‌های علمی، مهندسی، پزشکی، و علوم رفتاری می‌پردازد.از انتشارات این مؤسسه می‌توان نشریات زیر را نام برد:

Current Contents, Science Citation Index,Journal Citation Reports

گارفیلد در مقالهٔ زیر فلسفهٔ کار این مؤسسه را تشریح می‌کند:

Garfield, E."Citation analysis as a tool in journal evaluation," *Science*, 3 Nov. (1972), **178** (4060), 471-479

۴.در این زمینه به مقالهٔ زیر و مراجع آن نگاه کنید:

Garfield, E."Mapping science in the third world," *Science and Public Policy*,June (1983) 112-127

۵.کتاب زیر، آمار انتشارات علمی در خارج از کشورهای پیشرفتهٔ غربی را تحلیل می‌کند:

Braun, T., Glänzel, W. and A. Schubert, *Scientometric Indicators*, World Scientific, Singapore (1985).

****

* سیاوش شهشهانی، دانشگاه صنعتی شریف و مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات

شرف‌الدین طوسی و مفهوم مشتق

رشدی راشد

ترجمهٔ م.ه.شفیعیها

شرف‌الدین مظفر (یا ابوالمظفر) بن محمدبن طوسی از ریاضیدانان ایرانی قرن ششم هجری است. هر چند زندگی او چندان شناخته نیست، امّا مهمترین اثر او به نام *رسالهٔ فی‌المعادلات* یا *المعادلات* از مهمترین آثار ریاضی دوران اسلامی است. آقای رشدی راشد، استاد دانشگاه پاریس و مدیر گروه تحقیق در تاریخ و فلسفهٔ علم در «مرکز ملی پژوهشهای علمی» فرانسه این رساله را بر اساس سه نسخهٔ خطی موجود آن ویراسته و با ترجمهٔ فرانسه و مقدمه و توضیحات مفصل در دو جلد به چاپ رسانده است. مشخصات این کتاب چنین است:

Sharaf Al-Dīn Tūsī Oeuvres Mathématiques (Algèbre et Geometrie au XIIe siècle), Text établi et Traduit par Roshdi Rashed, 2 tom., Société d'édition "Les Belles Lettres", Paris (1986).

این مقاله ترجمهٔ بخشی از مقدمهٔ فرانسوی ویراستار بر این کتاب است که به بیان جایگاه آثار ریاضیدانان اسلامی در تاریخ جبر و به جایگاه آثار شرف‌الدین طوسی در تاریخ ریاضیات می‌پردازد. *نشر ریاضی* از آقای حسین معصومی همدانی که این مطلب را برای چاپ پیشنهاد کرده و ترجمهٔ آن را ویراسته‌اند، سپاسگزار است.

مورّخان و فیلسوفان علم در آمیختن جبر و هندسه را برای کسانی که بخواهند به بیان تأسیس حوزهٔ پهناوری از ریاضیات، از سدهٔ هفدهم به بعد، بپردازند، به حق به دیدهٔ عاملی تعیین کننده نگریسته‌اند.به‌علاوه گاه پیش می‌آید که می‌خواهند دقیقاً تعیین کنند که نتایج نظریِ این درآمیزی، برای سهیم شدن در تشکیل اندیشهٔ کلاسیک، تا چه حد از مرزهای حوزهٔ اصلی خود فراتر رفته‌اند.مورّخی که بخواهد به شرح این واقعیّت و نتیجه‌گیری از آن بپردازد، باید آثار دکارت و فرما را نیز به دقت مطالعه نماید، و به‌ویژه دلایلی را که ضمن مکاتبه‌های معروف بین آنان مبادله شده است بررسی کند، تا از یک سو به تکنیکهای ریاضی مورد استفاده و حقیقت پیدایش این حوزه که در آن هندسهٔ جبری و هندسهٔ دیفرانسیل، حتی پیش از پیدایش نامشان، درهم آمیخته‌اند پی برد،و از سویی بر پدیده‌شناسی جدید موضوع ریاضیات احاطه یابد.

اهمیت این طرح و نیز پیچیدگی آن ایجاب می‌کند که مورّخ هشیاری خود را مضاعف نماید، زیرا این گونه کارها به بسیج گذشته نیاز دارد.باید سهم گذشته‌ها را از قبل بازسازی کند تا نه تنها روابط و تأثیرات آنها را بشناسد، بلکه به هر مفهوم و هر مانعی که در مقابل ریاضیدانان سدهٔ هجدهم و ریاضیدانان پیش از آنها قرار داشته نیز پی ببرد.تنها در این صورت است که مطالعهٔ تطبیقی، با هدف به دست آوردن تازه‌ها و تعیین جای دقیق آنها، می‌تواند انجام گیرد.زیرا باید این نکته را یادآور شویم که نسبت دادن صرف و سادهٔ کارهای ریاضیدانان سدهٔ هفدهم به گذشتگان، خطرش کمتر از نسبت دادن دستاوردهای پیشینیان به آنان، نیست.به نظر ما، خطر ارتکاب خطا در تحقیق تاریخی از زیان احتمالی از دست دادن دائمی روح شناخت علمی کمتر است.از این رو کسانی که مخروطات آپولونیوس را که در آن، مثلاً، اثری از جبر و کارهای دکارت دیده نمی‌شود، با احساس مفاخره می‌خوانند، ناگزیر چشم خود را بر کلیهٔ مسائلی که از روابط بین جبر و هندسه پدید می‌آید، می‌بندند.به عکس، منطبق کردن آغازِ فصلِ مربوط به«ترسیمات هندسی معادلات»با کارهای دکارت، مطمئناً کوچک شمردن مقام واقعی اثرِ خلّاق این فیلسوف است.ولی در اینجا دیگر نمی‌توان از مراجعه به ریاضیات اسلامی که مهمترین گامها را در این زمینه پیش از دکارت و فرما برداشته است، اجتناب کرد.

از همان هنگام که عدهٔ زیادی از ریاضیدانان، پس از پیدایش کتاب خوارزمی، در آغاز سدهٔ نهم(میلادی، سوم هجری) به بسط و تکامل جبر پرداختند، معدودی در جریان تحقیقات خود به مسأله‌ای که پیش از پیدایش این علم آشکار نبود، یعنی امکان ترجمهٔ دوگانه، وقوف یافتند:یک مسالهٔ هندسی داده شده است؛ به یاری ترجمهٔ جبری آن را به مطالعه و حل یک معادلهٔ یک مجهولی جبری برمی‌گردانند؛ از سوی دیگر حل یک معادلهٔ جبری ـ به ویژه معادلهٔ درجهٔ سوم ـ را به کمک ترجمه، یعنی به میانجی منحنیها، به ترسیم هندسی آن بدل می‌کنند.

بدون تردید، چنین ترجمه‌ای فقط برای ریاضیدانانِ آشنا با جبر قابل فهم بود.و به همین دلیل بر خلاف آنچه اغلب گفته می‌شود، این حصول فهم با پیشرفت علم جدید جبر ـ به‌ویژه در سدهٔ نهم(سوم) ـ دست داده است و نه پیش از آن.معهذا تقریباً یک سده و نیم زمان لازم بود تا این مطالب به عنوان ابزار یک طرح علمی مجهز به دلایل خود، در آثار خیام ظاهر شود.زیرا، در واقع، از برکت تأسیس جبر بود که این ابزار فراهم آمد.در عین حال این ترجمه فقط در اثر برخورد با دو نوع مشکل فنی توانست جای خود را بازکند.اولی مربوط به حل مسائل ترسیمی دشوار با ستاره و پرگار است که میراث گذشته بوده ـ مثل درج دو واسطهٔ هندسی* [در میان دو عدد]، ترسیم هفت ضلعی منتظم، و تثلیث زاویه ـ یا آنچه اخیراً ریاضیدانان و منجمان مطرح کرده بودند ـ مانند تعیین وترهای برخی زاویه‌ها برای تشکیل جداول سینوسها؛ در هر دو مورد، ریاضیدانان به ترجمهٔ مسأله به زبان جبر پرداخته، آن را به یک معادلهٔ درجهٔ سوم بدل کردند.در این میان نامهای ماهانی، ابوجعفر خازن، و ابونصر عراق در جریان این ترجمه مشخصتر از همه است.از سوی دیگر، ریاضیدانانی چون خازن، ابونصر عراق، و ابوالجود محمدبن لیث، وقتی با دشواری حل معادلهٔ درجهٔ سوم به‌وسیلهٔ رادیکالها مواجه شدند، به این نتیجه رسیدند که مسألهٔ«ترسیم هندسیِ»ریشه‌های برخی صورتهای معادلهٔ درجهٔ سوم را پیش

* درج دو واسطهٔ هندسی میان دو عدد معلوم a و b یعنی پیدا کردن x و y به‌طوری که $\frac{x}{a} = \frac{y}{x} = \frac{b}{y}$، و این همان مسأله تضعیف مکعب است، که توسط بقراط خیوسی به مسألهٔ مسطح دو واسطهٔ هندسی بدل شده است.م.

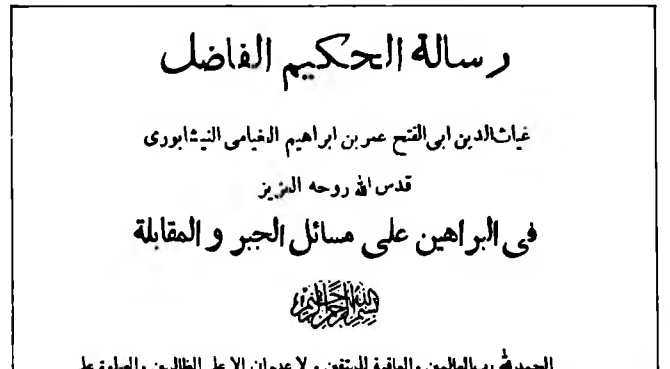
بکشند.بدین ترتیب توانایی مطالعهٔ این معادله را پیدا کردند و شیوه‌ای به دست آوردند که غالباً آن را در بررسی مسائل تاریخی به کار بردند؛ و آن استفاده از مقاطع مخروطی است.این شیوه که قبلاً مورد استفادهٔ ریاضیدانان اسکندرانی بود، در حقیقت، مثلاً به گواهی کارهای خیام و ابن هیثم، در سدهٔ دهم(چهارم)سروسامانی گرفت و پالوده شد.

منظور ما در اینجا، اساساً مسالهٔ از سر گرفتن تجزیه و تحلیل کارهای مذکور در فوق و نوشتن تاریخ این ترجمهٔ مضاعف ـ یعنی تاریخ تحول آرام یک تکنیک سادهٔ خاص به ابزار یک طرح علمی در آثار خیام (۴۲۷ تا ۵۱۰ هجری) ـ نیست.تنها اشاره می‌کنیم که نخستین کوشش برای پی‌ریزی این ترجمهٔ مضاعف به دست خیام به عمل آمد.این واقعیت قبلاً در اواسط سدهٔ نوزدهم معلوم شده بود، و هنگامی که ف.وپکه برای نخستین بار دست به تصحیح و ترجمهٔ رسالهٔ جبر خیام زد، دانشمندان می‌دانستند که خیام مطالعهٔ روابط جبر و هندسه را از نو وجههٔ همّت خود قرار داده است؛ این مورخ نیز، هنگام اشاره به خیام و پیشینیانش، از این نکته غافل نمانده و می‌نویسد:«اینان نخستین مردانی هستند که با شایستگی در به کار بردن جبر و هندسه و بالعکس تلاش کرده‌اند، و با پایه‌گذاری مبانی این ارتباط محاسبه با هندسه است که بالمآل در بسط ریاضیات به منتها درجه سهیم بوده‌اند[۱]».در واقع، خیام می‌خواست از چارچوب یک تحقیق خاص، یعنی از تحقیق مربوط به فلان یا بهمان صورت معادلهٔ درجهٔ سوم پا فراتر گذارد و نظریه‌ای برای معادلات فراهم آورد و از این رهگذر الگویی برای تألیف به دست دهد.نظریهٔ جدید، نظریهٔ معادلات جبری از درجهٔ نابزرگتر از ۳ است که در آن، مطالعهٔ معادلات درجهٔ سوم به کمک مقاطع مخروطی، به منظور به دست آوردن ریشه‌های حقیقی مثبت، صورت می‌گیرد.برای فراهم ساختن این نظریهٔ جدید، خیام مجبور شده است که روابط جدید بین جبر و هندسه را بهتر ارزیابی و بیان کند؛ یادآوری می‌کنیم که مفهوم عمده‌ای که او در این زمینه وارد می‌کند واحد اندازه است که با تعریف مناسب آن، در رابطه با مفهوم بُعد، کاربرد هندسه را در جبر ممکن می‌سازد[۲].

فراموش نکنیم که این طرح مضاعف منزلت تازه‌ای برای نظریهٔ معادلات پدید می‌آورد:به‌نظر می‌رسد که از این پس شکاف بین جبر و هندسه از میان می‌رود؛ مضاف بر آن، اکنون با این کتاب خیام، جبر خود به این نظریهٔ معادلات جبری، که در رساله‌های جبری جای نسبتاً ناچیزی را اشغال می‌کند مبدل می‌شود.رساله‌ها از این پس، به خصوص، به این نظریه تخصیص می‌یابد و بیان جبری به این فصلِ تنها منحصر و محدود می‌گردد.

بدین ترتیب، خیام بر خلاف جبردانانِ به اصطلاح حسابدان، فصلهایی از قبیل مطالعهٔ توانهای جبری، بررسی چند جمله‌ایها و اعمالی که روی آنها انجام می‌گیرد، و مطالعهٔ عددهای جبری گنگ و غیره را که نه فقط بیشترین بخش، بلکه عمده‌ترین جای تمام رساله‌های جبری زمانش را اشغال می‌کنند، از کتاب خود کنار می‌گذارد.

خیام، گذشته از آنکه نقشهٔ تازه‌ای را طرحریزی می‌کند، الگوی تألیف مربوط به آن را هم می‌سازد.او کار خود را با بحث در باب مفهوم اندازهٔ جبری آغاز می‌کند تا بعداً مفهوم واحد اندازه‌گیری را تعریف نماید.سپس لمهای لازم و نیز رده‌بندی مخصوص معادلاتش را پیش می‌کشد و سرانجام معادلاتِ دو جمله‌ای درجهٔ دوم، سه جمله‌ای درجهٔ دوم، سه جمله‌ای درجه سوم، و چهار جمله‌ای درجهٔ سوم و معادلاتی را که شامل عکس مجهولات هستند، به‌ترتیب دشواری آنها، مورد بررسی قرار می‌دهد.خیام در رساله‌اش



رسالة الحکیم الفاضل

غیاث‌الدین ابی‌الفتح عمر بن ابراهیم الخیامی النیشابوری

قدس الله روحه العزیز

فی البراهین علی مسائل الجبر و المقابلة

بسم الله الرحمن الرحیم

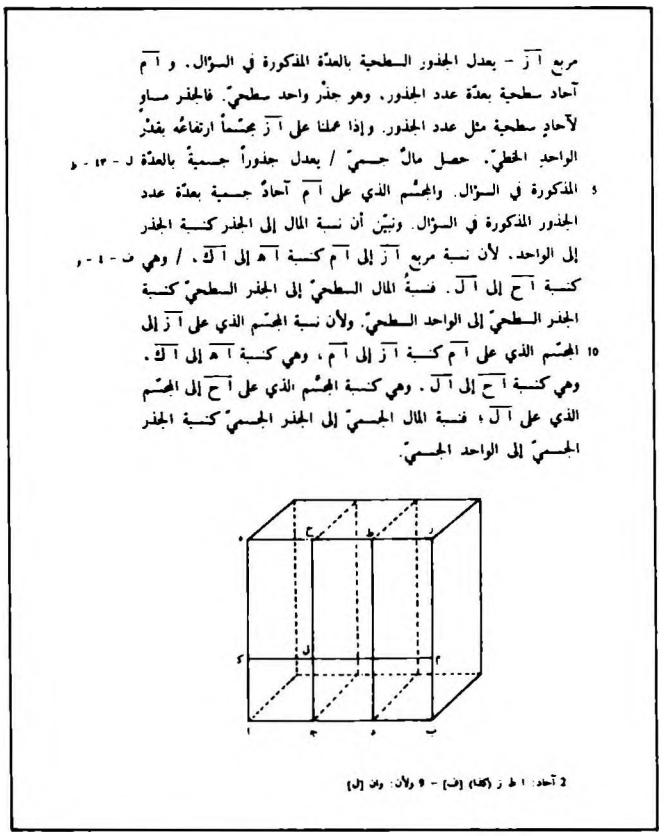
الحمدلله رب‌العالمین والعاقبة للمتقین و لا عدوان الا علی‌الظالمین والصلوة علی الانبیاء و خصوصاً علی محمد و آله الطاهرین اجمعین ان احد المعانی التعلیمیّة المحتاج الیها فی‌جزء الحکمة المعروف بالریاضی هو صناعة الجبروالمقابلة الموضوعة لاستخراج المجهولات العددیة و المساحیه و ان فیها اصنافا یحتاج فیها الی اصناف من‌المقدمات مناسبة جدًا فتعذّر حلّها علی اکثر الناظرین فیها اما المتقدمون فلم یصل الینا منهم کلام فیها لعلهم لم یتفطنوا لها بعد الطلب و النظر او لم یضطرّ البحث ایاهم الی‌النظر فیها اولم ینقل الی‌لساننا کلامهم فیها و اما المتأخرون فقد عنّ للماهانی منهم تحلیل المقدمة التی اشتملها ارشمیدس مسلمة فی الشکل‌الرابع من المقالة الثانیة من کتابه فی الکرة والاسطوانة بالجبر فتأدّی الی کعاب و اموال و اعداد متعادلة فلم‌یتفق له حلّها بعد ان افکر فیها ملیًا فجزم القضاء بانه ممتنع حتی نبع ابو جعفر الخازن و حلها بالقطوع المخروطیة ثم افتقر بعده جماعة من المهندسین الی عدّة اصناف منها فبعضهم حل البعض و لیس لواحد منهم فی تعدید اصنافها و تحصیل انواع کل صنف

صفحه‌ای از رسالهٔ فی‌البراهین الجبر و المقابله خیام

به دو نتیجهٔ قابل ملاحظه دست می‌یابد:از سویی یک راه حل کلی برای تمامی معادلات درجهٔ سوم از راه تقاطع دو مقطع مخروطی، و از سوی دیگر یک محاسبهٔ هندسی که با انتخاب یک طول واحد میسر شده است.باید خاطرنشان کنیم که خیام به اینها اکتفا نمی‌کند، بلکه به دادن یک راه حل عددی تقریبی برای معادلهٔ درجه سوم می‌پردازد.مثلاً در رساله‌اش تحت عنوان فی قسمة ربع الدایره [۳]، که نخستین بار طرح تازه‌اش را در آن اعلام کرده است، به یک راه حل عددی تقریبی به‌وسیلهٔ جداول مثلثاتی نایل می‌شود.بدین ترتیب در سدهٔ یازدهم(چهارم)روابط بین جبر و هندسه آشکار می‌گردد، و فصل نوینی گشوده می‌شود که تا سدهٔ هجدهم به حل ترسیمی معادلات اختصاص می‌یابد و سرانجام اثری پدید می‌آید که به تمامی به نظریهٔ معادلات جبری منحصر شده است.ساختار این رساله، چنانکه اشاره کرده‌ایم، نمونهٔ دقیق رده‌بندی معادلاتی است که خیام برحسب درجهٔ معادلات و تعداد جملات آنها اختیار کرده است.

از قرن پیش تاکنون، دانش تاریخی ما از این پیشتر نرفته است:از دیدگاه مورخان، کار خیام به تنهایی آخرین کلام ریاضیات اسلامی در این زمینه بوده است.در چنین شرایطی، اثر خیام نمی‌توانسته جز در زمان خیلی خاص پدید آید:کار او که هم آغاز و هم پایان بوده است، نخستین تنظیم نظری مسالهٔ حل ترسیمی و هندسی معادلات جبری است که لااقل، ریاضیدانان اسلامی آن را به جدّ دنبال نکرده‌اند.چونکه فردایی نداشته است، می‌شود گفت که خیام نابغه‌ای بوده است منفرد که کارش دنباله پیدا نکرده است.

اما، تقریباً ۱۵ سال است که ما توانسته‌ایم ثابت کنیم که این تصویر، تصویر دقیقی نیست[۴]، و خیام نه تنها آغازگر سنتی بوده است، بلکه امتیاز برتر او این بوده که لااقل خلفی داشته است که تحلیلهای خاص او را جلوتر


مربع آ ز - يعدل الجذور السطحية بالعدّة المذكورة في السؤال. و آ م
آحاد سطحية بعدّة عدد الجذور، وهو جذر واحد سطحيّ. فالجذر مساوٍ
لآحادٍ سطحية مثل عدد الجذور. وإذا عملنا على آ ز مجسّماً ارتفاعُه بقدْر
الواحد الخطيّ، حصل مالٌ جسميّ / يعدل جذوراً جسميةً بالعدّة ل - ۱۲ - و
5 المذكورة في السؤال. والمجسّم الذي على آ م آحادٌ جسمية بعدّة عدد
الجذور المذكورة في السؤال. وتبيّن أن نسبة المال إلى الجذر كنسبة الجذر
إلى الواحد. لأن نسبة مربع آ ز إلى آ م كنسبة آ ه إلى آ ك، / وهي ف - ٤ - و
كنسبة آ ح إلى آ ل. فنسبةُ المال السطحيّ إلى الجذر السطحيّ كنسبة
الجذر السطحيّ إلى الواحد السطحيّ. ولأن نسبة المجسّم الذي على آ ز إلى
10 المجسّم الذي على آ م كنسبة آ ز إلى آ م، وهي كنسبة آ ه إلى آ ك،
وهي كنسبة آ ح إلى آ ل. وهي كنسبة المجسّم الذي على آ ح إلى المجسّم
الذي على آ ل؛ فنسبة المال الجسميّ إلى الجذر الجسميّ كنسبة الجذر
الجسميّ إلى الواحد الجسميّ.

2 آحاد: ا ط ز (كما) (ف) - و ولأن: وقد (ل)

صفحه‌ای از رسالهٔ فی الجبر و المقابله طوسی که به المعادلات هم معروف است.

برده و نظریهٔ جدید وی را عمیقاً اصلاح کرده است.این شخص ریاضیدان سدهٔ دوازدهم(ششم)شرف‌الدین طوسی است.انجام گرفتن این مهم به دست او شگفت‌آور نیست، زیرا وی مؤلف یکی از مهمترین کتابهای جبری ـ رسالة فی الجبر و المقابله است که بین خیام و دکارت نوشته شده است.اما مورخان او را اصلاً از روی اسطرلاب خطیش که به«عصای طوسی»معروف است شناخته‌اند؛ از سوی دیگر هر چند زندگینامه‌نویسان قدیم و جدید به رسالهٔ او اشاره کرده‌اند، اما نه هرگز کسی به آن پرداخته و نه ترجمه‌ای از آن به عمل آمده است؛ بالاتر از همه، پیش از آنکه ما در آن تحقیق کنیم، موضوع هیچ تحقیقی قرار نگرفته است[۵].علت این وضع استثنایی را می‌توان در نبودن تاریخنگاری درست توجیه کرد؛ و آن نیز لااقل تا حدودی ناشی از یکی از ویژگیهای خود رساله است:فهمیدن آن، حتی پس از چندین بار مطالعه، به‌راستی دشوار است؛ این امر دو دلیل دارد که یکی به خود متن باز می‌گردد و دیگری به تاریخ آن.به‌خاطر موضوعهایی که در این رساله مورد مطالعه قرار می‌گیرند، و نوع مفاهیم و تکنیکهایی که وارد می‌شوند زبان طبیعی چنانکه شاید و باید خود را به بیان ساختهای ریاضی، که اینک سخت پیچیده شده‌اند، توانا نمی‌یابد.چنانکه خواهیم دید، طوسی ماکسیمهای عبارتهای جبری را به دست می‌آورد، ریشه‌ها را از هم جدا می‌کند، حدود آنها را مشخص می‌سازد و ...، طبیعی است که به کارگیری این مفاهیم، که البته در متن یافت می‌شوند ولی به‌طور جدی پرورانده نشده‌اند، و انجام دادن محاسبات معمولاً طولانی که ناشی از توسل به این مفاهیم است به زبان طبیعی، نه تنها مشکل است بلکه گاهی منشأ ابهام است.اگر حذف جداول رساله را که به‌وسیلهٔ فرد نامعلومی صورت گرفته و موردنیاز خواننده‌ای است که می‌خواهد حل عددی معادلات را دنبال کند در نظر بگیریم، و بالاخره خطاهای استنساخ کننده را که قسمتی از آن بر اثر دشواری خود متن است، به آن بیفزاییم، می‌بینیم که این متن ناگزیر رغبت خوانندهٔ احتمالی را برنمی‌انگیزد.این همه دلایلی است که محتملاً سکوت کامل دربارهٔ این متن را موجه می‌کند و مورخانی را که به این رساله می‌پردازند، از آن گریزان می‌سازد.

ولی وقتی که موانع خواندن رساله برطرف شود، آنگاه کار طوسی سیمای حقیقی خود را نشان می‌دهد و معلوم می‌شود که کار او بر خلاف کار خیام کلی (globale) و جبری محض نیست، بلکه موضعی (locale) و تحلیلی است.

نظریهٔ هندسی معادلات و پیدایش مفاهیم تحلیلی

دشواری دستیابی به طرح طوسی چند علت دارد که مهمترین آنها، چنانکه اشاره کردیم، وارد کردن مفاهیم تازه‌ای است که«شخصاً» پا به صحنه نمی‌گذارند بلکه به وساطت کاربردهایشان معرفی می‌شوند.این وضعیت، که نظایرش در تاریخ علوم چندان کم نیست، در عین حال همیشه مستلزم یک دستکاری ظریف است.از کار طوسی دقیقاً چه بگوییم که عبارتهای چند جمله‌ای را به دست می‌آورد بی آنکه آنها را تعریف کند، و یا حتی نامی بر آنها بگذارد؟تردیدی نیست که برگردان دقیق عملیات و مفاهیم به زبان ریاضیاتی که پس از ریاضیات مؤلف پدید آمده است، معنی واقعی اندیشه‌های مستتر در این مفاهیم را آشکار می‌سازد.در عین حال، تکیه کردن به این مطالب بدون تردید خیانت به معنایی است که مؤلف برای این مفاهیم و اعمال قائل بوده است.زیرا وقتی مورخی با آثاری از این گونه، که تعداد آنها کم هم نیست، مواجه می‌شود که کار ریاضیدان به آینده تعلق دارد ولی با ابزارِ کنونی انجام گرفته است، خود را با دو وظیفه روبه‌رو می‌یابد که تحقق بخشیدن همزمان آنها به آسانی میسر نیست:از سویی باید افکار مؤلف را در دو زمان مختلف جای دهد تا منزلت عقلانی این افکار را مدتها پس از زمان بیان شدن دریابد، و از سوی دیگر باید جای آنها را در ساختار اثر تعیین کند تا به معنایی که همان معنای واقعی و همیشگی آنهاست دست یابد.برای همین وظایف است که ما مجاد قطوری را تخصیص می‌دهیم و در نظر داریم که در آن چهار شخصیت را مورد مطالعه قرار دهیم:خیام، دکارت، طوسی، فرما.در اینجا توجه خود را به محتوای رسالهٔ طوسی و ذکر نکات مهم آن به اختصار، محدود می‌کنیم.

رساله با مطالعهٔ دو مقطع مخروطی آغاز می‌شود که بعداً مورد استفاده قرار می‌گیرند.این دو منحنی سهمی و هذلولی هستند که باید دایره را هم که معلوم فرض شده است، به آنها اضافه کنیم تا همهٔ منحنیهایی را که مؤلف به آنها مراجعه می‌کند شامل شود.در واقع، چنین به نظر می‌آید که طوسی خوانندهٔ خود را با معادلهٔ دایره ـ قوّت یک نقطه نسبت به دایره ـ آشنا فرض می‌کند و از این جزء مقدماتی برای تعیین معادلهٔ سهمی و هذلولی متساوی‌الساقین نسبت به دستگاه دو محور مختصات استفاده می‌کند.وی آشکارا قصد دارد معادلات این منحنیها را جز در شرایطی که به کار او می‌آیند مطالعه نکند.ظاهراً به همین دلیل است که برای به دست آوردن این مقاطع مخروطی، به مخروطی که زاویهٔ رأسش قائمه است اکتفا می‌کند.همین نیت، وجه تمایز رسالهٔ طوسی از نوشته‌های دیگری است که هندسه‌دانان آن زمان به مقاطع مخروطی تخصیص داده‌اند.

پس نوبت رده‌بندی معادلات از درجهٔ نابیشتر از ۳ می‌رسد.برخلاف خیام، طوسی رده‌بندی خارجی را ملاک کار خود قرار می‌دهد نه رده‌بندی

ذاتی را.لذا آنجا که خیام نوشتهٔ خود را برحسب تعداد تک جمله‌ایهایی که معادله را می‌سازند مرتب می‌کند، طوسی وجود یا عدم وجود جوابهای مثبت را ملاک توالی معادلات قرار می‌دهد؛ یعنی معادلات وی برحسب قبول یا عدم قبول «حالت ممتنع» مرتب شده‌اند.بنابراین به آسانی در می‌یابیم که رساله از دو قسمت، که هر کدام مربوط به یکی از دو شق فوق است، ترکیب شده است.در قسمت اول، طوسی به حل ۲۰ معادله می‌پردازد؛ برای هر حالت، ترسیم هندسی ریشه‌ها، تعیین مبیّن فقط برای معادلات درجهٔ دوم، و سرانجام حل عددی به کمک روش معروف به روفینی ـ هورنر را پیش می‌کشد.وی نه تنها در معادلات چند جمله‌ای به استفاده از این روش ادامه می‌دهد بلکه در استخراج ریشهٔ یک عدد نیز آن را به کار می‌برد.کلیهٔ این اعمال را به گونه‌ای صورت می‌دهد که گویی خوانندهٔ خود را از روش استخراج جذر و کعب آگاه می‌داند.ما امروزه می‌دانیم که واقعاً در سدهٔ یازدهم چنین بوده است؛ بلکه حتی در زمان طوسی تا مدتها پس از آن، از این روش برای محاسبهٔ ریشهٔ nام یک عدد صحیح استفاده می‌کردند.از هم اکنون ما می‌توانیم عناصر سازندهٔ نظریهٔ معادلات در سدهٔ دوازدهم را در سنّت خیام ردیابی کنیم:ترسیم هندسی ریشه‌ها، حل عددی معادلات، و بالاخره پرداختن به جوابهای معادلهٔ درجهٔ دوم به‌وسیلهٔ رادیکالها.این ریشه‌ها از روی راه حل هندسی معادلات دوباره کشف می‌شوند.با یک نگاه ساده آشکار می‌شود که پیوندهای بین این نظریهٔ معادلات و جبر به مفهوم زمان خودش، یعنی جبر حسابی به گونه‌ای که در سنّت کَرَجی عرضه می‌شد، ضعیف و سست شده است.جبردانانِ حسابدان، چنانکه ازکار سُلَمی پیداست، همواره قسمت ناچیزی از رسالهٔ خود را وقف نظریهٔ معادلات درجهٔ دوم می‌کنند، و هنگام پرداختن به معادلات درجهٔ سوم، سعی دارند که به‌وسیلهٔ رادیکال آنها را حل کنند.این مطلب که به تازگی به اثبات رسیده نشان دهندهٔ راهی است که مثلاً طوسی پیموده است[۶].در واقع مفهوم جدید نظریهٔ معادلات، یعنی حل معادلهٔ درجهٔ سوم به‌وسیلهٔ رادیکالها، در قسمت اول مورد توجه وی قرار نمی‌گیرد؛ و در قسمت دوم نیز خواهیم دید که اصولاً در خلاف جهت این تحقیق گام برمی‌دارد.

در قسمت اول، پس از بررسی معادلات درجهٔ دوم و معادلهٔ $x^3 = c$، طوسی ۸ معادلهٔ درجهٔ سوم را بررسی می‌کند.هفت تای اول آنها همه فقط یک ریشهٔ مثبت دارند.ممکن است ریشه‌های منفی هم داشته باشند که طوسی نسبت به آنها بیگانه است.برای مطالعهٔ هریک از این معادلات، او دو منحنی درجهٔ دوم، یا دقیقتر بگوییم، دو جزء از این منحنیها را در نظر می‌گیرد.از روی ملاحظات هندسی نشان می‌دهد که کمانهای مورد نظر یک نقطهٔ تقاطع دارند که طول آن در معادلهٔ مفروض صدق می‌کند(ممکن است نقطهٔ تقاطع دیگری هم داشته باشند).ویژگیهای هندسی که طوسی شرح داده، با تقریبی که از آن چیزی نمی‌گوید، دربارهٔ داده‌هایی که انتخاب کرده صادق‌اند، و ویژگیهای مشخصه هستند؛ در نتیجه ما را به معادلات منحنیهایی که به کار برده شده است هدایت می‌کنند.در پرتو استعمال اصطلاحات «داخلی»و «خارجی»، طوسی از پیوستگی منحنیها و تحدّب آنها کمک می‌گیرد.مثلاً کار وی را برای معادلهٔ

$$x^3 + bx = c \qquad b, c > 0$$

می‌توان چنین تفسیر کرد که او دو عبارت

$$g(x) = x^2/a^{\frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad f(x) = [x(\frac{c}{b} - x)]^{\frac{1}{2}}$$

را در نظر می‌گیرد و نشان می‌دهد که اگر اعدادی مانند α و β وجود داشته باشند به نحوی که $(f-g)(\alpha) > 0$ و $(f-g)(\beta) < 0$ ، آنگاه اعدادی مانند $\gamma \in]\alpha, \beta[$ چنان یافت می‌شوند که $(f-g)(\gamma) = 0$.

طوسی قسمت اول را با مطالعهٔ هشتمین معادلهٔ درجهٔ سوم یعنی

$$x^3 + bx = ax^2 + c \qquad a, b, c > 0$$

به پایان می‌رساند.این معادله ممکن است سه ریشهٔ مثبت داشته باشد.طوسی این را، مانند خیام، از پیش اعلام نمی‌کند و فقط یک ریشهٔ آن را تعیین می‌کند.جریان عمل به نحوی صورت می‌گیرد که گویی مانند خیام، از دو حالت $a^2 - 3b \leq 0$ و $a^2 - 3b > 0$ فقط حالت اول را بررسی می‌کند.

از مطالعهٔ قسمت اول رساله چنین برمی‌آید که طوسی، عیناً مانند خیام، اصولاً ترسیم هندسی ریشه‌های مثبت این بیست معادله، یعنی معادله‌هایی راکه درجهٔ آنها نابیشتر از سه است بررسی می‌کند؛ زیرا بقیه به کمک تبدیلات آفین به یکی از این معادلات تبدیل می‌شوند.این ترسیمها، هر گاه معادله پس از آنکه حتی‌المقدور ساده شد به معادلهٔ درجهٔ اول یا درجهٔ دوم بدل شده باشد، به شیوه‌ای مشابه با شیوهٔ خیام به کمک هندسهٔ مسطحه صورت می‌گیرد، و هرگاه پس از ساده شدن به معادلهٔ درجهٔ سوم بدل شده باشد، از راه ترسیم به کمک دو منحنی از سه مقطع مخروطی انجام می‌گیرد.ترسیمهای مربوط به معادلات درجهٔ سوم همه، در آخرین تحلیل، به درج دو واسطهٔ هندسی بین دو پاره خط مفروض بدل می‌شوند.

در قسمت اول رساله ، هدف طوسی با هدف خیام که قبلاً ذکر کرده‌ایم تفاوتی ندارد و آن ساختن نظریه‌ای در باب معادلات به کمک این ترجمهٔ مضاعف جبری ـ هندسی است؛ ابزار اصلی کار آنها ترسیم هندسی ریشه‌های مثبت است.برخی جنبه‌های مطالعهٔ طوسی در این شرایط روشن می‌شوند.مثلاً تنها منحنیهایی که بررسی می‌کند درست همان منحنیهایی هستند که برای این ترسیم مناسب‌اند، و نه منحنیهای معلوم دیگر.

اگر چه نخستین قسمت رساله بستگی تنگاتنگی با کار خیام دارد، معهذا تفاوتهایی مشاهده می‌شود که نتایجشان فقط در قسمت دوم آشکار می‌شوند.در واقع طوسی برای هر معادله‌ای که مورد بررسی قرار می‌گیرد، وجود نقطهٔ تقاطع دو منحنی را ثابت می‌کند، و حال آنکه خیام جز در معادلهٔ بیستم عملاً به این بررسی نمی‌پردازد.همچنین مطالب چندی نظیر تبدیلات آفین و فاصلهٔ یک نقطه از یک خط را مطرح می‌کند که در قسمت دوم بارها به آنها ارجاع می‌کند.

دومین قسمت رساله به پنج معادله تخصیص داده شده است که، به گفتهٔ طوسی،«حالات ممتنع»هستند، یعنی حالتهایی که هیچ جواب مثبت ندارند.این معادلات از این قرارند:

$x^3 + ax^2 + c = bx$ (۲۳)، $x^3 + c = bx$ (۲۲)، $x^3 + c = ax^2$ (۲۱)،

$x^3 + c = ax^2 + bx$ (۲۵)، $x^3 + bx + c = ax^2$ (۲۴)

طوسی، بر عکس خیام، نمی‌تواند خود را به یک مشاهدهٔ ثابت ساده برای این«حالتهای ممتنع»قانع کند.زیرا هنگام بررسی وجود نقاط تقاطع و در نتیجه وجود ریشه‌ها، می‌باید این حالتها را مشخص کند و دلیل آنها را جویا شود.بنابراین دقیقاً برخورد با این مسالهٔ فنی و پرسش ناشی از آن است که

طوسی را واداشته است از سنت خیام ببُرد تا بتواند طرح اولیهٔ او را اصلاح کند.ولی برای درک این تغییر کلی، باید خط مشی طوسی را تجزیه و تحلیل کرد.

هریک از این پنج معادله به صورت $f(x) = c$ نوشته می‌شود.f یک چند جمله‌ای است، برای مشخص کردن«حالات ممتنع»، طوسی باید نقطهٔ تقاطع منحنی نمایش $y = f(x)$ را با خط $y = c$ بررسی کند.برای طوسی یک قطعهٔ منحنی مطرح است، قطعه‌ای که برای آن همزمان نامساویهای $x > ۰$ و $y = f(x) > ۰$ برقرار باشند که البته ممکن است چنین قطعه‌ای وجود نداشته باشد.مجدداً یادآور می‌شویم که برای طوسی مسأله زمانی معنی دارد که روابط $x > ۰$ و $f(x) > ۰$ برقرار باشند و در هر حالت برای اینکه $f(x)$ دقیقاً مثبت باشد شرایطی را فرض می‌کند.مثلاً در معادلهٔ (۲۱)، شرط $۰ < x < a$ و در معادلهٔ (۲۲)، شرط $۰ < x < \sqrt{b}$ و در (۲۳)، شرط $۰ < x < \sqrt{b}$ را می‌دهد که برای این حالت کافی نیست.حتی در معادلات (۲۴) و (۲۵) در آغاز، بازه را دقیقاً مشخص نمی‌کند ولی هنگامی که به مطالعه چارچوب ریشه‌ها می‌پردازد باید آن را دقیقاً تعیین کند.

لذا طوسی ناگزیر است روابط بین وجود جوابها و وضع ثابت c نسبت به ماکسیمم تابع چند جمله‌ای را بررسی کند.بدین مناسبت است که مفاهیم تازه، مطالب تازه، و زبان تازه‌ای را به میان می‌کشد؛ و بالاتر از همه شئ جدیدی را تعریف می‌کند.اما قبل از اینکه پیشتر برویم، با وجود خطر تکرار، باید اندکی درنگ کنیم.

طوسی بیان صریح مفهوم ماکسیمم یک عبارت جبری را آغاز می‌کند، که آن را با«بزرگترین عدد»، «العدد الاعظم» مشخص می‌کند.فرض می‌کنیم $f(x_۰) = c_۰$ این ماکسیمم باشد؛ این رابطه، نقطهٔ$(x_۰, c_۰ = f(x_۰))$ را می‌دهد.طوسی بعداً ریشه‌های $f(x) = ۰$، یعنی نقاط تلاقی منحنی با محور طولها، را معین می‌کند؛ بالاخره از آنجا حدود ریشه‌های $f(x) = c$ را نتیجه می‌گیرد.

پس کل مساله برای او، بعداً پیداکردن مقدار x است که ماکسیمم $f(x)$ را به دست می‌دهد.

طوسی بعداً به حل معادله‌ای می‌پردازد که همان $f'(x) = ۰$ است، ولی با بیانی متفاوت.ولی پیش از آنکه مسألهٔ مهم مشتق را بررسی کنیم، نگاهی به تغییر دیدگاه و دخالت تحلیل موضعی می‌اندازیم.مطلب خود را با مطالعهٔ نتایج کارهای طوسی آغاز می‌کنیم.

برای معادلهٔ (۲۱) مشتق، دو ریشهٔ ۰ و $۲a/۳$ دارد که به ترتیب مینیمم، یعنی $f(۰) = ۰$، و ماکسیمم، یعنی $f(\frac{۲a}{۳}) = ۰$ را می‌دهد.از طرفی معادلهٔ $f(x) = ۰$ ریشهٔ مضاعف $\lambda_۱ = ۰$ و یک ریشهٔ مثبت $\lambda_۲ = a$ را به دست می‌دهد.لذا طوسی به این نتیجه می‌رسد که اگر $c < c_۰$، معادلهٔ (۲۱) دو ریشهٔ مثبت $x_۱$ و $x_۲$ دارد به قسمی که

$$\lambda_۱ = ۰ < x_۱ < x_۰ < x_۲ < a = \lambda_۲$$

اشاره می‌کنیم که این معادله یک ریشهٔ سوّم $x_۳$ نیز دارد که منفی است و طوسی به آن توجهی ندارد.

برای معادله‌های (۲۲)، (۲۳)، و (۲۵) استدلال او عیناً تکرار می‌شود.در این حالتها مشتق دو ریشهٔ مختلف‌العلامه می‌پذیرد.ریشهٔ مثبت $x_۰$ ماکسیمم $c_۰ = f(x_۰)$ را می‌دهد و معادلهٔ $f(x) = ۰$ سه ریشهٔ ساده می‌پذیرد که یکی منفی و دوتای دیگر $\lambda_۱ = ۰$ و $\lambda_۲$ هستند.از اینجا به همان نتیجهٔ قبلی می‌رسد.

در معادلهٔ (۲۴) یک دشواری پدید می‌آید، زیرا ماکسیمم $f(x_۰)$ ممکن است منفی باشد.در این صورت برای اینکه حالتی جز حالت $f(x_۰) > ۰$ را در نظر نگیرد، شرط لازمی را تحمیل و سپس مانند قبل عمل می‌کند.در این حال معادلهٔ $f(x) = ۰$ دو ریشهٔ مثبت $x'_۰$ و $x_۰$ $(x'_۰ < x_۰)$ پیدا می‌کند که به ترتیب به یک مینیمم و یک ماکسیمم مثبت مربوط می‌شوند.طوسی فقط ریشهٔ $x_۰$ را در نظر می‌گیرد و $c_۰ = f(x_۰)$ را به دست می‌آورد.از سوی دیگر، معادلهٔ $f(x) = ۰$ در این حالت سه ریشهٔ ۰ و $\lambda_۱ > ۰$ و $\lambda_۲ > ۰$ با $\lambda_۱ < \lambda_۲$ را اختیار می‌کند.طوسی از اینجا نتیجه می‌گیرد که به ازای $c_۱ < c_۰$، معادلهٔ (۲۴) دو ریشهٔ مثبت $x_۱$ و $x_۲$ دارد به قسمی که

$$۰ < \lambda_۱ < x_۱ < x_۰ < x_۲ < \lambda_۲$$

این مطالعهٔ سریع نشان می‌دهد که وجودِ مفهومِ مشتق نه تصادفی است و نه فرعی، بلکه برعکس آگاهانه است.از سوی دیگر باید بگوییم که این نخستین بار نیست که در«مسأله» به عبارت نشان‌دهندهٔ مشتق برمی‌خوریم:این مفهوم را طوسی قبلاً برای نمایش روش عددی حل معادلات معرفی کرده بود.ولی طوسی در هر دو حالت به ارائهٔ کاربرد روش خود اکتفا می‌کند بی‌آنکه فکری را که در پس آن است آشکار سازد.در نوشته‌هایی که از طوسی به ما رسیده است در واقع چیزی نمی‌یابیم جز محاسباتی که همواره روی یک مثال انجام گرفته است، بی‌آنکه دربارهٔ خط مشی فکریی که در این کشف به کار رفته سخنی گفته شود.این امساک در گفتار فقط ما را به یاد روش فرما در کتاب *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* «روش بررسی ماکسیمم و مینیمم» دربارهٔ این موضوع می‌اندازد.در این گونه موارد باید با احتیاط عمل کنیم و روشِ درست حکم می‌کند که مواظب باشیم مطلبی در میان نیاوریم که در متن نباشد.

تا آنجا که ما می‌دانیم در«مسأله» برای نخستین بار در تاریخ ریاضیّات، به یک فکر اساسی برمی‌خوریم:تعیین اکسترممهای عبارتهای جبری از یک سو، و مطالعهٔ تغییرات توابع چندجمله‌ای در مجاورت یک اکسترمم، برای محاسبهٔ اکسترمم، از سوی دیگر.این بار دیگر موضوع حجمها یا سطحهای اکسترمم در کار نیست، بلکه توابع چندجمله‌ای مطرح هستند؛ توجه به این نکته برای پیشگیری از خلط کار طوسی با کارهای دیگران، که پس از ترجمه به زبان آنالیز جدید ممکن است با آن اشتباه شود، لازم است.زیرا ممکن است که یکی از مسائل ارشمیدس [۷] را پیدا کنیم که ترجمه‌اش به زبان جدید به وسیلهٔ مورّخ شاید روشهایی مشابه با روش طوسی را به ذهن القا کند [۸].امّا این مسأله در عمل، یک ترسیم هندسی به کمک نقاط تقاطع یک سهمی و یک هذلولی است که ارشمیدس از آن کمک گرفته است؛ بعداً با استفاده از ویژگیهای دو قطع مخروطی که در یک نقطه بر هم مماس‌اند ماکسیمم بودنِ حجمی را ثابت می‌کند.گشتن به دنبالِ عبارتهای جبری و مشتقّات آنها در متنی که اوتوکیوس پیدا کرده کاری است عبث، و مثالهای دیگری با این ماهیّت را می‌توان در ریاضیّات اسکندرانی و نیز اسلامی پیدا کرد.

برای پی بردنِ بیشتر به اصالت کار طوسی، مثال معادلهٔ (۳) را که به صورت

$$f(x) = x(b - ax - x^۲) = c$$

نوشته می‌شود در نظر می‌گیریم.مسألهٔ اصلی پیدا کردن مقدار $x = x_0$ است که به ازای آن ماکسیمم حاصل می‌شود.

امّا، با تبدیل عبارتِ معادلهٔ ۲۳ به دو معادله از نوع ۱۵ و از نوع ۲۱ به وسیلهٔ تبدیل آفین $x \to X = x_0 - x$ و $x \to X = x - x_0$ است که طوسی دو تساوی

$$f(x_0) - f(x_0 + X)$$
$$= 2x_0(x_0 + a)X - (b - x_0^2)X + (3a + x_0)X^2 + x^3$$

و

$$f(x_0) - f(x_0 - X)$$
$$= (b - x_0^2)X - 2x_0(x_0 + a)X + (3a + x_0)X^2 - X^3$$

را به دست می‌آورد.طوسی ناچار بوده است با توجّه به اینکه عبارات $X^2(3a + x_0 - X)$ و $X^2(3a + x_0 + X)$ دربازهٔ $]0, \lambda_2[$ مثبت هستند، $f(x_0)$ را با $f(x_0 + X)$ و $f(x_0 - X)$ مقایسه کند.بعداً توانسته است نتیجه‌گیری کند که

اگر $b - x_0^2 \geq 2x_0(x_0 + a)$، آنگاه داریم $f(x_0) > f(x_0 + X)$

اگر $2x_0(x_0 + a) \geq b - x_0^2$، آنگاه داریم $f(x_0) > f(x_0 - X)$

و در نتیجه

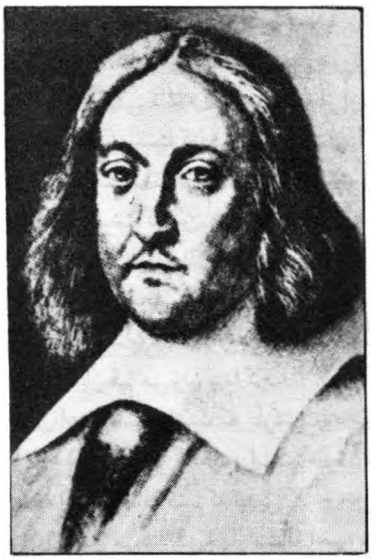
$$b - x_0^2 = 2x_0(x_0 + a) \Rightarrow \begin{cases} f(x_0) > f(x_0 + X) \\ f(x_0) > f(x_0 - X) \end{cases}$$

یعنی هرگاه x_0 ریشهٔ مثبت معادلهٔ $f'(x) = b - 2ax - 3x^2 = 0$ باشد، آنگاه $f(x_0)$ در بازهٔ مورد مطالعه ماکسیمم $f(x)$ است.

یادآور می‌شویم که این دو تساوی به بسط تیلر:

$$F'(x_0) = b - 2ax_0 - 3x_0^2, \frac{1}{2!}f'(x_0) = -(3a + x_0)$$
$$\frac{1}{3!}f''(x_0) = -1$$

مربوط هستند.پس به نظر می‌رسد که خطّ مشیِ طوسی عبارت است از مرتّب کردن $f(x_0 + X)$ و $f(x_0 - X)$ برحسب قوای X و اثبات اینکه ماکسیمم وقتی حاصل می‌شود که ضریب X در این بسط صفر باشد.لذا مقدار x که $f(x)$ را ماکسیمم می‌سازد ریشهٔ مثبت $f(x) = 0$ است.وانگهی ممکن است طوسی دو تساوی قبل را به صورت $f(x_0 + X)$ و $f(x_0 - X')$ با $X \neq X'$ اختیارکرده باشد؛ امّا چون از راه مقایسه عمل می‌کند، استدلال به قوّت خود باقی می‌ماند.برای فهمیدن روش طوسی آنچه اهمیّت کمتری ندارد این است که طوسی این بسط را صریحاً از روی تبدیل معادلهٔ (۲۳) به



فرما

دو معادلهٔ (۱۵) و (۲۱) (که قبلاً حل شده بودند) به دست می‌آورد.به گونهٔ کلیتر، در زمینهٔ حَل معادلات، به نظر می‌آید که این روش، لااقل تا اندازه‌ای به این مسأله که دارای ماهیّت جبری است بستگی دارد:برگرداندن معادله‌ای که می‌خواهیم ریشه‌های مثبتش را پیدا کنیم به معادلات دیگری که قبلاً ریشه‌های مثبت آنها تعیین شده‌اند.این روش باز در جای دیگر، هنگام فراهم آوردن روش حَل عددی معادلات، به چشم می‌خورد.امّا این روش طوسی همان روشی است که به روش فرما معروف شده است.این نکته از اهمیت خاصی برخوردار است که ما آن را نشان خواهیم داد.تنها یادآوری می‌کنیم که طوسی از قبل می‌دانسته است که چندجمله‌ای درجهٔ سوّم $P(x)$ زمانی بر $(x - r)$ قابل قسمت است که r ریشهٔ معادلهٔ $P(x) = 0$ باشد؛ همچنین او می‌توانسته است با یک تبدیل آفین یک معادله را به معادلهٔ دیگری که قبلاً حَل کرده بوده برگرداند.مع‌هذا، حتّی اگر قبلاً هم وجود روابط گویا بین ضرایب یک معادله و ریشه‌هایش را احساس کرده باشد، این روابط را مورد مطالعه قرار نداده است، نه به خاطر خود آنها و نه در حالت کلّی؛ زیرا این روابط، جز در مواقعی که همهٔ ریشه‌ها مثبت هستند، برای او گیرایی ندارند.این، دقیقاً همان چیزی است که برای معادلهٔ (۹) یعنی

$$x^2 + c = bx$$

وقتی $b^2 \geq 4c$، رخ می‌دهد.در این حالت طوسی صریحاً نشان می‌دهد که x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله هستند اگر و فقط اگر

$$x_1x_2 = c \quad , \quad x_1 + x_2 = b$$

در میان معادله‌های درجهٔ سوّم، معادلهٔ (۲۰)، که قبلاً اشاره کردیم، تنها معادله‌ای است که می‌تواند سه ریشهٔ مثبت داشته باشد.ولی طوسی چون

توجهی به این نکته نداشته، نتوانسته است آن را ببیند.

نبودن اعداد منفی مطمئناً نقش بازدارنده‌ای در مورد مسألهٔ روابط گویا بین ضرایب و ریشه‌های حقیقی داشته است.و علاوه بر آن، شیوهٔ کار را بسیار سنگین کرده و موجب شده است که در برخی استدلالها مسأله به تکرار حالاتی که باید در نظر گرفت کشانیده شود.مطالعهٔ ماکسیمم $f(x)$ در حالت دوّم معادلهٔ (۲۵)، مثالی است که این جنبه را به خوبی روشن می‌کند.برای مقایسهٔ $f(x)$ و $f(x_0)$ دربازهٔ $]0, x_0[$، این بازه را به دو بازهٔ $]0, a[$ و $]a, x_0[$ تقسیم می‌کند و در محاسباتش از یک سو تفاضلهای $a - x_0$ و $a - x$ و از سویی $x_0 - a$ و $x - a$ را دخالت می‌دهد.به‌علاوه مثالهای دیگری از این دست را باز هم می‌توان پیدا کرد.

باز همین نبودن اعداد منفی است که طوسی را به توسّل به دو معادلهٔ کمکی در مسائل (۱۲) تا (۲۵) کشانیده است.حالت معادلهٔ (۲۱) قبلاً جداگانه بررسی شده است.اضافه کنیم که تبدیل $x \to -X$ این معادله را به معادله‌ای از نوع (۱۵) بدل می‌کند.در چهار مسألهٔ اخیر، معادلهٔ $f(x) = c$ به ازای $c < c_0$ سه ریشهٔ حقیقی قبول می‌کند:

$$x_3 < 0 < x_1 < x_0 < x_2$$

تبدیل آفین $x \to x_0 + X$، معادلهٔ $f(x) = c$ را به معادلهٔ $g(X) = c_0 - c$ بدل می‌کند، که معادله‌ای است از نوع (۱۵) که در همان شرایط، سه ریشهٔ حقیقی قبول می‌کند که تنها یکی از آنها مثبت است:

$$X_3 < -x_0 < X_1 < 0 < X_2$$

طوسی فقط X_2 را اختیار می‌کند که جواب $x_2 = x_0 + X_2$ را به او می‌دهد.بعداً از تبدیل $x \to x_0 - X$، با فرض $X < x_0$، استفاده می‌کند، معادلهٔ $f(X) = c_0 - c$ را به دست می‌آورد که همان معادلهٔ $g(-X) = c_0 - c$ است، معادله‌ای از نوع (۲۱) که سه ریشهٔ حقیقی قبول می‌کند

$$X_2 < 0 < X_1 < x_0 < X_3$$

چون باید شرط $0 < X_1 < x_0$ برقرار باشد، الزاماً X_1 را انتخاب می‌کند و به دست می‌آورد $x_1 = x_0 - X_1$.

پس می‌بینیم که براثر نبودن اعداد منفی حالتها تکرار و محاسبات طولانی می‌شوند، همین طور هم شرح آنها.این امر دستیابی به متنِ طوسی را آسان نمی‌کند، بلکه نبودِ هرگونه نمادگذاری برای بیان مفاهیم تازه و انجام این محاسبات این مانع را تشدید می‌نماید.

جزء دوّم رساله، بی‌تردید، تحلیلی است:محاسبه به گونه‌ای کاملاً جبری صورت می‌گیرد، و شکلها فقط برای کمک به تجسّم آمده‌اند.

روش جستجوی ماکسیمم و مینیمم

با این بررسی که در آن توجه خود را به رساله محدود کرده‌ایم، توانسته‌ایم نشان دهیم که این کتاب متضمّن روشی است که، پنج قرن بعد، فرما مجدّداً آن را پیدا و تکمیل کرده است.این نتیجه‌گیری ممکن است شگفت‌آور باشد؛ اگر این مطلب تایید شود شاید تاریخ یکی از مبانی برخی مفاهیم آنالیز، و نیز خط مشی ریاضیّات در سدهٔ هفدهم بهتر شناخته شود.درحقیقت متونی که به اندازهٔ نوشته‌های فرما از روش تحقیق ماکسیمم و مینیمم بحث کرده باشند نادرند.همچنین نوشته‌هایی که این اندازه تعبیرهای ناموافقی را موجب شده باشند بسیار کم‌اند.پس از انتقادهای مونتوکلا از نوشتهٔ هویگنس [۹] دربارهٔ روش فرما همواره مورّخان درپی کشف ماهیّتِ واقعی و حتی پیوستگیِ خاص آن بوده‌اند.این سؤالات، هراندازه هم مهّم باشند، در اینجا مورد بحث ما قرار نخواهند گرفت.طرح ما که محدودتر و معتدلتر است، این است که راهی را که فرما پیش گرفته است تا حد امکان به اختصار یادآوری کنیم و به آخرین تفسیر روش او برسیم، روشی که توانسته‌ایم در کار طوسی نیز پیدا کنیم.برای اینکه یک خلاصهٔ کلّی از کارهای او به دست دهیم، مجدداً به توضیحات خود طوسی می‌پردازیم.

بدین منظور معادلهٔ

$$f(x) = c \qquad (1)$$

و دو تساوی

$$f(x_0 + X) - f(x_0) = XP_1(x_0) + \sum_{k=2}^{n}(X^k/k!)P_k(x_0) \qquad (2)$$

و

$$f(x_0 - X) - f(x_0) = -XP_1(x_0) + \sum_{k=2}^{n}(-1)^k(X^k/k!)P_k(x_0) \qquad (3)$$

$$f, p_k \in \mathbf{Q}[X], k = 1, 2, \ldots, n$$

را در نظر می‌گیریم.چنانکه دیده‌ایم روش طوسی بر اندیشهٔ زیرین استوار است: $f(x)$ در نقطهٔ x_0 به یک اکسترمم $f(x_0) = c_0$ می‌رسد، هرگاه $P_1(x_0) = 0$، و هرگاه همسایگیی از x_0 وجود داشته باشد که در آن

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^k(X^k/k!)P_k(x_0) \quad \text{و} \quad \sum_{k=2}^{n}(X^k/k!)P_k(x_0)$$

یک علامت داشته باشند.

برای معادلات (۲۱) تا (۲۵)، طوسی فقط بازه‌هایی را بررسی می‌کند که روی آنها نامساوی $f(x) > 0$ برقرار باشد، و عملاً فقط ماکسیمم $f(x)$ را مطالعه می‌کند.

پس این راهی است که طوسی را به مفهومی که بعداً مشتق نام گرفته رسانده است.بعد از اینکه بسط چندجمله‌ای را نسبت به متغیّر کمکی پیدا کرده است، نقشِ عبارتِ مشتق را دریافته است.امّا مطالعهٔ طوسی در مجموعهٔ خودش، به یک روش کاملاً جبری صورت گرفته است؛ ولی ما در اینجا چیزی جز ترکیب (سنتز) نداریم، و مؤلف، هیچ‌گونه اطّلاعی از شیوهٔ تحلیل (آنالیز) خود به ما نمی‌دهد.امّا مطالعهٔ مکرّر رساله ما را به این حدس می‌کشاند که

استدلال وی براساس نموداری است که به وسیلهٔ $(f(x) > 0 , x > 0)$ تعریف می‌شود.دربارهٔ جملات دیگر بسط تیلر، در فصل اوّل خواهیم دید که طوسی از جملهٔ دوّم استمداد جسته است ولی هرگز از خودش دربارهٔ شرایطی که باید این جملات مختلف در آنها صدق کنند، پرسشی نکرده است.

فرما در کتابش:*Methodus ad Disquirendam maximam et minimam* «روش بررسی ماکسیمم و مینیمم» از ۱۶۳۷ و بعد [۱۰] یک فورمولبندی نسبتاً کلّی از روش خود به دست می‌دهد، بی‌آنکه در عین حال آن را به هیچ صورت توجیه کند.در ۱۶۳۸ دوباره درکتابش:*Ad Eamdem Methodum* «در باب همان روش» به این روش خود باز می‌گردد [۱۱] و سعی می‌کند خیلی روشنتر و صریحتر بنویسد؛ ولی در دو تا از نوشته‌هایش، چنانکه بررسی مثالهای مطروحه نشان می‌دهند، برای مقایسهٔ $f(x_0)$ و $f(x_0 + X)$ رابطهٔ (۲) را در نظر می‌گیرد.هدف وی، که مشابه با طرحی است که قبلاً در کار طوسی دیدیم، جدا کردن جملات اول بسط تیلر از مجموعهٔ جملات است، با این فرض که مسأله‌ای که جوابش به این بسط نیاز دارد، مسالهٔ اکسترمم، منحصراً به اولین جملات بستگی دارد.برای توضیح این عمل فرما از اصطلاح «Adégalité» (کلمه‌ای ساختگی در ترجمهٔ حساب دیوفانتوس که ترجمهٔ واژهٔ یونانی $\pi\alpha\rho\iota\sigma o'\tau\eta\zeta$ است)، کمک می‌گیرد.منظور از این واژه نوعی تساوی حدّی است، یا به گفتهٔ آ.ژیرار(A.Girard) «این را نباید گفت تساوی است، بلکه نزدیک شدن به چیزی‌است»[۱۳]؛ یا بالاخره برای اینکه همان واژه‌های خود فرما را بکار بریم، منظور در نظر گرفتن دو جمله است «انگار که مساوی هستند، هر چند مساوی نیستند»[۱۴].به گواهی مثالهایی که بکار می‌گیرد، این مقایسه به وی اجازه می‌دهد $P_1(x)$ را از رابطهٔ(۲) جدا کند و این موضوع را نتیجه بگیرد که : مقادیری که $f(x)$ را ماکسیمم یا مینیمم می‌سازند ریشه‌های معادلهٔ $P_1(x_0) = 0$ هستند.

برای اینکه ویژگی جبری این کارهای فرما را نشان دهیم، آنچه راکه خود او در ۱۶۳۶ در این باب نوشته است بخوانیم «آنچه که بیش از همه به آن ارزش می‌نهم، روشی است برای تعیین انواع مسائل مسطحه وفضایی که با استفاده از آن ابداع خودم، یعنی ماکسیممها و مینیممهای انواع مسائل را پیدا می‌کنم و این کار را با معادله‌ای به سادگی یک معادلهٔ آنالیز معمولی انجام می‌دهم.»[۱۵]

درنوشتهٔ اخیر فرما به توجیهی بیش از توجیه نوشتهٔ اولش در بارهٔ این روش برنمی‌خوریم.ولی به نظر می‌رسدکه وی از ۱۶۳۸ عناصر این توجیه را در اختیار داشته است.زیرا در پاسخ به انتقاد دکارت دایر بر اینکه او این روش را به تصادف پیدا کرده است بی‌آنکه به‌اصول واقعی آن پی برده باشد، به مرسن می‌نویسد که «هرچه باشد، ریشهٔ اصلی برهانی که هنوز ارائه نداده‌ام‌در این است که $A + E[\Leftrightarrow (x_0 + X)]$ و $A - E[\Leftrightarrow (x_0 - X)]$ هر دو کار واحدی را انجام می‌دهند».یعنی باید $f(x_0)$ و $f(x_0 + X)$ و $f(x_0 - X)$ را باهم مقایسه کرد.دقیقاً همین فکر است که از نامهٔ مشهور او به برولار (Brûlar)، مورخ ۳۱ مه ۱۶۳۴، با تمام قدرت استنباط می‌شود.

دراین نامه فرما نوشتهٔ خود رابا تأکید بر اینکه جستجوی یک اکسترمم باید« به نقطه یا به جملهٔ یگانه‌ای منجر شود» آغاز می‌کند و بعداً بیان می‌کند که هرگاه x_0 این نقطه باشد، عبارتهای (۲) و (۳) همواره همعلامت هستند. پس مساله، آن گونه که فرما می‌نویسد عبارت است از « پیدا کردن روشی که با کاربرد آن $A + E$ و $A - E$ هر دو یک عبارت را برای A به دست دهند، تا اینکه همان A ی مذکور نقطهٔ وسط را نشان دهد؛ و برحسب اینکه در جستجوی بیشترین باشیم یا کمترین، به آنچه که در دو طرف آن هست افزوده یا کسر می‌شود.آنچه در دو طرف A هست یا از آن کمتر است یا بیشتر.

بنابراین ظاهراً روشی وجود دارد که از $A + E$ و $A - E$ یک معادله به دست آید، و این نکته را توضیحات ما واستدلال برای شما آشکار خواهند کرد.زیرا همیشه $A + E$ همان عبارت $A - E$ را می‌دهد، و این اختلاف تنها ناشی از وجود توانهای فرد است که علامتها را مختلف نشان می‌دهد، و این البته تغییری در معادله نمی‌دهد.»

فرما در این مورد مثالی می‌آورد که می‌توانیم آن را چنین ترجمه کنیم:

$$f(x) = ax^2 - x^3 \qquad 0 < x < a$$

فرض می‌کنیم که $x = x_0$ اکسترمم را بدهد، وبعداً دو عبارت زیر را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$f(x_0+X) = ax_0^2-x_0^3+(2ax_0-3x_0^2)X+(a-3x_0)X^2+X^3$$

و

$$f(x_0-X) = ax_0^2-x_0^3-(2ax_0-3x_0^2)X+(a-3x_0)X^2-X^3$$

اگر x_0 ریشهٔ $2ax_0 - 3x_0^2 = 0$ باشد، داریم $x_0 = 2a/3$ و به ازای $X < a$ خواهیم داشت

$$f(\frac{2}{3}a - X) - f(\frac{2}{3}a) < 0$$

و

$$f(\frac{2}{3}a + X) - f(\frac{2}{3}a) < 0$$

پس $f(\frac{2}{3}a)$ یک ماکسیمم است.

این نکته را باید ذکر کرد که در این نامه فرما اظهار می‌دارد که برحسب علامت ضریب X^2 ماکسیمم یا مینیمم وجود دارد.اگر متن این نامه را با نامهٔ ۷آوریل ۱۶۴۳، که به مرسن نوشته، تکمیل کنیم به نظر می‌آید که روش بیان شده در این صفحات آشکارا ماهیتی جبری دارد و جز برای چند جمله‌ایها اثبات نشده است.ولی این مشابهت با کار طوسی نشابه دیگری را به خاطر می‌آورد :در نوشته‌ها، خود فرما هم از راه ترکیب (سنتز) عمل می‌کند؛ ولی شیوهٔ فرما در تحلیل (آنالیز)در متنهای دیگری مانند متن مشهور روش ماکسیمم و مینیمم [۱۶] حفظ شده است.فکر این آنالیز را چنین ترجمه می‌توان کرد:در دو طرف اکسترمم، تابع بر دو مقدار مساوی می‌گذرد، به طوری که معادلهٔ(۱) به ازای c ، خیلی نزدیک به این اکسترمم دو ریشه دارد که در دوطرف مقدار $x = x_0$، مربوط به اکسترمم، قرار می‌گیرند، ودر نقطهٔ اکسترمم یک ریشهٔ مضاعف داریم.به نظر ما، کسی که نپذیرد که طوسی، دست کم به طور شهودی، این فکر راداشته و فهمیده است که نقطه‌ای که به ازای آن ماکسیمم حاصل شده، نقطهٔ مضاعف تلاقی منحنی $(x > 0, f(x) > 0)$ با خط $y = c$ است، معنی بررسی طوسی را خوب

نفهمیده است.

راه تجزیه‌ای که طوسی اختیار کرده است هرچه باشد، ترکیبش کافی است نشان دهد که کاملاً با روش فرما سازگار است.اینک که تاریخ روشن ماکسیممها ومینیممها دیگر آن گونه که بوده نیست، مسأله‌ای که از این پس برای مورّخان مطرح می‌شود مشخص کردن فاصله‌ای است که فرما، وقتی روش خود را برای مسائلی به کار می‌برد که طوسی در بارهٔ آنها بحث نکرده است، از طوسی می‌گیرد.

***

طوسی می‌خواست از کار خیام آغاز کند ویک کتاب کامل را به نظریهٔ معادلات، که در آن زمان دقیقاً فصلی مستقل از ریاضیات شده بود، تخصیص دهد.به نظر می‌آید برای تأیید این شیوه است که طوسی در آغاز رساله بررسی منحنیهایی راکه بعداً به کار می‌برد می‌گنجاند و روش معروف به روفینی ـ هورنر را برای حل عددی معادلات از جنبهٔ ریاضی عرضه و توجیه می‌کند.طوسی در عین حالی که طرح سلف خود راقبول می‌کند قصد داردکاملترین ومنحصرترین کار را عرضه کند.به عقیدهٔ ما دیدگاه حاکم بر رساله بازسازیِ پیوستگیِ فصلی است که به نظریهٔ جبریِ معادلات اختصاص دارد.مادامی که نیت ارادی او برای تهیه شرحی منسجم به قدر کافی روشن نشده است شیوهٔ تألیف تاریک می‌ماند؛ و با این وجود، دقیقاً همین طرح است که در جریان ساخته شدن رساله آسیب دیده است:پیوستگی مطلوب، در واقع در جریان تحقیق بر اثر پیدایش مشکلی که اساساً در آغاز دیده نمی‌شود ازهم پاشیده شده است، و در نتیجه رساله به دو قسمت، که مطمئناً به هم وابسته‌اند ولی مربوط به دو ریاضیات مختلف می‌شوند، تقسیم شده است.قسمت اول در سنّت خیّام است و به ترسیم هندسی ریشه‌های معادله تخصیص داده شده است؛ در جریان این تحقیق است که طوسی خود را مجبور به تحمیل یک شرط تکمیلی می‌بیند : اثبات منظّم آنچه که می‌خواهد بگوید برای هر حالت، وجود نقطهٔ تقاطع دو منحنی که طول آنهاریشهٔ مثبت مطلوب را معین می‌کند.این اقتضای جدید به‌طور کاملاً طبیعی مؤلف را به مطرح کردن مسائل موضعی و جدا کردن ریشه‌ها و شرایط وجودی آنها، مستقل از ترسیم پذیری هندسی آنها، هدایت کرده است.برای حل این مسائل است که طوسی مفهوم ماکسیمم یک عبارت جبری را تعریف وسعی می‌کند مفاهیم و روشهایی را برای تعیین ماکسیمم و مینیمم پیدا کند.ریاضیدان در این کار نه تنها به اختراع مفاهیم و روشهایی کشیده می‌شود که بعداً نامی بر آنها نهاده می‌شود، بلکه برای توفیق درکار خود مجبور می‌شود نحوهٔپرداختن به‌کار راتغییر دهد:برای نخستین بار، تا آنجاکه من می‌دانم لزوم بررسی موضعی را کشف می‌کند.قسمت دوم رساله، که دقیقاً به این مسائل تخصیص داده شده، از لحاظ موضوعهایی که مورد مطالعه قرار می‌دهدو نیزاز لحاظ سیاق عبارات ریاضی با اولی تفاوت دارد.ولی کشف این سرزمین جدید که طوسی تازه به مرزهای آن دست‌یافته دیگر نمی‌تواند با زبان طبیعی همخوانی کند، و به زبانی احتیاج دارد که بهتر با موضوعهایش مطابقت داشته باشد.در اینجاست که نمادگذاری ، دست کم در یک نقش منفی، وارد صحنه می‌شود:دریک کلام، اگر زبان طبیعی هنوز می‌توانست با جبر حسابی همخوانی نشان دهد، در برابر تحقیقاتی که بر اثر دیالکتیک بین جبر و هندسه الزامی شده بودیک مانع حقیقی محسوب می‌شد.شاید در اینجاست که باید یکی از دلایل اصلی ضعف تحقیقات در این زمینه رادر ریاضیات اسلامی و نیز علت جهش سدهٔ هفدهم اروپا راجستجو کرد.

پس نشان داده‌ایم که کشف دیدگاه موضعی و تحلیلی است که دستاورد طوسی را مشخص می‌سازد.ما باید از آرایی که در بارهٔ تاریخ آمیختن جبر و هندسه پیش از سدهٔ هفدهم پذیرفته شده‌اند، و نیز از آرای کلاً رایج در بارهٔ مقام ریاضیات اسلامی در این زمینه عدول کنیم.اکنون برماست که طوسی را در جایگاه مناسب خود بنشانیم.

مراجع

1.F.Woepcke:*L' Algèbre d'Omar Alkhayyami*, Paris,1851,p.XII.

2.*L'Oeuvre algébrique d'al-Khayyām* (éditée et- traduite par R. Rashed et A.Djebbar), Alep,1981, pp.14-16 et pp.79 sqq.

3.*Al - Khayyām*, op.cit.,p.90.

4.R. Rashed:"Résolution des équations numériques et algèbre: Sharaf al-Din al-T ūsī, Viète",*Archive for History of Exact Sciences*,vol.12, n°3 , 1974, pp . 244-290;repris dans R.Rashid: *Entre Arithmétique et Algèbre ,recherches sur l'Histoires des Mathématiques arabes* , Les Belles Lettres,Paris, 1984,pp.147-194.

R.Rashed:"L'extraction de la racine n^e et l'invention des fractions décimales (XIe-X IIe siècles)" , *Archive for History of Exact Sciences* , vol.18,n°3,1978, pp.191-243; repris dans R.Rashed:*Entre Arithmétique et Algèbre*···,op. cit.,pp. 93- 146.

R.Rashed:"Al-Bīrūn ī et l'algèbre", *Volume of Bīrūnī International Congress in Teheran* , Teheran,1976,pp.63-74.

5.R.Rashed:"Résolution des équations numériques et algè bre",op.cit.

6.R.Rashed:"L'idée de l'algèbre chez al- Khwārizmī", *Fundamenta Scientiae*,vol.4,n°1,1983, pp.87-100 ; repris dans *Entre Arithmétique* et Algèbre··· , op.cit.pp.17-29.

7.Archimède: *Commentaires d'Eutocius, Fragments*, éd. C.Mugler, Paris,Les Belles Lettres, 1972,pp.88 sqq.

8.I.G.Bachmakova:"Les méthodes différentielles d'Archimède", *Archive for History of Exact Sciences*, vol.2,n°2,pp.102 sqq.

9.J.Itard, *Essais d'Histoire des Mathématiques;* réunis et introduits par R.Rashed, Paris, Blanchard, 1984,p. 236.

نیز مراجعه کنید به

Montucla:*Histoire des Mathématiques*,t.II,p.113

که می‌نویسد:«درضمن به این نکته اشاره می‌کنیم که آقای هویگنس در بیان این قاعده اشتباه کرده است.به نظر او اساس این قاعده این است که وقتی یک مقدار به حداقل رسید، دو مقدار از هرطرف وجود خواهد داشت که همسایه و برابرند.این یکی از خصوصیتهای ماکسیممها و مینیممهاست، اما آن خصوصیتی نیست که حاکم بر قاعدهٔ آقای فرماست.»

10.*Œuvres de Fermat*,édition P. Tannery et C.Henry, Paris,1891, vol.I,pp.133-136.

11.Op. cit., pp. 140-147.

12.Op.cit., p. 140.

13.A.Girard:*L'Arithmétique de Simon Stevin de Bruges* , Leiden, 1625,P.626.

14.*Œuvres de Fermat*, op. cit.,p.140.

15.*Œuvres de Fermat*, op.cit.,vol. II.1894, p.56.

16.*Œuvres de Fermat*,op.cit.,vol.I,pp.147-153.

اخبار و گزارشها

بیست و سومین کنفرانس ریاضی کشور

بیست و سومین کنفرانس ریاضی کشور از ۱۸ تا ۲۱ فروردین ۱۳۷۱ در دانشگاه رازی کرمانشاه برگزار شد. در این کنفرانس، حدود هزار تن از ریاضیکاران ایرانی و میهمانانی از کشورهای دیگر، از جمله هایمن باس و ژاکوب پلیس شرکت داشتند. برنامه‌های کنفرانس شامل سخنرانیهای عمومی، ارائهٔ مقالات تخصصی و برگزاری هفدهمین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی بود. سمیناری هم دربارهٔ آموزش ریاضی برای دبیران برگزار شد. در جوار کنفرانس، مجمع عمومی انجمن ریاضی ایران تشکیل شد و شورای اجرائی انجمن را انتخاب کرد.

دورهٔ سیستمهای دینامیکی

دورهٔ سیستمهای دینامیکی از ۱۱ تا ۱۴ اسفند ماه ۱۳۷۰ در مرکز تحقیقات فیزیك نظری و ریاضیات برگزار شد. در این دوره که با استقبال عده‌ای از دانشجویان علاقه‌مند مواجه شد، ۱۵ سخنرانی ارائه گردید و ریاضیدانان خارجی صاحب‌نامی چون دنیس سالیوان، چارلزپیو، جان‌هابارد، ژاکوب پلیس، و ژان‌کریستف یوکوز در آن حضور داشتند.

مسابقهٔ ریاضی دانشجویی

همزمان با بیست و سومین کنفرانس ریاضی کشور، مسابقهٔ ریاضی دانشجویی سال ۱۳۷۱ نیز برگزار شد. نتایج این مسابقه در روز پایانی کنفرانس به قرار زیر اعلام شد:

شهریار مختاری شرقی از دانشگاه صنعتی شریف و عطاءالله تقا از دانشگاه کرمان، مشترکاً مقام اول

علی ثابتیان از دانشگاه شیراز، مقام دوم

علی رجائی از دانشگاه صنعتی شریف و علی نجفی خواه از دانشگاه علم و صنعت، مقام سوم.

مسابقهٔ ریاضی فرهنگستان علوم

فرهنگستان علوم یك رشته مسابقات علمی (المپیاد دانشگاهی) برگزار کرد. این مسابقات در اردیبهشت ۱۳۷۱ در رشته‌های ریاضی، فیزیك، شیمی، زمین‌شناسی، و زیست‌شناسی انجام شد. نتیجهٔ مسابقه در رشتهٔ ریاضی به قرار زیر اعلام شده است:

علی رجائی از دانشگاه صنعتی شریف، نفر اول

حسام حمیدی‌تهرانی از دانشگاه صنعتی شریف، نفر دوم

آرش رستگار از دانشگاه صنعتی شریف، نفر سوم.

المپیادهای ریاضی و کامپیوتر

تیم المپیاد ریاضی کشورمان در سی‌وسومین المپیاد بین‌المللی ریاضی که در تیرماه ۱۳۷۱ در روسیه برگزار شد با ۳ مدال نقره و دو مدال برنز در بین ۶۹ کشور شرکت‌کننده به مقام سیزدهم دست یافت. مدالهای نقره را کسری رفیع (از تهران)، رامین تکلو بیغش (از بندر امام)، و امیر جعفری (از تهران) دریافت کردند. رضا ناصر عصر (از تبریز) و عباس گلمکانی (از مشهد) مدالهای برنز را دریافت داشتند و عضو دیگر تیم حسین عباسپور نیز دیپلم افتخار کسب کرد.

تیم المپیاد کامپیوتر کشورمان نیز که برای اولین بار در المپیاد بین‌المللی کامپیوتر شرکت کرده بود با ۲ مدال نقره و ۲ مدال برنز مقام چهاردهم را به خود اختصاص داد. در چهارمین المپیاد بین‌المللی کامپیوتر که در تیرماه ۱۳۷۱ در کشور آلمان برگزار شد چهل و شش کشور شرکت داشتند که محمدمهدیان و سعیدمیرزایی مدالهای نقره و کیومرث‌کاوه و فرشاد رستم‌آبادی مدالهای برنز را دریافت کردند. هر چهار نفر عضو تیم دانش‌آموزان دبیرستانهای تهران بودند.

جایزهٔ جبرکول در ۱۹۹۲

جایزهٔ کول در زمینهٔ جبر که هر پنج سال یکبار توسط انجمن ریاضی آمریکا (AMS) اعطا می‌شود در سال ۱۹۹۲ به کارل روبین (Karl Rubin) از دانشگاه اوهایو و پال وویتا (Paul Vojta) از دانشگاه کالیفرنیا (برکلی) تعلق گرفت. جایزهٔ کول به وسیلهٔ پروفسور فرانك نلسن کول بنیاد گذارده شده است. پروفسور کول بیست و پنج سال دبیر انجمن ریاضی آمریکا و

بیست و یك سال سردبیر بولتن انجمن بود و جایزهٔ کول را از محل پاداشی که هنگام بازنشستگی دریافت کرد، بنا نهاد.

کارل روبین به خاطر کارهایش در زمینهٔ خمهای بیضوی و پاول وویتا به خاطر تحقیقاتش در زمینهٔ مسائل دیوفانتی این جایزه را مشترکاً دریافت داشته‌اند.

جایزهٔ تورینگ در ۱۹۹۱

رابین میلنر دانشمند علوم کامپیوتر از دانشگاه ادینبوروی انگلستان جایزهٔ تورینگ سال ۱۹۹۱ را به خود اختصاص داده است. جایزهٔ تورینگ معتبرترین جایزه در زمینهٔ علوم کامپیوتر است که توسط انجمن ماشینهای محاسبه (ACM) اعطا می‌شود. مبلغ این جایزه بیست و پنج هزار دلار است.

میلنر به خاطر بیست سال فعالیت خلاقانه در علوم کامپیوتر به دریافت این جایزه نائل شده است. عمدهٔ فعالیتهای او به قرار زیر برشمرده شده است: ۱) مشارکت در ایجاد منطق مناسب برای ارائهٔ اثبات به کمك کامپیوتر؛ ۲) مشارکت در ایجاد ساختارهای بسیار پیشرفته در زبانهای برنامه‌سازی؛ و ۳) مشارکت در پیشبرد نظریه عمومی همزمانی (concurrency).

جایزهٔ کیوتو در ۱۹۹۱

ادوارد لورنتس هواشناس معروف آمریکایی و یکی از نخستین کسانی که ایدهٔ آشوب را در سیستمهای دینامیکی مورد کنکاش قرار داد، برندهٔ جایزهٔ کیوتو در سال ۱۹۹۱ شده است. جایزهٔ کیوتو در زمینهٔ علوم پایه اهدا می‌شود و مشتمل بر یك مدال طلا و چهل و پنج میلیون ین ژاپن است.

سرپرست جدید گروه ریاضی مرکز بین‌المالی فیزیك نظری

م. س. ناراسیمان رئیس سابق بخش ریاضی انستیتو تاتای هندوستان، از ماه اکتبر سال ۱۹۹۲ ریاست گروه ریاضی مرکز بین‌المالی فیزیك نظری (تریست ـ ایتالیا) را عهده‌دار می‌شود و رئیس فعلی، جیمز ایلز، که استاد دانشگاه واریك انگلستان نیز هست، دوران بازنشستگی خود را آغاز می‌کند.

سخنان برندهٔ جایزهٔ مایورانا دربارهٔ

سیر ریاضیات در ویتنام

جایزهٔ مایورانا (Majorana) همه ساله از طرف مرکز بین‌المالی فیزیك نظری در تریست ایتالیا به یك ریاضیدان برجستهٔ جهان سوم اعطا می‌شود. در سال ۱۹۹۱، این جایزه به خانم دکتر هونگ وان‌له ریاضیدان جوان ویتنامی تعلق گرفت. متن زیر، گفتار خانم له هنگام دریافت جایزه است. در این سخنرانی، نکاتی از سیر ریاضیات در ویتنام مطرح شده است.

پروفسور عبدالسّلام عزیز، پروفسور سینایی عزیز، خانمها و آقایان، من از اینکه در مرکز بین‌المالی فیزیك نظری هستم، بسیار خوشحالم. برای من افتخار بزرگی است که جایزه سال ۱۹۹۱ مرکز بین‌المالی فیزیك نظری را که به افتخار پروفسور مایورانا نامگذاری شده است، دریافت کنم. امروز و به این مناسبت مایلم در مورد سیر پیشرفت ریاضیات در ویتنام و اینکه چگونه یك ریاضیدان شدم، با شما صحبت کنم.

پیشرفت ریاضیات در ویتنام در حقیقت پس از استقلال در سال ۱۹۴۵ آغاز شد. پیش از این زمان، از آغاز قرن حاضر، در تعداد کمی از دبیرستانهای ویتنامی، تنها ریاضیات مقدماتی تدریس می‌شد. در دانشگاه هانوی که درست پیش از جنگ جهانی دوّم تأسیس شد و بیشتر استادان آن فرانسوی بودند، تنها بعد از سال ۱۹۴۰ بود که دورهٔ لیسانس ریاضی برقرار شد. چهل سال پیش، فقط یك ریاضیدان ویتنامی موفق به دریافت درجهٔ دکتری شده بود که نام او له‌وان‌تیم (Le Van Thiem) بود. او از دانشسرایعالی معروف فرانسه فارغ‌التحصیل شد و دفاع از تز دکتری خود را تحت نظر پروفسور نوانلینا، یکی از بنیانگذاران آنالیز مدرن، انجام داد. مدتی پس از آنکه به مقامی در دانشگاه زوریخ دست یافت، در سال ۱۹۴۸، برای پیوستن به جنبش مقاومت ویتنام از موقعیت آتیه‌دار خود در اروپا چشم پوشید. او یکی از بنیانگذاران دانشگاهی بود که در جنگل تأسیس شد. در سال ۱۹۵۴، زمانی که برای چند سال صلح به ویتنام بازگشت، درهای دانشگاه هانوی دوباره گشوده شد، امّا از آنجا که تمام مدرّسین فرانسوی، ویتنام را ترك کرده بودند و تعداد محقّقان ویتنامی نیز کافی نبود، دانشگاه با کمبود دانشمندان واجد شرایط مواجه شد. پروفسور له‌وان‌تیم به تنهایی در تمام زمینه‌های ریاضیات مدرن تدریس می‌کرد. قابل ذکر است که او تمامی این درسها را به زبان ویتنامی که پیش از آن در مدارس و دانشگاههای ویتنام مورد استفاده قرار نمی‌گرفت، تدریس می‌نمود. تقریباً تمام کسانی که به هم‌نسلان من ریاضیات آموخته‌اند، شاگردان سابق او بوده‌اند. در سال ۱۹۷۰، در زمان جنگ علیه مداخلهٔ آمریکا، پروفسور له‌وان‌تیم اولین مدیر مؤسّسهٔ ریاضیات هانوی در مرکز ملّی تحقیقات علمی ویتنام شد. تحت رهبری وی، این مؤسّسه به مرکز ریاضیات در سراسر کشور تبدیل شد. می‌توان او را بنیانگذار ریاضیات مدرن در ویتنام دانست.

پروفسور له‌وان‌تیم و دانشمندانی نظیر او در تلاش برای ارتقای سطح آموزش علمی در ویتنام از حمایت فراوان برخی از سیاستمداران برخوردار می‌شدند. یکی از آنها وزیر سابق آموزش، پروفسور تاکوانگ‌بو (Ta Quang Buu) بود. او که در سال ۱۹۲۴ به فرانسه رفت، مثل برخی از دانشجویان ویتنامی آن زمان عقیده داشت که فقط دانش و تکنولوژی مدرن است که می‌تواند ویتنام را به کشوری پیشرفته تبدیل کند. وی موضوعات بسیاری مانند ریاضیات، زیست‌شناسی و مهندسی معدن را در دانشگاههای

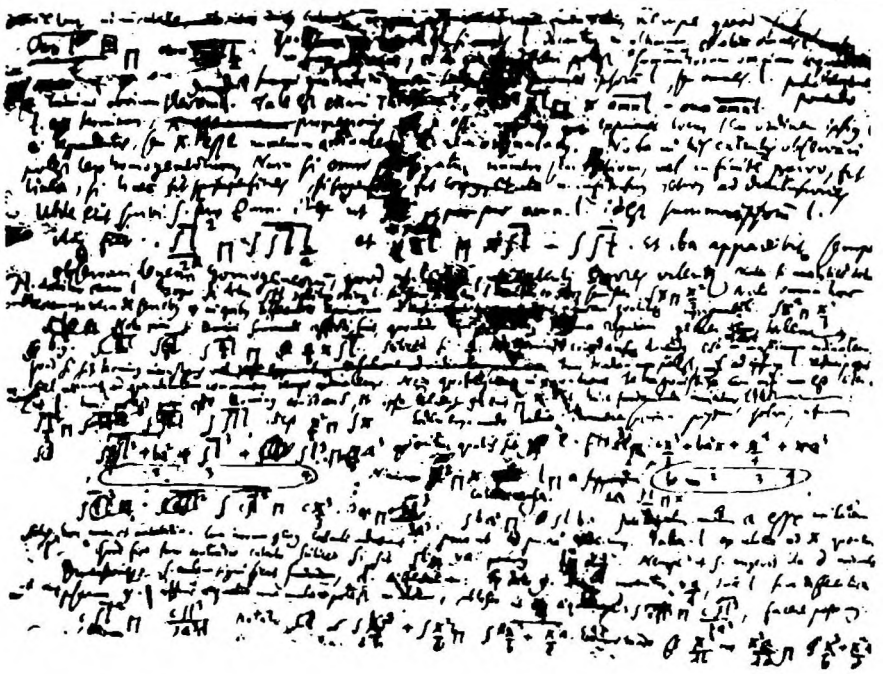
مختلف فرانسوی و انگلیسی آموخت. سپس به ویتنام بازگشت و یکی از مشاوران رئیس‌جمهور هوشی‌مین شد. در زمان جنگ با استعمارگران فرانسوی، معاون وزارت دفاع بود و به عنوان ژنرال، خدمت کرد. در سال ۱۹۶۶، به وزارت آموزش منصوب شد. او بسیار شیفتهٔ ریاضیات بود و در کنار مسئولیّتهای خود، درسهایی در زمینهٔ ریاضیات در دانشگاه هانوی می‌داد و برگزاری سمینارهایی در مورد فیزیك ریاضی، منطق و نظریهٔ تکینی (singularity) را هدایت می‌کرد. همچنین مجلهٔ *ریاضیات و جوانی* را برای ترویج ریاضیات در ویتنام پایه‌گذاری کرد. به ابتکار وی، المپیادهای ملّی ریاضیات سازماندهی شد و در سراسر کشور، مدارس مخصوصی برای دانش‌آموزان مستعدّ در ریاضیات، تأسیس گردید. تقریباً همهٔ ریاضیدانان و فیزیکدانان هم نسل من در این مدارس تحصیل کرده‌اند و برخی از آنها، تحت توجهّ و راهنمایی شخص وی قرار گرفته‌اند.

علی‌رغم ۳۰ سال جنگ و مشکلات اقتصادی، ریاضیات در ویتنام پیشرفت نسبتاً سریعی داشته است. هم اینك در ویتنام در حدود ۲۰۰ ریاضیدان دارای درجهٔ دکتری هستند. اگر شما نگاهی به شمارهٔ اخیر نشریهٔ *متمتیکال ریویوز* بیندازید، مطمئناً اسامی تعدادی از ریاضیدانان ویتنامی و مقالات آنان را خواهید یافت. آموزش ریاضی پیش از دانشگاه در ویتنام، در سطح بین‌المللی شناخته شده است و بچّه‌های ویتنامی همیشه جوایز ارزنده‌ای در المپیادهای بین‌المللی ریاضی به‌دست آورده‌اند.

پیشرفت ریاضیات در ویتنام همچنین ناشی از کمکهای سخاوتمندانهٔ بین‌المللی است. اتّحاد شوروی و دیگر کشورهای سوسیالیست سابق، سالها به آموزش ریاضیدانان ویتنامی کمك کرده‌اند. تعدادی از ریاضیدانها که پس از پایان جنگ، در جنوب باقی ماندند، تحصیلات عالیهٔ خود را در فرانسه، آمریکا و آلمان به انجام رساندند. من تقریباً هیچ ریاضیدان ویتنامی را نمی‌شناسم که در خارج از کشور تحصیل نکرده باشد. بسیاری از ریاضیدانان کشورهای غربی، مانند گروتندیك، شوارتس، کارتیه، و هیلتن در زمان جنگ، از ویتنام دیدار کرده و درسهایی داده و کتابها و نشریاتی به کتابخانه‌های ویتنام اهدا کرده‌اند. تنها کتابخانهٔ ریاضی ویتنام اساساً بر پایهٔ این کتابها و مجلّات بنا شده است. برخی از ریاضیدانان ویتنامی مانند ف. فام (F. Pham) و له‌دونگ ترانگ (Le Dung Trang)، که در کشورهای پیشرفته زندگی می‌کنند، راهنمایی تزهای دکتری ریاضیات دانشگاه هانوی را هم به عهده دارند. در سالهای اخیر، مرکز بین‌المللی فیزیك نظری، با حمایت از تعداد کثیری از ریاضیدانان ویتنامی در فعالیتهایشان، به پیشرفت ریاضیات در ویتنام کمك کرده است.

اکنون مایلم چند کلمه‌ای نیز در مورد خودم اضافه کنم. در خانوادهٔ ما، پدر و مادر من، ریاضیات را خیلی دوست دارند و من عشق به ریاضیات را از آنها به ارث برده‌ام. آنها مرا به شرکت در آزمون مدرسهٔ مخصوص کودکان مستعدّ در ریاضیات، تشویق کردند. در آنجا بود که من دنیای شگفت‌انگیز ریاضیات را کشف کردم. به همین دلیل تصمیم گرفته‌ام نیمی از جایزه را به والدینم و نیمی دیگر را به مدرسهٔ ویژه‌ای که در آنجا عشق به ریاضیات را آموختم، اختصاص دهم. در المپیاد ملّی ریاضی سال ۱۹۷۷ جایزهٔ سوّم را دریافت کردم. مسیری که پس از آن طی کردم، شبیه همان مسیری است که بسیاری از ریاضیدانان هم‌نسل من طی کردند. من برای تحصیل ریاضی به دانشگاه ایالتی مسکو فرستاده شدم. آنجا در سال ۱۹۸۰، پروفسور فومنکو (Fomenko) را ملاقات کردم و او موافقت کرد بر مطالعات من در زمینهٔ هندسهٔ دیفرانسیل نظارت داشته باشد. شخصیت و تجارب وی، تأثیر بزرگی در شکل‌گیری شخصیت ریاضی من داشته است. من امروز با قدردانی عمیق قلبی از او یاد می‌کنم.

ترجمهٔ سپیده چمن‌آرا



دستنویسی از لایب‌نیتس به تاریخ ۲۹ اکتبر ۱۶۷۳ که در آن برای اولین بار علامت انتگرال به کار رفته است.

این بخش به درج نامه‌ها و نظرهای خوانندگان و همکاران نشر ریاضی دربارهٔ مسائل جامعهٔ ریاضی و علمی ایران اختصاص دارد. نظرهای درج شده ضرورتاً با دیدگاه نشر ریاضی یکسان نیست.

مشکلات دورهٔ کارشناسی ریاضی در دانشگاههای توسعه نیافته

منظور از «دانشگاه توسعه نیافته»، دانشگاهی است که فاقد امکانات متعارف است. اکثر این دانشگاهها در مناطق محروم واقع‌اند. برخی از این دانشگاهها نوپایند و برخی، چند دهه از عمرشان می‌گذرد.

در ابتدا متذکر می‌شویم که کشور ما دچار دشواریهای طبیعی بسیار است. رشد جمعیت ایران بالاست و به نظر می‌رسد که تا ۲۰ سال دیگر جمعیت ایران، قریب ۱۲۰ میلیون نفر شود. پس برنامه‌ریزان ایران که لزوماً به افقهای دور توجه دارند باید ایران ۱۲۰ میلیون نفری را مد نظر قرار دهند. از این پس فراهم آوردن بسیاری از نیازهای ضروری جامعهٔ ما (حتی آب) بدون به‌کارگیری تکنولوژی متعارف و پیشرفته در ابعاد وسیع مقدور نخواهد بود. ما ناچاریم در دهه‌های آتی برای میلیونها انسان، خانه، مدرسه، بیمارستان و شغل فراهم آوریم و صدها هزار معلم، مهندس و کارگر فنی تربیت کنیم. برای تحقق این امور به ناچار باید در دانشگاهها را به روی انبوهی از دیپلمه‌های متوسط و ضعیف بگشاییم. باید دانشگاههای بسیاری ایجاد شود و دانشگاههای موجود توسعه یابد. از این پس دیگر نمی‌توان مانند گذشته دانشگاهی را ایجاد کرد و به امید آن نشست که در آینده‌ای نامعلوم، دانشگاه تکمیل شود بلکه باید برنامهٔ خاصی برای دانشگاههای نوپا تدوین کرد.

تا آنجا که من می‌دانم بحث جدی دربارهٔ این دانشگاهها صورت نگرفته است و این قبیل مباحثات برای بسیاری ناخوشایند می‌نماید. در هر صورت من در این نوشته می‌کوشم با توجه به مطالعات وتجربیات شخصی خود در این مورد به بحث بپردازم.

این مقاله مشتمل بر چهار بخش است. در بخش نخست به اوضاع و احوال آموزش در دانشگاههای توسعه نیافته پرداخته‌ام. در بخش دوم، برنامهٔ کنونی مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش سوم پیشنهادهایی کلی در مورد برنامه‌های این دانشگاهها عنوان کرده‌ام. در بخش چهارم برنامه‌ای برای دورهٔ کارشناسی ریاضی در این دانشگاهها ارائه شده است.

۱

مهمترین رکن آموزش، «دانشجویان» هستند. آیا برای دانشجویانی که زمینهٔ لازم را ندارند و فعال و ساعی نیستند می‌توان کار مهمی انجام داد؟

می‌دانیم که از نظر آموزش، ریاضیات بیشتر یک هنر است تا یک علم و برای فراگرفتن آن باید ذوق واستعداد لازم را داشت و هرکس نمی‌تواند در فراگرفتن آن (به معنی واقع کلمه) موفق شود. گذشته از اینها، دانشجوی رشتهٔ ریاضی باید به کار مرتب و منظم عادت داشته باشد و بتواند ساعاتی به محاسبه بپردازد واز این کار لذت ببرد. با وجود این، پاسخ به سؤالی که مطرح کرده‌ایم در مورد دانشجویان ضعیف همواره منفی نیست. از اینها گذشته، ما ناچار به پذیرش دانشجویان ضعیف هستیم و فقط می‌خواهیم آنان را برای انجام دادن کاری معمولی تربیت کنیم.

حال ببینیم دانشجوی سال اول چه وضعیتی دارد و با چه توشه‌ای به دانشگاه می‌آید؟ در دبیرستان برای او مطالب بسیاری عنوان کرده‌اند ولی مطالب کمی را فراگرفته است و مطالب بسیاری را بد آموخته‌است. دبیرستانهای نقاط محروم امکانات ناچیزی دارند وفاقد دبیران مجرب‌اند. درحال حاضر کنکور به گونهٔ خاصی برگزار می‌شود وداوطلبان ورود به دانشگاهها بسیار زیادند. در کنکور، سؤالات تستی مطرح می‌شود ودانش‌آموزان بر این باورند که برای دادن جواب درست به این سؤالات، نه به تسلط بر درس نیاز است و نه به داشتن قدرت محاسبه، و فقط دانستن « شگرد » کار لازم است. درکنکور، دروس مختلفی مطرح می‌شود واین امر مشکلاتی پدید می‌آورد زیرا اگر چه این دروس ضرایب متفاوتی دارند ولی در هر صورت، هر درس نمره‌ای دارد و با نمرهٔ آن می‌شود کمبود نمرهٔ برخی از دروس اساسی را تا حدی جبران کرد. من کسی را دیده‌ام که با داشتن دیپلم خانه‌داری و بدون اینکه چیزی از فیزیک و ریاضی بداند در دورهٔ کارشناسی ریاضی پذیرفته شده است.

چه کسانی داوطلب ورود به رشتهٔ ریاضی می‌شوند؟ برای ایرانیان به طور اعم و برای طبقات متوسط و فقیر به طور اخص، رشتهٔ ریاضی جذابیتی ندارد. به طور کلی، فارغ‌التحصیلان مستعد دبیرستانها رشته‌های مهندسی و پزشکی را بر رشته‌های علوم (از جمله ریاضی) ترجیح می‌دهند. ازسال ۱۳۶۵ سطح دانش پذیرفته‌شدگان دانشگاهها تنزل محسوسی یافت زیرا با اجرای طرح تمام وقتی استادان، ظرفیت دانشگاهها دوبرابر شد ودر رشتهٔ ریاضی هم دانش‌آموزان ضعیفتری به دانشگاه راه یافتند. مع‌الوصف، دست تقدیر برخی از افراد مستعد را روانهٔ دانشگاهها کرده و هر سال هم تعداد قابلی از بهترین داوطلبان کنکور جذب رشتهٔ ریاضی می‌شوند که در دانشگاههای تهران به تحصیل می‌پردازند.

«مدرسین» را دومین رکن آموزش می‌دانیم. درایران کمبود معلم در هر سطحی محسوس است و در آینده نیز به علت رشد جمعیت و تمایل به توسعهٔ دانشگاهها، چنین خواهد بود. کمبود مدرس در دانشگاههای توسعه نیافته

محسوستر از سایر دانشگاههاست و سطح دانش مدرسین این دانشگاهها نیز پایینتر از سایر دانشگاههاست.به ندرت مدرسی به دلخواه خود حاضر به کارکردن در یک دانشگاه واقع در منطقهٔ محروم می‌شود.از کسانی که با هزینهٔ دولت از سوی این دانشگاهها به خارج رفته‌اند، عده‌ای به ایران باز نگشته‌اند و آنان که به وطن خود مراجعت کرده‌اند نیز عموماً در دانشگاههای مجهز به کار مشغول‌اند.

مدرسین دانشگاههای توسعه نیافته اغلب مربی‌اند و فاقد سوابق درخشان تحصیلی هستند.در این دانشگاهها چه بسا ممکن است که از یک مدرس فوق‌لیسانس به محض شروع به کار بخواهند که به تدریس چند درس تخصصی بپردازد که علاوه بر دشواریهای این وظیفه، مدرسین نیز از این کار دستاورد علمی به چنگ نمی‌آورند زیرا در این دانشگاهها تحرک علمی وجود ندارد ودانشجویان هم رغبتی به حل مسائل دشوار ندارند، وکسی هم نیست که مدرسین مشکلات خود را با آنها مطرح کنند.

سومین رکن آموزش را «برنامهٔ درسی» می‌دانیم که در بخشهای آتی به آن می‌پردازیم.در اینجا فقط متذکر می‌شویم که برنامه‌های کنونی دانشگاهها بسیار سنگین است و این امر دشواریهای آموزشی را چند برابر می‌کند.

رکن چهارم آموزش را «مدیریت و امکانات دانشگاه» می‌دانیم.مدیریت در دانشگاههای ما (به طور اعم) چندان تعریفی ندارد.با دشواریهای موجود، عمدهٔ وقت مسؤولین دانشگاهها صرف حل و فصل مسائل اداری می‌شود.مدیریت، دانشگاههای توسعه نیافته، مسائل و دشواریهای خاص خود را دارد.در اینجا کمبودها محسوستر است.مراکز تصمیم‌گیری نیز در تهران است.برای هر چیزی باید از تهران کسب تکلیف شود.مدیران شایسته نیز مایل به کار در تهران هستند و برای خدمت به شهرستان نمی‌آیند.اغلب مدیران این دانشگاهها به کار و محل زندگی خود به صورت موقت نگاه می‌کنند و بسیاری از آنها، از دانشگاههای دیگری حکم دارند وبه صورت مأمور در دانشگاههای مورد نظر ما کار می‌کنند.

از آنجا که در ایران بحث دربارهٔ دانشگاههای مناطق محروم و دانشجویان کم استعداد را کار سبکی می‌دانند، به تربیت مدیر برای این دانشگاهها نیز توجهی نمی‌شود.

ارتباط بین ارکان اساسی آموزش (چهار رکنی که گفته شد) به اندازهٔ کافی انعطاف پذیر نیست.مدرس در انتخاب دانشجو نقش ندارد.مقررات انعطاف ناپذیر، دست مدرسان و مسؤولان دانشگاه را برای تعدیل برنامه‌ها بسته است.تغییراتی هم که ازسوی وزارتخانه در برنامه‌ها صورت می‌گیرد، تغییراتی است کلی.نکتهٔ قابل توجه این است که مقررات در اینجا خیلی زود مسخ می‌شوند وبه عاملی دست وپاگیر تبدیل می‌گردند.برای روشن شدن مطلب در مورد استاد راهنما صحبت می‌کنیم.از قریب ۲۰ سال پیش قرار بر این شد که دانشجویان با مشاوره و راهنمایی مدرس، دروس خود را انتخاب کنند که اینها را استاد راهنما می‌نامند.تا سال ۱۳۵۱ استادان راهنما می‌توانستند به صلاحدید خود تعداد واحد ودروسی را که دانشجو می‌گذراند تعیین کنند.این شیوه که براساس آیین‌نامه‌های دانشگاههای آمریکا اعمال شده بود به زودی رنگ باخت.از آن سال به بعد، هر ساله مقرراتی جهت محدود کردن قدرت عمل استادان وضع شد.اکنون واقعاً استاد راهنما اختیاری ندارد و تنها وظیفه‌ای که برای او مانده، تذکر آیین‌نامه‌ها ومقررات به دانشجوست.این تغییر وضع نتیجهٔ چه عواملی است؟به این دلیل است که ما خود خواهان مقرراتی انعطاف ناپذیریم که بین افراد تفاوتی قائل نباشد مگر برحسب ضوابطی که بر کاغذ منقوش شده باشد.

اکنون دربارهٔ عوامل دیگر صحبت می‌کنیم.ضعف کتابخانه‌های این دانشگاهها با توجه به اینکه دانشجویان تمایلی به مطالعهٔ کتابهای گوناگون نشان نمی‌دهند چندان محسوس نیست.

فضای آموزشی در سرزنده نگاهداشتن دانشجویان وکارکنان دانشگاه تا اندازه‌ای مؤثر است.بعضی از این دانشگاهها به جهت دشواریهای کارهای ساختمانی فاقد فضای مناسبی هستند و برخی هم فضای آموزشی بسیار مناسبی دارند، مانند دانشگاه کردستان (سنندج).

۲

برنامه‌های درسی چگونه تهیه شده است و در دانشگاههای توسعه نیافته چگونه اجرا می‌شود؟

اساساً در ایران، برنامه‌ریزی چگونه صورت می‌گیرد؟ما درکار برنامه‌ریزی، بسیار بلند پروازیم.به تصور ما باید برنامه حاوی تمام خواستهایمان باشد و به ممکن یا ناممکن بودن آن توجهی نداریم.خلاصهٔ کلام، «ما برنامه‌ریزی را با گزافه‌گویی اشتباه می‌کنیم».

برنامهٔ آموزشیی که در اوایل دههٔ ۶۰ نوشته شد بسیار سنگین بود.اکنون دانشجویان برای اخذ مدرک کارشناسی ، قریب ۱۴۵ واحد درس می‌گذرانند.هر دانشجو قریب ۹۰ واحد الزامی و ۱۱ واحد اختیاری و ۲۴ واحد تخصصی و ۲۳ واحد عمومی می‌گذراند.دانشجو، سوای فیزیک و دروس اصلی رشتهٔ ریاضی، دروس بسیار دیگری نیز از شاخه‌های متفاوت ریاضی مطالعه می‌کند.هر چند در برنامه، ۱۱ واحد به دروس اختیاری اختصاص داده شده است ولی دانشجو مجاز به گرفتن هر درس نیست.

به تجربه دریافته‌ام که این برنامهٔ سنگین برای دانشجویانی که به اندازهٔ کافی مستعد نیستند یا گوهرهای صیقل نیافته‌ای هستند، مانند ورزش سنگین برای افراد کم‌بنیه است و باعث دلزدگی اینان از مطالعهٔ ریاضی می‌شود.

به دانشجو در بدو ورود ، ریاضیات عمومی ۱، فیزیک ۱ و چند درس دیگر می‌دهند.مدرس ریاضیات عمومی به تدریس از روی کتابی چون توماس یا سیلورمن می‌پردازد.فصلهای اول این کتابها حاوی مطالبی است که در دبیرستانها تدریس می‌شود وقاعدتاً باید از تدریس آنها خودداری کرد.ولی وقتی که مدرس می‌بیند اکثریت دانشجویان از فهم مطالب این فصول عاجزند، به تدریس آنها می‌پردازد.در دانشگاههای مورد نظر ما معمولاً از معلم ترین خبری نیست، مدرس هم به اندازهٔ کافی گرفتار است.ازاین رو کار حل تمرین و رفع اشکال به خوبی پیش نمی‌رود.مدرس که ناچار است درس را مطابق برنامه پیش ببرد به تدریس سطحی مطالب اکتفا می‌کند.دانشجو هم که فرصت تفکر و جبران ناتوانیهای خود را ندارد، به‌جای حل مسائل و فهم مطالب، به از برکردن آنها می‌پردازد.آنچه گفته شد، واقعیت امر است هر چند که ممکن است سؤالات امتحان نیمسال بسیار پر زرق وبرق جلوه کند.

گرچه مقررات اداری در موارد بسیاری، دست مدرسین را بسته است ولی به مدرس اجازه داده شده است که به «آزمایش» کار خود بپردازد.این امر جای بحث بسیار دارد و بعداً به آن خواهیم پرداخت.

وضعیت دانشجویان در درس فیزیک به مراتب بدتر از ریاضیات است.چون این درس فقط در ده واحد عرضه می‌شود و اغلب دانشجویان به غلط، فیزیک را چیزی بی ارتباط با ریاضیات می‌دانند و آن را درسی

گذرا به حساب می‌آورند.

در نیمسال دوم سال اول، تدریس دروس ریاضیات عمومی وفیزیک به همان شیوهٔ گذشته ادامه می‌یابد.در این مرحله «مبانی ریاضی» نیز تدریس می‌شود.در این درس، یا مطالب بسیار مقدماتی بازگو می‌شود یا به قضایایی می‌پردازند که درک آن خارج از حدود فهم دانشجوی سال اول است.در وضعیت کنونی وجود این درس بی‌مورد است.

از سال دوم، دروس اصلی رشتهٔ ریاضی مطرح می‌شود.کتابهایی که در اختیار مدرسین است، کتابهای مرجع آمریکایی است که حاوی مطالب بسیاری است که پاره‌ای از آنها حاشیه‌ای هستند.تدریس کامل این کتابها نه ضروری است و نه سودمند.مدرس باید تا آن اندازه بر کتاب مورد استفاده مسلط باشد که توانایی حذف قسمتهایی ازکتاب را بدون اینکه به اصل مطالب لطمه‌ای بزند داشته باشد، که البته اغلب مدرسین دانشگاههای توسعه نیافته قادر به این کار نیستند.برخی از آنان از جزوات درسی دانشگاههای دیگر استفاده می‌کنند، که این خود به تحرک و سرزندگی کلاس صدمه می‌زند.

از آنجا که مدیران دانشگاهها برای نظارت برکار مدرسین، روش مکانیکی اتخاذ می‌کنند، مدرسین نیز تظاهر به اجرای برنامهٔ رسمی وزارتی می‌کنند و بدین گونه کیفیت را در مسلخ کمیت قربانی می‌کنند.

عدم آمادگی کافی دانشجویان و سنگینی مطالب درسی، و عدم تسلط کافی مدرسین بر مطالب درسی، دانشجویان را به «از بر کردن» دروس وا می‌دارد.با برنامه‌های کنونی، هرگز مدرسین فرصت آن را نمی‌یابند که به مسائل مشکل بپردازند و دانشجویان را درگیر آنها کنند.ازاین رو دانشجویانی که مطالب را حفظ می‌کنند به عنوان دانشجویان زرنگ و مستعد کلاس معرفی می‌شوند.اینان سرمشق بدی برای دیگر دانشجویان هستند.چنین وضعی مانع از شکوفایی آن دسته از دانشجویان مستعدی می‌شود که فرصت بروز استعداد خود رانیافته‌اند.

با تمام مقررات دست وپاگیری که از سوی وزارتخانه وضع شده است، مدرسان در دو مورد قدرت فوق‌العاده دارند، یکی در مورد امتحان (که قبلاً از آن صحبت شد) و دیگری در مورد شیوهٔ تدریس.واقعاً در این مورد، مدرسین آزادی بیش از حد دارند. آنان می‌توانند در حین تظاهر به اجرای برنامهٔ وزارتی به مطرح کردن مطالبی بسیار سطحی و کم محتوا اکتفا کنند و به دلخواه خود امتحان برگزار نمایند و به دانشجویان نمره بدهند.

با توجه به روحیهٔ خاص دانشجویان مناطق محروم، این وضع دشواریهای بسیاری به وجود می‌آورد.بسیاری از دانشجویان برای اخذ نمره به روشهای ناپسندی مبادرت می‌کنند.این وظیفهٔ وزارتخانه است که برای درهم شکستن این روابط نادرست، امتحانات پاره‌ای از اساسیترین دروس دورهٔ کارشناسی راکنترل کند.

اکنون به دروس اختصاصی می‌پردازیم.در دانشگاههای توسعه نیافته، این دروس توسط مربیان تدریس می‌شود.این امر با آیین نامه‌های وزارتخانه مطابقت ندارد.تدریس دروس تخصصی ریاضی واقعاً دشوار است.در اینجا مسأله فقط دانستن مطالب و توانایی حل مسائل نیست (هرچندکه در این مورد نیز کاستیهایی وجود دارد.)بلکه باید مدرس بر تدریس این دروس نیز مسلط باشد.ازاین روست که بسیاری ازکلاسهای دروس تخصصی به صورت نمایشی، آن هم نمایش ناخوشایند برگزار می‌شود.

در برنامهٔ دورهٔ کارشناسی، دروسی نیزکه با هندسهٔ دبیرستانی و اطلاعات عمومی ریاضی سروکار دارد گنجانیده‌اند، مانند مبانی هندسه، تاریخ ریاضی و فلسفهٔ علم.از آنجا که دانشجویان، زمینهٔ لازم را برای فراگرفتن این دروس ندارند و از هندسهٔ دبیرستانی نیز چیزی نمی‌دانند، از تدریس این دروس نیز نتیجهٔ مطلوبی عاید نمی‌شود.

۳

در اینجا به ذکر چند پیشنهاد کلی در مورد جنبه‌های گوناگون آموزش در دانشگاههای مورد نظر می‌پردازیم.

لازم است در برنامهٔ دبیرستانی، تجدید نظر اساسی صورت گیرد.وزارت آموزش و پرورش باید با توجه به دشواریهای موجود، برنامه‌ای، سبکتر و مناسبتر طرح کند.

بهتر است کنکور در دو مرحله انجام شود.در مرحلهٔ اول از همهٔ دروس مورد نظر سؤال مطرح شود.به داوطلبانی که در این مرحله قبول شوند، گواهینامه‌ای داده شود به طوری که اینان برای سه تا پنج سال از شرکت در کنکور مرحلهٔ اول معاف شوند و در کنکور مرحلهٔ دوم فقط دروس اختصاصی مطرح شود.باید در فکر آن بود که سؤالات مرحله دوم به گونه‌ای طرح شود که از گزند «تست بازان» در امان بماند.

با مشکلتر کردن تدریجی سؤالات تخصصی در کنکور مرحلهٔ اول می‌توان تعداد قبولشدگان آن را کاهش داد.از این پس می‌توان کار انتخاب دانشجو برای دانشکده‌های معروف و دانشکده‌های مناطق محروم را به خود آنان واگذاشت.بدین ترتیب تعداد داوطلبان کنکور دانشگاههای متوسط کاهش می‌یابد.پس می‌توان راه را برای برگزاری کنکور مرحلهٔ دومی که سؤالات آن تشریحی باشد هموار ساخت.حال می‌توان در کنکور، سؤالات مشکل ریاضی را که تأثیر فراوانی بر بهبود روش تدریس ریاضی و افزایش شور و شوق دانش‌آموزان مدارس خواهد داشت، مطرح کرد.

حال به مدرسین بپردازیم.کمبود مدرس اکنون بسیار محسوس است و در دهه‌های آتی نیز این کمبود برطرف نخواهد شد.مسألهٔ مورد توجه ما چگونگی جذب مدرس به نقاط محروم کشور است.پس از انقلاب ازیک سو دانشگاههای مناطق محروم گسترش یافت و در این مناطق دانشگاههای جدیدی دایر شد و از سوی دیگر مزایای مدرسین این مناطق افزایش یافت.با وجود این، مناطق محروم در جذب مدرس موفق نبودند.گذشته از آن، شهرستانها محیط رخوت باری است و در آن تحرک علمی دیده نمی‌شود.

کمبود اعضای هیأت علمی، نتیجهٔ نارساییهای بسیاری است.به نظر من بیش از صد تن ایرانی با درجهٔ دکتری ریاضی در آمریکا به کار مشغول‌اند که وضعیت شغلی اکثر آنها جالب نیست.در مورد اینکه چرا اینان کار در خارج را به زندگی در ایران ترجیح می‌دهند، سخن بسیار گفته‌اند.سؤالی که مطرح می‌کنیم این است که چرا دولت در موقع عقد قرارداد با کسانی که می‌خواهند به خرج دولت در خارج درس بخوانند دقت لازم مبذول نداشته است.درایران هزینهٔ تحصیلی در خارج را به صورت خلعت و انعام می‌پردازند، نه به عنوان بخشی از یک قرارداد.

مدرسین (در هر سطحی)، کارمند دولت هستند.در ایران اصولاً زندگی کارمندی دشوار است.درمیهن ما پول از طریق «معامله» به چنگ می‌آید، نه «کار».از این رو کارمندان و از جمله مدرسین در فکر معامله و شغل آزادند.گذشته از این، صاحبان مشاغل آزاد بیش ازکارمندان احساس امنیت شغلی می‌کنند زیرا در مقابل تورم مصونیت بیشتری دارند.با افزایش حقوق

کارمندان نیز وضع آنان بهتر نمی‌شود.

اکنون که خیلیها در جامعه ما ثروتمندند، وزارتخانه می‌تواند با افرادی که داوطلب اخذ مدرک بالای علمی از خارج کشورند به مذاکره بنشیند و فقط بخشی از هزینهٔ تحصیلی آنها در خارج را بپردازد.با این اقدام، دولت قادر خواهد بود تعداد بیشتری محصل به خارج اعزام دارد و از خلف وعدهٔ آنان زیان کمتری ببرد.

یک راه متداول در(سطح جهانی)برای کاستن از مشکل کمبود مدرس، استخدام استادان خارجی است.هر چند باید بخشی از حقوق اینان را به صورت ارز پرداخت، ولی در این مورد بر خلاف دانشجویان اعزامی با خلف وعده روبرو نخواهیم شد.گذشته از اینها، با به کارگماردن اینان در دانشگاههای ایران ممکن است دقت و وجدان کار خارجیها به جوانان ما منتقل شود.

برگردیم به مدرسین دانشگاههای توسعه نیافته.همان طور که گفتیم مشکل مدرسین این دانشگاهها تا چند دههٔ دیگر باقی می‌ماند.برای کاستن از شدت این مسائل می‌توان تا اندازه‌ای برنامه‌های توسعه را تعدیل کرد.

چندی است که برای کمک به دانشگاههای مناطق محروم قرار بر آن نهاده‌اند که استادان پیش از استفاده از فرصت مطالعاتی، یک نیمسال در چنین دانشگاهی به تدریس بپردازند.این کار ثمر چندانی ندارد چون اینها معمولاً به شهرهایی می‌روند که راههای ارتباطی متعددی به تهران داشته باشد.در طی ده سال اخیر تنها یک مربی، برای رسمی شدن، به مدت دو سال آن هم هفته‌ای سه روز به گروه ریاضی دانشگاه رازی باختران آمد.

هم اکنون در دانشگاههای توسعه نیافته، تدریس دروس اختصاصی توسط مربیان و به ندرت توسط استادیاران بی تجربه صورت می‌گیرد.برای برطرف کردن مشکلات این امر می‌توان شیوهٔ زیر را در پیش گرفت :

هرگاه مدرسی، داوطلب تدریس یک، درس اختصاصی شود یا از سوی دانشگاه چنین چیزی از او خواسته شود، دانشگاه او را در انجام این مهم یاری دهد و امکان ارتباط او را با استادان فن فراهم آورد.برای آنکه در دانشگاههای توسعه نیافته وضعیت این دروس سروسامان یابد، در مورد تهیهٔ سؤالات امتحانی، همیاری شود و در ضمن، نشریاتی (حتی به صورت دست نویس و پلی کپی) در مورد امتحان دروس مختلف اختصاصی منتشر شود.انتشار یکی دو شماره در سال کافی است.بدین گونه معیاری برای تدریس این دروس فراهم می‌شود و دشواریهای کار مطرح می‌گردد.در این صورت است که برنامهٔ وزارتخانه معنی و مفهوم پیدا خواهد کرد.

به مدرسی که تخصص او در یک درس اختصاصی محرز شده است، گواهینامه‌ای داده شود.بدین گونه ما نیز مانند سایر وزارتخانه‌ها «آموزش حین خدمت» خواهیم داشت.دراین صورت لازم است که آیین نامهٔ شرح وظایف و ارتقای مربیان مورد تجدیدنظر قرار گیرد.

آیین نامه‌های وزارتخانه، کارها را «ساعتی» (به اصطلاح کیلویی) تقسیم کرده است. دردانشگاههای مناطق محروم، مربیی در هفته شش ساعت به تدریس ریاضیات عمومی وحل تمرین آن می‌پردازد، تعداد دانشجویان هم متجاوز از ۵۰ نفر است و دانشجویان اشکالات درسی بسیار دارند.از نظر وزارتخانه ، اداره کردن این کلاس فقط ۵٫۳۳ واحد آموزش به حساب می‌آید، که این معادل شش ساعت تدریس زبان یا ادبیات در دانشکدهٔ علوم است.

در بدو امر ممکن است طرح چنین مسائلی، کاری «سبک» به حساب آید، زیرا استاد باید تمام وقت خود را به تحقیق و مطالعه و تدریس بگذراند.ولی این امر در صورتی درست است که ساعات تدریس کم و وضعیت کلاس به نحوی باشد که استاد را بر سر شوق آورد.دراین مورد واقعاً باید تصمیمی گرفته شود تا مدرسین ریاضی خود را مغبون نیابند.

یکی از بهترین روشها برای تحرک بخشیدن به دانشکده‌های ریاضی، وادارکردن افراد (دانشجو و مدرس) به « نوشتن » است.امروزه (در سطح جهانی) محققین و استادان، ساعات زیادی از اوقات کار خود را به «نوشتن» می‌گذرانند.

بسیاری از مدرسین ما از نوشتن هراس دارند.اولین دلیل این امر آن است که ما کتاب را موجودی «مقدس» می‌دانیم.علت دیگر هراس ما از نوشتن آن است که می‌خواهیم به یکباره کتابهایی در حد آنچه در کشورهای بزرگ صنعتی نوشته شده بنویسیم و «سیاه مشق» های غربیها از چشم ما به دور مانده یا آنها را نادیده می‌انگاریم. هندیها با مسألهٔ «نوشتن» برخورد جالبی دارند.هر چند زبان علمی هند، انگلیسی است و در این کشور شرکتهای بزرگ بین المللی اقدام به نشر کتابهای علمی می‌کنند، خود هندیها هم به نگارش کتاب می‌پردازند.

با شروع انقلاب فرهنگی (در سال ۱۳۵۹) نهضتی برای ترجمهٔ کتب درسی ایجاد شد وکتابهای بسیاری توسط مدرسین دانشگاهها ترجمه شد.ولی مایهٔ تأسف است، که به ندرت کتابی که توسط مدرسین دانشگاههای توسعه نیافته ترجمه شده باشد، چاپ شد.همکاران من با تأثر می‌گویند :«اگر ما کتابی را ترجمه کنیم کسی به آن توجه نمی‌کند، آدم باید در تهران کار کند تا کارش مورد توجه قرارگیرد.»

اما دربارهٔ مدیریت، به خوبی می‌دانم که مدیریت دانشگاهها را نباید با مدیریت امور اداری اشتباه گرفت.به طور کلی هر مدیری باید با مراحل مختلف کار آشنا باشد. سخن کوتاه «چه خوش باشد که آدمی از سربازی به سرداری برسد.» رئیس دانشگاه بهتر است که از علوم و فنون مختلف اطلاع داشته باشد، تا بتواند در بین استادان و دانشجویان نفوذ معنوی کسب کند.نباید به خاطر مشکلات مدیریت دانشگاههای توسعه نیافته، افراد کم صلاحیت را به مدیریت این دانشگاهها برگزینند.

یک مدیر (یک رئیس گروه) کم تجربه و فاقد صلاحیت می‌تواند موجب دلسردی دانشجویان و کارکنان دانشگاه شود.

آیا وزارتخانه می‌تواند در آیندهٔ نه چندان دوری تعداد کافی «رئیس» مناسب برای دانشگاهها تربیت کند؟به نظر من جواب مثبت است.افراد بسیاری داوطلب «ریاست»اند، وزارتخانه می‌تواند اقدام به تربیت اینان کند.مسألهٔ بعدی گسیل داشتن پاره‌ای از اینان به مناطق محروم است.مسأله این است که چگونه اینان می‌توانند از تهران دل برکنند و به شهرهای دیگر بروند؟پاسخ به این سؤال در گرو روشن شدن «قضیهٔ تهران» است.واقعاً باید روشن شود که چرا می‌خواهند در تهران کار کنند؟

۴

اکثر مردم اذعان دارند که از انجام کارهایی که در حیطهٔ تخصصشان نیست عاجزند. فی‌المثل یک دبیر شیمی ممکن است خیلی صریح بگوید که نمی‌تواند مسألهٔ هندسه حل کند.ولی معمولاً مردم خود را در ارائهٔ برنامه‌های مهم و بزرگ توانا می‌یابند.هر کس حاضر است خیلی راحت راجع به برنامهٔ اقتصادی ـ اجتماعی و برنامه‌های آموزشی اظهارنظر کند و حتی برنامه‌ای ارائه دهد.من در مورد مناسب بودن و قابل اجرا بودن برنامه‌ای که ارائه می‌دهم

ادعایی ندارم و به خوبی می‌دانم که از مسائل بسیاری بی‌اطلاع هستم.یقیناً مسؤولان آموزش عالی، رؤسای دانشکده‌ها و برنامه‌ریزان، درگیر مسائل بسیاری هستند که حتی درک برخی از آنها از عهده من خارج است.پس آنچه می‌آید، صرفاً یک اظهارنظر است و بس.

برنامهٔ موجود را نباید کاملاً مردود دانست.این برنامه، نتیجهٔ مشاوره ومذاکرهٔ جمعی از استادان ایرانی است و بدون اعمال نظر بیگانگان فراهم آمده است.اکنون سالهاست که مدرسان دانشگاه به آن عادت کرده‌اند.به نظر من هر تغییری که بخواهد در آن صورت گیرد باید تدریجی باشد.

حال ببینیم برنامه برای چیست و ویژگیهای اساسی آن کدام است.برنامه برای آینده‌نگری است، برای آن است که آینده را تا آنجا که در توان داریم بهتر ترسیم کنیم.برنامه شبیه موجود زنده است.برای خوب بودن آن باید نطفهٔ آن خوب منعقد شود.به موقع متولد شود و مانند یک موجود زنده بتواند خود را با تغییرات شرایط، سازگار سازد و قادر به تولید مثل باشد و روزی نیز صحنهٔ هستی را ترک کند.

برای یک برنامه‌ریزی، اولاً باید بدانیم که چه داریم و ثانیاً باید درک کنیم که چه چیزهایی می‌توانیم داشته باشیم.تا اینجا، مسأله شبیه مسائلی است که در درس «تحقیق در عملیات» می‌آید.ولی در آنجا داده‌ها را به ما می‌دهند اما دراینجا اخذ داده‌ها تا اندازه‌ای دشوار است.بسیاری از اطلاعات مورد نیاز ما پیچیده‌تر از آن‌اند که به سادگی در چارچوب آمار و ارقام بیان شوند.از اینجاست که به اهمیت «گزارش نویسی» پی می‌بریم.با گزارش نویسی است که اطلاعات و تجربیات مختلف به دست عموم و به خصوص برنامه‌ریزان می‌رسد.ولی متأسفانه ما گزارش کم داریم، خیلی کم. همچنین برای تهیهٔ برنامه مناسب ، باید گزارشهایی از کشورهای دیگر نیز فراهم آوریم.حال به اصل مطلب بپردازیم.

به گمان من در هیچ جای دنیا برنامه‌ای چنین گسترده وحاوی درسهای مختلف ارائه نشده است.از این رو من با توجه به فقدان امکانات، از یک برنامهٔ حداقل دفاع می‌کنم .به علت ضعف دانشجویان، برنامه‌ای را مناسب می‌دانم که امکان بازآموزی آنان را فراهم سازد.از آنجا که اکثر دانشجویان امکان آن را نداشته‌اند که خود را بشناسند لازم می‌دانم که تعداد واحدهای اختیاری افزایش یابد و دانشجویان بتوانند از هرگروه یادانشکده‌ای به انتخاب درس بپردازند.از آنجا که هرکس لازم نیست همه چیز را بداند، بسیاری از دروس اختصاصی کنونی را می‌توان حذف کرد.برای درهم شکستن پاره‌ای تصورات و برخی روابط نادرست در مورد امتحانات و برای اینکه سؤالات امتحان صرفاً به وسیلهٔ یک فرد (که همان مدرس باشد) طرح نشود بهتر است وزارتخانه در برگزاری امتحانات در پاره‌ای از مقاطع تحصیلی دخالت کند.

هر چند دلیلی وجود ندارد که تعداد واحدهای درسی دانشجویان دوره‌های مختلف کارشناسی یکسان باشد و تعداد واحدهای موجود نیز برقرار باشد، برنامه را بر اساس ۱۴۴ واحد (فعلی) پیشنهاد می‌کنم.دورهٔ کارشناسی را به دو مقطع تقسیم می‌کنیم و برای هر مقطع ۷۲ واحد منظور می‌کنیم.برای هر دوره ۱۲ واحد دروس عمومی (جمعاً ۲۴ واحد) در نظر می‌گیریم.در طی مقطع اول، دانشجو فرصت بازآموزی دروس دبیرستانی را خواهد داشت و مهارتهای لازم را برای فراگرفتن دروس تخصصی کسب خواهد کرد.در اینجا فقط برای تشریح محتوای دروس، به ذکر نام چند کتاب پرداخته‌ایم.ولی بهتر است که خود مدرسین با تهیه یادداشتهای درسی، قدم در راه فراهم آوردن جزوات مفید بگذارند.امروزه امکان انجام دادن چنین کارهایی فراهم است.

برنامهٔ دو سالهٔ اول

۱. ریاضیات عمومی (۱۶ واحد)

در اینجا ریاضیات مورد استفاده در فیزیک عمومی مطرح می‌شود.باید تأکید بر مطالب شهودی و محاسباتی باشد.در این درس مقدمات «آنالیز عددی» و «معادلات دیفرانسیل» و «معادلات با مشتقات جزئی» مطرح می‌شود. ازاین‌رو، دروس فوق را از برنامه حذف می‌کنیم (در حد کتاب پیسکونف).

۲.فیزیک عمومی(۱۶ واحد ، ۱۴ واحد نظری و ۲ واحد آزمایشگاه).

در این درس باید مطالب شهودی فیزیک به خوبی تشریح شود و تمرینات بسیاری حل شود. (در حد کتاب هالیدی).

۳.آنالیز مقدماتی(۹ واحد)

در اینجا مقدمات «نظریهٔ مجموعه نقاط» عنوان می‌شود و قضایای اساسی «حساب دیفرانسیل و انتگرال» ثابت می‌شود.و درکلاس باید تمرینات بسیار مطرح شود.

۴.جبر و نظریهٔ اعداد(۷ واحد)

در اینجا مطالبی در حد جبر ۱ کنونی توأم با نظریهٔ اعداد عنوان شود.

۵.جبر خطی(۶ واحد)

در حد جبر خطی ۱ کنونی.با تأکید بر تمرینات.

۶.دروس اختیاری(۶ واحد)

این درس می‌تواند مبانی کامپیوتر یا آمار و احتمال باشد.در ضمن دانشجو می‌تواند هر درس دیگری از هر دانشکده‌ای اختیار کند.

برنامهٔ دو سالهٔ دوم

۱.آنالیز(۹ واحد)

در حد کتاب آنالیز رودین

۲.جبر(۹ واحد)

در حد جبر ۲ و ۳ کنونی

۳.توابع مختلط(۶ واحد)

در حد کتاب چرچیل

۴.جبر خطی(۴ واحد)

در حد جبر خطی ۲ کنونی

۵.هندسهٔ دیفرانسیل(۶ واحد، برای گرایش محض و فیزیک)

در حد درس هندسهٔ دیفرانسیل کنونی

۶.تاریخ و فلسفهٔ ریاضی(۶ واحد، برای رشتهٔ دبیری)

در حد کتاب تاریخ ریاضی هاورد وایوز

برای گرایش محض باید قریب ۱۰ واحد از یک شاخهٔ ریاضی مانند معادلات دیفرانسیل، آنالیز، یا جبر و برای گرایش فیزیک نیز تا آنجا که مقدور است از یک شاخه مطالعه کنند.از آنجا بر این ۱۰ واحد تأکید شده است که دانشجو اطلاعات خوبی در یک زمینه به دست آورد و مدرس نیز بتواند به زنده نگاهداشتن دانش خود بپردازد. دانشجو مختار است بقیهٔ دروس را به دلخواه خود اختیار کند.

هوشنگ شکرانیان
گروه ریاضی ـ دانشگاه رازی ـ کرمانشاه

NASHR-I RYAZY

A Mathematics Journal of Iran University Press

Volume 4, Number 3

Nashr-i Ryazy is published by Iran University Press, three times a year: April, August, and December. The main objectives of the Journal are to present:

- new advances in mathematics;
- cultural, philosophical, and historical aspects of mathematics, as well as its applications;
- educational problems of mathematics, specifically those concerning higher education in Iran.

Some of the articles in each issue are written by Iranian mathematicians, and some are translations of expository articles selected from foreign sources.

The annual subscription rates including air mail postage are: Middle East £ 18, Europe & Asia £ 20, North America & Far East £ 25.

To subscribe, please send your name, address, and a check to Iran University Press, 85 Park Avenue, Tehran 15134, Iran.

Executive Editor
S. Shahshahani
Editorial Board
S. Kazemi
S. Shahshahani
Y. Tabesh

ISSN 1015-2857

مرکز نشر دانشگاهی منتشر کرده است