نشریه فنی

سال ۴، شمارهٔ ۱ و ۲، مرداد ۱۳۷۰

مرکز نشر دانشگاهی

بسم‌الله الرحمن الرحیم

نشر ریاضی

مجلهٔ ریاضی مرکز نشردانشگاهی

شمارهٔ ۸۵ خیابان پارك خیابان دکتر بهشتی، تهران ۱۵۱۳۴

بهای هر شماره ۶۰۰ ریال
حق اشتراك سالانه برای داخل کشور ۱۸۰۰ ریال

وجه اشتراك به حساب شمارهٔ ۹۰۰۰۹ بانك ملی شعبهٔ خیابان پارك تهران به نام مرکز نشردانشگاهی واریز شود.

نشرریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشردانشگاهی است که هر چهار ماه یك بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توجّه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی پژوهان فارسی زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشرریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می کند. مقاله‌های ارسالی باید در چهارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبك مقاله‌های چاپ شده در *نشرریاضی* باشد. به همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حك و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشردانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یك طرف کاغذ، یك خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ شدهٔ در *نشرریاضی* باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

سال ۴، شمارهٔ ۱ و ۲، مرداد ۱۳۷۰

مدیر مسؤول: سیاوش شهشهانی

● مسؤول فنی: فرید مصلحی

● طراح و صفحه‌آرا: آزاده اصغری

● ناظر چاپ: علی صادقی

با همکاری لاینوترون مرکز انتشردانشگاهی

لیتوگرافی: کیان

چاپ و صحافی: منفرد

فهرست

روی جلد

برگرفته از روی جلد کتاب

The Mathematical Experience

ر. ك. «تجربهٔ ریاضی»

چشم‌انداز دههٔ ۷۰

اگر در آغاز دههٔ ۶۰ می‌خواستیم چشم‌اندازی از ریاضیات ایران در آن دهه رسم کنیم، چیزی جز یأس، ابهام، و آرزوهای تحقق نیافته در پیش چشم خود نمی‌دیدیم. دانشگاهها تعطیل بود. صحبتی در میان بود که دوره‌های کارشناسی ارشدِ موجود تعطیل شوند و این دوره به تمامی در یك دانشگاه جدیدالتأسیس متمرکز شود. یکی از مسؤولان برنامه‌ریزی ریاضی ستاد انقلاب فرهنگی هشدار داده بود که «ریاضیات محض، میراث استعمار است». از سوی دیگر، هیولای خوفناكِ جنگ تحمیلی سرمایه‌های جوان این مملکت را در خود می‌بلعید و تردد مغزها و متخصصان نیز به‌صورت جریانی یکطرفه از ایران به سوی خارج درآمده بود.

در آن زمان چه کسی از ما می‌توانست پیش‌بینی کند که در آغاز دههٔ ۷۰ به جمعبندی مثبتی از دههٔ پرفرازونشیب ۶۰ برسیم؟ امروز با نگاهی به دههٔ ۶۰ می‌بینیم که برنامهٔ دکتری ریاضیات صرفنظر از کیفیت و مشکلات فعلیش در چند دانشگاه به راه افتاده و فارغ‌التحصیلانی نیز داشته است؛ دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد ره چند ده ساله پیموده‌اند؛ در اولین سال از دههٔ ۷۰ تیم المپیاد ریاضی ایران در میان ۵۶ کشور که همهٔ کشورهای مدعی را در بر می‌گیرد به مقام هشتم در جهان نائل شده است.

بعضیها ممکن است ارزیابی ما از موفقیت دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد را نادرست بخوانند و صحبت از دانشجویانی به میان آورند که با زمینهٔ ضعیف به مقاطع گوناگون تحصیلی راه می‌یابند و کششِ گذراندنِ برنامهٔ رسمی دوره‌ها را ندارند. در پاسخ می‌گوییم که با توجه به افزایشِ سریعِ تعداد دانشجویان، نمی‌توان انتظار داشت که میانگین کیفیت پابه‌پای کمیت به پیش بتازد. در نظام تولید انبوه با هدفهای متنوع، میانگین کیفیت شاخص دقیقی از کارایی نظام نیست. به‌خصوص وقتی که بحث آیندهٔ یك علم در کشور مطرح است، میانگین کیفیت ده درصد بالا بسیار گویاتر از میانگین کیفیت کل جمعیت است و با در نظر گرفتن این معیار، می‌شود گفت که دوره‌های کارشناسی ارتقای کیفی یافته‌اند. شاهدی بر ادعای ما، سطحِ بالاترِ سؤالاتِ کنکورهای دورهٔ کارشناسی ارشد و مسابقات ریاضی کشور در چند سال اخیر نسبت به آزمونهای مشابه در دههٔ ۵۰ است. واقعیت غیرقابل انکار این است که در تاریخ ریاضیات کشورمان در دوران معاصر، هیچگاه این تعداد فارغ‌التحصیل مجرب و توانمند از دانشگاهها بیرون نیامده‌اند.

اکنون در آغاز دههٔ جدید، با توجه به تجربیات گذشته و ارزیابی وضع موجود، چشم‌انداز ده سال آینده چگونه است؟ آیا بهتر بودنِ وضع در آغاز دههٔ جدید نویددهندهٔ موفقیتهای بی‌سابقه در ده سال آتی است و یا آنکه باید انتظار داشت خوشبینی و امید به یأس و دلسردی بینجامد؟ البته کار ما پیشگویی نیست و هدف ما از مطرح کردن این سؤال، جستجو برای یافتن مسائل اساسی و تشخیص عوامل پیش‌برنده و بازدارنده‌ای است که در سر راه قرار دارند. در بررسی دههٔ گذشته، سه عامل مثبت را می‌توان نام برد. اول اینکه تدبیرهای هوشمندانهٔ وزارت آموزش و پرورش توانست روندِ بی‌اعتناییِ فزایندهٔ دانش‌آموزان را نسبت به رشته‌های وابسته به ریاضیات متوقف سازد و در آنها گرایش و علاقه به‌وجود آورد به‌طوری که اکنون نیروی جوان بسیار مستعدی به این رشته‌ها روی می‌آورد. دوم اینکه، تعیین حداقل مواد درسی به‌وسیلهٔ کمیته‌های برنامه‌ریزی در شورای انقلاب فرهنگی و وزارت فرهنگ و آموزش عالی، و برقراری آزمون سراسری برای ورود به دورهٔ کارشناسی ارشد، دست‌کم استاندارد مشخصی برای آموزش در دورهٔ کارشناسی پدید آورد، و بالاخره، ایثار، نوآوری، و پایمردی بسیاری از اعضای هیأت علمیِ ریاضیِ دانشگاهها، علی‌رغم مشکلات گوناگونی که گریبانگیر این قشر بود، این مهم را میسر ساخت که امکانات بالقوه به طرز آبرومندانه‌ای جامهٔ عمل بپوشد.

در دههٔ ۷۰ مسائل عمدهٔ ما چیست و نقاط قوت و ضعف کدام‌اند؟ بی‌شك می‌توان فهرست طویلی از مشکلات و نارساییها ذکر کرد. مراکز آموزش عالی ما مسائل متنوعی دارند و هریك به فراخور وضعیت خود، با یك مسألهٔ عمده درگیرند. با این حال ما براین باوریم که یك مسأله یا دو مسألهٔ مرتبط به هم را می‌توان به عنوان مسألهٔ اساسیِ دههٔ ۷۰ مطرح کرد و آن، برنامهٔ دکتری ریاضیات و تحقیقات ریاضی در ایران است. انتخاب این موضوع به جهات زیر است:

(۱) دیر یا زود، موفقیت کشور ما در عرصهٔ ریاضیات با محک نهایی آن یعنی تولید علمِ جدید سنجیده خواهد شد نه با ارزیابی فارغ‌التحصیلان دورهٔ کارشناسی یا پیروزیهای تیم المپیاد. درخشش جوانان ما موجب سربلندی و افتخار ماست ولی پیام واقع‌بینانهٔ آن این است که امکان بالقوه برای ظهور ریاضیدانان برجسته در این کشور فراهم آمده است و اکنون وظیفهٔ ماست که این امکان را به تحقق برسانیم. هرگونه کوتاهی در این راه، چه از سوی دانشگاهیان و چه از جانب مقامهای ذیربط، تهی انگاشتن شعار خودکفایی علمی است. اکنون که هریك از مراحل نظام آموزشی کشورمان تا آغاز مرحلهٔ دکتری، جوانانی مستعد و پر از شور و اشتیاق را تحویل مرحلهٔ بعد می‌دهد، چنانچه به این حسن استقبال و شور و ذوق پاسخ شایسته‌ای در مرحلهٔ به ثمر رسیدن داده نشود، نهالی که با سالها دلسوزی و مراقبت پرورانده شده خشك خواهد شد و جاذبه‌ای که به تازگی نصیب رشتهٔ ما شده به سرعت از بین خواهد رفت.

(۲) غرض ما این نیست که مشکلات سایر مقاطع تحصیلی نادیده گرفته شود. نکته اینجاست که تجربهٔ ما و دانشگاههای ما در دورهٔ جدیدالتأسیس دکتری بسیار اندك است و مشکلات در حدی است که فقط توجهات ویژه در همین سالهای آغازین می‌تواند این دوره را از خطرِ انحطاط مصون نگهدارد. کمبود نیروی انسانی مدرس و محقق در این دوره را نمی‌توان فقط با پرداختن حق‌التدریس و حق‌التحقیق کلان تأمین کرد، کمبودهای کتابخانه و ارتباطات بین‌المللی را نمی‌توان با بودجه‌های ارزی موجود برطرف کرد، و بالاخره دستگاههای اداری و دیوانسالاری دانشگاهها را نمی‌توان به سادگی به انعطاف لازم برای حل مسائل این دوره عادت داد. برای غلبه بر این مشکلات تدابیر ویژه‌ای لازم است.

(۳) هرچند که در حال حاضر تعدادِ به نسبت قلیلی دانشگاه مجری برنامهٔ دورهٔ دکتری ریاضی هستند، موفقیت یا شکست این دوره تأثیرات بسیار محسوس و عمیقی بر کل نظام آموزش عالی خواهد گذاشت. واضحترین فایدهٔ عمومیِ این دوره، پرورش مدرس و محقق برای مؤسسات آموزش عالی کشور است. فارغ‌التحصیلان داخلی به سبب دلبستگی بیشتر به زادگاه خود و پیوندهای نزدیکتری که با آن دارند بیشتر از فارغ‌التحصیلان خارج راغب به خدمت در نقاط گوناگون کشور خواهند بود. امکان رسیدن به بالاترین درجهٔ علمی در داخل کشور انگیزهٔ تازه‌ای برای کوشش در ادامهٔ تحصیل به همهٔ دانشجویان کشور خواهد بخشید. سطح انتظار دانشجو و استاد در همهٔ مراحل آموزشی بالا خواهد رفت. امکانات پژوهشی و ارتباطات علمی بین‌المللی که لازمهٔ یك دورهٔ دکتری سالم است می‌تواند و باید در اختیار محققان همهٔ مراکز آموزش عالی قرار داده شود. می‌توان تدابیری اتخاذ کرد که با برقراریِ مشارکت و همکاری بین دانشگاهها، محققانِ مؤسساتی که مجوز تأسیس دورهٔ دکتری ندارند عملا در برنامه‌های موجود همکاری داشته باشند، دانشجوی دورهٔ تحقیق بپرورانند، و از امکانات پژوهشی استفاده کنند.

(۴) با تأسیس دوره‌های دکتری، ضرورت پژوهش در ریاضیات به صورتی جدیتر از سابق مطرح می‌شود. در گذشته، آگاه ساختن بعضی از مسؤولان از اهمیت پژوهش بنیادی در علوم پایه و به‌خصوص در رشته‌های نظری دشوار بود، و اکنون نیز که آگاهی بیشتری در این زمینه حاصل شده است، نحوهٔ ترویج، تشویق، و ارزیابی پژوهشهای نظری مسائل و مجهولاتی در بر دارد که برای حلِ اسلوبمندِ آنها تجربه و دانش کافی نداریم. به‌خصوص ارزیابی کیفیت پژوهش ریاضی در ایران به سبب پراکندگی تخصصها، نوپایی جریانِ پژوهش، و قلت تعداد پژوهشگران تاکنون عملا مسکوت مانده است. آیا باید سعی کرد نوعی تمرکز رشته‌ای در تحقیقات ریاضی در ایران پدید آورد، و یا این تمرکز به‌طور طبیعی با راه افتادن تحقیقات دورهٔ دکتری و گسترشِ پژوهش پدید خواهد آمد؟ آیا باید در حال حاضر هر نوع کوشش در امر پژوهش را صرفنظر از کیفیت آن تشویق کرد و یا اینکه باید از هم‌اکنون به ارزیابیِ کیفی پایبند بود؟ وقت آن رسیده است که اینها و بسیاری سؤالهای ذیربط دیگر در جامعهٔ ریاضی و نهادهای هدایت‌کنندهٔ تحقیقات مورد بحث جدی قرار گیرند.

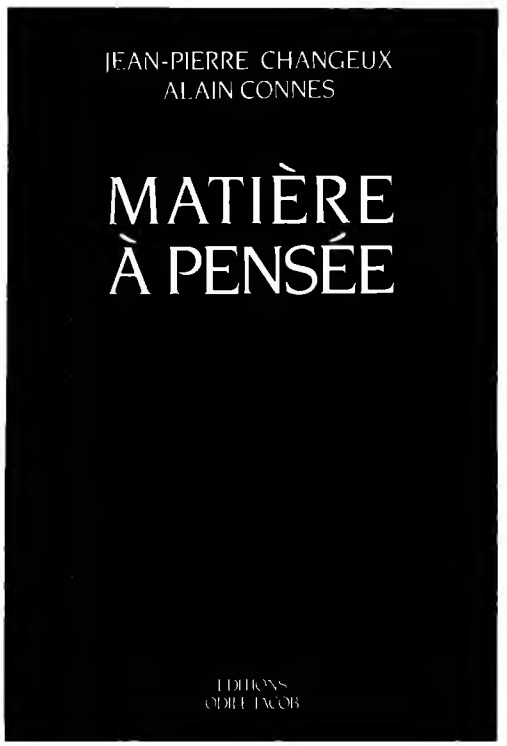
در این نوشته جای آن نیست که به تفصیل دربارهٔ مسائل دورهٔ دکتری و تحقیق بحث کنیم. در گذشته مطالبی در این زمینه چاپ کرده‌ایم و امیدواریم در آینده نیز این کار را ادامه دهیم. تنها اشاره‌ای کوتاه به مشکل تازه‌ای می‌کنیم که ممکن است سد عظیمی در برابر کوششهایی که برای تقویت پژوهش در دورهٔ دکتری صورت می‌گیرد، ایجاد کند. سالها جامعهٔ علمی ما از نعمت ارز خارجی ارزان‌قیمت بهره برده است و هرچند که کسب اعتبار ارزی خود کار آسانی نبوده ولی تأمین معادلِ ریالی آن معمولا خارج از توان دانشگاهها، مؤسسات پژوهشی و پژوهشگران نبوده است. اکنون که دولت بنا به ملاحظات اقتصادی تصمیم به یکسان کردن نرخهای گوناگون ارز گرفته است، جامعهٔ علمی ما توان تحمل ضربه‌ای را که افزایش نرخ ارز بر کلیهٔ شؤونِ ارتباطات علمی ما با خارج وارد می‌سازد ندارد. گزاف نگفته‌ایم اگر بگوییم که تحقیقات و دایر ساختن دورهٔ دکتری با کیفیت آبرومند در کشورمان تا سالها در گروی ارتباط خارجی گسترده خواهد بود. این ارتباط شامل تهیهٔ کتاب و نشریه، کامپیوتر، سفرهای علمی، دعوت دانشمندان از خارج و سایر فعالیتهایی است که همه نیاز به استفاده از ارز دارند. جامعهٔ علمی این انتظار طبیعی را دارد که بتواند دست‌کم در سطحی مشابه چند سال اخیر از ارز خارجی بهره‌مند شود.

جامعهٔ ریاضی ما در مقطع حساسی به سر می‌برد. اگر نیازهای اساسی آن برآورده نشود، تصویر خوشبینانه‌ای که از دههٔ ۷۰ رسم کردیم به رؤیایی واهی تبدیل خواهد شد و نسل جدیدی از ریاضیدانان که به سوی شکوفایی و ثمردهی قدم می‌گذارد در میانهٔ راه متوقف خواهد ماند.

هیأت ویراستاران

ماشینهای متفکر

مناظرهٔ ژان پیر شانژو و آلن کُن
ترجمهٔ احمد شفیعی ده‌آباد



کتاب *موضوعی برای تفکر* (*Matière à Pensée*) حاوی مناظره‌ای بسیار جالب بین ژان پیر شانژو نویسندهٔ کتاب *انسان نورونی*، عضو آکادمی علوم فرانسه و استاد کرسی ارتباطات سلولی در کلژ دو فرانس از یك طرف و آلن کن مؤلف *هندسهٔ دیفرانسیل غیرجابه‌جایی*، عضو آکادمی علوم فرانسه، استاد کرسی آنالیز و هندسه در کلژ دو فرانس و برندهٔ مدال فیلدز از طرف دیگر است. مسائل عمدهٔ مورد بحث کتاب اینها هستند: چه رابطه‌ای بین جهان فیزیکی و مغز آدمی وجود دارد؟ آیا موجودات ریاضی مستقل از ذهن آدمی هستند یا اینکه فقط حاصل فعالیت مغز آدمی‌اند؟ آیا می‌توان اخلاق را بر اصولی که مثل اصول ریاضی جهانشمول باشد مبتنی کرد؟ محور اصلی مطالب مورد بحث، این سؤال است که آیا می‌توان ماشینی ساخت که کارکرد آن شبیه کارکرد مغز آدمی باشد؟

آنچه در زیر می‌خوانید، ترجمهٔ فصلی از کتاب مذکور تحت عنوان ماشینهای متفکر است. بستگی این مطالب با مطالب دیگر کتاب به گونه‌ای نیست که نتوان بدون اطلاع از آن قسمتها این مطالب را خواند.

۱. ماشینهای هوشمند

ش: عنوان این گفتگو رابطهٔ مغز با ماشین و حتی کلیتر از آن، رابطهٔ علوم محض با مغز و کارکرد آن را مطرح می‌کند. دست کم سه رویکرد به موضوع ماشینهای متفکر می‌تواند وجود داشته باشد.

رویکرد اول، هوش مصنوعی است، که هدف آن تقلید از عملکردهای عالی مغز و هوش آدمی به کمك کامپیوتر است. در این رویکرد، می‌خواهیم نوعی ماشین را جایگزین مغز انسان سازیم. موفقیتهای هوش مصنوعی زیاد است: روباتهایی که اتومبیلها را رنگ می‌کنند، کامپیوترهایی که سفینه‌های فضایی را در مسیرشان تا مریخ و دورتر از آن هدایت می‌کنند، سیستمهای متخصص که جدیدترین پیشرفتهای پزشکی را آموزش می‌دهند، و غیره. هدف از هوش مصنوعی فهمیدن چگونگی کار مغز نیست، بلکه فقط تقلید بعضی از کارکردهای آن است. بنابراین، این رویکرد خیلی محدود است.

هدف رویکرد دوم، *ساختن مدل مغز آدمی* و عملکرد آن است. منظور، یك کار تحقیقی خیلی عمیق است که مستلزم داشتن معلومات عمیق در رشته‌های ریاضیات، فیزیك، نوروبیولوژی [عصب ـ زیست‌شناسی]، و روانشناسی است. در این مدلسازی، داده‌های تشریحی و فیزیولوژیك، نتایج بیولوژی ملکولی، و البته دستاوردهای روانشناسی و رفتارشناسی را به کار می‌گیرند. در این مسیر هنوز پیشروی زیادی نشده است. با وجود این، مدلهای به قدر کافی خوبی از چند مکانیسم مقدماتی در دست داریم: انتشار تکانهٔ عصبی (مدل هاجکین و هاکسلی) یا انتقال گیرنده‌های پس‌سیناپسی، سیستمهای متشکل از تعداد کمی سلول عصبی مانند سیستمهایی که در شنای مار ماهی دخالت دارند، گرفتن یك اطلاع دیداری به وسیلهٔ شبکیهٔ چشم مصنوعی، و بالاخره آواز یاد گرفتن پرندگان. فکر می‌کنم این رویکرد، مهمترین رویکرد باشد. و اگر در این مورد گفتگو می‌کنیم، شاید یکی از دلایلش آن باشد که هر دو می‌توانیم در این زمینه نظری داشته باشیم.

به رویکرد سوّم، *ماشینهای نورو ـ میمتیك*[1]، بپردازیم. طرح کار در این رویکرد از این قرار است: وقتی که مدل نظری عملکردهای دماغی بر پایهٔ مواد طبیعی که مغز و نورونهای آن را ساخته‌اند، تهیه شد، می‌خواهیم ماشینهایی بسازیم که بتوانند، بر پایهٔ سازه‌های عصبی واقعی، دارای رفتار هوشمندانهٔ درست باشند.

بنابراین، سه رویکرد، به موضوع وجود دارد ولی هنوز نتایج به دست آمده بسیار کم است. سازه‌های بکار گرفته شده بسیار ساده

1. neuro-mimétique

است: چند لایه از سلولهای عصبی، چند مکانیسم ابتدایی مقدماتی.

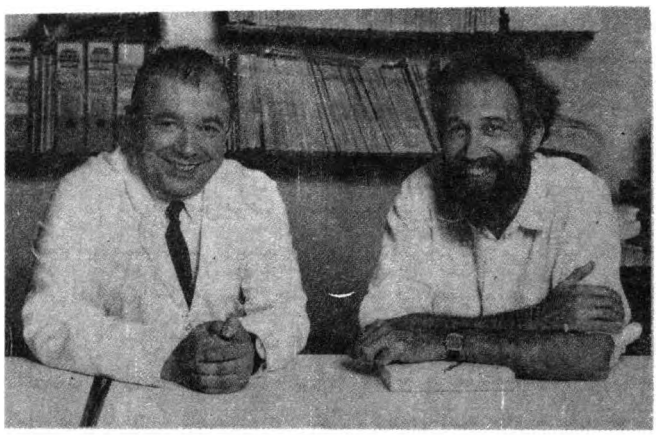
ك: آیا رویکرد دوّم وابسته به رویکرد سوّم است؟

ش: بله، رویکرد سوّم مکمل رویکرد دوّم است. برای اینکه نشان دهیم که یك مدل نظری مناسب است، باید آن را با ساختن ماشینی که کارکرد آن شبیه کارکرد مغز آدمی است «آزمود». بنابراین می‌توان گفت که واقعاً این رویکرد سوم مکمل دوّمی است.

حالا با هم به سه سؤال زیر بپردازیم که اوّلی مربوط به قضیهٔ گودل، دوّمی در مورد ماشین تورینگ، و آخری در مورد وجوه اختلاف و تشابه بین مغز آدمی و ماشینهایی است که بشر موفق به ساخت آنها شده است.

۲. قضیهٔ گودل

ش: در کتابهای بیولوژی، غالباً از قضیهٔ گودل برای تعدیل بلندپروازیهای نوروبیولوژیستها و یا حتی زیر سؤال بردن رویکرد آنها استفاده می‌شود. یعنی این قضیه برای توجیه این عقیده که «روح انسان» همیشه در برابر علم مقاومت می‌کند به کار می‌رود. به عنوان مثال، فرانسوا ژاکوب می‌نویسد: «می‌توان مطمئن بود که واکنشهای مشخص کنندهٔ فعالیت مغز چون واکنشهای مربوط به هضم غذا، از نظر بیوشیمیست‌ها موضوع پیش‌پا افتاده‌ای است. اما توصیف ادراکها، احساسها، تصمیمها، یا خاطرات برحسب مفاهیم فیزیکی و شیمیایی چیز دیگری است. نه تنها به دلیل پیچیدگی موضوع، بلکه به دلیل آنکه بنا به قضیهٔ گودل یك سیستم منطقی برای توصیف خودش کافی نیست، نشانه‌ای برای رسیدن به این هدف وجود ندارد.» در جهت عکس این گفته، این جملهٔ کوتاه کابانی را شنیده‌ایم که می‌گوید «مغز همان‌طور اندیشه تراوش می‌کند که کبد، صفرا». من شخصاً با نظر فرانسوا ژاکوب در زمینهٔ بیوشیمی مغز و خصوصیات نسبتاً سادهٔ ملکولهایی که در ساختمان و اعمال ابتدایی مغز دخالت دارند موافقم. داده‌های به دست آمده بعد از ۱۹۷۰ درستی این مطلب را نشان می‌دهد. اما با طرز استفادهٔ او از قضیهٔ گودل در علوم اعصاب موافق نیستم. اگر یك نوروبیولوژیست به مطالعه و بررسی مغزش درهنگام بررسی خودش بپردازد، مطمئناً یك مسألهٔ روش شناختی جالب می‌تواند مطرح شود. با وجود این در وضع کنونی علوم، به نظر من مانعی در راه بررسی کار مغز یك همکار به کمك روش تصویرسازی یا بررسی کار مغز یك حیوان از نوع نزدیك به انسان مثل میمون با روش نوروفیزیولوژی تجربی وجود ندارد. بدین دلیل که روش معروف به ساده‌سازی یا بهتر از آن، روش بازسازی که همگی در علوم تجربی به کار می‌بریم، جستجو برای یافتن توضیح در سطحی پایینتر از سطحی است که می‌خواهیم توضیح دهیم. بنابراین با تکیه بر قوانین برهمکنش خواصِ عناصری که سطح پایین را ساخته‌اند، خواص سطح بالاتر را توضیح می‌دهیم. بدین ترتیب نوروبیولوژیست‌ها در جستجوی پایه‌های عصبی عملکردهای عالی مغز آدمی هستند. و به نظر من در این مرحله هیچ مانع نظری وجود ندارد. موانع بزرگ به نظر من بیشتر در سازمان مغز، تفاوتهای آن از فردی به فرد دیگر، و تداخل احتمالی وسائل مشاهده با خود عملکردهای مغز است. از طرف دیگر، این مسأله در فیزیك، یعنی در



راست: آلن کُن، چپ: ژان پیر شانژو

جایی که روش مشاهده می‌تواند با مشاهده‌شونده تداخل کند وجود دارد.

به قضیهٔ گودل برگردیم. می‌بینیم که بیان ریاضی آن در پارادوکس فلسفی زیر آمده است: «اپیمنید متفکر کرت می‌گوید: همهٔ کرتیها دروغگو هستند.» نمی‌توان تصمیم گرفت که این گزاره درست است یا غلط. بنابراین خود را در یك موقعیت تصمیم‌ناپذیر می‌یابیم. تو چه تعریفی از قضیهٔ گودل داری؟ چگونه آن را در علوم اعصاب و در حالتِ خیلی خاصِ مدلسازیِ عملکردهای دماغیِ مغزی که ریاضیات تولید می‌کند، به کار می‌بری؟

ك: تا آنجا که من می‌دانم گودل دو حکم اساسی در این مورد دارد که یك سیستم منطقی آن‌طور که فرانسوا ژاکوب می‌گوید، غیرممکن است برای توصیف خودش کافی باشد. اوّلی بیانگر آن است که اثبات سازگاری نظریهٔ مجموعه‌ها غیرممکن است. وانگهی این مطلب حتی برای هر نظریهٔ خیلی ابتدایی به شرط آنکه دارای اصول موضوع خیلی ساده‌ای باشد درست است. دیگری قضیهٔ عدم تمامیت است. برای بیان این حکم دوم مجبورم اول توضیح دهم که در یك دستگاه اصل موضوعی مثل نظریهٔ مجموعه‌ها، منظور از قضیهٔ تصمیم‌ناپذیر چیست. برای این منظور داستان کوتاهی نقل می‌کنم. در طول چندین سال هر پنجشنبه نزد یکی از دوستان ریاضیدان می‌رفتم که فکر می‌کرد قضیه‌ای را ثابت کرده است. او روی مسأله‌ای کار می‌کرد که نام یك ریاضیدان مجارستانی قبل از جنگ را دارد و آن این است که آیا می‌توان مجموعهٔ مرتب اعداد حقیقی را به وسیلهٔ یك خاصیت مشخص کرد یا نه. این مسأله تقریباً ۳۰ ماه آن دوست مرا به خود مشغول کرده بود و هر پنجشنبه وقتی به دیدنش می‌رفتم او یك راه‌حل این مسأله را مطرح می‌کرد و فکر می‌کرد جواب مسأله را یافته است، و هر دفعه مثل دفعه قبل عمل می‌کردیم. او جواب خود را غالباً به صورت نوشته شده ارائه می‌کرد. من اشتباه آن را جستجو می‌کردم. گاهی خیلی زود این اشتباه را می‌یافتم و زمانی بحث در مورد آن به هفتهٔ بعد موکول می‌شد. هر دفعه او از نو شروع می‌کرد و اثباتش را اصلاح و باز هم اصلاح می‌کرد. در حقیقت از همان اوّل می‌دانستم که هر اثباتی در این مورد ناممکن است. امّا این نکته را هم می‌دانستم که غیرممکن است با آوردن مثال

ناقض، اشتباهش را به او نشان دهم. چرا؟ چون در حدود سالهای ۶۰ ثابت شده که این مسأله تصمیم‌ناپذیر است. گاه در ریاضیات چنین وضعی پیش می‌آید. در این مورد واضح است که اگر به اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها یك اصل موضوع مناسب دیگر، مثل اصل موضوع پیوستار را بیفزاییم می‌توانیم نشان دهیم که جواب مسألهٔ بالا مثبت است. اما اگر یك اصل موضوع مناسب دیگر بیفزاییم می‌توان نشان داد که جواب مسأله منفی است. به عبارت دیگر، در این مورد اثبات حکم بدون افزودن اصل موضوع جدید به اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها ناممکن است. امّا برای من به همین اندازه غیرممکن بود که بدون افزودن اصل موضوعی اضافی به نظریهٔ مجموعه‌ها، که برای او مخالفت با آن بسیار ساده بود مثال ناقض برایش بیاورم. باید خوب فهمید که منظور از تصمیم‌ناپذیری چیست. تصمیم‌ناپذیری همیشه معنی دارد...

ش: ... در یك سیستم داده شده از اصول موضوع.

ك: دقیقاً همینطور است. یك گزاره تصمیم‌ناپذیر است هرگاه اضافه کردن درستی یا نادرستی آن گزاره به اصول موضوعی که با آنها سروکار داریم، آنسوی تناقض ممکن در نظریهٔ مجموعه‌ها به تناقض نیانجامد.

ش: بنابراین اصول موضوع داخل سیستم برای تصمیم‌گیری کافی نیست.

ك: بله، همین طور است. حالا می‌توانیم قضیهٔ عدم تمامیت گودل را بیان کنیم. این قضیه می‌گوید که در یك دستگاه اصل موضوعی که اصول موضوعش محدود باشد ـ تعداد این اصول هرچه باشد ـ و یا با یك روش بازگشتی مفروض داده شده باشد، همیشه سؤالاتی وجود دارد که نمی‌توان به آنها پاسخ داد، و تصمیم‌ناپذیر باقی می‌مانند، و اطلاعات در مورد آنها کافی نیست. به بیان دیگر، قضیهٔ گودل این حقیقت را آشکار می‌سازد که نمی‌توان تعدادی متناهی از اصول موضوع را به گونه‌ای انتخاب کرد که هر سؤالی تصمیم‌پذیر باشد. این مطلب به آن معنی نیست که نمی‌توان یك سؤال را بر پایه آنچه می‌دانیم تحلیل کرد، بلکه به آن معنی است که تعداد سؤالات جالب و جدیدی که باید جواب آنها را اضافه کرد بینهایت است. حالا معلوم می‌شود که چگونه باید قضیه گودل را فهمید. فکر می‌کنم درست نیست که از این قضیه نتیجه بگیریم قدرت ماشین انسانی محدود است. این قضیه فقط می‌گوید که با استفاده از تعدادی متناهی اصل موضوع نمی‌توان به همه چیز جواب داد. امّا اگر سؤالی تصمیم‌ناپذیر باشد، به شرط آنکه این مطلب ثابت شده باشد، می‌توان به آن جوابی نسبت داد و روند استدلال را دنبال کرد.

این به آن معنی است که هر سؤال تصمیم‌ناپذیر جدید بر حسب اینکه جواب مثبت یا منفی برایش انتخاب شود یك انشعاب پدید می‌آورد. جهانی که در آن زندگی می‌کنیم انشعابهای ممکن زیادی دارد. این دقیقاً همان چیزی است که قضیه می‌گوید. به محض اینکه جوابی به سؤال نسبت داده شد می‌توان جلو رفت و سؤالات دیگری مطرح کرد. سؤالات قبلی که پیش از این تصمیم‌ناپذیر بودند تصمیم‌پذیر می‌شوند. هر سؤال تصمیم‌ناپذیر یك انشعاب پدید می‌آورد و موجد یك انتخاب است. به عنوان مثال قضیهٔ پال کوهن در مورد فرض پیوستار به یك انشعاب منجر می‌شود: یا می‌پذیریم که بین عدد اصلی مجموعهٔ شمارای نامتناهی و عدد اصلی مجموعهٔ اعداد حقیقی هیچ عدد اصلی وجود ندارد و یا می‌پذیریم که ۳۶ عدد اصلی بین آنها وجود دارد. جواب اول به خاطر سادگیش پذیرفته می‌شود. امّا بسیار اهمیت دارد که انتخاب جواب در مورد سؤالاتی باشد که تا سرحد امکان ابتدایی هستند. و در حقیقت، سؤالاتی ساده‌تر از سؤالِ راجع به پیوستار وجود دارد.

ش: آیا در اینجا مانع نظریِ اساسی نمی‌بینی؟

ك: در حال حاضر در مورد چیزی جز مسألهٔ تصمیم‌ناپذیری صحبت نمی‌کنم. در برخورد با سؤالات تصمیم‌ناپذیر چون سؤال درباره پیوستار باید فرضی را پذیرفت که آنها را تصمیم‌پذیر سازد، و سپس نتایج این فرض را و ظرفیت آن را در روشن ساختن سؤالات دیگر آزمود. به عنوان مثال با به کار بردن فرض پیوستار ثابت می‌شود (این مطلب از مکو بودسکی است) که می‌توان به هر دنبالهٔ کراندار a_n از اعداد حقیقی یك حدّ $\lim_w(a_n)$ نظیر کرد به طوری که

حد بالای $(a_n) \leqslant \lim_w(a_n) \leqslant$ حد پایین (a_n)

و $\lim_w$ به طور اندازه‌پذیر به (a_n) بستگی داشته و با انتگرال تعویض‌پذیر باشد. این نتیجهٔ خیلی مهمی در ریاضیات است که من به کار می‌برم. وقتی که فرضی چون فرض پیوستار را می‌افزاییم بدیهی است که باید در مورد تصمیم‌ناپذیری آن یعنی در مورد دو مطلب زیر اطمینان داشته باشیم: از یك طرف، آن فرض نباید از اصول موضوع قبلی نتیجه شود (در مورد فرض پیوستار، این مطلب قضیه‌ای از پال کوهن است) از طرف دیگر نقیض آن فرض نیز نباید از اصول موضوع قبلی نتیجه شود (و این مطلب در مورد فرض پیوستار به وسیلهٔ کورت گودل ثابت شده است). در حقیقت همیشه این نتایج با فرض سازگار بودن نظریهٔ مجموعه‌ها ثابت می‌شود. امّا به نظر من درست نیست که قضیهٔ عدم تمامیت را برای محدود کردن مکانیسم فهم خود به کار بریم. باید درك کرد که انتخابهایی وجود دارد که باید انجام شود و نمی‌توان یك فرایند بازگشتی ارائه کرد که یك بار برای همیشه این کار را انجام دهد. این چیزی است که این قضیه می‌گوید.

ش: این یکی از جوابهای ممکن است. به نظر من این قضیه بیشتر در مورد کسب معرفت است تا در مورد عدم امکان منطقی یا اپیستمولوژیکی [معرفت‌شناختی]. بنابراین نوروبیولوژیست‌ها می‌توانند امیدوار باشند. دیر یا زود عملکرد مغز را خواهیم فهمید!

ك: این قضیه، محدوده‌ای برای ادراك تعریف می‌کند که به وسیلهٔ انتخابهای محدودی که تاکنون صورت گرفته معین می‌شود. هرچه تعداد این انتخابها بیشتر باشد این محدوده وسیعتر است. نباید این طرز فکر ایستا را داشت که لازم است یك بار برای همیشه تعدادی متناهی اصل موضوع وجود داشته باشد که به هر سؤالی پاسخ دهد. برعکس فهم ما پویاست. هر دفعه که نمو می‌کند می‌توانیم به سؤالات بیش از پیش جواب دهیم. در هر انشعاب جدید می‌توانیم یك انتخاب انجام دهیم به گونه‌ای که محدوده، گسترده‌تر شود. بدیهی است که نادرست است که فکر کنیم روزی همه چیز را خواهیم فهمید. این

مسألهٔ علم به طور کلی است. امّا نباید این قضیه سبب مأیوس گشتن ما گردد.

در حقیقت، عمیقترین شکل قضیهٔ عدم تمامیت گودل نشان می‌دهد که نمی‌توان ریاضیات را به یك زبان صوری تحویل کرد. در اوایل قرن حاضر، ریاضیدانان می‌کوشیدند تا ماهیت استدلال ریاضی را روشن سازند. هیلبرت یك زبان مصنوعی را بر پایهٔ یك الفبای محدود و تعدادی متناهی قاعدهٔ گرامری که بدون ابهام گزاره‌های سازگار را مشخص می‌کرد و تعدادی متناهی قانون استنتاج منطقی و گزاره‌هایی که درست فرض می‌شدند یا اصول موضوع، بنا کرد. براساس این دستگاه یا زبان صوری، یك الگوریتم فراگیر امکان می‌داد که در مورد اعتبار یك استدلال صورتبندی شده در این زبان تصمیم گرفته شود. لااقل به طور نظری می‌توان قضایای قابل اثبات در این زبان صوری را فهرست کرد. هیلبرت امیدوار بود که بتواند قضایای ریاضی را به قضایایی که در یك زبان صوری مناسب قابل اثبات هستند تحویل کند. قضیهٔ گودل نشان داد که این کار غیرممکن است. پیچیدگی یك دستگاه صوری هر اندازه باشد، همیشه گزاره‌ای در مورد اعداد صحیح مثبت وجود دارد که در آن واحد هم صادق است و هم در آن دستگاه صوری غیرقابل اثبات. در مورد جنبهٔ منفی این قضیه که ارائهٔ یك تعریف روشن از اثبات در ریاضی را ناممکن می‌سازد زیاد تأکید شده است. امّا نمی‌توان از زاویهٔ زیر به آن نگریست: گزاره‌های صادق در مورد اعداد صحیح و مثبت را نمی‌توان با استفاده از استنتاج منطقی به تعداد محدودی اصل موضوع تقلیل داد. بنابراین مقدار اطلاعاتی که در این گزاره‌ها می‌باشد بی‌پایان است. آیا این مشخصهٔ واقعیتی مستقل از هر آفرینش انسانی نیست؟

به مسألهٔ درون‌نگری بپردازیم. از همان اوایل پیدایش نظریهٔ مجموعه‌ها پارادوکسهایی نظیر پارادوکس راسل ریاضیدانان را وادار ساخت که گزاره‌های منطقی را برحسب طبقات متوالی طبقه‌بندی نمایند. این پارادوکس نتیجهٔ اشتباهات نحوی است. به عنوان مثال اگر مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها یك مجموعه بود می‌توانستیم یك زیر مجموعهٔ آن را که مجموعهٔ همه مجموعه‌هایی است، که خود را به عنوان عضو دربردارند و مکمل آن مجموعهٔ همه مجموعه‌هایی است که خود را به عنوان عضو دربرندارند در نظر بگیریم. وقتی این سؤال را مطرح کنیم که چنین مجموعه‌ای خود را به عنوان عضو در بر دارد یا ندارد، این پارادوکس ظاهر می‌شود. برای پاسخگویی به آن کافی است که در منطق، عناصر را متفاوت با آنچه در نظریهٔ مجموعه‌ها بود طبقه‌بندی نماییم. با عناصر طبقهٔ صفر شروع می‌کنیم و بعد از آن طبقهٔ ۱ می‌آید. این تمایز بین طبقات از درجات مختلف، سبب می‌شود که آنها را مخلوط نکنیم. بنابراین صحبت در مورد مجموعهٔ مجموعه‌ها، مفهومی که نشان‌دهندهٔ یك اشتباه نحوی است، غیرممکن می‌شود. وقتی که در منطق، سلسله مراتبی در نظر بگیریم، این پارادوکس ناپدید می‌گردد.

ش: منظور این است که به نحوی یك ترتیب به‌وجود آید.

ك: توالی طبقات یك نظام، سلسله مراتبی در مکانیسم اندیشه بوجود می‌آورد: عناصر ساده‌تر، پائینتر از مجموعه‌ها در نظر گرفته می‌شوند.

ش: نمی‌توان در دو جهت استدلال کرد.

ك: نمی‌توان یك عنصر و یك مجموعه را در یك سطح قرار داد. به‌خصوص، نمی‌توان سؤال مربوط به مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی را که شامل خود هستند مطرح کرد. باید بتوان در مورد مسألهٔ درون‌نگریِ مغزی که خود را درك می‌کند فرایند مشابهی را به کار برد و به وسیلهٔ آن این پارادوکس فرضی را حذف کرد.

ش: پس این مطلب تصمیم‌ناپذیر نیست.

ك: در اینجا صحبت از تصمیم‌ناپذیری نیست. پارادوکس مذکور از اشتباه نحوی نتیجه شده. فهمیده‌ایم که باید منطق نظریهٔ مجموعه‌ها را به شکلی صورتبندی کرد که این پارادوکس از میان برود.

ش: با اضافه‌کردن چند فرض، پارادوکس را تصمیم‌پذیر می‌گردانی.

ك: این پارادوکس است که ما را مجبور می‌کند که تصور پالایش یافته‌تری از اشیاءِ منطقی داشته باشیم و بین آنها یك نظام طبقاتی برقرار کنیم.

ش: به دومین سؤال بپردازیم.

ك: باشد. قضیهٔ گودل به چه مفهومی برای درك عملکرد مغز محدودیت ایجاد می‌کند؟ ریاضیدانان در تحلیل مفهوم دنبالهٔ تصادفی متوجه پیوند ظریفی بین قضیهٔ گودل و نظریهٔ اطلاع [انفرماسیون] که اوایل سالهای ۵۰ به وجود آمده، شده‌اند، به گونه‌ای که می‌توان این قضیه را نتیجهٔ قیودی در نظر گرفت که به‌وسیله نظریهٔ اطلاع، به علت متناهی بودن پیچیدگی همهٔ سیستمهای صوری اعمال شده است. بدین ترتیب از دو محدودیت اظهار شده به وسیلهٔ فرانسوا ژاکوب یعنی پیچیدگی و قضیهٔ گودل، دومی نتیجهٔ اوّلی است. بنابراین می‌توان حذف این محدودیتها را به شکل زیر صورتبندی کرد: ابتدا به منظور رهایی از پارادوکس درون‌نگری، یك نظام سلسله مراتبی بین مغزهای مورد بررسی (طبقهٔ ۰) و مغزهای بررسی‌کننده (طبقهٔ ۱) معرفی می‌شود... به علاوه، با استفاده از ویژگی تکاملی ماشین انسانی، امکان جفت کردن تعداد زیادی از مغزها، و کمك احتمالی انفرماتیك برای دسته‌بندی داده‌ها نشان داده می‌شود که پیچیدگی «مغز بررسی کننده» به هیچ وجه به وسیله «مغز بررسی شونده» محدود نمی‌شود، و این مطلب ایراد فرانسوا ژاکوب را رفع می‌کند.

۳. ماشین متفکر تورینگ

ش: به ماشین تورینگ بپردازیم.

ك: اول یادآوری کن که ماشین تورینگ چیست.

ش: تورینگ یك ریاضیدان استثنایی بود. کارهایش هنوز الهام‌بخش بسیاری از بیولوژیستهاست. او از جمله ریاضیدانان نادری است که نظریه‌های آنان در بیولوژی کاربرد قطعی دارد. به عنوان مثال نظریهٔ او در مورد شکل‌زایی به کمك درهم شکستن تقارن. او توانست نشان دهد که چگونه بر پایهٔ سیستمی از واکنشهای شیمیایی جفت شده، از یك سیستم ایزوترپ خود به خود یك شکل پدید می‌آید. وانگهی، او این مسأله را به گونه‌ای بسیار عینی و جالب، (در توضیح اینکه چگونه از یك تخم کروی یك نیدر که دهانش با شش شاخك حساس احاطه شده به‌وجود می‌آید) مطرح کرده است. می‌بینیم که

مسائل بیولوژیك بسیار عینی و روشن می‌تواند الهام‌بخش نظریه‌های ریاضی اصیل باشد. همچنین او اوّلین کسی بود که نظریهٔ ماشینهای انفرماتیك، کامپیوترها، را به گونه‌ای که امروز به کار می‌روند صورتبندی کرد. این نظریه همیشه موضوع بحث پرحرارتی بین روانشناسان و نوروبیولوژیست‌ها بوده و این سؤال را مطرح کرده است که آیا می‌توان ماشین تورینگی ساخت که عملکرد آن عین عملکرد مغز آدمی باشد، و اینکه آیا مغز انسان نیز خود یك ماشین تورینگ است یا نه. مقالهٔ مربوط به موضوع اخیر با این عبارت شروع می‌شود: «پیشنهاد می‌کنم که روی این سؤال فکر کنید: آیا ماشینها می‌توانند فکر کنند؟» این درست همان سؤالی است که برای ما مطرح است.

ابتدا ببینیم ماشین تورینگ چیست. آن گونه که تورینگ در مقالهٔ ۱۹۳۶ خود بیان داشته این ماشین نمادهای جدا از هم و مربعهای روی نواری را که به ماشین داده می‌شود می‌خواند و می‌نویسد. ماشین تورینگ نمادها را ذخیره کرده و از حافظه استفاده می‌نماید و خروجی نیز دارد. این ماشین سه کار انجام می‌دهد: نمادها را می‌خواند، آنها را با نمادهای دیگر تعویض می‌کند، و آنها را به هم می‌افزاید. این نوار از لحاظ نظری بی‌پایان است و به نوعی برنامه را تعریف می‌کند. تورینگ از همان اوّل *برنامه* یا «نرم‌افزار» را تشخیص می‌دهد.

ك: آیا این ماشین آنچه را انجام داده دوباره می‌خواند؟

ش: بله، می‌تواند این کار را بکند.

ك: آیا نوار فقط یك بار رد می‌شود یا برمی‌گردد؟

ش: می‌تواند بینهایت بار تکرار شود. این نوار برنامه یا نرم‌افزار را دربردارد، در حالی که بقیه ماشین «سخت‌افزار» است. اینك در مقابل یك کامپیوتر به گونه‌ای که امروز می‌سازند هستیم.

ك: مکانیسمی را که ماشین به کار می‌برد شرح نمی‌دهی؟

ش: این مطلب با مسألهٔ ما ارتباط دارد. این ماشین یك حسابگر عددی است که کمیات را به صورت ناپیوسته به کار می‌برد و از این نظر با حسابگرهای *قیاسی* که کمیات فیزیکی را اندازه می‌گیرند فرق دارد. حسابگر عددی (و این خصوصیت در نظریهٔ تورینگ بسیار مهم است) می‌تواند از هر ماشین دیگری که روی کمیات ناپیوسته کار می‌کند تقلید نماید، بنابراین یك ماشین فراگیر است زیرا هر فرایندی را می‌توان به صورت یك سری از دستورالعملها نشان داد که امکان محاسبهٔ عناصر ناپیوسته را می‌دهد. بنابراین، هر فرایندی از این نوع را اصولا می‌توان به وسیلهٔ ماشین تورینگ بازسازی کرد و حتی حسابگر قیاسی را می‌توان به وسیلهٔ حسابگر عددی شبیه‌سازی کرد.

در اینجا مسألهٔ اعتبار تزچرچ و تورینگ مطرح می‌شود که طبق آن هرچه به وسیلهٔ انسان قابل محاسبه است به وسیلهٔ ماشین نیز قابل محاسبه می‌باشد و هرچه را به وسیلهٔ ماشین بتوان محاسبه کرد، می‌توان در یك برنامهٔ بازگشتی کلی یا جزئی محاسبه نمود، و بالاخره آنچه را به وسیلهٔ انسان قابل محاسبه است می‌توان به وسیلهٔ این برنامه نیز محاسبه کرد. این مطلب به این معنی است که باید بتوان مغز و عملکردش را با ماشین تورینگ یکی کرد. نظریهٔ کارکردگرایی [فونکسیونالیسم] که بسیار مورد نظر روانشناسان شناختی چون جانسن لرد است، این مطلب را عنوان می‌کند که روانشناسی، مطالعهٔ برنامه‌هاست و در نتیجه مستقل از نوروفیزیولوژی می‌باشد زیرا نوروفیزیولوژی در مطالعهٔ مغز و عملکرد آن، ماشین و کد آن را مطالعه می‌کند. بنابراین، آنچه مربوط به روان است، بخشی از *نرم‌افزار* است در حالی که مغز و نورونهایش و سیناپسهایش *سخت‌افزار* را می‌سازند. پس مغز از نظر کارکردگرایان (که تا آنجا پیش می‌روند که نتیجه می‌گیرند طبیعت فیزیکی مغز «هیچ محدودیتی برای سازمان اندیشه ایجاد نمی‌کند») اهمیت چندانی ندارد. طبق این نظریهٔ رایج در علوم شناختی، اینکه مغز از پروتئین ساخته شده باشد یا از سیلیسیم، اهمیتی ندارد. همچنین تعداد و طبیعت نورونهای آن بی‌اهمیت است. فقط الگوریتمهایی که اعمال دماغی با آنها همانند می‌شود مهم است. پرداختن به زیربنای نوروبیولوژیك اتلاف وقت است.

۴. نظریهٔ ماتریس S در فیزیك، همانند کارکردگرایی در روانشناسی

ك: می‌توان بین دو نگرشی که تو آنها را مقابل هم قراردادی و مشابه آنها در نظریهٔ میدان تناظری قائل شد. این نظریه می‌کوشد که مکانیسم برهمکنش ذرات بنیادی را توضیح دهد. در اینجا دو تمایل متقابل وجود دارد.

ش: ممکن است ابتدا توضیح دهی که نظریهٔ میدان چیست؟

ك: موقعی که در مکانیك کوانتومی مطالعه می‌کنیم و می‌کوشیم آن را نسبیتی سازیم، دیده می‌شود که ذرات به طور خود به خود به وجود می‌آیند و از میان می‌روند. تعداد ذرات برعکس آنچه در شیمی می‌بینیم ثابت نمی‌ماند. بنابراین، حتی برای بررسی پدیده‌های خیلی ساده، لازم است که به جای مطالعهٔ ذرات جدا از هم، به مطالعهٔ میدانها، که بستگی به بینهایت متغیر دارند بپردازیم. این نظریهٔ بسیار پیچیده، موفقیتهای بزرگی به دست آورده است. به خصوص شباهت بین نظریهٔ کارکردگرایی و نظریهٔ ماتریس S هایزنبرگ بسیار شگفت‌آور است. برای این نظریه اینکه در هنگام برخورد ذرات چه اتفاق می‌افتد اهمیّتی ندارد. فقط ماتریس گذر از حالتِ اولیهٔ سیستم که به عنوان مثال از پانزده ذرهٔ آزاد با اندازهٔ حرکت و جرم معلوم تشکیل شده به حالت ثانویه که آن نیز به صورت ذرات آزاد می‌باشد به حساب می‌آید. این ماتریس به هر زوج (i,f) متشکل از یك حالت اولیّه و یك حالت ثانویه یك عدد مختلط نظیر می‌کند. احتمال وابسته به این زوج قدر مطلق این عدد مختلط می‌باشد. در این نظریه خواص این ماتریس مورد بررسی قرار می‌گیرد بدون اینکه مکانیسمی که بر برهمکنشهای بین ذرات در هنگام برخورد حاکم است به صورتی واضح شناخته شده باشد. بنابراین فهمیدن ماتریس S به آن معنی نیست که آنچه را اتفاق می‌افتد درك کنیم. بلکه فقط مدلی در اختیار داریم که نتایج مناسب را برای واقعیت تجربی به دست می‌دهد.

ش: این همان است که نمودشناسی[1] نامیده می‌شود.

ك: همین طور است.

1. phénoménologie

ش: برهمکنشها درون یك «جعبهٔ سیاه» اتفاق می‌افتند که به آنها کار نداریم. کارکردگرایان به همین صورت به مغز علاقه دارند!

ك: درست همین طور است. این روش سادگیها و پیچیدگیهایی دارد. با این روش می‌توان مسائل را به صورتی ساده‌تر بیان کرد زیرا جزئیات مربوط به مکانیسم کنار گذاشته می‌شود. امّا تعداد جوابهای ممکن مسألهٔ مطرح شده آنقدر زیاد است که شخص در آنها گم می‌شود. همان‌طور که تکامل فیزیك نشان داده است این نظریه به تنهایی کافی نیست، امّا در صورتی که در جهت فهم پدیده‌ها در نظریهٔ بنیادی، محاسبهٔ این ماتریس هدف باشد، این نظریه مفید خواهد بود. بنابراین نباید این نظریه را کاملا کنار گذاشت و برعکس فیزیك نشان داده است که گاهی حاوی اطلاعات زیادی بوده است. امروزه نظریهٔ ریسمانها سر زبانهاست. این نظریه از ماتریس S نتیجه شده است. ونتسیانو[1] یك ماتریس S یافته است که دارای خواص مهمی می‌باشد و به ما امکان می‌دهد که آنچه را در مکانیسم برهمکنش باید اتفاق بیفتد حدس بزنیم. گذشته از این، نظریهٔ ریسمانها بسیار عجیب است. زیرا کاملا ممکن است به زودی از میان برود و هیچ کاربردی نداشته باشد. در حقیقت، این نظریه عملا هیچ تماسی با تجربه ندارد.

ش: برای نوروبیولوژیست که من باشم تزهای کارکردگرایان مفیدند زیرا به ما امکان می‌دهند که کارکرد را بهتر تعریف کنیم. آنها در غالب موارد کارکرد را به شکل کمی شده نشان می‌دهند. این مطلب به نوعی مربوط به فیزیولوژی است. کارکرد را از بیرون اندازه می‌گیریم، بدون اینکه وارد مکانیسم «داخلی» شویم.

ك: دقیقاً همین‌طور است. آنچه مورد بررسی قرار می‌گیرد محصولات «جعبهٔ سیاه» و استعدادهای آنهاست.

ش: از نظر من تعریف کارکردی مسأله است که مفید است. مدلی عصبی که پیشنهاد می‌شود باید این کارکردها را توضیح دهد. بنابراین با تو کاملا موافقم. من مخالف یك رویکرد تجربی که کارکردها را کمّی کند نیستم. امّا مخالف دیدگاه مطلقی هستم که بر طبق آن توصیف کارکرد، «توضیح» کافی آن باشد. در اینجا مسأله‌ای وجود دارد که شایسته است به آن توجه شود.

اگر تزهای کارکردگرایان صحیح باشد، هر کارکرد دماغی با یك یا چند الگوریتم ریاضی همانند می‌شود. امّا آیا می‌توان واقعیت خارجی را با ایده‌های ریاضی همانند کرد؟ آیا این ایده‌ها پدیده‌ها را کاملا توصیف می‌کنند؟ تو هم در مقابل این فکر مقاومت می‌کنی. زیرا تو فکر می‌کنی که مدلهای ریاضیی که فیزیك به کار می‌برد نشان دهندهٔ واقعیت فیزیکی به طور کامل نیست، و همهٔ جنبه‌های آن را در بر نمی‌گیرد. به نظر من، کارکردگرایی بیشتر یك روش رویکرد به کارکردهای مغز است تا یك فلسفه. مدافعان آن به یك مانع معرفت شناختی قابل ملاحظه برخورد می‌کنند: آیا یك الگوریتم ریاضی را می‌توان با یك خاصیت فیزیکی مغز همانند کرد؟

ك: واضح است که در فیزیك هم خود را به ماتریس S قانع کردن مثل آن است که نسبت به نظریهٔ میدان یك قدم به عقب برداشته باشیم. امّا وقتی که می‌خواهیم ببینیم کدام نتایج تجربی هستند که قابل بازسازی می‌باشند و به کدام کمیّات باید توجه داشت، کارکردگرایان مطمئناً حرفی برای گفتن دارند.

ش: دقیقاً همین طور است. امّا آنها دورتر از این می‌روند. آنها فکر می‌کنند که به عنوان مثال توصیف یك استدلال یا ساختن یك عبارت به کمك الگوریتم محاسبه و شبیه‌سازی آن به وسیلهٔ یك ماشین تورینگ برای درك چگونگی کارکرد اندیشه کافی است.

ك: ما جوابش را داریم. کافی است به سه سطحی که قبلا صحبتش را کردیم استناد کنیم. استعداد تولید یك عبارت به سطح اوّل تعلق دارد. مکانیسم تولید آن از قبل معین شده است. امّا اینکه بتوان استراتژی را در صورت اشتباه عوض کرد مطلب کاملا متفاوتی است. این نوع مکانیسم آشکارا از سطح اوّل فراتر می‌رود. اگر کسی ادعا کند که چون سطح اوّل را فهمیده مغز را فهمیده، آشکارا اشتباه بزرگی مرتکب می‌شود. حتی در سطح اوّل، ماشین تورینگ چیزی را حل نمی‌کند، زیرا مسألهٔ پیچیدگی الگوریتمها را به حساب نمی‌آورد.

ش: بنابراین، کارکردگرایی را کنار می‌گذاریم.

ك: نه کاملا، زیرا می‌تواند برای مشخص کردن کمیّاتی که مطالعهٔ آنها مفید است به کار آید. ارزیابی یك نظریه برحسب مفاهیم کارکردی ممکن است جالب باشد. امّا نباید تنها به روش کارکردگرایان قانع بود.

ش: این، دفاع از یك دیدگاه بسیار محافظه‌کارانه است. در حقیقت، تاریخ نشان داده است که بررسی سطوح زیربنای سطحی که منظور ما بررسی آن است، و ورود در «جعبهٔ سیاه» و تشریح کردن برای ساده‌سازی، و سپس بازسازی که یك فرایند فیزیولوژیك است، به طور سیستماتیك معرفت را در تمام زمینه‌ها جلو برده است.

ك: این مطلب در مورد نظریهٔ میدان هم درست است.

۵. آیا مغز آدمی یك نوع کامپیوتر است؟

ش: دانستن اینکه در این مورد توافق نظر داریم خوشحال کننده است. به آخرین موضوع بپردازیم یعنی اختلاف بین مغز آدمی و «ماشینهای متفکر» موجود. کامپیوترهایی که ما در اختیار داریم برای انواع مختلفی از اعمال مناسب‌اند؛ به عنوان مثال، خیلی سریع محاسبه می‌کنند. ضربهای ده رقمی را در چند ثانیه یا حتی در کسری از ثانیه انجام می‌دهند. امّا آنها، آشکارا، در زمینه‌های دیگر بسیار محدودند. به عنوان مثال، کامپیوتر در شناسایی یك خشخاش کوهی در یك بیشه یا یك پروانه در جنگل مشکلات زیادی دارد در حالی که انسان به سادگی این کار را انجام می‌دهد. همچنین غالباً روی این نکته تأکید می‌شود که ماشینها عاری از «احساس و واکنش عاطفی» هستند و به خصوص قادر به «پیش‌بینی» و «قصدمندی» نیستند و نمی‌توانند بدون «فرماندهٔ» خارجی برنامهٔ خود را بسازند. استعداد خودسازی آنها بسیار کم یا حتی هیچ است. خیلی دوست دارم بدانم تو در این مورد چه فکر می‌کنی، تو که با ماشینی که به خوبی انسان (اگر نه بهتر از او) شطرنج بازی می‌کند، شطرنج بازی می‌کنی.

کامپیوترهایی که در حال حاضر مورد استفاده‌اند به نظر من دو

1. Veneziano

ویژگی مغز آدمی را ندارند. قبل از هرچیز ملاحظه می‌کنیم که در مغز، برنامه و ماشین (اگر بخواهیم مدل تورینگ را به کار بریم) از همان مراحل اولیهٔ رشد با هم پیوند دارند. تعریف برنامه‌ای مستقل از این پیوستگیِ ماشین دماغی اگر غیرممکن نباشد، مشکل است. موضوعات حسی به طور تدریجی در طول مدت رشد به حافظهٔ دراز مدت سپرده می‌شود. سخت‌افزار به تدریج در اثر عملِ ترکیبِ ژنتیکِ فرد و همچنین در اثر برهمکنش ثابت با جهان خارج ساخته می‌شود. به ویژه مغز مانند یك ماشین تکاملی رفتار می‌کند و طبق یك مدل داروینی به طور همزمان در سطوح مختلف و برحسب مقیاسهای زمانی متفاوت تکامل می‌یابد. این چیزی است که به نظر من سبب اختلاف مغز با ماشینهای ساخته شدهٔ موجود می‌شود. البته، علاوه بر آن، موضوع قصدمندی مطرح است که خاصیتی وابسته به تکامل است و به علت وابستگی آن به متکاملترین ارگانیزاسیونها کمتر مورد بررسی قرار گرفته. به نظر تو چه چیز مغز انسان را از ماشینهای مصنوعی امروزی جدا می‌کند؟ و چه تصوری از ماشینی مصنوعی که به مغز انسان نزدیکتر باشد داری؟

ك: قبل از هر چیز به بررسی ماشینهایی که شطرنج بازی می‌کنند بپردازیم. در اینجا «قصدمندی» ساده است: بردن بازی. این چیزی است که تعریفش بسیار ساده است. تعریف یك تابع ارزیابی که نشان می‌دهد چقدر به قصدی که در تمام طول بازی دنبال شده نزدیك هستیم نسبتاً ساده است. بنابراین می‌توان ماشینی ساخت که یك تابع ارزیابی معین شده به وسیلهٔ این قصد کاملا معین را به کار برد. برعکس، درمورد مغز، قصدمندی برحسب مسائلی که پیش می‌آید تغییر می‌کند. بدین ترتیب مغز باید خودش تابع ارزیابی مناسب یك قصد معلوم را بسازد. به بیانی روشنتر، باید بتواند مشخص کند که آیا این تابع ارزیابی مناسب آن قصدمندی می‌باشد یا نه. بنابراین، چگونگی آن را نمی‌دانم، باید واجد تابع ارزیابی توابع ارزیابی باشد!

ش: این همان چیزی است که به قول گرانجر[1]، خرد استراتژیك نامیده می‌شود.

ك: بله، امّا می‌خواهم یك نظام سلسله مراتبی برقرار کنم. از یك طرف توابع ارزیابی را داریم. تابع ارزیابی را می‌توان با یك هدف یکی گرفت. قصدمندی تا حدی به این بر می‌گردد که یك تابع ارزیابی داشته باشیم. مطمئناً هر تابع ارزیابی خوب نیست، زیرا بعضی از آنها در ارتباط با قصدهای متناقض هستند و بعضی برای هیچ قصدی مناسب نیستند. امّا می‌توان کم و بیش هر قصد را چون یك تابع ارزیابی سازگار تعریف کرد. در یك موقعیت معین، مغز باید بتواند خود این تابع ارزیابی را بسازد. بنابراین، باید قدرت ساختن یا حداقل انتخاب یکی از این توابع ارزیابی موجود را داشته باشد. و برای این منظور باید تابع ارزیابیی داشته باشد که یك بار برای همیشه برقرار گشته و به او این امکان را بدهد که بداند آیا تابع ارزیابیی که او ساخته برای هدفی که دنبال می‌کند مناسب است یا نه.

ش: این مکانیسم مستلزم وجود حافظه است.

ك: واقعاً حافظه یا تجربیات به دست آمده لازم است. مغز برای مقایسهٔ موقعیت حاضر با موقعیتهای شناخته شدهٔ قبلی می‌تواند روی شباهتها تکیه کند.

ش: از یك طرف یك حافظهٔ ژنتیك وجود دارد: ارگانیسم انسانی به صورتی که امروز وجود دارد از نسلهای زیادِ ارگانیسمهایی که قبلا وجود داشته‌اند و این تجربیات را انجام داده‌اند نتیجه شده است. بنابراین، جواب مسألهٔ جدیدی که مطرح می‌شود در حافظهٔ ژنها ثبت شده است. از طرف دیگر، مغز به روی واقعیت خارجی باز است، و به خصوص می‌تواند به حافظهٔ درازمدت که در جریان تجربیات بعد از تولد حاصل آمده مراجعه نماید.

ك: در سطح دوّم است که مسألهٔ اساسی مطرح می‌شود. کدام مکانیسم به مغز این امکان را می‌دهد که یك تابع ارزیابی مناسب هدفش انتخاب کند؟ چه معیاری اجازهٔ این انتخاب را می‌دهد؟ تا این پدیده درك نشود، از سطح دوّم خیلی دور خواهیم بود، همان طور که در ماشینهای موجود در حال حاضر وضع این چنین است.

ش: یعنی حتی آنها در سطح سوّم هم نیستند.

ك: آنها فقط در سطح اوّل هستند و فقط می‌توانند اعمال جمع و ضرب را حتی اگر خیلی پیچیده باشد انجام دهند و یا شطرنج بازی کنند. امّا تابع ارزیابی مثل قصد همیشه از قبل معین می‌شود. هیچ ماشینی امروزه قادر نیست که خودش تابعی ارزیابی مناسب قصدی که برایش معین شده بسازد.

ش: کامپیوترهای موجود حتی توانایی داشتن قصد را هم ندارند؟

ك: نه، زیرا آنها در برهمکنش تکاملی با جهان فیزیکی نیستند. علی‌رغم اینکه حافظه دارند، گذشته‌ای جز آنچه ما بر آنها تحمیل کرده‌ایم ندارند. آنها قابل تغییرات تدریجی نیستند. یقیناً احساس در این پدیده دخالت دارد. وقتی کسی هدفی دارد، برای آن است که لذت ببرد، مگر اینکه خود آزار باشد!

ش: این توانایی لذت بردن نیز به وسیلهٔ گذشتهٔ تکاملیِ ما معین شده است. اگر با لذت بردن روبه اضمحلال می‌رفتیم، مطمئناً حالا در این وضع نبودیم!

ك: مطمئناً همین طور است. امّا فکر می‌کنم که مکانیسمی که امکان براورد تابع ارزیابی مناسب هدف را بدهد، مستلزم داشتن احساس است. در حقیقت، برای آنکه بتوان آنچه را اتفاق می‌افتد براورد کرد احساس لازم است. توافق یك تابع ارزیابی با هدف مفروض را فقط به وسیلهٔ لذت یا المی که تولید می‌کند می‌توان سنجید. به عنوان مثال یك شطرنج باز را در نظر بگیریم، که علی‌رغم اینکه می‌تواند مانند یك کامپیوتر بسنجد، تابع ارزیابی بدی انتخاب کند. واضح است که او در هنگام اقرار به این مطلب که همهٔ دورها را باخته است، شدیداً ناکام است. انتخاب یك تابع ارزیابی بد برایش چیزی جز رنج ندارد. امّا این امر پس از پایان دورها معلوم می‌شود نه قبل از آن. تابع ارزیابی بد او مانع از آن است که در طول بازی بفهمد که در موقعیت بدی قرار دارد و در شرف باختن است. با وجود این، با دیدن نتیجهٔ نهایی می‌فهمد که تابع ارزیابی او نامناسب بوده است.

ش: فراموش نکنیم که این سیستم ارزیابی داخلی (لذت- الم)

1. Granger

خودش به وسیلهٔ گذشتهٔ تکاملی نوع مشخص شده است. این تأثرات قبلا به وسیله عکس‌العملهای آنها در برابر سیگنالهای جهان خارج و جهان داخل مشخص گشته است.

ك: در حال حاضر، همهٔ ماشینها مستلزم قصدمندی از قبل تعیین شده می‌باشند، در نتیجه، در سطح اوّل می‌مانند.

ش: امّا، چگونه می‌توان ماشینی ساخت که به سطح دوّم برود؟

۶. ماشینی که رنج می‌برد و خود، خود را ارزیابی می‌کند

ك: فقط می‌توانم مسأله را به صورتی واضح بیان کنم. چنین ماشینی باید برهمکنش تکاملی با جهان خارج داشته باشد. باید خود به خود بتواند یك تابع ارزیابی برای یك هدف داده شدهٔ خارجی بسازد. بنابراین، اگر این ماشین حافظه و قدرت محاسبهٔ کافی داشته باشد، باید استراتژیی را که به کار می‌برد خودش ارزیابی کند و به یك تابع ارزیابی مناسب برسد.

ش: آیا این کار عملی است؟ این ایده قبلا صورتبندی شده است. پس چرا این نوع ماشین وجود ندارد؟ آیا موانعی که در این راه وجود دارد نظری است یا عملی؟

ك: نمی‌دانم. به نظر من، تنها مکانیسمی که به انسان اجازهٔ رفتن به سطح دوّم را می‌دهد، احساس است.

ش: می‌توان ماشینی تصور کرد که لذت بردن آن به وسیلهٔ یك کمیّت متغیر اندازه‌گیری شود، به گونه‌ای که...

ك: به بازی شطرنج باز می‌گردیم. فرض کنیم که ماشین فاقد تابع ارزیابیی است که به او اجازهٔ خوب شطرنج بازی کردن را بدهد. ولی می‌تواند همهٔ حرکات ممکن را انجام دهد و همهٔ قوانین بازی را دارد و دارای قدرت زیادی در محاسبه است، امّا فاقد خواستِ بردن می‌باشد. چگونه می‌توان این خواست را به او تلقین کرد؟ یك کامپیوتر خوب، در هر حرکت موقعیت خود را ارزیابی کرده و آن را در جدولی ثبت می‌کند و بین تمام حرکات ممکن حرکتی را انتخاب می‌کند که تعداد تابع ارزیابی را ماکسیمم سازد. امّا ماشین مورد بحث ما یك چنین تابع ارزیابی در اختیار ندارد. باید نظامی یافت که به آن امکان دستیابی به این تابع را بدهد. این کار باید به گونه‌ای صورت گیرد که ماشین اگر در پایان بازی می‌بازد یا در موقعیت بدی قرار می‌گیرد احساس ناراحتی کند...

ش: اگر احساس ناراحتی کند، مسأله را حل کرده‌ای.

ك: نه هنوز. زیرا فقط در برابر نتیجهٔ نهایی بازی، عکس‌العمل نشان می‌دهد.

ش: امّا اگر این دستور را به ماشین داده باشی که وقتی می‌بازد رنج ببرد، جواب مسأله را یافته‌ای.

ك: نه. زیرا فقط در پایان بازی رنج می‌برد.

ش: به هرحال یك قسمت از جواب را به دست آورده‌ای.

ك: یك قسمت کوچك، زیرا ارزیابی فقط در انتهای بازی انجام می‌شود.

ش: بنابراین، کافی است که ماشین کمی حافظه داشته باشد و آنچه را که برای رسیدن به هدفش باید انجام دهد تشخیص دهد، و سپس استراتژیهای مناسب را بیابد. بنابراین باید تجربه داشته باشد. بیان اینکه ماشین در هنگام شکست رنج می‌برد، به نظر من، یك قسمت از مسأله را حل می‌کند.

ك: اگر ماشین هر دفعه که بد بازی می‌کرد، رنج می‌برد به هدف رسیده بودیم، تابع ارزیابی را یافته بودیم.

ش: به نظر من این کار امکان‌پذیر نیست مگر پس از چندین تجربه.

ك: تو می‌خواهی بگویی که ماشین، تابع ارزیابیش را به تدریج با ارتباط دادن حرکاتی که انجام داده و جدا از هم گرفته شده با نتیجه نهایی هردو بازی می‌سازد. این به نظر من عاقلانه است.

ش: تو مطلب خیلی مهمی گفتی: ماشین تو در هنگام شکست رنج می‌برد.

ك: این یك آغاز است. احساس رنج در پایان بازی، آغاز ارزیابی است. تابع ارزیابیی که بدین سان ساخته شود به هر دور بازی درصورت برد یك نتیجهٔ مثبت و در صورت باخت یك نتیجهٔ منفی نسبت می‌دهد. این ماشین همچنین می‌تواند بازیهایی را که با بازی کننده‌های دیگر انجام شده و نتیجهٔ نهایی آنها را به عنوان تنها ارزیابی از آنها به حافظه بسپارد. امّا باید کاملا درك کرد که یك دور بازی شطرنج به طور موضعی انجام می‌شود. اگر یك دور بازی متشکل از چهل حرکت برای هر یك از دو طرف باشد، مطمئناً این درست نیست که ماشین در انتهای این دور بازی شروع به فکر کردن کند. باید این کار را به طور موضعی انجام دهد. موقعی که برای رسیدن به هدف معینی می‌کوشیم، منتظر پایان کوششمان نمی‌شویم تا بسنجیم چه مقدار از هدف خود فاصله داریم. بلکه همیشه بیدار و گوش به زنگ هستیم. به تدریج که جلو می‌رویم، حرکتمان را با توجه به آنچه گذشته اصلاح می‌کنیم. اگر ماشین ما به این قناعت کند که بگوید «باختم، بردم، باختم، بردم» بدون اینکه از این مطلب به نتایج موضعی برسد ابله خواهد بود. بنابراین، به نظر من، تفکر، مکانیسمی است که این امکان را فراهم می‌آورد که به منظور ساختن یك تابع ارزیابی موضعی، نتایج فراگیرِ دورهای بازی سپرده شده به حافظه مرتب شود. به تدریج که حرکات فرا می‌رسند حافظه به دورهای باخته یا بُردهٔ بازی مراجعه می‌کند. و بدین ترتیب تابع ارزیابی ساخته می‌شود. اگر بتوانیم ماشینی بسازیم که این مکانیسم را داشته باشد، می‌توانیم قوانین بازی را تغییرداده و آن را وادار کنیم دوباره بازی کند تا دیده شود آیا با شرایط جدید سازگار است یا نه. این معیار خوبی خواهد بود.

ش: این ماشین یك مولّد فرض خواهد داشت.

ك: مطمئناً. امّا این نوع مولد در کامپیوترهای معمولی هم وجود دارد.

ش: در این صورت آنها فاقد چه چیزی هستند؟

ك: تابع ارزیابی!

ش: مسألهٔ عملی بودن وجود تابع ارزیابی را عمیقتر بررسی کنیم. این خیلی مهم است.

ك: یك پیشنهاد واضح می‌کنم، اگرچه متأسفانه چندان مقرون به صرفه نیست. کافی است نشان دهیم که جوابهایی وجود دارد. فرض کنیم که این کامپیوتر هزاران دور بازی و نتیجهٔ نهایی هر دور بازی را به

عنوان تنها ارزیابی بازی هر بازی کننده، در حافظه داشته باشد. این تابع مقدماتی ارزیابی عبارت است از اینکه گفته شود که در پایان هر دور بازی «X باخته است» یا «X برده است». این تابع به این دلیل ساده که موضعی نیست ابلهانه است. حالا می‌خواهم روی مجموعهٔ توابع ارزیابی موضعی، یك تابع ارزیابی تعریف کنم. این تابع عبارت است از مقایسهٔ نتیجهٔ هر دور بازی با امتیازی که تابع ارزیابی موضعی مورد نظر به هر یك از دو بازی کننده، در طول آن دور بازی می‌دهد. اگر یك همبستگی بین نتیجهٔ نهایی یك دور بازی و نتیجهٔ یك تابع ارزیابی موضعی موجود باشد، این تابع خوب است، در غیر این صورت باید آن را کنار گذاشت. چون کامپیوتر ما تعداد بسیار زیادی دور بازی در حافظه دارد، این ویژگی نامطلوب از میان می‌رود و اجازهٔ ارزیابی هر تابع ارزیابی موضعی را می‌دهد. بدین ترتیب یك تابع ارزیابی فراگیر تعریف می‌شود که اجازهٔ موضعی ساختن اندیشه را می‌دهد.

ش: بدین ترتیب کاملا به آگاهی نزدیك هستیم.

ك: نه، به‌آگاهی نزدیك نیستیم، زیرا در سطح دوّم هستیم. ما به تفکر نزدیك می‌شویم.

ش: به تفکر آگاهانه.

ك: اگر مسألهٔ پیچیدگی (که وقتی پیچیدگی الگوریتم دارای رشد نمایی باشد مانع به وجود آمدن ماشینها می‌شود) وجود نداشت، از یك مدل تازهٔ کامپیوترها که مستعد سازگاری باشد زیاد دور نبودیم.

ش: و سطح سوّم چه؟

ك: در سطح سوّم...

ش: ایدهٔ تابع ارزیابیِ یك تابع ارزیابی، جالب است.

ك: این مفهوم حتماً لازم است.

ش: به همین ترتیب می‌توان آگاهی را به منزلهٔ ادراكِ آنچه درك شده، تصور کرد.

ك: منظور تو چیست؟ من، فقط با تفکر کار دارم.

ش: بله، امّا تفکر در مورد تفکر. آیا این آگاهی نیست؟

ك: نه. برای من تفکر همان تابع ارزیابیِ توابعِ ارزیابیِ موضعی است.

ش: و تو غیر از این در اینجا چیزی نمی‌بینی؟

ك: نه. در برخورد با مجموعه‌ای از هدفهای ممکن باید بتوان تابع ارزیابیِ خاصی را ساخت. بنابراین به یك تابع ارزیابی توابع ارزیابی موضعی نیاز است که از مقایسهٔ تجربه‌ها و نتایج نهایی ناشی می‌شود. این مطلب یك اصل بسیار مهم را بیان می‌کند، اصل موضعی بودن را...

ش: کاملا موافقم. نوروبیولوژیست‌ها هم با فعالیتهای موضعی نورونها کار دارند.

ك: در سطح دوّم،تفکر موضعی است. و این مطلب که اندیشهٔ آگاه تفکر می‌کند، درست است. امّا در سطح سوّم، مکانیسم این طور نیست.

ش: منظورت چیست؟

ك: در سطح دوّم می‌توان یك استراتژی سازگار با یك هدف مفروض انتخاب کرد. ولی در سطح سوّم که ساختن به مفهوم واقعی کلمه انجام می‌شود، هدف شناخته شده نیست. ویژگی خلاقیت، نبودن هدفِ ازقبل تعیین شده است.

ش: من با این عقیده موافق نیستم. سازنده فقط بین هدفهای ممکن یکی را انتخاب می‌کند. این یك سطحِ قصدِ بالاتر است.

ك: در اکثر مواقع، وقتی برای رسیدن به هدفی می‌کوشیم، چیزهای دیگری پیدا می‌کنیم. باید تازگی و هماهنگی آنچه را به آن برخورد می‌کنیم، بشناسیم. در اینجا منظور به هیچ‌وجه تفکر نیست، بلکه تقریباً ساختن یك هدف جدید است.

ش: یك ساختن اتفاقی و نه از روی قصد!

ك: مطمئناً، آنچه قبلا گفتم در مورد سطح سوّم به کار نمی‌آید. فرض براین بود که پایان به طور دقیق مشخص شده است. ماشین در صورت برد احساس لذت و در صورت باخت احساس رنج می‌کرد. بنابراین نشان داده‌ام که چگونه می‌توان تابع انتخاب را با هدف داده شده تطبیق داد. امّا حقیقت این است که در سطح سوّم، اگرچه یك هدف اتفاقی می‌تواند از قبل معین شده باشد، کوشش برای رسیدن به آن ناگهان به بازشناسی یك هماهنگی که آن را تغییر می‌دهد، منجر می‌شود.

ش: تصادف نقش خیلی مهمتری دارد.

ك: در این مورد کاملا قانع نشده‌ام. بدون شك انشعابها اتفاق می‌افتند، امّا سطح سوّم قبل از همه با بازشناسیِ یك هماهنگی مشخص می‌شود.

ش: بله، امّا باید چیزی وجود داشته باشد. بنابراین...

ك: به نظر، چیز دیگری دخالت می‌کند، بازشناسی یك هماهنگی. این موضوع به سطح دوّم تعلق ندارد.

ش: یك سطح بالاتر است.

ك: از سطح تفکر گذشته‌ایم. هماهنگی درك شده است، امّا به وسیلهٔ مکانیسمی که دیگر از مرتبهٔ تفکر نیست.

ش: نوعی مکانیسمِ یکپارچه سازی است. این سنگی است که برای کامل کردن بنا لازم است و نداریم.

ك: مثلا، یا فرایندی که سیستمی از نورونها را به تشدید وا می‌دارد.

ش: در لذات مربوط به زیبایی شناختی، می‌توان گفت که فعالیت کرتکس قدامی با سیستم لمبیك در هماهنگی و تشدید قرار می‌گیرد.

ك: شاید...

ش: لذت خودش در روشن ساختن مطلب خیلی مهم است.

ك: بله. در حالیکه مکانیسم تفکر لذت یا رنج را فقط در پایان برای ساختن تابع انتخاب به کار می‌گیرد. اینجا همه چیز فرق دارد.

ش: می‌توان ماشینی از همین نوع تصور کرد.

ك: نمی‌دانم. به مسألهٔ خودمان برگردیم: آیا یك هماهنگی از قبل برقرار شده وجود دارد که انسان به آن دلیل که در چنین جهان هماهنگی به سر می‌برد نسبت به آن حساس است یا اینکه خودش این هماهنگی را می‌سازد؟ آیا واقعیت هماهنگ را کشف می‌کنیم یا اینکه هماهنگی واقعیت را می‌سازیم؟

ش: به مسألهٔ شروع بحثمان برگشتیم. امّا تو همه چیز را به صورت دوپهلو ارائه می‌کنی. یا در دنیا یك هماهنگی از قبل برقرار شده هست و در این صورت در یك دنیای افلاطونی به سر می‌بریم، یا اینکه فقط می‌کوشیم طنین هماهنگ جهان خارج را باجهان درونی که در صدد بنای آن هستیم همساز کنیم.

در پیرامون مسألهٔ زیرفضاهای پایا*

حیدر رجوی*

فرض کنیم $\mathcal{X}$ یك فضای برداری و T اپراتوری خطی از $\mathcal{X}$ به $\mathcal{X}$ است. اگر $\mathcal{Y}$ یك زیرفضای برداری $\mathcal{X}$ باشد گوییم $\mathcal{Y}$ تحت T **پایاست** در صورتی که داشته باشیم $T\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Y}$، یعنی از $x \in \mathcal{Y}$ رابطهٔ $Tx \in \mathcal{Y}$ نتیجه شود. روشن است که دو زیرفضای $\{0\}$ و $\mathcal{X}$ تحت هر اپراتورخطی پایا هستند. این است که مقصود ما ازجملهٔ «اپراتور T دارای زیرفضای پایاست» همیشه این خواهد بود که زیرفضایی جز این دو وجود دارد که تحت اپراتور خطی T پایاست. دراین نوشته می‌کوشیم که از فضاهای با بعد متناهی شروع کرده وسوابق مقدماتی مسألهٔ زیرفضاهای پایا را مرور کنیم و سپس به‌توضیح این مسألهٔ حل نشده و بعضی حالتهای حل شدهٔ آن بپردازیم.

گزارهٔ زیر را درنظر بگیرید:

گ: هر اپراتور دارای زیرفضایی پایاست.

برحسب اینکه مقصود از فضای اصلی و زیرفضا چه باشد گزارهٔ «گ» ممکن‌است درست، نادرست ویا نامعلوم باشد. مثلا اگر $\mathcal{X}$ فضایی با بعدمتناهی روی‌هیأتی نابسته باشد «گ» همواره درست نیست. ساده‌ترین‌مثال این گفته، فضای دو بعدی $\mathcal{X}$ روی $\mathbf{R}$ (اعدادحقیقی) و اپراتور T روی $\mathcal{X}$ است که نسبت به‌یك پایهٔ برداری داده‌شده با ماتریس

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

مشخص شده باشد. چون T طیف حقیقی ندارد، نمی‌تواند زیرفضای پایای یك‌بعدی داشته‌باشد. ازطرف دیگر ازقضیهٔ‌اساسی جبر نتیجه می‌شود که هر اپراتور در فضای با بعد متناهی (بیش از یك) روی $\mathbf{C}$ (اعداد مختلط) دارای طیف و در نتیجه دارای زیرفضای پایای یك بعدی می‌باشد. درحقیقت با استقرای ریاضی به‌آسانی نشان داده می‌شود که اگر $\mathcal{X}$ روی $\mathbf{C}$ بعد n داشته‌باشد، برای هر اپراتور در $\mathcal{X}$ دنباله‌ای مانند

$$0 = \mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{X}_n = \mathcal{X}$$

می‌توان پیدا کرد که درآن $\mathcal{X}_j$ زیرفضایی j بعدی از $\mathcal{X}$ است و تحت T پایا می‌باشد. به‌عبارت دیگر نسبت به‌پایهٔ برداری مناسبی، ماتریس آن دارای شکل مثلثی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

خواهد بود.

این قضیهٔ ساده‌که آن را در هردرس جبرخطی می‌توان یافت تعمیمی بسیار جامع به‌نام قضیهٔ **برنساید** دارد که شاید همه از آن آگاه نباشند و ما اکنون به‌شرح آن می‌پردازیم. پس‌ازاین، دراین مقاله تمام فضاها روی $\mathbf{C}$ خواهند بود گرچه قضیهٔ برنساید روی هر هیأت بسته درست است.

مجموعهٔ تمام اپراتورهای روی فضای $\mathcal{X}$ را با $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ نشان‌می‌دهیم. معلوم است‌که $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ تشکیل جبر می‌دهد، بدین‌معنی که اگر S و T در $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ و c در $\mathbf{C}$ باشد، داریم

$$S+T\in\mathcal{L}(\mathcal{X}),\quad ST\in\mathcal{L}(\mathcal{X}),\quad cT\in\mathcal{L}(\mathcal{X}).$$

هر زیرمجموعهٔ $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ را که دارای این‌خواص باشد یك زیرجبر $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ می‌نامیم. دو زیرمجموعهٔ $\{0\}$ و $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ زیرجبرهای واضح $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ هستند. به‌عنوان مثال بهتر، زیرفضایی از $\mathcal{X}$ مانند $\mathcal{X}_0$ را که غیراز $\{0\}$ و $\mathcal{X}$ باشد درنظر گرفته و به‌آسانی می‌بینیم که مجموعهٔ

$$\mathcal{A}=\{T\in\mathcal{L}(\mathcal{X}):T\mathcal{X}_0\subseteq\mathcal{X}_0\}$$

زیرجبری از $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ است. چون تمام اعضای $\mathcal{A}$ دارای زیرفضای پایای مشترك $\mathcal{X}_0$ هستند گوییم این زیرجبر تحویل‌پذیر است. پیداست که $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ تحویل‌پذیر نیست، زیرا اگر $\mathcal{X}_0$ زیرفضایی غیراز $\{0\}$ باشد می‌توان دید که رابطهٔ

$$\{Tx:x\in\mathcal{X}_0,\quad T\in\mathcal{L}(\mathcal{X})\}=\mathcal{X}$$

برقرار است. درحقیقت اگر برداری غیر ازصفر مانند x در $\mathcal{X}$ داده‌شده‌باشد برای‌هر بردار y در $\mathcal{X}$ اپراتوری روی $\mathcal{X}$ می‌توان یافت‌که x را به y ببرد.

قضیهٔ برنساید

اگر $\mathcal{X}$ فضایی با بعد متناهی روی $\mathbf{C}$ باشد، یگانه زیرجبر تحویل‌ناپذیر $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ خود $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ است.

برای اثبات ساده‌ای ازاین قضیه می‌توان به [۴] رجوع کرد. ما دراینجا می‌خواهیم عمومیت و توان آن را با ذکر چند مثال نشان دهیم. تکرار می‌کنیم که تا اطلاع ثانوی، بعد $\mathcal{X}$ متناهی فرض خواهد شد.

۱. هرخانوادهٔ‌جابه‌جایی از اپراتورهای روی $\mathcal{X}$ را می‌توان همزمان مثلثی گردانید. (به‌عبارت دیگر، نسبت به‌یك پایهٔ برداری مناسب، ماتریسهای این خانواده همه مثلثی هستند.)

اثبات: فرض کنیم $\mathcal{A}$ کوچکترین زیرجبر $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ باشد که خانوادهٔ داده شده را دربردارد (یعنی $\mathcal{A}$ زیرجبر پدیدآمده ازاین خانواده باشد). پیداست که $\mathcal{A}$ جابه‌جایی است و نمی‌تواند همهٔ $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ باشد. پس، بنابرقضیهٔ برنساید، تحویل‌پذیر است. به‌سخن دیگر، پایهٔ برداری مناسبی وجود دارد که نسبت به‌آن، ماتریس هرعضو A از $\mathcal{A}$ به‌شکل زیر است

$$\begin{pmatrix}A_1 & A_3\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$$

زیرا که اعضای $\mathcal{A}$ دارای زیر فضای پایای مشترك $\mathcal{X}_0$ هستند و اگر $\{x_1,\dots,x_k\}$ پایه‌ای برداری برای $\mathcal{X}_0$ باشد، برای تمام $\mathcal{X}$، پایه‌ای‌که این k بردار را دربرگیرد به‌صورت

$$\{x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n\}$$

می‌یابیم و ماتریس همهٔ اعضای $\mathcal{A}$ را نسبت به آن می‌نویسیم. (زیرماتریسهای A_1 و A_2 به‌ترتیب $k\times k$ و $(n-k)\times(n-k)$ هستند.)

اکنون می‌توان اثبات را با استقرای ریاضی به پایان برد. توجه‌کنیدکه بلوکهای نظیر A_1 دراعضای $\mathcal{A}$ زیرجبری را دریك فضای k بعدی‌نمایش‌می‌دهند. همچنین بلوکهای نظیر A_2 زیرجبری از اپراتورها را روی فضایی $n-k$ بعدی می‌نمایانند. هردوی این زیرجبرها چون خود $\mathcal{A}$ جابه‌جایی هستند. پس، با استقرا، این دو زیرجبر را می‌توان مثلثی گردانید و بدین‌گونه، $\mathcal{A}$ خود مثلثی می‌گردد.

۲. به‌عنوان کاربرد دوم قضیهٔ برنساید، نیمگروه‌ها را در نظر می‌گیریم. مجموعهٔ $\mathcal{S}$ از اپراتورهای روی $\mathcal{X}$ را نیمگروه نامیم هرگاه از $S\in\mathcal{S}$ و $T\in\mathcal{S}$ رابطهٔ $ST\in\mathcal{S}$ نتیجه شود. اپراتور T را پوچتوان خوانیم اگر یکی از توانهای صحیح‌آن صفرباشد. پوچتوان بودن T معادل است با اینکه طیف آن $\{0\}$ باشد.

قضیهٔ لویتسکی

هر نیمگروهی را که اعضای‌آن همه پوچتوان باشند می‌توان به‌طور همزمان مثلثی کرد [۵].

اثبات: اگر نیمگروه را $\mathcal{S}$ و جبر پدید آمده ازآن را $\mathcal{A}$ بنامیم به‌آسانی می‌توان دید که $\mathcal{A}$ مجموعهٔ تمام ترکیبهای خطی از اعضای $\mathcal{S}$ است. چون طیف هرعضو S نیمگروه از صفر تنها تشکیل شده، اثر آن نیز صفر است $(\mathrm{tr}(S)=0)$ واز آنجا که اثر، تابعی‌خطی است، برای هرعضو A از $\mathcal{A}$ داریم: $\mathrm{tr}(A)=0$. این رابطه نشان می‌دهد که جبر $\mathcal{A}$ نمی‌تواند تمام $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ باشد. اکنون از قضیهٔ برنساید نتیجه می‌شود که همهٔ اعضای $\mathcal{A}$ (و در ضمن آنها همه اعضای $\mathcal{S}$) دست‌کم یك زیرفضای پایای مشترك دارند. بالاخره به‌کمك استقرا می‌توان اثبات را مانند حالت خانوادهٔ جابه‌جایی به‌پایان برد. کافی‌است توجه‌شود که‌اگر اپراتور پوچتوان A به‌صورت

$$\begin{pmatrix}A_1 & A_3\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$$

نوشته شود A_1 و A_2 نیز پوچتوانند.

۳. به عنوان کاربرد سوم، مسألهٔ دیگری را مطرح می‌کنیم: مجموعهٔ تمام ماتریسهای $n\times n$ را با $\mathcal{M}_n$ نشان می‌دهیم. آیا دو ماتریس A و B می‌توان پیدا کرد که هر عضو $\mathcal{M}_n$ یك چندجمله‌ای در A و B باشد؟ (باید متوجه بودکه مقصود، یك چندجمله‌ای در دو متغیر ناجابه‌جایی است. مثلا دو اپراتور $3A^2B^2A-ABABA$ و $2A^2B^2A$ معمولا مساوی‌نیستند!)

پاسخ این سؤال مثبت است. آسانترین جواب را شاید در دوماتریس

$$A=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\ \vdots&&&\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&&&&&\\0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}$$

بتوان دید. پیداست اپراتوری که B ماتریس آن نسبت به‌پایهٔ $\{x_1, \ldots, x_n\}$ باشد، جز زیرفضای $\{0\}$ و زیرفضاهای

$$\{\mathcal{M}_j,\ j=1, \ldots, n\}$$

که در آن $\mathcal{M}_j$ زیرفضای پدید آمده از $\{x_1, \ldots, x_j\}$ است زیرفضای پایایی ندارد. همچنین به‌آسانی دیده می‌شود که هیچ کدام ازاین زیرفضاها جز $\{0\}$ و $\mathcal{M}_n$ تحت اپراتور با ماتریس A پایا نیستند. پس جبر پدید آمده ازاین دو اپراتور بنا به‌قضیهٔ برنساید همهٔ $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ است. به‌بیان دیگر جبر $\mathcal{M}_n$ از A و B پدید می‌آید، یعنی هرماتریس $n \times n$ یك چندجمله‌ای در A و B است.

دراینجا بد نیست متذکرشویم که درپاسخ بالا می‌توان به‌جای A هرماتریسی را که درایه‌های آن همگی غیرصفر باشند قرار داد. همچنین، اگر T اپراتوری غیر از مضارب عددی I باشد می‌توان پایه‌ای برداری چنان اختیار کرد که همهٔ درایه‌های ماتریس T نسبت به‌آن غیرصفر باشند. برای ملاحظهٔ اثبات این گفته می‌توان به [۱۰] رجوع کرد. نتیجه می‌شود که اگر T اپراتوری غیراز مضارب عددی I باشد اپراتور دیگری مثل S می‌توان یافت به‌طوری که جبر پدیدآمده از S و T همهٔ $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ باشد. (روشن است که اگر T عددی باشد این کار غیرممکن است.)

اکنون می‌پردازیم به‌حالتی که بعد $\mathcal{M}$ نامتناهی باشد. دراین حالت پیداکردن زیرفضایی از $\mathcal{M}$ (غیراز $\{0\}$ و $\mathcal{M}$) که تحت اپراتوری داده شده، مانند T، پایا باشد حتی از حالت پیشین نیز ساده‌تر است ونیازی به‌قضیهٔ اساسی جبر ندارد. کافی است برداری مثل x_0 غیرازصفر در $\mathcal{M}$ گرفته و زیرفضای $\mathcal{M}_0$ پدیدآمده از

$$x_0,\ Tx_0,\ T^2x_0, \ldots$$

را نگاه کنیم. باید توجه کرد که هر بردار $\mathcal{M}_0$ ترکیبی خطی ازتعدادی (محدود) از اعضای دنبالهٔ بینهایت بردارهای بالاست. پیداست که $\mathcal{M}_0$ تحت T پایاست. دو حالت تشخیص می‌دهیم:

اگر بعد $\mathcal{M}_0$ متناهی باشد کار تمام است و زیرفضایی پایا جز $\{0\}$ و $\mathcal{M}$ یافته‌ایم.

اگر بعد $\mathcal{M}_0$ نامتناهی داشته باشد می‌توان به آسانی تحقیق کرد که بردار x_0 به‌زیرفضای $\mathcal{M}_{00}$ پدیدآمده از

$$Tx_0,\ T^2x_0, \ldots$$

متعلق نیست (چه در غیراین صورت عدد صحیحی مانند k وجود خواهد داشت به‌طوری که T^kx_0 ترکیبی خطی از k بردار $\{x_0, Tx_0, \ldots, T^{k-1}x_0\}$ باشد و این بعد $\mathcal{M}_0$ را متناهی می‌گرداند). نتیجه می‌گیریم که زیرفضای کوچکتر $\mathcal{M}_{00}$ تحت T پایاست. بنابراین در هردو حالت زیرفضای پایای مطلوب را یافته‌ایم.

پس غوغایی که زیرفضاهای پایا برانگیخته‌اند برای چیست؟ این غوغا ناشی از دخالت توپولوژی در جبر خطی است! مسألهٔ زیرفضاهای پایا بسیار سخت‌تر و درعین‌حال جالبتر خواهد بود اگر فضای $\mathcal{M}$ را فضای **باناخ** (یعنی فضای نُرمدار کامل) و اپراتور T را **پیوسته** فرض کرده و برای زیرفضای پایا تنها زیرفضاهای **بسته** $\mathcal{M}$ را بپذیریم. پس ازاین‌دراین‌نوشته چنین‌خواهیم کرد.

در ده‌ـدوازده سال اخیر مسأله برای برخی ازفضاهای باناخ حل شده است. نخست آنفلو [۳]، ریاضیدان سوئدی، فضایی را که روی آن اپراتوری بدون زیرفضای پایا وجود دارد ساخت. سپس رد [۱۱]، ریاضیدان انگلیسی، وجود چنان اپراتوری را روی فضای l^1 ثابت کرد و اخیراً نیز نظیر آن اپراتور را روی فضای c_0 یافت. اگر خواننده با این فضاها آشنا نیست چیزی از دست نخواهد داد زیرا که ما بیش از این دربارهٔ آنها صحبت نخواهیم کرد. تنها به‌این‌نکته اشاره می‌کنیم که تاکنون کسی‌نتوانسته است مسأله را برای فضای باناخی که بازتابی باشد حل کند. ما در اینجا تنها حالتی مخصوص یعنی **فضای هیلبرت** را اندکی مورد بحث قرار خواهیم داد. مقصود ازفضای هیلبرت البته فضای برداری نرمدار کامل است که نرم آن ازضرب داخلی به‌دست آمده باشد.

دسته‌هایی از اپراتورها از مدتی پیش معروف به‌داشتن زیرفضاهای پایا بوده‌اند؛ازجمله اپراتورهای نرمال یعنی اپراتورهای T که در رابطهٔ $T^*T = TT^*$ صدق می‌کنند. (T^* اپراتوری است که ماتریس آن، نسبت به یك پایهٔ متعامد یکه، ترانهادهٔ مزدوج ماتریس T باشد.)

دستهٔ دیگری ازاپراتورها که معلوم است زیرفضای پایا دارند، اپراتورهای فشرده می‌باشند. در فضای هیلبرت، اینها درست اپراتورهایی‌هستند که حد اپراتورهای با رتبهٔ متناهی در نرم‌باشند. واضح است که اپراتورهای با رتبهٔ متناهی دارای زیرفضای پایا هستند(مثلا بردآنها زیرفضایی‌پایاست). ولی درمورد اپراتورهای فشرده، مسأله درسال۱۹۵۴ توسط ارنشاین و اسمیت [۱] حل‌شد. تکرار می‌کنیم که اکنون مقصود از زیرفضا، زیرفضای بسته است.

درست مثل حالتی که $\mathcal{M}$ بعد متناهی داشت، اپراتورهای فشرده قابل مثلثی‌کردن هستند. منتها باید توجه داشت که برای مثلثی‌شدن لازم نیست که یك‌اپراتور دارای زیرفضاهایی پایا یکی با بُعد یك، یکی با بُعد دو، یکی با بُعد سه و غیر آن باشد و باید تعریف مثلثی بودن را تعمیم داد.

گوییم خانوادهٔ $\mathcal{E}$ از اپراتورها را می‌توان به‌طور همزمان مثلثی گردانید هر گاه زنجیره‌ای چون $\mathcal{C}$ از زیرفضاهای $\mathcal{M}$ وجود داشته باشد که در دوشرط زیر صدق کند:

الف) $\mathcal{C}$ یك زنجیرهٔ ماکسیمال از زیرفضاهای $\mathcal{M}$ باشد. ($\mathcal{C}$ زنجیره است یعنی هردوعضو $\mathcal{Y}$ و $\mathcal{Z}$ از $\mathcal{C}$ قابل مقایسه‌اند، به‌عبارت دیگر یا $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$ ویا $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y}$. $\mathcal{C}$ ماکسیمال است یعنی هرزیرفضای $\mathcal{M}$ که با تمام اعضای $\mathcal{C}$ قابل مقایسه باشد متعلق به $\mathcal{C}$ است.)

ب) هرعضو $\mathcal{C}$ تحت همهٔ اپراتورهای $\mathcal{E}$ پایا باشد.

برای مثال فرض‌کنیم $\mathcal{M}$ فضای $\mathcal{L}^2[0, 1]$ باشد یعنی‌فضای (نماینده‌های) توابع با مقادیر مختلط که در بازهٔ $[0, 1]$ تعریف شده و در رابطهٔ

$$\int_0^1 |f(x)|^2\, dx < \infty$$

(با انتگرال لبگ) صدق کنند. اپراتور T که می‌خواهیم روی $\mathcal{L}$ در نظر بگیریم عبارت است از «انتگرالگیری نامعین» یعنی

$$(Tf)(x)=\int_0^x f(t)\,dt,\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

به‌آسانی دیده می‌شود که برای هر s در بازهٔ $[0, 1]$ زیرفضای $\mathcal{L}_s$ که با رابطهٔ

$$\mathcal{L}_s=\{f\in\mathcal{L}: f(t)=0,\quad t\in[0, s]\}$$

تعریف می‌شود زیرفضایی پایا تحت T است. همچنین پیداست که

$$\{\mathcal{L}_s : s\in[0, 1]\}$$

یك زنجیره تشکیل می‌دهد. اثبات ماکسیمال‌بودن زنجیره را به‌خواننده وامی‌گذاریم.

از قضیهٔ وجود زیرفضای پایا برای اپراتورهای فشرده نتیجه می‌شود که آنها در حقیقت قابل مثلثی شدن هستند (و اثبات این مطلب بی‌شباهت به‌حالت بعد متناهی نیست). چنانکه در بند (۱) بالا بعد از قضیهٔ برنساید دیدیم، درحالت بعد متناهی یك خانوادهٔ جابه‌جایی را می‌توان همزمان مثلثی گردانید. با اینکه بعد ازقضیهٔ ارنشاین-اسمیت‌افراد زیادی‌ازپژوهندگان‌رشتهٔ اپراتورها کوشیدند مثلثی‌شدن یك خانوادهٔ جابه‌جایی اپراتورهای فشرده را ثابت کنند (ازجمله نگارندهٔ این سطور)، سعی آنها تا سال ۱۹۷۳ به‌جایی نرسید. در آن سال لومونوسف [۷]، یك دانشجوی جوان روس، نه‌تنها آن را ثابت کرد بلکه قضیهٔ بسیار زیبایی را به‌اثبات‌رسانید که نظیر قضیهٔ برنساید برای حالت بعد نامتناهی است. برای نقل حکم این قضیه، مجموعهٔ همه اپراتورهای فشرده روی $\mathcal{L}$ را به $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ نشان می‌دهیم. $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ زیرجبری بسته (در نرم) از جبر همهٔ اپراتورهای پیوسته می‌باشد.

قضیهٔ لومونوسف

یگانه زیرجبر بستهٔ تحویل‌ناپذیر $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ خود $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ است.

(مقصود از زیرجبر تحویل‌ناپذیر البته باز زیرجبری است که اعضای آن دارای زیرفضای (بستهٔ) پایای مشترکی غیر از $\{0\}$ و $\mathcal{L}$ نباشند.)

اینکه یك خانوادهٔ جابه‌جایی از اپراتورهای فشرده دارای زیرفضای پایای مشترك است درست مثل‌حالت بعد متناهی ازقضیهٔ لومونوسف نتیجه می‌شود چه $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ جابه‌جایی نیست. برای مثلثی‌کردن خانواده البته به‌جای استقرای‌ریاضی باید از لم زُرن استفاده کرد.

قضیهٔ لومونوسف همهٔ مسائل راجع به‌اپراتورهای فشرده را حل نکرده است. مثلا نظیر حکم داده شده دربند ۲ی بالا تاکنون بی‌جواب مانده است:

پرسش. اگر $\mathcal{S}$ نیمگروهی از اپراتورهای فشردهٔ با طیف $\{0\}$ باشد آیا $\mathcal{S}$ تحویل‌پذیر است؟

این پرسش چندسال پیش طرح شده‌است. ناگفته نماند که‌اگر جواب آن مثبت باشد نتیجه خواهد شد که چنان نیمگروهی در حقیقت قابل مثلثی شدن است. اگر دراین پرسش «نیمگروه» را به «جبر» تغییر دهیم البته پاسخ مثبت است چه در آن صورت از تحویل‌ناپذیری $\mathcal{S}$ نتیجه می‌شود که بستار آن بنابه‌قضیهٔ لومونوسف $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ است وچون حد اپراتورهای فشردهٔ باطیف $\{0\}$ بازطیفش $\{0\}$ است [۱]، این تناقض به‌دست می‌آید که هراپراتورفشرده‌ای طیف $\{0\}$ را دارد.

اگر خواننده فراموش نکرده باشد، درحالت بُعد متناهی، نظیر پرسش بالا را دربارهٔ نیمگروه بلافاصله به حالت جبر منجر کردیم و این با استفاده از خاصیت اثر بود که تمام اپراتورهای فشرده آن‌را ندارند. دسته‌ای از اپراتورهایی‌که «خیلی فشرده»اند دارای اثری هستندکه دارای همان‌خواص اثر درحالت بعد متناهی می‌باشد. این اپراتورها زیرجبری از $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ را تشکیل می‌دهند که آن‌را به $\mathcal{C}_1(\mathcal{L})$ نشان می‌دهیم. خواننده‌ای‌که از بعد نامتناهی خوشش نمی‌آید بقیه این نوشته را می‌تواند با فرض آنکه دربارهٔ بعد متناهی نوشته شده است بخواند، چه درآن صورت نیز ممکن است نکته‌های نوی در آن بیابد. برای خوانندهٔ علاقه‌مند، به‌بعد نامتناهی، با استفاده از اینکه هر اپراتور فشردهٔ نرمال را می‌توان قطری ساخت، ساده‌ترین تعریف $\mathcal{C}_1(\mathcal{L})$ چنین است: اپراتور فشردهٔ T متعلق به $\mathcal{C}_1(\mathcal{L})$ است اگر وتنها اگرمجموع درایه‌های قطری $(T^*T)^{1/2}$ محدود باشد. (متناهی بودن بُعد فضای هیلبرت $\mathcal{L}$ معادل آن است که داشته باشیم $\mathcal{L}(\mathcal{L})=\mathcal{C}_1(\mathcal{L})$.)

درجبر $\mathcal{C}_1(\mathcal{L})$ برای مثلثی شدن نیمگروهها می‌توان شرط لازم و کافی ساده‌ای به‌دست داد [۸].

قضیه

اگر $\mathcal{S}$ نیمگروهی ازاعضای $\mathcal{C}_1(\mathcal{L})$ باشد، شرط لازم وکافی برای مثلثی شدن همزمان $\mathcal{S}$ آن است‌که برای اعضای دلخواه A، B، C از $\mathcal{S}$ داشته باشیم

$$\operatorname{tr}(ABC)=\operatorname{tr}(CBA).$$

برای ملاحظهٔ اثبات این قضیه می‌توان به [۸] و در حالت مخصوص بعد متناهی به [۹] مراجعه‌کرد. بد نیست توجه شود که اولا رابطهٔ $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$ اتحادی بیش نیست و ثانیاً از تساوی اثرها درشرط داده شدهٔ بالا تساوی اثر «کلمه»های درازتر هم‌که تنها در ترتیب «حروف» فرق داشته باشند با استقرا نتیجه می‌شود. مثلا $\operatorname{tr}(ABC^2B)=\operatorname{tr}(B^2C^2A)$.

از قضیهٔ بالا چندین نتیجه به‌آسانی گرفته می‌شود. ساده‌ترین نتیجه البته آن است که هرخانوادهٔ جابه‌جایی در $\mathcal{C}_1(\mathcal{L})$ قابل مثلثی شدن همزمان است (چه نیمگروه پدیدآمده از خانواده نیز جابه‌جایی است). اینك چند نتیجهٔ دیگر.

فرع ۱ (کاپلانسکی [۵]): اگر $\mathcal{S}$ نیمگروهی ازماتریسهای $n\times n$ باشد که تابع اثر روی آن ثابت است، درآن‌صورت $\mathcal{S}$ را می‌توان همزمان مثلثی ساخت.

این فرع، قضیهٔ لویتسکی را که در بالا ذکر شده (حالتی که اثر روی نیمگروه همواره صفر است) وهمچنین قضیهٔ کولچین[۶] را دربردارد. این قضیه می‌گوید که اگر طیف تمام اعضای $\mathcal{S}$ عبارت از $\{1\}$ باشد، $\mathcal{S}$ قابل‌مثلثی‌شدن همزمان است و این‌درست

حالتی می‌باشد که اثر روی نیمگروه همواره مساوی n است.

فرع ۲: اگر همهٔ اعضای نیمگروه $\mathcal{S}$ از $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ اپراتورهای خودتوان باشند، $\mathcal{S}$ قابل مثلثی شدن همزمان است.

اثبات: نخست توجه می‌کنیم که اگر رتبهٔ اپراتور A را به $r(A)$ نشان دهیم، برای هرعضو A از $\mathcal{S}$ داریم $r(A)=\mathrm{tr}(A)$. با استفاده از اتحاد $\mathrm{tr}(XY)=\mathrm{tr}(YX)$ برای هردوعضو A و B از $\mathcal{S}$ رابطهٔ

$$r(BA)=r(BAB)$$

نتیجه می‌شود. روشن است که برد BAB در اندرون برد BA است. پس از رابطهٔ اخیر (و از آنجا که برای $S\in\mathcal{S}$ داریم $r(S)<\infty$) معلوم می‌شود که برد دو اپراتور BA و BAB در واقع یکی است، یعنی $BAB\mathcal{H}=BA\mathcal{H}$، و بلافاصله رابطهٔ

$$CBA\mathcal{H}=CBAB\mathcal{H}$$

برای اعضای دلخواه A، B، و C از $\mathcal{S}$ به‌دست می‌آید. با تعویض A و C همچنین داریم

$$ABC\mathcal{H}=ABCB\mathcal{H}$$

پس

$$r(CBA)=r(CBAB) \quad \text{و} \quad r(ABC)=r(ABCB).$$

اکنون با استفاده از دو تساوی اخیر و از اتحاد

$$\mathrm{tr}(XY)=\mathrm{tr}(YX)$$

تساویهای متوالی زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(CBA)=r(CBA)=r(CBAB)&=\mathrm{tr}(CB\cdot AB)\\&=\mathrm{tr}(AB\cdot CB)=r(ABCB)=r(ABC)\\&=\mathrm{tr}(ABC).\end{aligned}$$

بنابراین $\mathcal{S}$ قابل مثلثی‌شدن است.

برای فروع دیگر قضیه بالا می‌توان به [۸] رجوع کرد.

مسألهٔ اصلی زیرفضاهای پایا برای یك اپراتور دلخواه در فضای هیلبرت ممکن است برای مدتی دراز حل نشده باقی بماند.

مراجع

1. N. Aronszajn and K. T. Smith, "Invariant subspaces of completely continuous operators," *Ann. of Math.*, **60** (1954) 345-350.
2. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators,* Part I, Interscience, New York (1957).
3. P. Enflo, "On the invariant subspace problem for Banach spaces," *Acta Math.*, **158** (1987) 213-313.
4. I. Halperin and P. Rosenthal, "Burnside's theorem on algebras of matrices," *Amer. Math. Monthly,* **87** (1980) 810.
5. I. Kaplansky, "The Engel-Kolchin theorem revisited," *Contibutions to Algebra* (Bass, Cassidy, and Kovacik, eds.), Academic Press, New York (1977).
6. E. Kolchin, "On certain concepts in the theory of algebraic matric groups," *Ann. of Math.*, **49** (1948) 774-789.
7. V. J. Lomonosov, "Invariant subspaces for the family of operators which commute with a completely continuous operator," *Funct. Anal. & Appl.*, **7** (1973) 213-214.
8. H. Radjavi, "A trace condition equivalent to simultaneous triangularizability," *Canad. J. Math.*, **38** (1986) 376-386.
9. ———, "The Engel - Jacobson theorem revisited," *J. Algebra,* **111** (1987) 427-430.
10. H. Radjavi and P. Rosenthal, *Invariant Subspaces,* Springer - Verlag, New York (1973).
11. C. J. Read, "A solution to the invariant subspace problem on the space l^1," *Bull. London Math. Soc.*, **17** (1985) 305-317.

****

* دکتر حیدر رجوی، دانشگاه دالهوسی کانادا

* بعضی از اصطلاحهای این مقاله مطابق اصطلاحات رایج در مرکز نشردانشگاهی نیست؛ از قبیل «پایا» و «اپراتور» که ما آنها را به ترتیب «ناوردا» و «عملگر» می‌گوییم. دلیل این امر اصرار مؤلف محترم بر اصطلاحاتی است که خود به کار برده‌اند.

آنالیز مختلط و نظریهٔ عملگرها

کریم صدیقی*

علاقه‌مندان نظریهٔ عملگرها از اهمیت آنالیز مختلط در این نظریه آگاهی کامل دارند. انجام بررسی جامعی در زمینهٔ کاربردهای آنالیز مختلط دراین رشته کارآسانی نیست و نیاز به‌تتبع فراوان دارد. دراین بررسی قصد ما این است که نشان دهیم این دو رشته ارتباط زیادی باهم‌دارند و توصیه می‌کنیم که کسانی که می‌خواهند وارد صحنهٔ عملگرها شوند حتماً توشه‌ای غنی از ابزار و ادوات آنالیز مختلط با خود به همراه داشته باشند تا درضمن کار دچار سختی نشوند. برای نشان‌دادن ارتباط این دو رشته ازطرق مختلفی می‌توان وارد شد. شیوهٔ ما انتخاب چند مثال است که درآنها این ارتباط به‌وضوح دیده می‌شود.

ما پس از ذکر تعریفهای اساسی نشان می‌دهیم که تابع حلال تحلیلی است و کاربردهای آن را ملاحظه می‌کنیم. سپس قضیهٔ فولده‌ـپوتنام را شرح می‌دهیم که در اثبات آن از قضیهٔ لیوویل استفاده می‌شود. آنگاه ارتباط بین عملگر انتقال وزین و فضای توابع را بررسی می‌نماییم. مبحث بعدی عملگر ترکیبی است که امروزه مورد علاقهٔ بسیاری از ریاضیدانان است. طیف این عملگر را درحالت خاصی‌معین می‌کنیم. آخرین مبحث، نابرابری هاردی است که به‌کمك آن نشان می‌دهیم فضای برگمن یك فضای غنی است. فضای برگمن نیز همان‌طور که می‌دانیم جایگاه مهمی در نظریهٔ عملگرها دارد.

فضای هیلبرت و عملگرخطی

به‌منظور آشنایی بیشتر با موضوعات مورد بحث، ابتدا به ذکر تعاریفی چند می‌پردازیم. با مفهوم فضای برداری کم و بیش آشنا هستیم. می‌دانیم که یك فضای برداری تحت عمل جمع و همچنین ضرب اسکالر بسته است. یك‌ضرب داخلی روی فضای برداری مختلط V، یك‌تابع عددی از زوجهای مرتب متشکل ازبردارهای x و y است، به‌طوری که

الف) $(x, y)=\overline{(y, x)}$

ب) به‌ازای هراسکالر α و β داریم

$$(\alpha x+\beta y, z)=\alpha(x, z)+\beta(y, z)$$

ج) $(x, x)\geqslant 0$، و تساوی $(x, x)=0$ برقرار است اگر و تنها اگر $x=0$.

اگریك فضای برداری‌مجهز به‌یك‌ضرب داخلی باشدآن‌را یك فضای ضرب داخلی گوییم. دقت کنیدکه در هرفضای ضرب داخلی رابطهٔ $\|x\|=(x, x)^{1/2}$ یك نرم تعریف می‌کند که فضا لزوماً نسبت به‌این نرم‌کامل نیست. درحالت خاص تعریف زیررا داریم.

تعریف. یك‌فضای ضرب داخلی کامل را فضای هیلبرت گویند.

اینك به‌ذکر چند مثال ازفضای هیلبرت می‌پردازیم.

مثال ۱ـ فضاهای L^2 و l^2. فرض‌کنید (X, Σ, μ) یك فضای اندازه شامل مجموعهٔ X، σـجبر Σ حاوی زیرمجموعه‌های X، و اندازهٔ μ باشد. در این صورت $L^2(\mu)$ فضای تمام توابع Σـاندازه‌پذیر $f: X\to \mathbf{C}$ است که در رابطهٔ

$$\|f\|_2=\int_X |f|^2\, d\mu<\infty$$

صدق می‌کنند. برای f و g در $L^2(\mu)$ ضرب داخلی را به‌این صورت تعریف می‌کنیم

$$(f, g)=\int_X f\bar{g}\, d\mu.$$

یکی ازنتایج نظریهٔ اندازه، هیلبرت بودن فضای $L^2(\mu)$ است.

فضای l^2 که حاوی تمام دنباله‌های $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ باضابطهٔ $\sum|x_n|^2<\infty$ است، حالتی خاص ازفضاهای فوق است. ضرب داخلی $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ را در l^2 چنین تعریف می‌کنیم

$$(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n.$$

مثال ۲ـ فضای برگمن. اگر G یک‌مجموعهٔ باز درصفحهٔ مختلط $\mathbf{C}$ باشد، آنگاه $L^2_a(G)$ مجموعهٔ تمام توابع تحلیلی $f: G \to \mathbf{C}$ است به‌طوری‌که

$$\iint_G |f(z)|^2\, dA(z) < \infty$$

که در آن $dA(z) = dx\, dy$ ، $z = x + iy$ ، اندازهٔ لبگ‌دو بعدی مساحت است. فضای $L^2_a(G)$ را فضای برگمن G می‌گویند. در حقیقت این فضا زیرفضایی از $L^2(dA)$ است، پس برای اثبات هیلبرت‌بودن آن کافی است نشان دهیم که $L^2_a(G)$ زیرفضایی بسته از $L^2(dA)$ است. برای این‌کار به‌چند موضوع نیازمندیم.

اگر f تابعی تحلیلی درهمسایگی گوی بستهٔ

$$\overline{B(a,r)} = \{z : |z-a| \leqslant r\}$$

باشد، آنگاه مقدار f درنقطهٔ a از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B(a,r)} f(z)\, dA(z).$$

در این صورت با نوشتن $f(z) = f(z)\cdot 1$ در انتگرال فوق و به‌کاربردن نابرابری هولدر (کوشی-شوارتس) داریم

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{\pi r^2}\left(\iint |f|^2\right)^{1/2}\left(\iint_{B(a,r)} 1^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi r^2}\|f\|_2\, r\sqrt{\pi}$$

$$\leqslant \frac{1}{r\sqrt{\pi}}\|f\|_2 .$$

حال اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $L^2_a(G)$ و f در $L^2(dA)$ باشد به‌طوری‌که $\|f_n - f\|_2 \to 0$ ، نشان می‌دهیم که f در $L^2_a(G)$ است و بدین‌وسیله هیلبرت بودن این فضا را اثبات می‌کنیم. اگر $\overline{B(a,r)} \subseteq G$ و ρ کمتر از فاصلهٔ بین $\overline{B(a,r)}$ و ∂G باشد آنگاه چون به‌ازای هر z در $B(a,r)$ داریم $\overline{B(z,\rho)} \subseteq G$، بنابراین

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leqslant \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}}\|f_n - f_m\|_2 .$$

بنابه قضیهٔ مونتل تابع تحلیلی g وجود دارد به‌طوری‌که روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ G ، به طور یکنواخت، $f_n \rightrightarrows g$. چون $\|f_n - f\|_2 \to 0$ ، با استفاده ازقضیهٔ ریتس-فیشر زیردنبالهٔ $\{f_{n_k}\}$ وجود دارد به‌طوری که $f_{n_k}(z) \to f(z)$ $a.e.\, dA$. پس $f = g$ $a.e.\, dA$ و درنتیجه $f \in L^2_a(G)$.

درحالتی‌که $G = D = \{z : |z| < 1\}$ قرص واحد باشد، هرتابع f در $L^2_a(D)$ یک‌سری توانی به‌صورت

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

دارد. همچنین با اندازهٔ لبگ نرمال شدهٔ $dA = (1/\pi)\, dx\, dy$ روی D داریم

$$\|f\|_2 = \left(\sum \frac{|a_n|^2}{n+1}\right)^{1/2}$$

مثال ۳ـ فضای هاردی. فرض‌کنید $dm = (1/2\pi)\, d\theta$ اندازهٔ لبگ نرمال شده روی دایرهٔ واحد $T = \{z : |z| = 1\}$ باشد و $L^2 = L^2(m)$. برای‌هر g در L^2 ضرایب فوریهٔ g به‌صورت‌زیر تعریف می‌شوند

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

فضای هاردی H^2 را چنین تعریف می‌کنیم

$$H^2 = \{f \in L^2 : \hat{f}(n) = 0 \quad \forall\, n < 0\}.$$

به‌راحتی می‌توان دیدکه H^2 یک‌زیرفضای بستهٔ L^2 و درنتیجه یک فضای هیلبرت است. برای این‌کار دنبالهٔ $\{f_k\}$ را در H^2 درنظرگرفته و فرض کنید در L^2، $f_k \to f$. دراین‌صورت برای هر $n \in Z$، $\hat{f}_k(n) \to \hat{f}(n)$. حال‌اگر $n < 0$ آنگاه $\hat{f}_k(n) = 0$ پس $\hat{f}(n) = 0$ و درنتیجه $f \in H^2$.

طرق دیگری نیز برای تعریف فضای H^2 وجود دارد که همگی با یکدیگر معادل‌اند. فرض‌کنید $H^2(D)$ مجموعهٔ تمام توابع تحلیلی $f : D \to \mathbf{C}$ باشد به‌طوری‌که

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta < \infty .$$

اگر برای هر f در $H^2(D)$ مقدار متناهی‌فوق را به $\|f\|^2$ نمایش دهیم، آنگاه $H^2(D)$ یک‌فضای هیلبرت است. درحقیقت نگاشت $f \longrightarrow f^*$ از $H^2(D)$ به H^2 که به‌صورت حد شعاعی تعریف شده، یعنی

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$$

یک‌همریختی‌طولپا از $H^2(D)$ به‌روی H^2 تعریف‌می‌کند. به‌کمک این نگاشت می‌توانیم هردوفضا را یکی درنظربگیریم. همچنین هرتابع f در $H^2(D)$ یک‌سری توانی به‌صورت

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

داردکه نرم‌آن از رابطهٔ $\|f\|_2 = \left(\sum_0^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}$ به‌دست می‌آید.

اگر a نقطه‌ای در D باشد، آنگاه p_a یعنی هستهٔ پواسون نظیر a را به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم

$$p_a(e^{it}) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+a}{e^{it}-a}\right).$$

برای هرتابع f در H^2 تابع نظیرآن g در $H^2(D)$ انتگرال پواسون f است یعنی

$$g(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})p_a(e^{it})\, dt .$$

مثالهای دیگری نیز از فضاهای هیلبرت وجود دارد که برای آشنایی با آنها باید به کتابهای آنالیز تابعی مراجعه نمود.

طیف. اگر H یک فضای هیلبرت و $T: H \to H$ یک تبدیل خطی باشد به‌طوری که

$$\sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in H,\ x \neq 0\right\} < \infty$$

گوییم که T کراندار است و مقدار فوق را با $\|T\|$ نمایش می‌دهیم.

تبدیل خطی کراندار را عملگر می‌نامیم.

عملگر T روی فضای هیلبرت H را درنظر بگیرید. مجموعهٔ تمام اعداد مختلط λ را به‌طوری که $T-\lambda$ وارون‌پذیر نباشد، طیف T نامیده و به $\sigma(T)$ نمایش می‌دهیم. حالات مختلفی وجود دارد که این عملگر وارون‌پذیر نیست. به‌عنوان مثال، اگر $T-\lambda$ یک به یک نباشد، یعنی $\ker(T-\lambda) \neq (0)$، آنگاه $T-\lambda$ وارون‌پذیر نیست. مجموعهٔ تمام اعداد مختلط λ را به‌طوری که $\ker(T-\lambda) \neq 0$، طیف نقطه‌ای T نامیده، آن را به $\sigma_p(T)$ نمایش می‌دهیم. اگر به‌ازای هر x در H عدد ثابت C وجود داشته باشد به‌طوری که $\|Tx\| \geqslant C\|x\|$، گوییم که T از پایین کراندار است. مجموعهٔ تمام اعداد مختلط λ را به‌طوری که $T-\lambda$ از پایین کراندار نباشد، طیف نقطه‌ای تقریبی T گفته و به $\sigma_{ap}(T)$ نمایش می‌دهیم. واضح است که $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T)$. جالب است بدانیم که $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ اگر و تنها اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ از بردارهای واحد H وجود داشته باشد به‌طوری که $\|(T-\lambda)x_n\| \to 0$.

هم‌ارزی یکانی. عملگر $U: H \to K$ از فضای هیلبرت H به فضای هیلبرت K را یکانی گویند هرگاه $U^*U = UU^* = I$. عملگر T روی فضای هیلبرت H با عملگر S روی فضای هیلبرت K هم‌ارز یکانی است هرگاه عملگر یکانی $U: H \to K$ وجود داشته باشد به‌طوری که $UT = SU$.

ضرب بلاشکه

از مفاهیم دیگری که مورد نیاز ماست ضرب بلاشکه می‌باشد که اینک به‌ذکر آن می‌پردازیم. فرض کنید $\{\alpha_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط غیر صفر در قرص واحد D باشد. شرط لازم و کافی برای آنکه حاصلضرب نامتناهی

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_n}{|\alpha_n|}\ \frac{\alpha_n - z}{1-\bar{\alpha}_n z}$$

روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ D به‌طور یکنواخت همگرا باشد آن است که $\prod|\alpha_n|$ همگرا باشد، یعنی

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|) < \infty.$$

درحالتی که این شرط برقرار است، حاصلضرب فوق یک تابع داخلی تعریف می‌کند که صفرهایش دقیقاً α_1، α_2، ... هستند. به‌خاطر داشته باشید که تابع تحلیلی $f: D \to D$ را داخلی گویند هرگاه وقتی z روی شعاعی که $e^{i\theta}$ را به‌مبدأ وصل می‌کند به $e^{i\theta}$ میل کند، $|f(z)|$ به $a \cdot e$ میل کند.

برای اینکه مطالب فوق را درک کنیم اشاره‌ای به‌اثبات آنها می‌نماییم. قرار می‌دهیم

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\bar{\alpha}_k}{|\alpha_k|}\ \frac{\alpha_k - z}{1-\bar{\alpha}_k z}.$$

هر B_n روی قرص واحد بسته تحلیلی است و $|B_n(e^{i\theta})| = 1$. اگر دنبالهٔ $\{B_n\}$ روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ D به‌طور یکنواخت به‌تابعی چون B همگرا باشد، واضح است که B در D تحلیلی بوده و کران آن ۱ است. حال اگر حاصلضرب نامتناهی روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ قرص واحد به‌طور یکنواخت همگرا باشد، فوراً دیده می‌شود که B تابع تحلیلی کرانداری است که فقط درنقاط α_1، α_2، ... صفر دارد. بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|) < \infty.$$

برای اثبات همگرایی حاصلضرب نامتناهی وقتی که $\Sigma(1-|\alpha_n|) < \infty$، ابتدا نشان می‌دهیم که $\{B_n\}$ در H^2 همگراست. ملاحظه کنید که

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|B_n - B_m|^2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(|B_n|^2 + |B_m|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, B_n B_m)\, d\theta.$$

حال چون $|B_n| = |B_m| = 1$ و $\bar{B}_m = 1/B_m$ (روی دایرهٔ واحد) پس

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|B_m - B_n|^2\, d\theta - 2\left(1 - \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{B_n}{B_m}\, d\theta\right).$$

اگر $n > m$ آنگاه B_n/B_m تحلیلی است و

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{B_n}{B_m}\, d\theta = \frac{B_n}{B_m}(0) = \prod_{k=m+1}^{n}|\alpha_k|.$$

درنتیجه

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|B_n - B_m|^2\, d\theta = 2\left(1 - \prod_{k=m+1}^{n}|\alpha_k|\right).$$

چون حاصلضرب نامتناهی $\prod|\alpha_k|$ همگراست، در H^2 داریم $B_n \to B$. اکنون به‌آسانی می‌توان نشان داد که روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ قرص واحد، $B_n \to B$. همچنین زیردنباله‌ای از B_n تقریباً همه‌جا روی T به B همگراست پس روی T، $|B| = 1$، در نتیجه B تابعی داخلی است.

اکنون ضرب بلاشکه تابعی تحلیلی به‌صورت

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\bar{\alpha}_n}{|\alpha_n|} \cdot \frac{\alpha_n - z}{1-\bar{\alpha}_n z}\right]^{k_n}$$

است که در آن k، k_1، k_2، ... اعداد صحیح نامنفی، و α_n اعداد غیرصفر متمایز در قرص واحدند و $\prod_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^{k_n}$ همگراست.

اکنون که مقدمات لازم را کسب کرده‌ایم می‌توانیم وارد بحث اصلی خود شویم.

حلال یك عملگر و حساب تابعی

فرض کنید H یك فضای هیلبرت و T عملگری روی H باشد. گردایهٔ تمام عملگرهای روی H را به $B(H)$ نمایش می‌دهیم. مجموعهٔ $\rho(T)=\mathbf{C}\setminus\sigma(T)$ را مجموعهٔ حلال T و برای هر λ در $\rho(T)$ عملگر

$$R(\lambda, T)=(\lambda-T)^{-1}$$

را حلال T گویند. دراین قسمت ثابت می‌کنیم که تابع $\lambda\mapsto R(\lambda, T)$ از $B(H)$ به $\rho(T)$ تحلیلی است. این تابع را به F نمایش داده و با رعایت اختصار می‌نویسیم

$$R(\lambda)=(\lambda-T)^{-1}.$$

با استفاده از برابری

$$R(\lambda)-R(\lambda_0)=(\lambda_0-\lambda)R(\lambda)R(\lambda_0)$$

می‌توان نوشت

$$\frac{F(\lambda)-F(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}=-R(\lambda)R(\lambda_0).$$

حال اگر $\lambda\to\lambda_0$، $R(\lambda)\to R(\lambda_0)$، پس $F'(\lambda_0)$ وجود دارد و برابر است با

$$F'(\lambda_0)=-R(\lambda_0)^2=-(\lambda_0-T)^{-2}.$$

اکنون فرض کنید $f:G\to\mathbf{C}$ تحلیلی باشد و $\sigma(T)\subset G$. دراین‌صورت عملگر $f(T)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)R(\lambda, T)\,d\lambda$$

که در آن Γ یك‌خم بستهٔ ساده (خم ژوردان) در G است به‌طوری که $\sigma(T)\subseteq \mathrm{Int}(\Gamma)$، و دراینجا $\mathrm{Int}(\Gamma)$ مجموعهٔ تمام نقاط صفحهٔ مختلط است که عدد گردشی آنها نسبت به Γ برابر با یك می‌باشد. درحقیقت

$$\mathrm{Int}(\Gamma)=\{\lambda\in C: n(\Gamma, \lambda)=1\}.$$

همچنین $\mathrm{Ext}(\Gamma)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Ext}(\Gamma)=\{\lambda\in C: n(\Gamma, \lambda)=0\}.$$

مطلبی که در اینجا باید به‌آن توجه داشت این است که تعریف $f(T)$ بستگی به‌خم ژوردان مربوطه ندارد. این حقیقتی است که به‌کمك قضیهٔ کوشی اثبات می‌گردد. برای اثبات به‌کتب آنالیز تابعی مراجعه شود.

چون

$$T=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda R(\lambda, T)\,d\lambda$$

پس برای هر x در H،

$$Tx=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda R(\lambda, T)x\,d\lambda.$$

درحقیقت Tx حد بردارهایی به‌شکل زیر است

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)R(\lambda_k, T)x.$$

اگر $H(\sigma(T))$ مجموعهٔ تمام توابع f تحلیلی در یك‌همسایگی $\sigma(T)$ باشد، در این صورت نگاشت $f\to f(T)$ از $H(\sigma(T))$ به $B(H)$ یك‌همریختی جبری است. همچنین اگر $f(\lambda)\equiv 1$ آنگاه $f(T)=I$ و اگر $f(\lambda)\equiv\lambda$ آنگاه $f(T)=T$، به‌علاوه اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع تحلیلی روی G، $\phi(T)\subset G$، و f_n به طور یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ G به f همگرا باشد، آنگاه $\|f_n(T)-f(T)\|\to 0$ هرگاه $n\to\infty$.

یکی دیگر از موضوعات جالب توجه، خودتوان ریتس است که اینك به‌شرح آن می‌پردازیم.

خودتوان ریتس. اگر Δ زیرمجموعه‌ای از $\sigma(T)$ باشد به‌طوری که Δ بسته و در توپولوژی نسبی $\sigma(T)$ باز باشد، آنگاه $\sigma(T)=\Delta\cup(\sigma(T)\setminus\Delta)$. دومجموعهٔ باز مجزای G_1 و G_2 را در صفحه طوری درنظر بگیرید که $\Delta\subset G_1$ و $\sigma(T)|\Delta\subset G_2$. سیستم خمهای بستهٔ ژوردان Γ را در G_1 طوری انتخاب می‌کنیم که $\Delta\subset\mathrm{Int}(\Gamma)$ و $\sigma(T)\setminus\Delta\subset\mathrm{Ext}(\Gamma)$. اگر $f=\chi_{G_1}$ تابع مشخصهٔ G_1 باشد آنگاه f درهمسایگی $G_1\cup G_2$ از $\sigma(T)$ تحلیلی است و درنتیجه می‌توان $E(\Delta)=f(T)$ را تعریف نمود. چون $f^2=f$، پس $E(\Delta)^2=E(\Delta)$ یعنی $E(\Delta)$ خودتوان است. این عملگر را خودتوان ریتس می‌نامند. درحقیقت

$$E(\Delta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda, T)\,d\lambda.$$

به‌راحتی دیده‌می‌شود که $\sigma(T|_{E(\Delta)H})=\Delta$ و $TE(\Delta)=E(\Delta)T$.

اگر λ_0 یك‌نقطهٔ مجزای $\sigma(T)$ باشد آنگاه با قراردادن $\Delta=\{\lambda_0\}$ می‌توان $E(\lambda_0)$ را تعریف نمود. درضمن λ_0 یك نقطهٔ منفرد نگاشت $\lambda\to R(\lambda)$ از $\rho(T)$ به $B(H)$ است و بسط لورن این نگاشت حول λ_0 در گوی محذوف

$$0<|\lambda-\lambda_0|<r=\mathrm{dist}\,(\lambda_0, \sigma(T)\{\lambda_0\})$$

به‌صورت زیر می‌باشد

$$(\lambda-T)^{-1}=\sum_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n T_n$$

که در آن

$$T_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(\lambda-\lambda_0)^{-n-1}R(\lambda, T)\,d\lambda$$

و γ دایره‌ای به‌مرکز λ_0 و به‌شعاع کمتر از r است.

چگونگی نقطه منفرد λ_0 از نظر قطب، یا نقطهٔ اساسی بودن، اطلاعاتی ارزشمند درمورد عملگر T در اختیار ما قرارمی‌دهد. دراین مورد قضیهٔ زیر را داریم.

قضیه. اگر λ_0 یك نقطهٔ مجزای $\sigma(T)$ باشد، آنگاه λ_0 قطب مرتبهٔ n حلال $(\lambda-T)^{-1}$ است اگر و تنها اگر $(\lambda_0-T)^n E(\lambda_0)=0$ و $(\lambda_0-T)^{n-1}E(\lambda_0)\neq 0$.

اثبات: بسط سری لورن

$$(\lambda-T)^{-1}=\sum_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n T_n$$

را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم که λ_0 قطب مرتبهٔ n است اگر و تنها اگر به‌ازای $k>n$، $T_{-k}=0$ و $T_{-n}\neq 0$. اگر G_1 و G_2 دومجموعهٔ باز مجزا باشند به‌طوری که $\lambda_0\in G_1$ و $\sigma(T)\{\lambda_0\}\subset G_2$، و Γ یك خم بستهٔ ساده (خم ژوردان) در G_2 باشد به‌طوری که $\sigma(T)\setminus\{\lambda_0\}\subset \mathrm{Int}(\Gamma)$ و $\lambda_0\in \mathrm{Ext}(\Gamma)$ و γ دایره‌ای حول λ_0 در G_1 باشد، دراین‌صورت اگر $f=\chi_{G_1}$ مشخصهٔ G_1 باشد آنگاه $f(T)=E(\lambda_0)$. حال اگر $k\geqslant 1$ آنگاه

$$T_{-k}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(\lambda-\lambda_0)^{k-1}(\lambda-T)^{-1}\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma+\Gamma}f(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^{k-1}(\lambda-T)^{-1}\,d\lambda$$

$$=E(\lambda_0)(T-\lambda_0)^{k-1}.$$

رابطهٔ اخیر از آنجا به‌دست می‌آید که $\gamma+\Gamma$ یك خم ساده بستهٔ (خم ژوردان) در همسایگی $G_1\cup G_2$ از طیف T است. بنابراین قضیه اثبات می‌گردد.

موضوع دیگری که از اهمیت وافری برخوردار است، قضیهٔ نگاشت طیفی است که اینك به‌شرح آن می‌پردازیم.

قضیهٔ نگاشت طیفی. اگر f تابعی تحلیلی در یك همسایگی طیف T باشد آنگاه

$$\sigma(f(T))=f(\sigma(T)).$$

اثبات: اگر $\lambda_0\in\sigma(T)$، دراین‌صورت $g\in H(\sigma(T))$ وجود دارد به‌طوری که

$$f(\lambda)-f(\lambda_0)=(\lambda-\lambda_0)g(\lambda)$$

پس

$$f(T)-f(\lambda_0)=(T-\lambda_0)g(T).$$

چون $T-\lambda_0$ وارون‌پذیر نیست پس $f(T)-f(\lambda_0)$ نیز وارون‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین رابطهٔ $f(\sigma(T))\subset\sigma(f(T))$ اثبات شده است.

به‌عکس اگر $\alpha\notin f(\sigma(T))$ آنگاه

$$g=(f-\alpha)^{-1}\in H(\sigma(T))$$

پس $g(\lambda)(f(\lambda)-\alpha)=1$ و درنتیجه $g(T)(f(T)-\alpha)=I$ یعنی $\alpha\notin\sigma(f(T))$. نشان داده‌ایم که $\sigma(f(T))\subset f(\sigma(T))$ و تساوی فوق ثابت می‌شود.

یکی از قضایای بسیار مهم که در اثبات آن از ابزار آنالیز مختلط استفاده می‌شود این است:

قضیهٔ فولده-پوتنام

اگر N و M دو عملگر نرمال روی فضاهای هیلبرت H و K باشند و $A:H\to K$ عملگری باشد که در رابطهٔ $AN=MA$ صدق می‌کند آنگاه داریم $AN^*=M^*A$.

اثبات: از فرض قضیه نتیجه می‌شود که به‌ازای $j\geqslant 0$، $AN^j=M^jA$؛ بنابراین برای هر چندجمله‌ای p داریم $Ap(N)=p(M)A$. چون تابع‌نمایی حد چندجمله‌ایهاست می‌توان نوشت $Ae^{i\bar zN}=e^{i\bar zM}A$ و یا $A=e^{-i\bar zM}Ae^{i\bar zN}$. و چون تابع نمایی دارای این خاصیت است که $e^{C+D}=e^Ce^D$ هرگاه $CD=DC$، با استفاده از اینکه N و M نرمال هستند می‌توان محاسبهٔ زیر را برای تابع تعریف شده انجام داد

$$f(z)=e^{-izM^*}Ae^{izN^*}$$

$$=e^{-izM^*}e^{-i\bar zM}Ae^{i\bar zN}e^{izN^*}$$

$$=e^{-i(zM^*+\bar zM)}Ae^{i(\bar zN+zN^*)}.$$

از آنجا که $zM^*+\bar zM$ و $\bar zN+zN^*$ هرمیتی‌هستند توابع نمایی فوق یکانی هستند؛ بنابراین $\|f(z)\|\leqslant\|A\|$. چون تابع $f:C\to B(H,K)$ تابعی همه‌جا تحلیلی (تام) می‌باشد، با استفاده از قضیهٔ لیوویل نتیجه می‌گیریم که f مقدارش ثابت است، یعنی

$$0=f'(z)=-iM^*e^{-izM^*}Ae^{izN^*}+ie^{-izM^*}AN^*e^{izN^*}.$$

حال اگر قرار دهیم $z=0$ نتیجه می‌شود که $AN^*=M^*A$، و قضیه اثبات می‌شود.

فضاهای توابع

فرض کنید H یك فضای هیلبرت و $\{e_n\}$ یك پایهٔ متعامد برای H باشد و T عملگری روی H باشد که در رابطهٔ

$$Te_n=\omega_n e_{n+1} \qquad (1)$$

صدق می‌کند و در آن $\{\omega_n\}$ یك دنبالهٔ کراندار از اعداد مختلط است. دراین‌صورت گوییم که T یك عملگر انتقال وزین با وزن $\{\omega_n\}$ است. اگر $n\in Z$، T را عملگر انتقال وزین دوطرفه و اگر $n=1,2,3,\ldots$، T را عملگر انتقال وزین یك‌طرفه می‌گویند. می‌توان نشان داد که یك‌چنین T با یك عملگر انتقال وزین با وزن $\{|\omega_n|\}$ هم‌ارز یکانی است. بنابراین در بررسیهایی که صورت می‌گیرد می‌توان وزن را مثبت فرض کرد. همچنین دیده می‌شود

$$T^ne_k=\omega_k\omega_{k+1}\cdots\omega_{k+n-1}e_{k+n}.$$

باقدری کار بیشتر می‌توان نشان داد که

$$\|T^n\|=\sup_k|\omega_k\omega_{k+1}\cdots\omega_{k+n-1}|.$$

درحالتی که T یك‌طرفه است درمورد الحاقی آن یعنی T^* داریم

$$\begin{cases}T^*e_0=0\\ T^*e_n=\omega_{n-1}, & n\geqslant 1.\end{cases}$$

روش دیگری نیز برای معرفی عملگرهای فوق هست. دراین‌روش وزن موردنظر را درون فضایی قرارمی‌دهیم که خود تشکیل یک فضای هیلبرت می‌دهد و آنگاه عملگر انتقال وزین را به‌صورت عملگری که روی این فضا تعریف می‌شود به‌دست می‌آوریم. اینک به‌شرح جزئیات این‌کار می‌پردازیم.

نماد f را روی $\mathbf{C}$ به‌کمک ضرایب‌مختلط $\hat{f}(n)$ چنین‌تعریف می‌کنیم

$$f(z)=\sum_{n\in Z}\hat{f}(n)z^n .$$

این سری صرفاً جنبهٔ صوری دارد و فعلا صحبتی از همگرایی به‌میان نمی‌آوریم. اگر $\hat{f}(n)=0$ برای $n<0$، آنگاه یک‌سری توانی داریم و درحالت‌کلی سری لورن به‌دست می‌آید.

تعریف. فرض‌کنید $\{\beta(n)\}_{n\in Z}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد به‌طوری‌که $\beta(0)=1$. دوفضای $H^2(\beta)$ و $L^2(\beta)$ را به ترتیب مجموعهٔ کلیهٔ سریهای‌توانی و مجموعهٔ کلیهٔ سریهای لورن درنظر می‌گیریم‌که برای آنها شرط زیر برقرار باشد

$$\|f\|^2=\|f\|_\beta^2=\sum|\hat{f}(n)|^2(\beta(n))^2<\infty .$$

ملاحظه‌کنیدکه درحالت $\beta\equiv 1$ فضای $H^2(\beta)$ همان فضای‌هاردی H^2 است. این دوفضا با ضرب داخلی

$$\langle f,g\rangle=\sum\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}(\beta(n))^2$$

فضاهای هیلبرت هستند. به‌منظور بررسی‌خواص مشترک این دوفضا آنها را با نماد مشترک H نمایش‌می‌دهیم. تبدیل‌خطی M_z (ضرب در z) را روی H چنین تعریف می‌کنیم

$$(M_zf)(z)=\sum\hat{f}(n)z^{n+1},\quad f\in H .$$

ملاحظه می‌شودکه دنبالهٔ $\{f_k\}$، که در آن $f_k(z)=z^k$، تشکیل یک‌پایهٔ متعامد برای H می‌دهد. همچنین $M_zf_k=f_{k+1}$.

قضیه. تبدیل‌خطی M_z روی $L^2(\beta)$ یا $H^2(\beta)$ هم‌ارز یکانی با یک عملگر انتقال وزین یک به‌یک است. به‌عکس، هر عملگر انتقال وزین یک به‌یک با انتخاب مناسبی از β، هم‌ارز یکانی با M_z است.

اثبات: چون $M_zf_k=f_{k+1}$ پس M_z عملگر انتقال وزین با وزن $\{\omega_k\}$ نسبت به‌پایهٔ متعامد یکهٔ $\{f_k/\|f_k\|\}$ است که در آن $\omega_n=\|f_{k+1}\|/\|f_k\|=\beta(k+1)/\beta(k)$.

به‌عکس، فرض‌کنید T یک‌عملگر انتقال وزین نسبت به‌پایهٔ متعامد یکهٔ $\{e_n\}$ باشد. قرار می‌دهیم $\beta(0)=1$ و

$$\beta(n)=\omega_0\cdots\omega_{n-1}\quad(n>0).$$

چنانچه عملگر انتقال وزین دوطرفه باشد، قرارمی‌دهیم

$$\beta(-n)=(\omega_{-1}\cdots\omega_{-n})^{-1}\quad(n>0)$$

عملگر یکانی $U:H\to H$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$Ue_n=\frac{f_n}{\|f_n\|} .$$

حال برای $n>0$،

$$UTe_n=U(\omega_ne_{n+1})=\omega_n\frac{f_{n+1}}{\|f_{n+1}\|}=\frac{\omega_nf_{n+1}}{\beta(n+1)}=\frac{f_{n+1}}{\beta(n)}.$$

ازطرف دیگر

$$M_zUe_n=M_z\frac{f_n}{\|f_n\|}=\frac{f_{n+1}}{\|f_n\|}=\frac{f_{n+1}}{\beta(n)} .$$

درحالت سری لورن نیز مشابه فوق عمل می‌کنیم. بنابراین $M_zU=UT$.

ازقضیهٔ فوق نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه. M_z کراندار است اگر و فقط اگر

$$\sup_k\frac{\beta(k+1)}{\beta(k)}<\infty .$$

دراین حالت

$$\|M_z^n\|=\sup_k\frac{\beta(k+1)}{\beta(k)},\ n=0,1,2,\dots .$$

تعویضگرها

فرض‌کنید A گردایه‌ای از عملگرهای فضای هیلبرت H باشد. تعویضگر A که آن را با A' نمایش می‌دهیم مجموعهٔ تمام عملگرهای B است به‌طوری‌که برای هر $A\in A$، $BA=AB$. در این‌قسمت سعی ما برآن است‌که تعویضگر M_z را مشخص‌سازیم. ابتدا به‌شرحی مقدماتی نیازمندیم.

اگر f و g دوسری لورن صوری باشند، ضرب آنها را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم. قرارمی‌دهیم $h=fg$ که درآن

$$h(z)=\sum\hat{h}(n)z^n,\quad \hat{h}(n)=\sum_{k\in Z}\hat{f}(k)\hat{g}(n-k);$$

درحالت سری توانی صوری، به‌ازای هر $n<0$،

$$\hat{f}(n)=\hat{g}(n)=0;$$

و بنابراین $\hat{h}(n)$ به‌صورت یک‌مجموع متناهی است و مسأله‌ای از بابت همگرایی ایجاد نمی‌شود.

تعریف. مجموعهٔ کلیهٔ سریهای توانی $\phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{\phi}(n)z^n$ را که در رابطهٔ $\phi H^2(\beta)\subset H^2(\beta)$ صدق می‌کنند با $H^\infty(\beta)$ نمایش می‌دهیم. به‌همین‌طریق $L^\infty(\beta)$ مجموعهٔ تمام سریهای‌لورن $\phi(z)=\sum\hat{\phi}(n)z^n$ است به‌طوری‌که $\phi L^2(\beta)\subset L^2(\beta)$. با توجه به‌تعریف فوق می‌توان برای هر ϕ در $(L^\infty(\beta))H^\infty(\beta)$ تبدیل‌خطی M_ϕ راروی $(L^2(\beta))H^2(\beta)$ به‌صورت $M_\phi f=\phi f$ تعریف‌کرد و کراندار بودن آن را مورد بحث قرار داد. در بحث ما M_ϕ کراندار خواهد بود، بدین‌معنی‌که یا کراندار بودن M_ϕ از ابتدا معین است و یا اینکه شیوه‌هایی نظیر قضیهٔ گراف بسته وجود داردکه‌کراندار بودن M_ϕ را تضمین می‌کند. همچنین می‌توان نشان دادکه $M_\phi M_\psi=M_{\phi\psi}$.

قضیه. اگر A عملگری روی $(H^2(\beta))L^2(\beta)$ باشد که با M_z

تعویض می‌شود، آنگاه برای یک ϕ در $(H^\infty(\beta))L^\infty(\beta)$، $A=M_\phi$.

اثبات: فرض کنید $\phi=Af_0$. در این‌صورت داریم

$$Af_k=AM_z^kf_0=M_z^kAf_0=z^k\phi=\phi f_k \quad (k\geqslant 0)$$

وانگهی درحالتی که A روی $L^2(\beta)$ تعریف شده باشد داریم

$$z^{-k}(Af_k)=M_z^{-k}Af_k=M_z^{-k}A(M_z^kf_0)=Af_0=\phi$$
$$(k<0).$$

اینک تابع λ_n را چنین تعریف می‌کنیم: $\lambda_n(g)=\hat{g}(n)$. در این صورت،

$$\lambda_n(Af_k)=\lambda_n(\phi f_k)=\hat{\phi}(n-k).$$

قرار می‌دهیم $g=\sum\hat{g}(k)f_k$. چون این سری در نرم همگراست داریم $Ag=\sum\hat{g}(k)Af_k$. درنتیجه

$$\lambda_n(Ag)=\sum\hat{g}(k)\lambda_n(Af_k)=\sum\hat{g}(k)\hat{\phi}(n-k)$$

که برای هر n همگراست. بنابراین $A=M_\phi$.

عملگر ترکیبی و طیف آن

تابع تحلیلی $\phi: D\to D$ با ضابطهٔ $|\phi(e^{it})|=1$ a.e. را تابع داخلی گوییم. اگر ϕ یک تابع داخلی باشد عملگر

$$C_\phi: L^2(m)\to L^2(m)$$

را که با ضابطهٔ $C_\phi f=f\circ\phi$ تعریف می‌شود عملگر ترکیبی گوییم. ملاحظه کنید که $\phi: T\to T$ یک تبدیل اندازه‌پذیر است و اندازهٔ $m\phi^{-1}$ را روی T القا می‌کند که به‌صورت

$$m\phi^{-1}(\Delta)=m(\phi^{-1}(\Delta))$$

تعریف می‌شود. حال اگر $a=\int\phi\,dm$، در این صورت $dm\phi^{-1}/dm=p_a$ که p_a همان هستهٔ پواسون نظیر نقطهٔ a است یعنی $p_a(e^{it})=Re(e^{it}+a/e^{it}-a)$. برای اثبات این‌مطلب ملاحظه کنید که ضرایب فوریهٔ p_a و $dm\phi^{-1}/dm$ متساوی‌اند، یعنی

$$\int e^{int}\,dm\phi^{-1}=\int\phi^n\,dm=a^n=\int e^{int}p_a\,dm,\quad n\geqslant 0.$$

برای $n<0$ نیز از رابطهٔ فوق مزدوج می‌گیریم.

به‌طوری که درزیر دیده می‌شود، C_ϕ یک عملگر کراندار است و $\|C_\phi\|=((1+|a|)/(1-|a|))^2$. داریم

$$\|C_\phi f\|^2=\int|f\circ\phi|^2\,dm=\int|f|^2\,dm\phi^{-1}$$
$$=\int|f|^2p_a\,dm.$$

از نامساوی

$$\frac{1-|a|}{1+|a|}\leqslant p_a\leqslant\frac{1+|a|}{1-|a|}$$

نتیجه می‌گیریم

$$\|C_\phi\|\leqslant\left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{1/2}$$

اثبات تساوی در رابطهٔ فوق از پیوستگی p_a نتیجه می‌شود.

درحالتی که ϕ یک تبدیل کسری باشد، محاسبهٔ طیف آن امکان‌پذیر است. هر تبدیل کسری از قرص واحد به‌خودش به‌صورت

$$\phi(z)=\frac{az+c}{\bar{c}z+\bar{a}}\quad(|a|^2-|c|^2=1)$$

نوشته می‌شود. نقاط ثابت ϕ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند

$$z=(i\,\mathrm{Im}a\pm((|c|^2-(\mathrm{Im}a)^2)^{1/2})/c$$

البته به‌شرط اینکه $c\neq 0$.

اینک سه حالت درنظر می‌گیریم:

(۱) $|c|<|\mathrm{Im}a|$. در این حالت دو نقطهٔ ثابت داریم که یکی در داخل قرص واحد و دیگری بیرون آن است. گوییم که ϕ بیضوی است.

(۲) $|c|=|\mathrm{Im}a|$. در این حالت فقط یک نقطهٔ ثابت و آن هم روی دایره وجود دارد. گوییم که ϕ سهموی است.

(۳) $|c|>|\mathrm{Im}a|$. در این حالت دو نقطهٔ ثابت و هر دو هم روی دایره وجود دارد. گوییم که ϕ هدلولوی است.

رفتار عملگر C_ϕ در حالات فوق اختلاف اساسی دارد. به‌عنوان نمونه طیف C_ϕ را درحالت سهموی به‌دست می‌آوریم.

قضیه. اگر ϕ سهموی باشد طیف C_ϕ برابر است با دایرهٔ واحد.

اثبات: نشان می‌دهیم که شعاع طیفی C_ϕ و C_ϕ^{-1} هردو با یک برابرند. این خود ثابت می‌کند که طیف C_ϕ درون دایرهٔ واحد قراردارد. با اضافه نمودن این مطلب که دایرهٔ واحد درون طیف نقطه‌ای هر C_ϕ است قضیه اثبات می‌گردد.

ابتدا فرض می‌کنیم $\phi(1)=1$ که این‌کار را می‌توان با یک انتقال انجام داد. حال تبدیل $\gamma(z)=i(1+z/1-z)$ را که قرص واحد را به نیمصفحهٔ بالایی می‌نگارد درنظر گرفته قرار می‌دهیم $\psi=\gamma\circ\phi\circ\gamma^{-1}$. این تبدیل، نیمصفحهٔ بالایی را به‌خودش می‌نگارد وداریم $\psi(\infty)=\infty$. پس به‌ازای عددحقیقی $b\neq 0$، $\psi(\omega)=\omega+b$. چون

$$\psi^n(\omega)=\omega+nb=\gamma\circ\phi^n\circ\gamma^{-1}\omega$$

داریم

$$\phi^n(0)=\gamma^{-1}\circ\psi^n(\gamma(0))=\gamma^{-1}(i+nb)=\frac{nb}{2i+nb}.$$

پس

$$\|C_\phi^n\|^2=\frac{1+|nb/(2i+nb)|}{1-|nb/(2i+nb)|}$$
$$=\frac{|2i+nb|+n|b|^2}{|2i+nb|^2-n^2b^2}\leqslant(n|b|+1)^2.$$

درنتیجه، شعاع طیفی $r(C_\phi)$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$r(C_\phi) \leqslant \overline{\lim}\,(n|b|+1)^{1/n} = 1 .$$

چون ۱ درطیف نقطه‌ای هرعملگر ترکیبی قراردارد، $r(C_\phi)=1$. حال با ملاحظه اینکه ϕ^{-1} نیز سهموی است دیده می‌شود که $r(C_\phi^{-1})=1$، پس طیف C_ϕ درون دایرهٔ واحد است.

نابرابری هاردی

فضای H^1 تشکیل شده است از تمام توابع f که روی قرص واحد D تعریف شده و تحلیلی باشند و همچنین

$$\sup_{r<1} \frac{1}{2\pi}\int |f(re^{i\theta})|\, d\theta$$

متناهی باشد. این مقدار را با $\|f\|_1$ نمایش می‌دهیم. تحت این نرم فضای H^1 یك فضای باناخ است. نامساوی هاردی اینك به‌صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه. فرض‌کنید f تابعی در H^1 با سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ باشد. در این صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|a_n| \leqslant \pi \|f\|_1 .$$

اثبات: ابتدا قضیه را درحالتی بررسی می‌کنیم که $a_n \geqslant 0$. دراین‌صورت چون

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi-\theta)\sin n\theta\, d\theta = \frac{1}{n}$$

داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi-\theta)\operatorname{Im} f(re^{i\theta})\, d\theta$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant \pi \|f\|_1 .$$

اکنون r را به‌سمت ۱ میل می‌دهیم و با فرض $a_n \geqslant 0$ نتیجه به دست می‌آید.

درحالت کلی f را به‌صورت $f=gh$ می‌نویسیم که در آن g و h در H^2 هستند و چنین تعریف می‌شوند

$$g = B\sqrt{\frac{f}{B}}, \quad h = \sqrt{\frac{f}{B}}$$

که در آن B ضرب بلاشکهٔ تولیدشده توسط صفرهای f می‌باشد. اگرسریهای توانی g و h به‌صورت زیر باشند

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad , \quad h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

آنگاه به‌راحتی دیده می‌شود که توابع

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| z^n , \quad H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| z^n$$

نیز در H^2 هستند. درحقیقت

$$\|G\|_2 = \|g\|_2 , \quad \|H\|_2 = \|h\|_2$$

قرارمی‌دهیم $F=GH$. واضح است که F در H^1 قراردارد و

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n z^n$$

که در آن $a'_n \geqslant 0$. همچنین $|a_n| \leqslant a'_n$. طبق قسمت اول داریم که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|a_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a'_n \leqslant \pi \|F\|_1 .$$

اما

$$\|F\|_1 \leqslant \|G\|_2 \|H\|_2 = \|g\|_2 \|h\|_2 = \|f\|_1$$

و اثبات کامل است.

اکنون به‌فوریت از نابرابری هاردی نتیجه می‌شود $H^1 \subset L_a^2(D)$. کافی‌است ملاحظه‌کنیدکه برای $f \in H^1$ داریم

$$\|f\|_2^2 = \sum \frac{|a_n|^2}{n+1} \leqslant (\max|a_n|)\sum \frac{|a_n|}{n+1} \leqslant \pi \|f\|_1^2 .$$

مراجع

1. J. Conway, *Subnormal Operators*, Pitman (1981).
2. P. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York (1970).
3. K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1962).
4. E. Nordgren, "Composition operators," *Canadian J. Math.*, **20** (1963) 442-449.
5. A. Shields, "Weighted shitt operators and analytic function theory," Topics in Operator Theory (C.M. Pearcy. ed.) Amer. Math. Soc., (1974) 49-128.

****

* دکتر کریم صدیقی، دانشگاه شیراز

صدسالگی اتحادیهٔ ریاضیدانان آلمان

فریدریش هیرتسبروخ
ترجمهٔ سیامك کاظمی

در سال ۱۹۹۰، اتحادیهٔ ریاضیدانان آلمان صدمین سالگرد بنیادگذاری خود را طی یك گردهمایی در شهر برمن، زادگاه اتحادیه، جشن گرفت. در این گردهمایی، فریدریش هیرتسبروخ رئیس اتحادیه تاریخچهٔ آن را در یك سخنرانی مرور کرد. ترجمهٔ نسبتاً آزادی از این سخنرانی به زبان انگلیسی در شمارهٔ ۲ی سال ۱۹۹۰ مجلهٔ *متدیکال اینتلیجنسر* به چاپ رسیده و آنچه در زیر می‌خوانید، از روی متن انگلیسی ترجمه شده است. هیرتسبروخ از ریاضیدانان معروف آلمانی است و از ۱۹۵۶ استاد دانشگاه بن و از ۱۹۸۰ مدیر بخش ریاضی مؤسسهٔ ماکس پلانك بوده در ۱۹۹۰ جایزهٔ لباچفسکی را از آکادمی علوم شوروی دریافت کرده و در سال جاری رئیس انجمن ریاضی اروپاست.

اتحادیهٔ ریاضیدانان آلمان (DMV) در ضمن کنفرانسی که انجمن دانشمندان و پزشکان آلمان از ۱۵ تا ۲۰ سپتامبر ۱۸۹۰ در شهر برمن تشکیل داده بود، از بطن گروه ریاضی و نجوم این انجمن تولد یافت.

اساسنامه و نظامنامهٔ اتحادیه در نخستین گردهمایی آن که در شهر هاله و در جوار شصت و چهارمین گردهمایی انجمن پیشگفته تشکیل شد، به تصویب رسید. در این اساسنامه، هدف اتحادیه چنین تعریف شد: «تلاش مشترك برای ترویج و پیشبرد ریاضیات از همهٔ طرق ممکن، برقراری ارتباطات فعال بین قسمتهای مختلف و انتشارات پراکندهٔ آن، رساندن ریاضیات به مقام شایستهٔ آن در حیات فکری ملت، فراهم کردن امکان ارتباط آزادانه و دوستانه بین دست اندرکاران ریاضیات به منظور مبادلهٔ ایده‌ها، تجربه‌ها، و چشم‌اندازها.»

طبق این اساسنامه، کمیتهٔ اجرایی ملزم می‌شد «هرسال با ترتیب دادن برنامهٔ کاملی که، در صورت امکان، شامل سخنرانیهایی در بارهٔ پیشرفتهای یك حوزهٔ خاص از این علم باشد، گردهمایی سالانهٔ اتحادیه را تدارك ببیند.» هنگامی که یکصد سال پیش اتحادیهٔ ریاضیدانان در شهر برمن و در شصت و سومین گردهمایی انجمن دانشمندان و پزشکان پایه‌گذاری می‌شد، افرادی نظیر گئورگ کانتور، پاول گوردون، دیوید هیلبرت، فلیکس کلاین، هرمان مینکوسکی و هاینریش وبر از جمله سخنرانان گردهمایی بودند.

تلاش برای بنیادگذاری اتحادیه خیلی قبل از این تاریخ یعنی در سال ۱۸۶۷ آغاز شده بود. در آن سال، آلفرد کلبش[1]، دانشمند فیزیك ریاضی و هندسهٔ جبری که در گردهمایی انجمن در فرانکفورت ـ آم ـ ماین در بارهٔ صورتهای دوتایی سخنرانی می‌کرد، پیشنهاد مناسبی در این زمینه مطرح ساخت. ریاضیدانان پی برده بودند که برگزاری جلسات منظم تخصصی و تأسیس یك نشریهٔ جدید ضرورت دارد. در پایان یك گردش دو روزه که بیست ریاضیدان در آن شرکت کردند، تصمیم به انتشار *ماتماتیشه آنالن* گرفته شد که بعداً در ۱۸۶۸ تأسیس شد، گرچه هدف مورد نظر این گردهمایی، بنیادگذاری خود اتحادیه بود. این نشریه که نخستین ویراستاران آن آلفرد کلبش و کارل نویمان بودند، ۲۲۸ امین جلد خود را در ۱۹۹۰ منتشر کرد. تأسیس اتحادیه بارها و بارها به تعویق افتاد. در ۱۸۷۲، آلفرد کلبش در سی و نه سالگی به مرض دیفتری مرد. گرچه شاگردش فلیکس کلاین که در آن زمان بیست و سه ساله بود، فکر او را زنده نگهداشت، ولی قدم اساسی اولیه را سالها بعد گئورگ کانتور برداشت.

اتحادیه از بدو تأسیس خود تاکنون نشریهٔ *یارزبریشت* (*سالنامه*) را انتشار داده است. هدف این نشریه، عمدتاً درج مقاله‌هایی بوده که به بررسی پژوهشهای انجام یافته در شاخه‌های ریاضیات محض و کاربردی بپردازند. با نگاهی به مجلدات ده سال اول *سالنامه* معلوم

1. Clebsch

می‌شود که بنیادگذارانش چه درکی از این هدف داشته‌اند.

مقاله‌هایی دربارهٔ فشار خاك، خرپاها، نقشه‌برداری هوایی، مکانیك، نظریهٔ احتمال، سینتیك، و تابعهای توسانی نقش کاربردها را به وضوح نشان می‌دهند. نظریهٔ ناورداها، تابعهای جبری، نظریهٔ اعداد، و نظریهٔ کانتوری مجموعه‌ها برخی از موضوعات ریاضی محض هستند که دربارهٔ آنها مقاله‌هایی درج شده است. به خصوص گزارش معروف ۳۷۰ صفحه‌ای هیلبرت قابل ذکر است که نظریهٔ هیأتهای اعداد جبری را در آن عرضه کرد. گزارش هیلبرت حتی امروز هم پایه و اساس پژوهشهای بسیار است.

در شماره‌هایی از *سالنامه* که در ۱۹۸۹ و ۱۹۹۰ انتشار یافت، مباحثی از قبیل مرز بین هندسه و فیزیك، مسائل با مقدار مرزی آزاد، خمهای بیضوی، رویه‌های مینیمال، آمار، نظریهٔ کنترل، نظریهٔ هوموتوپی و نظریهٔ اعداد، نظریهٔ پیچیدگی، و روش اجزاء متناهی در مکانیك اجسام صلب به چشم می‌خورند. بنابراین امروز هم در *سالنامه* توازن معقولی بین ریاضیات محض و کاربردی دیده می‌شود.

با وجود آنکه اتحادیه خود در پیشبرد و اعتلای ریاضیات کاربردی می‌کوشید، انجمن ریاضیات کاربردی و مکانیك (GAMM) هم در ۱۹۲۲ تشکیل شد و هدف خود را «تقویت و پیشبرد جریانِ اکتشاف علمی در همهٔ شاخه‌های مکانیك، ریاضیات، و فیزیك، که از مبانی علوم مهندسی هستند» قرار داد. اتحادیه خود را مادر این انجمن می‌داند، همان طور که خود را فرزند انجمن دانشمندان و پزشکان به حساب می‌آورد. فلیکس کلاین یکی از اعضای افتخاری GAMM زمانی گفت: «شاید این گفتهٔ لئوناردو داوینچی که علم مکانیك، بهشت ریاضیدان است، مجدداً تحقق یابد».

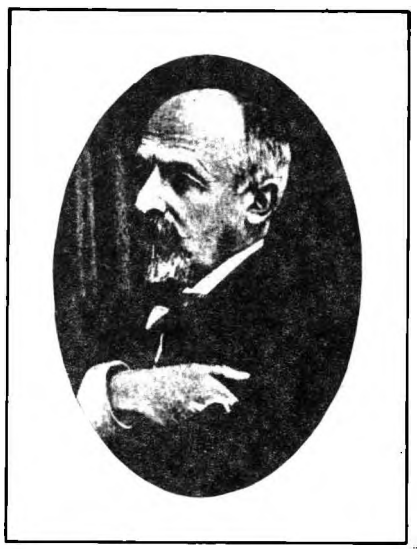
در زمان بنیادگذاری اتحادیه و تا آغاز دورهٔ ناسیونال سوسیالیسم، ریاضیات آلمان مقام رهبری را در صحنهٔ جهانی برعهده داشت. ذکر نکاتی چند دربارهٔ کارها ودستاوردهای سه تن از اعضای مؤسس اتحادیه، کانتور، کلاین، وهیلبرت، مقام عالی این ریاضیات را تا حدی مشخص می‌کند.

گئورگ کانتور (۱۸۴۵ـ۱۹۱۸) از ۱۸۹۰ تا ۱۸۹۳ ریاست اتحادیهٔ ریاضیدانان آلمان را به عهده داشت. وی در ۱۸۷۸ *رساله‌ای در باب نظریهٔ خمینه‌ها* را منتشر کرد و در آن اصطلاح *Mannigfaltigkeit* یا «خمینه» را به‌جای *Menge* یا «مجموعه» به‌کاربرد. وی در این مقاله مفهوم «توان[1]» (عدد اصلی = عدهٔ اعضای) یك مجموعه را معرفی کرد و اعداد ترامتناهی را کشف نمود. این اعداد را نه تنها می‌توان با هم مقایسه کرد بلکه می‌توان اعمال حسابی را روی آنها انجام داد. به علاوه، فرضیه‌ای را که امروز به «فرضیهٔ پیوستار» معروف است بیان کرد: این فرضیه می‌گوید که مجموعه‌ای نامتناهی از نقاط روی محور حقیقی یا شماراست یا معادل است با مجموعهٔ همهٔ نقاط روی محور (یعنی معادل است با پیوستار) ولی در مورد اثبات آن در انتهای مقاله نوشت که بررسی کامل این مسأله را به فرصت دیگری موکول می‌کند.

در سال ۱۸۹۱ در گردهمایی اتحادیه در شهر هاله، کانتور سخنرانی مشهورش را ایراد کرد و ضمن آن به کمك فرایندی قطری که اکنون به نام او نامیده می‌شود ثابت کرد به ازای هرعدد اصلی M، عدد اصلی 2^M بزرگتر از Mاست. پس هر عدد اصلی که در نظر بگیریم عدد اصلی بزرگتر از آن وجود دارد. او سخنانش را با این جمله‌ها پایان داد:

> توانها تعمیم ساده و مهمی از «اعداد اصلی» متناهی‌اند و چیزی نیستند مگر اعداد اصلی ترا متناهی، و همان قدر واقعی و معین هستند که نظایر متناهی آنها، با این تفاوت که روابط مجاز بین آنها یعنی حساب مربوط به آنها از نوع متفاوتی است. تفحص بیشتر در این زمینه، برنامه‌ای است برای آینده.

این ایده‌ها و نظایر اینها کانتور را در معرض مخالفت همکارانی قرار داد که مثلا حکم او را مبنی بر اینکه تعداد نقاط خط و صفحه یکی است، نامعقول می‌دانستند. کانتور قبل از سال ۱۸۹۵ براساس همهٔ انواع مجموعه‌های غریب، پارادوکسهایی در نظریهٔ مجموعه‌های خودش کشف کرد و این یافته‌های جدید را به اطلاع عده‌ای، از جمله هیلبرت، رساند. اصل موضوعی کردن نظریهٔ مجموعه‌ها به دست تسرملو و فرانکل نتیجهٔ تلاشهایی بود که برای غلبه براین بحران



گئورگ کانتور

بنیادی به عمل آمد. در سال ۱۹۴۰، کورت گودل نشان داد که فرضیهٔ پیوستار با نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو ـ فرانکل (که اصل موضوع انتخاب را دربرداشته باشد) سازگار است. در ۱۹۶۴، پال کوهن استقلال فرضیهٔ پیوستار را ثابت کرد و به خاطر این اثبات در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در مسکو در ۱۹۶۶مدال فیلدز گرفت. امروز نظریهٔ مجموعه‌ها به صورت حوزهٔ پژوهشهای عمیق در مبانی ریاضیات درآمده است.

یکی ازجانشینان کانتور، فلیکس کلاین (۱۸۴۹ـ۱۹۲۵) در سالهای ۱۸۹۷، ۱۹۰۳ و ۱۹۰۸ ریاست اتحادیه را برعهده داشت و در ۱۹۱۹ رئیس افتخاری آن بود. همکاران کلاین در پنجاهمین سالگرد دریافت درجهٔ دکتریش بزرگداشتی برای او برپا کردند و در آن مراسم برخی از کارها و دستاوردهایش مورد تأکید قرار گرفت:

> ۱۲ دسامبر ۱۹۱۸ پنجاهمین سالگرد روزی است که شما درجهٔ دکتری خود را در سن نوزده سالگی از دانشکدهٔ فلسفهٔ دانشگاه بن گرفتید... مدت کوتاهی پس از آنکه رسالهٔ دکتری شما چاپ شد...،

1. potency

به اتفاق سوفوس لی اولین پژوهشهای خود را در نظریهٔ گروهها انجام دادید. به دنبال آن در اوایل دههٔ ۱۸۷۰ کشفیات عمیق شما در هندسهٔ نااقلیدسی صورت گرفت و در هنگام پذیرش کرسی استادی ارلانگن [در ۱۸۷۲]، برنامهٔ تاریخساز خود موسوم به برنامهٔ ارلانگن را اعلام کردید. خصیصهٔ اساسیی که سیر درخشان پژوهشهای بعدی شما را متمایز می‌کند در این نکته متجلی است: تأثیر حوزه‌های مختلف ریاضی بر یکدیگر و تحریک هر یك از جانب دیگری و بصیرت نبوغ‌آمیز شما در مورد ارتباطهای درونی آنها. این پژوهشهای ریاضی، که متأثر از رویکرد اختصاصی شماست، به زیباترین شکل در کار تحسین برانگیز شما در زمینهٔ تبدیل تابعهای بیضوی مرتبهٔ هفت به ثمر نشست. این یافته‌ها چون الماسی در عالم تحقیقات ریاضی همیشه خواهد درخشید. همچنین فواید رویکرد شما در وسعت و غنای کار بعدیتان در زمینهٔ کاربردهای ریاضیات در علوم طبیعی، متجلی است.

کلاین در میان ریاضیدانان معاصر خود برجسته‌ترین سیاستگذار علمی بود. او در برنامه‌هایی از قبیل ادغام دانشگاهها و مدارس فنی،

فلیکس کلاین

همکاری با صنعت، همکاری در پایه‌گذاری مؤسسهٔ پژوهشهای آئرودینامیکی در گوتینگن، همکاری در تدوین *دایرة‌المعارف علوم ریاضی*، ریاست کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی، و اصلاح آموزش ریاضی و علمی در سطوح مقدماتی تا دانشگاهی، سهیم بود. همهٔ این فعالیتها امروز نیز به اندازهٔ آن زمان اهمیت دارند. ولی «تأثیر حوزه‌های مختلف ریاضی بر یکدیگر و تحریك هریك از جانب دیگری» و نیز «کاربردهای ریاضیات در علوم طبیعی» که در بزرگداشت کلاین از آنها یاد شد هیچگاه به اندازهٔ امروز اهمیت نداشته است. تجزیهٔ ریاضیات به قسمتهای محض و کاربردی، غیرمنطقی و زیان‌آور بوده و در گذشته به برداشتن گامهای اشتباه آمیزی انجامیده است. فلیکس کلاین اگر امروز زنده بود از ملاحظهٔ اینکه این تقسیم بندی در سالهای اخیر تا حد زیادی از میان رفته و ریاضیات دوباره یکپارچگی خود را به دست آورده، خوشحال می‌شد و به جای تونل باد که در مؤسسهٔ پژوهشهای آئرودینامیکی مورد علاقهٔ او بود، امروز احتمالا به نظریه‌های مدلسازی ریاضی توجه می‌کرد که مثلا طرح بهینهٔ بال هواپیما را به کمك کامپیوترهای سریع به دست می‌دهند.

ریچارد کورانت در سال ۱۹۲۱ در گوتینگن جانشین کلاین شد. با ابتکار کورانت و کمك بنیاد راکفلر، مؤسسه‌ای ریاضی ساخته شد و در ۱۹۲۹ وقف گردید. به این ترتیب، یکی دیگر از رؤیاهای فلیکس کلاین به تحقق پیوست.

و بالاخره، در همین دورهٔ اولیهٔ تاریخ اتحادیه، دیوید هیلبرت (۱۸۶۲ـ۱۹۴۳) ریاست اتحادیه را در سال ۱۹۰۰ به عهده داشت. در همین سال، هیلبرت در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در پاریس در بارهٔ بیست و سه مسألهٔ معروف سخنرانی کرد و این سئوال را مطرح نمود: «در این قرن جدید چه روشها و حقایق تازه‌ای در حوزهٔ غنی و پهناور تفکر ریاضی کشف خواهد شد؟» مسأله‌های هیلبرت که حاکی از آینده نگری او بودند، از فرضیهٔ پیوستار کانتور (مسألهٔ ۱) تا بسط روشهای حساب وردشها (مسألهٔ ۲۳) را شامل می‌شدند. از آن زمان تاکنون بسیاری از این مسأله‌ها حل شده‌اند ولی در مسألهٔ هشتم که در بارهٔ توزیع اعداد اول است، فرضیهٔ ریمان هنوز به صورت مسألهٔ حل نشدهٔ

دیوید هیلبرت

مهمی باقی مانده است.

هیلبرت در ۱۹۴۳ در خلال جنگ و در دورهٔ پر از وحشت نازیسم درگذشت. هرمان وایل رئیس اتحادیه در سال ۱۹۳۲ و جانشین هیلبرت در کرسی ریاضی گوتینگن که به همراه همسرش در سال ۱۹۳۳ به پرینستون رفته بود به مناسبت درگذشت هیلبرت شرحی [به انگلیسی] دربارهٔ او نوشت که در همان زمان جنگ به وسیلهٔ انجمن سلطنتی بریتانیا و انجمن فلسفهٔ آمریکا انتشار یافت. به گفتهٔ او:

در آغاز امسال، شهر گوتینگن آلمان شاهد مرگ دیوید هیلبرت بود، مردی که دنیا در خلال چندین دههٔ گذشته در او به چشم بزرگترین ریاضیدان زنده می‌نگریست... هیلبرت و مینکوسکی قهرمانان واقعی دورهٔ باشکوه و درخشانی بودند که ریاضیات در دههٔ اول این قرن در گوتینگن به خود دید... در میان مؤلفان تعداد زیادی رسالهٔ دکتری ارزشمند... که با راهنمایی هیلبرت نوشته شده، به نامهای انگلوساکسنی زیادی بر می‌خوریم، نامهای افرادی که بعداً نقش برجسته‌ای در پیشبرد ریاضیات آمریکا ایفا کردند.

هرمان وایل در ادامهٔ مطلب می نویسد: «چندی نگذشت که نازیسم چون توفانی فرا رسید و کسانی که پایه‌های گوتینگن را گذاشته بودند و کسانی که در آنجا تدریس می کردند، بجز هیلبرت، در سراسر کرهٔ زمین پراکنده شدند و سالهای پس از ۱۹۳۳ برای هیلبرت سرشار از تنهایی و ملالت بود.»

مایلم چند کلمه‌ای در بارهٔ این دورهٔ وحشتناك که به دورهٔ رایش سوم موسوم است صحبت کنم. قانون آوریل ۱۹۳۳ دربارهٔ اصلاح نظام مشاغل کشوری و قوانینی که بعداً برای تشدید آن وضع شد، به اخراج دانشگاهیان یهودی و به طور کلی تمام کارکنان رسمی که از لحاظ سیاسی به نظر دولت قابل اعتماد نبودند، انجامید. این اخراجها سرآغاز سلسله‌ای از جنایات نازیها بود که به قوم کُشی منجر شد. بسیاری از دانشمندان آلمان را ترك کردند (و به قول هرمان وایل «در سراسر کرهٔ زمین پراکنده شدند.») و خیلی از آنها هم جان خود را از دست دادند. ما آثار این گذشتهٔ موحش را در دانشگاههای خودمان می بینیم. مثلا از کسانی که در دانشگاه بن کار می کردند، فلیکس هاوسدورف و اتو تو پلیتس را می‌توان نام برد. اولی به‌اتفاق همسرش در سال ۱۹۴۲ برای اینکه به اردوگاه اعزام نشود خودکشی کرد و دومی در ۱۹۳۹ به اورشلیم مهاجرت کرد و در همانجا مرد. م. پینل[1] در گزارشی با عنوان «دانشگاهیان در یك دورهٔ ظلمانی» که بین ۱۹۶۹ و ۱۹۷۴ در *سالنامهٔ* اتحادیه انتشار یافت شرحی از سرگذشت این دانشمندان به رشتهٔ تحریر کشید. در سال ۱۹۳۴ مشاجرات سیاسی زیادی در درون اتحادیه در می گرفت. در این مورد، به خصوص نامهٔ یك ریاضیدان برجسته به ویراستار *سالنامه* مایهٔ شرمساری است. در این نامه، نویسنده ادعا کرده بود که اتحادیه نمی‌تواند به وظیفهٔ مقررش یعنی «رساندن ریاضیات به مقام شایسته‌اش در حیات فکری ملت» عمل کند زیرا ۴۰٪ اعضای آن از نژاد آلمانی نیستند. و در ادامهٔ مطلب گفته بود که لازم است اساسنامه تغییر کند تا موقعیت اتحادیه در نظام ناسیونال سوسیالیستی مشخص شود. ولی اتحادیه توانست نظر قدرتِ سلطه‌جوی حاکم را در اساسنامه‌اش دخالت ندهد و در کادر رهبری آن هم افرادی (از جمله ویلهلم زوس از ۱۹۳۷) سرکار می آمدند که در وهلهٔ نخست به ریاضیات توجه داشتند.

بنا به فرمانی که وزارت فرهنگ در ۱۹۳۸ صادر کرد فقط «رایشسبورگر» ها یعنی آلمانی نژادان حق عضویت در اتحادیه را داشتند و همهٔ اعضای یهودی باید اخراج می‌شدند. به طور کلی، اتحادیهٔ ریاضیدانان آلمان و اعضایش در دورهٔ ناسیونال سوسیالیستی قهرمانانه رفتار نکردند ولی کدام یك از ما می توانیم بگوییم که اگر به جای آنها بودیم بهتر عمل می کردیم؟

ریاضیات آلمان که پس از جنگ جهانی اول هنوز در بالاترین سطح قرار داشت، بعد از جنگ دوم نقش رهبری جهانی خود را از دست داد. با خاتمه یافتن جنگ، اتحادیهٔ ریاضیدانان آلمان تحت ریاست اریش کامکه (که در ۱۹۵۰ معاون اتحادیهٔ ریاضی بین المللی بود) فعالیت خود را از سر گرفت و اولین جلسهٔ بعد از جنگ خود را در توبینگن در سپتامبر ۱۹۴۶ تشکیل داد.

1. Pinl

سال ۱۹۹۰

تحولات اروپای شرقی، جنوب شرقی، و مرکزی، به خصوص دگرگونی مسالمت آمیز در آلمان شرقی که به حذف دیکتاتوری حزب وحدت سوسیالیستی انجامید، و اتحاد دوبارهٔ دو آلمان که به زودی صورت خواهد گرفت، مسائل جدیدی را در برابر ما می‌نهند و فرصتهایی استثنایی پیش می‌آورند. در جریان کنگرهٔ ریاضی آلمان شرقی در درسدن، نشست عمومی انجمن ریاضی آلمان شرقی (MGDDR) در ۱۲ سپتامبر ۱۹۹۰ تصویب کرد که این انجمن و اتحادیهٔ ریاضیدانان آلمان باید در هم ادغام شوند. نشست عمومی اتحادیه نیز توصیهٔ مشابهی را در ۲۰ سپتامبر بررسی می کند.

حال چه باید کرد؟

انجمنی که از وحدت انجمن ریاضی آلمان شرقی (MGDDR) و اتحادیهٔ ریاضیدانان آلمان (DMV) پدید آید احتمالا «اتحادیهٔ ریاضی آلمان» نامیده خواهد شد که در این عنوان، کلمهٔ «اتحادیه» امروز معنای خاصی دارد. وظایف این اتحادیهٔ جدید چیست؟ اتحادیه باید برای پیشبرد ریاضیات در همهٔ زمینه‌ها، معلمان ریاضی و نیز ریاضیدانانی را که در صنعت کار می کنند جذب کند تا نمایندهٔ همهٔ ریاضیدانان باشد.

انجمن ریاضی آلمان شرقی می‌تواند کمکهای بسیاری به راه‌اندازی اتحادیهٔ جدید بکند. درهای این انجمن هم به روی معلمان ریاضی و هم به روی ریاضیدانانی که در صنعت کار می کنند باز بوده است. از نشریهٔ ادواری این انجمن می‌توان برای نشریهٔ ادواری اتحادیهٔ جدید سرمشق و الهام گرفت. انجمن بخشها و گروههای ویژه‌ای در «شاخه‌های حاشیه‌ای» ریاضیات دارد که تحقیقات ریاضی از آنجا نشأت می گیرند و به درون ریاضیات کشانده می شوند. و نیز کنفرانسهای منظم کوچکی در زمینهٔ پیشرفتهای جدید در شاخه‌های مختلف ریاضیات برگزار می کند که توجه و علاقهٔ زیادی را در سطح بین المللی برانگیخته‌اند و باید همچنان برگزار شوند تا مکمل مؤسسهٔ اوبر وولفاخ (که همیشه ظرفیت آن تکمیل است) و سمینارهای اتحادیهٔ ریاضیدانان باشند.

میل دارم گفته‌ای را که در مقدمهٔ مثالهای گزارش دیوید آمده نقل کنم: «وحدت و پیوند پر ثمرِ حوزه‌هایی که درون هستهٔ اصلی ریاضیات اند، افزایش کاربردها (که غالباً با کشف کاربردهای نامعمول و غیرمنتظره‌ای از ریاضیات همراه است)، و نقش روبه افزایش کامپیوتر، موضوعاتی هستند که در این مثالها نشان داده می شوند.» در مراسم بزرگداشت فلیکس کلاین در ۱۹۱۸ به جای «وحدت و پیوند پرثمر» از «تأثیر و تحریك متقابل» سخن به میان آمد اما هر دو عبارت، منظور واحدی را می‌رسانند. همچنین در گزارش دیوید از هستهٔ اصلی ریاضیات صحبت می شود و فلیکس کلاین هم از «قسمتهای مرکزی» ریاضیات سخن به میان می آورده بود؛ و ما در اینجا از نوعی ریاضیات صحبت می کنیم که صرفنظر از کاربردش، کاشفانه یا خلاقانه است، یعنی نوعی از ریاضیات که دست اندر کارانش آن را به خاطر زیباییش دوست می‌دارند و بسط و گسترش می‌دهند، و پرداختن به آن از همان حقانیتی برخوردار است که پرداختن به آهنگسازی یا نقاشی. ریاضیات، هنر نیز هست.

دوئل کننده و هیولا*

یان استیوارت
ترجمهٔ علیرضا جمالی

در پایان جلسه‌ای در کالج مهندسی کوپرزهیل از حضار پذیرایی شد و بخشهای علوم درمعرض بازدید قرارگرفتند. بانوی جوانی در هنگام ورود به آزمایشگاه فیزیك با مشاهدهٔ تصویر مقلوب خود در آینهٔ محدب بزرگی، ساده لوحانه به‌دوست همراهش اظهارداشت، «آینه را واژگون آویزان کرده‌اند!»

کلانت و. دورل

«شلیك از بیست وپنج قدمی!» در ۳۰ مه ۱۸۳۲ یك انقلابی‌جوان فرانسوی درحین‌دوئل بزسر بانویی، از ناحیهٔ شکم با گلولهٔ تپانچه‌ای مورد هدف قرار گرفت و روز بعد براثر ورم صفاق درگذشت. او را درگودال عمومی‌گورستان‌مون‌پارناس‌دفن‌کردند. درست پیش‌از این دوئل به‌دوستانش ناپلئون لبون و و. دلونی نوشت: «من‌قربانی یك زن بدکارهٔ رسوا خواهم شد. چراغ زندگیم در یك نزاع نکبت‌بار خاموش می‌شود. آه! چرا باید برای چنین چیز بیهوده و حقیری مرد!» جزئیات این‌واقعه روشن نیست؛ در واقع تا همین اواخر آن بانو به «استفانی د.» مشهور بود تا اینکه کارلوس اینفانتوزی به تحقیق فاش ساخت که وی استفانی-فلیشی پوترین دومتل[1]، دختر بسیار محترم یك فیزیکدان بوده‌است.

بازیگر این نمایش احساساتی همان شب نامهٔ دیگری به‌اوگوست شوالیه‌نوشت: «من کشفیات تازه‌ای درآنالیز کرده‌ام.» و نامه را با این جمله خاتمه دادکه «از ژاکوبی یا گاوس علناً درخواست کن عقیدهٔ خود را دربارهٔ اهمیت این قضیه‌ها و نه در مورد صحت آنها بیان کنند. امیدوارم بعدها کسانی پیدا شوندکه سودشان را دراین ببینندکه رمز این مطالب آشفته راکشف کنند.» این «مطالب آشفته»، به‌گفتهٔ تونی روتمن، «سرآغاز خلق شاخه‌ای از ریاضیات بودکه اینك موجبات درك عمیق‌حوزه‌های متنوعی‌از علوم مانند حساب، بلورشناسی، فیزیك ذرات، و مواضع قابل حصول درمکعب روبیك را فراهم آورده‌است.»

این‌شاخه از ریاضیات، «نظریهٔ گروهها» و خالق تیره‌بخت آن، اواریست گالوا بود.

1. Stéphanie-Felicie Poterin du Motel

قالب معادله چیست؟

گالوا در مسأله‌ای قدیمی‌کار می‌کرد. همان‌گونه که می‌دانیم، معادلات درجهٔ ۱، ۲، ۳، و ۴ را می‌توان با دستور دقیقی، یعنی‌با عبارتی جبری که متضمن چیزی پیچیده‌تر از ریشه‌های nام، یا رادیکالها، نباشد حل کرد. ولی‌معادلهٔ درجهٔ پنجم‌در برابر همهٔ تلاشها به‌منظور یافتن چنین‌دستوری ایستادگی می‌کرد. درسالهای ۱۸۰۰، توجه ریاضیدانان از مسألهٔ پیدا کردن راه حل به‌اثبات اینکه راه حلی رادیکالی موجود نیست معطوف گشت. پائولو روفینی در این زمینه کوشش بی‌نتیجه‌ای در ۱۸۱۳ به‌عمل آورد، و سرانجام مسأله در ۱۸۲۴ به‌وسیلهٔ آبل حل شد. برهان آبل شامل تحلیل پیچیده‌ای از درجات معادلاتی‌کمکی بودکه امکان داشت درطول فرایند حل، با فرض اینکه چنین راه‌حلی موجوداست، پیش آیند. ولی گالوا جاه‌طلبتر بود. گرچه معادلهٔ کلی‌از درجهٔ ۵ حلپذیر نیست، معادلات خاص زیادی از درجات ناکمتر از ۵ موجودند که با استفاده از رادیکالها حل می‌شوند. گالوا درپی روشی برای هر معادلهٔ مفروض‌بود، خواه این‌معادله به‌وسیلهٔ رادیکالها حلپذیر باشد خواه نباشد. جواب وی شگفت‌آور و بکربود. همه‌چیز به‌تقارنهای معادله بستگی دارد.

تقارن چیست؟

هرمان وایل درسلسله درسهای مشهورش در زمینهٔ تقارن می‌گوید «تقارن مفهومی است‌که بشر درطی اعصار کوشش‌کرده تا به‌وسیلهٔ آن‌نظم، زیبایی، وکمال رادرك وخلق‌کند.» هنگامی‌که ریاضیدانان ازتقارن صحبت می‌کنند چیزخیلی خاصی‌را درنظردارند: شیوه‌ای برای تبدیل یك شیء که ساختمانش را حفظ کند.

به‌عنوان مثال، مربعی را درنظربگیرید، و محدودهٔ آن‌رارسم کنید. اینك هرگاه مربع را حرکت دهید، معمولا درمحدودهٔ خود قرارنمی‌گیرد. ولی‌درست هشت حرکت وجود داردکه تحت این حرکات مربع در جای خود قرار می‌گیرد. این حرکات عبارت‌اند از اینکه مربع را

(۱) به‌حال خود بگذارید.
(۲) °۹۰ (درخلاف حرکت عقربه‌های ساعت) دوران‌دهید.
(۳) °۱۸۰ دوران دهید.
(۴) °۲۷۰ دوران دهید.
(۵) حول یك محور عمودی بچرخانید (مانند دری که حول لولایی می‌چرخد).
(۶) حول یك محور افقی بچرخانید.
(۷) حول یك قطر بچرخانید.
(۸) حول قطردیگر بچرخانید.

هریك ازاین‌اعمال یك تقارن مربع‌است. هرگاه دو تقارن به‌نوبت اِعمال شوند، به‌وضوح، مربع بازهم درمحدودهٔ خود واقع‌می‌شود؛ بنابراین، نتیجه،تقارنی دیگر است. به عنوان مثال، ابتدا «°۹۰ دوران دادن» و سپس«°۱۸۰ دوران دادن» همان اثری را دارد که «°۲۷۰ دوران دادن» دارد. در اینجا می گوییم مجموعهٔ تقارنها خاصیت گروه را دارد، یعنی «حاصلضرب» هردو تقارن یك تقارن است. مجموعهٔ تقارنها را گروه تقارن مربع می‌نامیم. این گروه خاص شامل هشت عنصر تقارن‌است: دراینجا می گوییم این گروه دارای مرتبهٔ هشت است.

اینك یك سطح نامتناهی را درنظر بگیرید که به‌طرزمعمول با آجرهای مربعی فرش شده باشد. این طرح آجرفرش، هر هشت تقارن مربع رادارد و به‌علاوه دارای بینهایت تقارن انتقالی‌است. کل طرح را می‌توان ۱، ۲، ۳، ... واحد به‌طور افقی یا عمودی جابه‌جا کرد یا آن را به‌طرف بالا یا پایین، چپ یا راست انتقال داد، همین‌طور می‌توان آن را در صفحه دوران داد، یا آن را چرخاند (به‌طوری‌که چرخش درصفحه انجام نشود).

هرشیء ریاضی، هرچند مجرد، می‌تواند تقارنهایی داشته باشد. اینك این‌تقارنها به‌عنوان‌تبدیلاتی‌از این‌شیء که «قالب» آن را، یعنی ساختمان اساسی‌آن را، حفظ می‌کنند تعریف می‌شوند. تقارنها از نو یك‌گروه تشکیل می‌دهند؛ یعنی، در صورتی‌که دو تقارن به‌نوبت اِعمال شوند نتیجه باز تقارن دیگری است. روش مطالعهٔ تقارن به‌عنوان مفهومی کلی، نگریستن به خاصیتهای جبریِ این فرایندِ ترکیبِ تبدیلات‌است.

قالب معادله

این‌مفاهیم‌امروز بسیار روشنتر ازعصر گالوا هستندولی برای سهولت بیان، از دیدگاه جدید درتشریح ایده‌های وی سود خواهیم‌جست. یك معادله چه قالبی دارد؟ شیئی ریاضی که دراینجا به‌کار می آید، مجموعهٔ‌جوابهای معادله‌است.(یك معادلهٔ درجهٔ nام همواره‌دارای n ریشهٔ حقیقی یا مختلط‌است.) تبدیلات دراینجا عبارت ازطرق مختلف مرتب‌کردن این جوابها یعنی، جایگشتهای آنهاست. و قالب ــ ساختمانی‌که باید حفظ شود ــ دستگاهی از روابط جبری است‌که بین آنها برقراراست. این مفهوم را می‌توان به‌آسانی با استفاده از معادله‌ای که جوابهای آن به‌سادگی به‌دست می‌آیند درك‌کرد، مثلا معادلهٔ زیر را درنظر بگیرید

$$x^4-5x^2+6=0.$$

ریشه‌های این‌معادله عبارت‌اند از $\sqrt{2}$، $-\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، و $-\sqrt{3}$. این ریشه‌ها را α، β، γ، δ می‌نامیم. واضح است‌که α و β یك «زوج جور» را تشکیل می‌دهند، و γ و δ نیز چنین وضعی دارند. درواقع، راهی‌برای تمیزدادن α وβ، صرفاً با به‌کاربردن معادلاتی با ضرایب گویا، وجود ندارد. مثلا α درمعادلهٔ $\alpha^2-2=0$ صدق می‌کند، β نیز صدق، می‌کند. و $\alpha+\beta=0$؛ از طرفی با تعویض نقش α و β، $\beta+\alpha=0$ به‌دست می‌آیدکه آن نیزصادق است. همین‌طور، γ و δ (صرفاً با معادلاتی با ضرایب گویا) از لحاظ جبری غیرقابل تمیزاند. از طرف دیگر به‌سادگی می‌توان گفت که α و γ متمایزند، زیرا $\alpha^2-2=0$ صادق است درصورتی‌که $\gamma^2-2=0$ چنین نیست. منظور ما این نیست‌که بین $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ هیچ تفاوتی نیست: واضح است که این دو مختلف‌العلامه‌اند. امااین‌تمایزعلامات‌را نمی‌توان‌تنها با به‌کاربردن معادلات‌چندجمله‌ای با ضرایب گویا آشکارساخت. هرگاه فهرستی از این‌چهارجواب‌را بنویسیم،درست‌چهارطریق‌برای مرتب‌کردن آنها ، به طوری که همهٔ معادلات صادق در ترتیب اولیه در ترتیب جدید صادق باقی‌بمانند، وجود دارد. اینها عبارت‌اند از:

$$\alpha\beta\gamma\delta \quad | \quad \alpha\beta\delta\gamma \quad | \quad \beta\alpha\gamma\delta \quad | \quad \beta\alpha\delta\gamma.$$

این فهرست از جایگشتها را گروه گالوای این معادله می‌گویند. و اینك، فقط با نگاهی به‌این گروه گالوا، می‌توان گفت که معادله به‌کمك رادیکالها حلپذیراست یا نه. این‌موضوع کاملا آشکاراست، چنین نیست؟ نه؟ بسیار خوب، اگرشما دراین زمینه مبتدی هستید، موضوع راتوضیح می‌دهیم. گرچه بیان دستورالعمل اندکی‌مشکل است، ولی ما سعی خود را خواهیم کرد: نکتهٔ اصلی در درك موضوع این‌است‌که ضابطهٔ قابل‌محاسبهٔ معینی برحسب ساختمان جبری داخلی گروه گالوا وجود دارد.

فرض‌کنیم‌گروه، G باشد. ممکن‌است G درداخل‌خود دستگاه کوچکتری از جایگشتها مانند H داشته باشد که آن نیز دارای خاصیت‌گروه باشد. در صورتی‌که چنین باشد، H را یك زیرگروه می‌نامیم. به‌علاوه،شرط‌فنی‌دیگری‌درموردH، موسوم به‌نرمال‌بودن، درکار می‌آید: اجازه دهید این اصطلاح را چنین‌معنی کنیم که H به‌طرز زیبایی داخل G می‌نشیند. اینك گالوا ثابت می‌کندکه یك معادله فقط وقتی با رادیکالها دقیقاً حلپذیر است‌که:

(۱) گروه آن G شامل زیرگروه نرمالی مانند H از مرتبهٔ کوچکتر باشد؛
(۲) حاصل‌تقسیم مرتبهٔ G برمرتبهٔ H اول باشد؛
(۳) H شامل زیرگروه نرمالی مانند K از مرتبهٔ کوچکتر باشد؛
(۴) حاصل‌تقسیم مرتبهٔ H برمرتبهٔ K اول باشد؛
(۵) و به‌همین‌ترتیب، تا به‌زیرگروهی‌برسیم‌که تنهاشامل یك عضو G باشد.

چنین‌گروهی را حلپذیر می‌خوانند. (مفهوم آن این است‌که یك ریشهٔ nام رامی‌توان از تعدادی ریشهٔ pام، با pهای اول مختلف، به‌دست آورد. به‌عنوان مثال، ریشهٔ ششم، ریشهٔ دوم ریشهٔ سوم است، زیرا $2\times3=6$؛ و۲ و۳ اول هستند. هرریشهٔ pام، متناظر با مرحله‌ای در زنجیر G، H، K، ... از زیر گروهها است.)

معادلهٔ درجهٔ پنجم

بدیهی است که نتیجهٔ گالوا را فقط وقتی می‌توان به‌کار برد که روش پیشرفته‌ای برای تحلیل گروهها، زیرگروهها، زیرگروههای نرمال، مرتبه‌ها، وغیره دردست داشته باشیم. چنین روشهایی، که تا اندازه‌ای از کار گالوا ملهم‌اند، هم‌اکنون موجود می‌باشند. یکی از نتایج جانبی آنها توضیح رضایت‌بخشی دربارهٔ ویژگی خاص معادلهٔ درجهٔ پنجم است.

معادلهٔ درجهٔ nام کلی دارای روابط خاصی بین ریشه‌هایش نیست، بنابراین گروه گالوای آن گروه همهٔ جایگشتهای n ریشهٔ آن است. این گروه، گروه بسیار مشخصی است و به‌دست آوردن اطلاعاتی دربارهٔ آن چندان دشوار نیست. مخصوصاً، می‌توان ثابت کرد که این گروه درحالات $n=2$، $n=3$، یا $n=4$ یك گروه حلپذیر است، بنابراین معادلاتی از این درجات حلپذیر هستند. در واقع، روشهای به‌کار رفته درحل آنها را می‌توان با استفاده از نظریهٔ گروهها تفسیر و سازماندهی کرد. اما، وقتی که $n=5$ گروه G متشکل از همهٔ جایگشتها حلپذیر نیست. G از مرتبهٔ ۱۲۰ است، و زیرگروه نرمالی مانند H از مرتبهٔ ۶۰ دارد. نسبت

$$\frac{120}{60}=2$$

عددی اول است؛ بنابراین، شروع کار بسیار خوب است. ولی، چنانکه گالوا ثابت کرد، یگانه زیرگروههای نرمال H از مرتبه‌های ۶۰ و ۱ اند. تنها امکان موجود برای K، گروه با مرتبهٔ ۱ است؛ ولی دراین صورت نسبت مرتبه‌ها $60=(60/1)$ است، که اول نیست. این گروه حلپذیر نیست، و معادله نیز چنین است.

نبوغ را خود پاداش بس

گالوا مبادی این نظریه را درهفده‌سالگی کشف کرد و برخی از نتایج خود را به آکادمی علوم پاریس ارائه داد. مقالهٔ او رد، و نسخهٔ دستنویسش گم شد. وی نتایج خودرا دوبار دیگرهم ارائه داد، ودر هردوبار مقاله مفقود شد. گالوا رژیم ستمگر بوربونها را مورد حمله قرار داد، وبه‌انتقاد ازجامعه‌ای پرداخت که نوابغ رامحکوم می‌کند و به میانمایگان میدان می‌دهد. ولی در واقع شاید خودش دراین‌مسأله مقصر بود: وی سعی نکرد افکار خودرا به‌روشنی تشریح کند، و بدعتی که با ابهام توأم باشد، مخصوصاً راجع به‌مجهولی تمام‌عیار، محکوم به‌نابودی است. به‌هرتقدیر، گالوا جذب جریانات انقلابی شد، واز اکول نرمال [= دارالمعلمین] اخراج، ودستگیر شد. سپس تبرئه و مجدداً دستگیر و به‌مدت شش‌ماه در سن‌پلاژی زندانی شد. به‌سبب شیوع وبا او را به‌بیمارستان منتقل کردند، و با قید التزام آزاد شد. پس از این آزادی بودکه وی درگیر اولین و یگانه ماجرای عشقی خود با استفانی واقعاً افسونگرشد. اگر آثار او در اختیار لیوویل قرار نمی‌گرفت، شاید همراه زندگیش نابود می‌شد؛ زیرا هم او بودکه پس ازمرگ گالوا به‌بررسی مقالات برجای مانده از او پرداخت و در چهارم ژوئن ۱۸۴۳ آکادمی‌را مخاطب قرار داد: «امیدوارم توجه آکادمی را به‌این موضوع جلب کنم که دربین مقالات اواریست گالوا جوابی، که عمقش با دقتش برابری می‌کند، برای مسألهٔ زیبای ذیل پیدا کرده‌ام: آیا حل... با رادیکالها ممکن است؟»

وفور گروهها

اثر گالوا یکی از آثاری بودکه راه را برای نظریهٔ جدید گروهها گشود. مؤلفین متعددی، دررأس آنان کوشی و ژوزف‌ـلویی لاگرانژ، در زمینهٔ گروههای جایگشتها کار کردند. کامی ژوردان بسیاری از این آثار را در رسالهٔ ۱۸۷۰ خود نظریهٔ جایگشتها و معادلات جبری، تنظیم و عرضه کرد. درهمین اثنا موجودات دیگری شبیه گروههای جایگشتی که مرکب ازجایگشتها نبودند ظاهرشدند. به‌عنوان‌مثال، در ۱۸۴۹ اوگوست براوه[1] تقارنهای فضای سه‌بعدی را برای طبقه‌بندی ساختمان بلورها به‌کاربرد و این‌کار، ژوردان را به‌مطالعهٔ گروههایی که اعضای آنها جایگشت نیستند، بلکه تبدیلات خطی‌اند، هدایت کرد.

یکی دیگر ازمنابع بزرگ الهام، نظریهٔ گروههای پیوستهٔ سوفوس‌لی بود. یك مربع تنها دارای هشت تقارن متمایز است، چهاردوران وچهارانعکاس، بنابراین گروه تقارنهای آن متناهی، و مرتبه‌اش ۸ است. ولی برخی از اشکال، مانند دایره و کره، دارای حوزه‌ای پیوسته از تقارنها هستند. می‌توان یك دایره را به‌طور پیوسته تحت هر زاویهٔ دلخواه، و نیز یك کره را حول هر محور دلخواه چرخاند. بنابراین گروه تقارنهای دایره یا کره شامل پیوستاری از اعضا است. یك مقیاس تقریبی پیچیدگی گروه بُعد آن است که نشان می‌دهد چه تعداد پارامتر برای مشخص کردن اعضای آن لازم است. گروه تقارن دایره یك‌بعدی است (یك زاویهٔ دوران را مشخص می‌کنیم). گروه تقارن کره سه‌بعدی است (یك محور دوران انتخاب می‌کنیم، سپس طول وعرض «قطب» این محور را به‌کار می‌بریم، به‌علاوهٔ زاویهٔ دوران). روشهایی از آنالیز، مانند مشتقگیری و انتگرالگیری، را می‌توان به چنین گروههایی اعمال کرد. لی نظریهٔ گسترده‌ای عرضه کرد که یکی از بخشهای اصلی ریاضیات جدید شده‌است: گروههای لی.

نظریهٔ توابع مختلط نیز نوع دیگری از گروه را، که اعضای آن عبارت از تبدیلات کسری خطی به‌صورت

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

از اعداد مختلط‌اند، به‌وجود آورد. این تبدیلات درنظریهٔ توابع بیضوی حائز اهمیت‌اند، و هم‌اینها کنجکاوی آبل و گالوا را برانگیختند. نظریهٔ اعداد نیز گنجینه‌ای از اشیاء «گروهی» را به‌دست داد: اعداد صحیح به‌پیمانهٔ n با عمل جمع، اعداد صحیح ناصفر به‌پیمانهٔ عدد اولی مانند p با عمل ضرب، رده‌های صورتهای درجهٔ دوم گاوس...

برنامهٔ ارلانگن

عامل دیگری که باعث پیشرفت نظریهٔ گروهها شد، برنامهٔ فلیکس کلاین برای وحدت بخشیدن به‌هندسه بود. این برنامه را کلاین به‌سال ۱۸۷۲ در ارلانگن طی یك سخنرانی مطرح کرد. در آن هنگام، هندسه به‌چند شاخهٔ مرتبط ولی‌متمایز تقسیم شده بود: هندسهٔ اقلیدسی و هندسهٔ نااقلیدسی، هندسهٔ انعکاسی و همدیس، هندسهٔ

1. Bravais

تصویری و آفین، هندسهٔ دیفرانسیل و به‌تازگی، توپولوژی نوظهور. حتی هندسه‌هایی با تعدادی متناهی نقطه و خط موجود بودند. کلاین درجستجوی نوعی نظم بود، و آن را درمفهوم هندسه به‌عنوان ناورداهای گروهی از تبدیلات یافت.

به‌عنوان مثال، هندسهٔ اقلیدسی را درنظر بگیرید. مفهوم اساسی این هندسه، مثلثهای قابل انطباق است؛ و دو مثلث در صورتی قابل انطباق‌اند که دارای یك شکل و یك اندازه باشند و به‌عبارت دیگر، یکی از آنها را بتوان با یك حرکت صلب صفحه به‌دیگری تبدیل کرد. اینك کلاین می‌گوید: حرکات صلب گروهی را تشکیل می‌دهند. بنابراین گروهی از تبدیلات صفحه داریم؛ و خاصیتهای مورد مطالعه در هندسهٔ اقلیدسی، مانند طولها و زاویه‌ها، خاصیتهایی هستند که تحت کنش این گروه تغییر نمی‌کنند. همین‌طور، این گروه درهندسهٔ هذلولوی مشتمل بر حرکتهای هذلولوی صلب است، در هندسهٔ تصویری عبارت از تبدیلات تصویری، ودر توپولوژی، تبدیلات توپولوژیك است. تمایز بین هندسه‌ها برنظریهٔ گروهها مبتنی است. کلاین اضافه می‌کند: گاهی از اوقات می‌توان از گروه برای تبدیل هندسه‌ها به یکدیگر استفاده کرد. اگر دو هندسهٔ به‌ظاهر متمایز اساساً دارای گروهی یکسان ــ گرچه با ظاهری متفاوت ــ باشند، آن دو هندسه در واقع یکی هستند. وی مثالهای متعددی ذکر می‌کند. به عنوان مثال، هندسهٔ خط تصویری مختلط اساساً با صفحهٔ انعکاسی حقیقی یکی است، و این نیز با صفحهٔ هذلولوی حقیقی یکسان است.

یکباره، دیدگاه کلاین وضوح و نظم را درجایی که اغتشاش و بی‌ترتیبی بدانجا راه یافته بود، مستقر کرد. (یك استثنا او را از تصفیهٔ کامل بازداشت: هندسهٔ خمینه‌های ریمان.) بنابراین امکان مقایسهٔ یك هندسه باهندسهٔ دیگر، استفاده از نتایج یکی برای اثبات قضایای دیگری، وتعیین اینکه کدام یك قویتر یا ضعیفتر است فراهم آمد. شاید هندسهٔ کلاسیك دیگر در تحقیقات ریاضی حوزهٔ اصلی و مهمی به‌شمار نرود؛ دلیلش تاحد زیادی این است که درقرن نوزدهم دراین حوزه تفحصات بسیارموفقیت آمیزی صورت گرفت؛ باهمهٔ این احوال، این هندسه در ریاضیات به‌صورت حوزهٔ اصلی ومهمی باقی‌مانده‌است و برنامهٔ ارلانگن کلاین هنوز دارای نفوذ شگرفی است. از نشانه‌های موفقیت آن اینکه تأثیرش همیشه به‌وضوح حس نمی‌شود: این دیدگاه رواج عام یافته‌است.

گروههای مجرد

وقتی ریاضیدانان با این مسأله روبرو می‌شوند که باید قضیه‌ای را پانزده‌بار در پانزده مبحث مختلف ثابت کنند، معمولا درصدد برمی‌آیند سروسامانی به مسأله بدهند. در این مورد، کار سروسامان دادن را آرتر کیلی با پیشنهاد یك مفهوم کلیتر شروع کرد: مجموعه‌ای از عملگرها که هرگاه به نوبت اِعمال شوند، نتیجه هم دراین مجموعه باشد. وی این را گروه مجرد نامید. به‌علاوه کیلی می‌خواست که عملگرهایش روی چیزی عمل کنند. قدم نهایی عبارت بود از تعریف اصل موضوعی گروه، که شاید جزئی از «فولکلور» عمومی ریاضیات بود ولی ادوارد هانتینگتن آن‌را در ۱۹۰۲ به‌صراحت بیان کرد. رهیافت جدید، این است: یك گروه مجموعه‌ای مانند G است، که در آن یك قانون ترکیب، یا ضرب، تعریف می‌شود. اگر g و h به G متعلق باشند، این حاصلضرب با gh نشان داده می‌شود. (علامت gh به‌معنی ضرب معمولی g و h نیست.) این ضرب باید درچهار خاصیت زیر صدق کند:

(۱) G بسته است: اگر g و h در G باشند، آنگاه gh نیز چنین است.

(۲) یك عضو همانی مانند ۱ در G هست که به‌ازای هر g، $1g=g=g1$.

(۳) هر g در G دارای یك عکس مانند g^{-1} است، به‌طوری که $gg^{-1}=1=g^{-1}g$.

(۴) قانون شرکتپذیری، $g(hk)=(gh)k$ برقراراست.

گروههای جایگشتی گالوا، گروههای تبدیلات براوه و ژوردان، گروههای پیوستهٔ لی، وگروههای مجرد کیلی، جملگی در این شرایط صدق می‌کنند. شرط (۱) «خاصیت گروهی» گالواست؛ دیگرشرطها خاصیتهای اساسی مفیدی را بیان می‌کنندکه در مورد تبدیلات خودبه‌خود برقرارند، ولی‌ممکن‌است اشیاء مجردترچنین خاصیتهایی را نداشته باشند. به‌عنوان مثال، اگر G مجموعهٔ اعداد صحیح، و «ضرب» gh همان جمع $g+h$ باشد، آنگاه هر چهار خاصیت برقراراست. همین‌خاصیتها دربارهٔ مجموعهٔ اعداد صحیح به‌پیمانهٔ n برقرارند. به‌این ترتیب، تودهٔ مغشوشی ازنتایج خاص برای مصداقهای مختلف مفهوم گروه، به‌تعداد قلیلی قضیهٔ کلی‌ساده کاهش یافت و ریاضیات زبانی قوی برای توصیف و بهره‌گیری از مفاهیم تقارن به‌دست آورد.

اتمهای تقارن

تحلیل معادلهٔ درجهٔ پنجم به‌گروهی مانند H منجر می‌شودکه تنها زیرگروههای نرمال آن بدیهی (یعنی از مرتبهٔ ۱) یا همهٔ H (در اینجا از مرتبهٔ ۶۰) هستند. چنین گروهی را ساده گویند. اگر گروهی را به‌صورت یك مولکول درنظر بگیریم، در این صورت گروههای ساده اتمهای آن هستند. اساس فهم همهٔ گروهها، فهم گروههای ساده‌است. متأسفانه «ساده» در اینجا به‌معنی «آسان» نیست.

اولین‌دستاورد بزرگی که دراین حوزه به‌دست آمد، طبقه‌بندی گروههای سادهٔ لی بود. لی چهار «خانواده» از گروههای سادهٔ لی را کشف کردکه برحسب تبدیلات خطی فضای nبعدی تعریف می‌شوند. این کار به‌توسط ویلهلم کیلینگ درسال ۱۸۸۸ تکمیل و به‌توسط اِلی کارتان درسال ۱۸۹۴ اصلاح شد. نتایج حاصل شایستهٔ ذکرند زیرا گروههای سادهٔ لی درسراسر ریاضیات ظاهر می‌شوند. نخست، چهارخانواده‌ای هستند که به‌توسط لی کشف شدند و نظریهٔ واحد زیبا وقانع کننده‌ای دربارهٔ آنها وجود دارد. علاوه برآنها، پنج گروه استثنایی موجودند. بعدهای آنها ۱۴، ۵۲، ۷۸، ۱۳۳، و ۲۴۸ است، و چنانکه از این اعداد برمی‌آید، الگوی واضحی مطابقت نمی‌کنند. وجود اینها ناشی‌ازیك «مشیت جبارانهٔ الهی» توصیف شده‌است، معهذا اینها به‌انواع «حوادث» عجیب و زیبا در ریاضیات مربوط می‌شوند و عدم وجودشان حلاوت ریاضیات را کمتر می‌کرد. به‌نظر می‌رسد علائم مرئی یك الگوی عمیقتر باشندکه می‌توان آن را حس کرد ولی هنوز نمی‌توان به‌طور

کامل آن را درك کرد. درحال حاضر گروههای سادهٔ لی درفیزیك ریاضی متداول‌اند، و گروههـای استثنایی دارای پیامدهای مهمی برای ساختمانهای ممکن‌فضا-زمان‌اند. شاید وجود اینها از«مشیتی الهی» ناشی شده باشد، ولی مشیتی‌که «جبارانه» نیست.

برهان ده‌هزارصفحه‌ای

معلوم شدکه مسألهٔ مقدماتیترطبقه‌بندی گروههای متناهی‌ساده چندان هم رام‌شدنی نیست. ساختمان تحلیلی اضافی گروههای لی، گرچه بحث دربارهٔ این گروههـا را بدون توسل به‌وسایل فنی دشوارتر می‌کرد، ابزارهـای ریاضی زیادی را برای اثبات قضایـا فراهم ساخت. اطلاعات راجـع به‌گروههـای ساده درطی دهـهٔ ۱۹۰۰ به‌کندی گرد آمد، و بعد از آن تا ۱۹۵۷، کـه سدها شکسته شد، اتفاق چندانی نیفتاد.

ساده‌ترین گروههای ساده، گروههای «دوری»اندکه از اعداد صحیح به‌پیمانهٔ یك عدد اول، با عمل جمع، تشکیل می‌شوند. این گروهها نه‌تنها فاقد زیرگروههـای نرمال‌اند، بلکـه اصلا دارای زیرگروه نیستند. گروههای سادهٔ بعدی گروههای متناوب‌اند. اولین گروه از این دسته، از مرتبهٔ ۶۰ است وگروهی‌است که گالوا آن را در تحقیقاتش راجع به‌معادلـهٔ درجهٔ پنجم کشف کرد. بعد از اینها، متناظرهای متناهی چهار خانوادهٔ کلاسیك گـروههای سادهٔ لی‌اند کـه از تعویض اعداد مختلط بایك هیأت متناهی بـه‌دست می‌آیند. برخی از این گروهها را گالوا و ژوردان مـی‌شناختند. علاوه براینها، پنج گروه‌عجیب وجود دارد، که در ۱۸۶۱ و ۱۸۷۳ به توسط امیل-لئونار ماتیو کشف شدند، و به‌چند «هندسهٔ متناهی» استثنایی مربوط‌اند. چگونگی وضع درآغازقرن، چنین بود.

صرفنظر از کار لئونارد دیکسن که موفق به یافتن متناظرهای گروههای‌لی استثنایی‌ازبعدهای۱۴و ۷۸ روی هیأتهای متناهی‌شد، برای مدت مدیدی پیشرفت خیلی اندکـی به‌دست آمد. سه‌گروه لی استثنایی دیگر به‌وضوح بحث وبررسی مشابهی را می‌طلبیـد ولی‌کسی راه درست اِعمال این ایـده را نتوانست پیدا کند. در ۱۹۵۷ کلود شوالِه روش‌واحدی را ابداع کردکه با آن، به‌ازای هرگروه لی ساده و هرهیأت متناهی، یك‌گروه سادهٔ متناهی تولید می‌شد. این گروههـا به‌گروههای ساده از نوع لی موسوم گشتند. روش دیگری، کـه منجر به‌تولید گروههای «تابدار» شد، به‌توسط روبرت استاینبرگ، میشیو سوزوکی، و ریمك ری[1] کشف گردید. ناگهان طلایهٔ نظم‌درمیانهٔ آشوب پدیدار شد. گروههای سادهٔ کشف شده عبارت بودنـد از گـروههای دوری، گـروههای متناوب، گروههای ازنوع لی وپنج گروه «متفرق»، یعنی آن‌گروههایی که به‌توسط ماتیو کشف شده بودند. این‌وضع‌یادآور فهرست جبرهای ساده لی است: تعداد زیادی خانوادهٔ درست و حسابـی و در بین آنها تعداد کمی افراد به‌دردنخور. آیا این الگو (یا فقدان آن) تکرار خواهد شد؟

قدم مهم را برای حل‌نهایی مسأله والترفایت وجان تامسن در ۱۹۶۳ برداشتند. اینان حدسی را که در ۱۹۰۶ به توسط ویلیام برنساید مطرح‌شده‌بود ثابت کردند، وآن‌حدس‌حاکی‌ازاین بودکه هر گروه سادهٔ‌متناهی (غیراز گروه دوری) دارای مرتبهٔ زوج است. برهان آنها مشتمل بر ۲۵۰ صفحه است و یك شمارهٔ‌کامل یك‌مجله را دربر می‌گیرد، و الگویی بـرای کار در زمینهٔ گروههای سادهٔ متناهی(هم ازلحاظ شیوه وهم ازلحاظ اندازه)است. این‌مقاله‌جبههٔ کاملا جدیـدی را گشود، زیـرا هـر گروه از مرتبهٔ زوج دارای عضوی مانند g است‌که $g^2 = 1$، و ریچـارد براوئر روشی برای استفاده از این اعضای خاص ابداع کرد. زونیمیر یانکو[1] در ۱۹۶۵ به‌کمك این روش‌گروه سـادهٔ متفرق جدیـدی‌کشف کـرد. سایر گروههای سادهٔ متفرق همراه نامهایی چون دونالد هیگمن، چارلز سیمز، ج. مك لافین[2]، م. سوزوکی، جان کانوی، دیترهلـد، برند فیشر، ر. لینز[3]، م. اونان و اروناس رودوالیس[4] به‌منصهٔ ظهـور رسیدند. برای مدت‌کوتاهی عده‌ای به‌این موضوع پرداختندزیرا عقیده این بودکه، برطبق قراین، این‌گروهها موجودند، ولی کسی عملا قادر به‌ساختن آنهـا نشده بود. تعیین تکلیف مسألـهٔ وجود، به‌محاسبات طولانی‌کامپیوتری نیازداشت. دشوارترین مورد، موردِ گروه هیولا(مانستر)، یا بزرگترین گروه متفرق بود که تجزیهٔ مرتبهٔ آن به‌عوامل اول عبارت‌است از

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17 \cdot$$

$$19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \cdot$$

تردیدهایی دربین بودکه حتی‌کامپیوتربزرگی بتواند ازعهدهٔ چنین غولی برآید. در ۱۹۸۲ رابرت گریس، درمقابل حیرت همگان، هیولا را با دستهای خالی از پا درآورد-کاری به‌عظمت‌کار سنت جورج. وی این گـروه را به‌صورت یك‌گروه دورانی در فضای ۱۹۶۸۸۳ بعدی (کمترین بعد ممکن) ساخت.

با اتمام موفقیت‌آمیز برنامه‌ای تحقیقی‌کـه در دهـهٔ ۱۹۷۰ به‌توسط دانیل گورنستاین‌پایه‌ریزی شده بود، اینك معلوم‌شده‌است کـه درست بیست و شش گروه سادهٔ متفرق موجود است. با این گروههـا و خانواده‌های‌گروههای معلوم، فهرست گروههای سادهٔ متناهی‌کامل می‌شود. برهان کامل این موضوع بـه ۱۰۰۰۰ صفحهٔ چاپ شده بالغ می‌شود، و صدها ریاضیدان درآن سهیم بوده‌اند. این دستاورد، پیروزی عظیمی‌است.

با حل‌این‌مسألهٔ‌دیرپا وفوق‌العاده مهم، متخصصین‌نظریهٔ‌گروهها پیشتر رفتند. سؤالی‌که هنوزجواب‌کاملی به‌آن داده نشده‌این‌است: «کدام‌گروهها می‌توانند گروههای‌گالوا باشند؟» بهترین‌حدس‌این است‌که «همهٔ آنها»، ولی‌کسی‌تاکنون موفق به‌اثبات‌آن‌نشده‌است. شافارویچ به‌اثبات این حکم نایل آمدکـه همهٔ‌گروههای حلپذیر گروههای گالوا هستند، و از این‌رو توجه متخصصان به‌گروههای ساده معطوف شده‌است. اخیـراً تامسن ثابت‌کرده‌است‌کـه گروه هیولا یك‌گروه‌گالواست.

تقارن اتمها

یکی از موارد استعمال نظریهٔ‌گروهها درتقارن بلوری‌است. اتمها درهربلوربه‌صورت یك ساختمان تکراری منظم، یا شبکه، آرایش

1. Rimhak Ree

1. Zvonimir Janko
2. MacLaughlin
3. Lyons
4. Rudvalis

می‌یابند که دارای تقارن فراوانی است. از جملهٔ این تقارنها تقارنهای نقطه‌ای هستند، یعنی تقارن آرایش اتمها حول مکانی مفروض در شبکه، و تقارنهای انتقالی، یعنی تکرار ساختمان کل شبکه در فاصله‌های ثابت درجهتهای خاص. یك مثال دوبعدی از این شبکه، آرایه‌ای نامتناهی از آجرهای مربعی است. در واقع، معلوم شده است که درست هفده نوع گروه تقارن بلورشناختی درصفحه وجود دارد ــ یا، به‌زبان روشنتر، طرح کاغذ دیواری هفده نوع اساسی دارد. در فضای سه‌بعدی درست سی‌ودو گروه نقطه‌ای داریم که به‌انضمام انتقالها ۲۳۰ نوع متمایز تقارن بلوری حاصل می‌شود. این طبقه‌بندی درفیزیك حالت جامد اهمیت اساسی دارد. در فضای چهاربعدی ۴۷۸۳ نوع بلور وجود دارد؛ نتایج درمورد بعدهای بالاتر بسیار ناقص است.

فراسوی گروهها

طبقه‌بندی بلورها نشان می‌دهد که هیچ شبکهٔ بلوری نمی‌تواند دارای تقارن مرتبهٔ پنج (مانند یك پنج‌ضلعی) باشد و تنها می‌تواند تقارنهای مرتبهٔ ۲، ۳، ۴، و ۶ داشته باشد. ولی اخیراً فیزیکدانان حالتی از مادهٔ جامد، موسوم به‌شبه‌بلور کشف کرده‌اند که در آن تقارن مرتبهٔ ۵ اتفاق می‌افتد. از این نتایج برمی‌آید که نظریهٔ گروهها توصیف نهایی تقارن درطبیعت نیست. شبه‌بلور، ساختمان شبکه‌ای عادی یك بلوررا ندارد. یعنی، هرگاه آن‌را از پهلو بچرخانید درجزئیات متفاوت به‌نظرمی‌رسد. با وجود این نوعی نظم گسترده در ساختمان آن هست: تعداد کمی جهت ممکن وجود دارد که پیوند بین اتمها می‌تواند در آن جهات باشد، واینها درهمه جای مادهٔ جامد یکسان هستند. این طرحها را راجرپنروز به‌عنوان یك تفریح ریاضی کشف کرد. پنروز دو نوع کاشی به شکل تیزه و بادبادك کشف کرد که می‌توانند بی‌هیچ تناوبی صفحه را بپوشانند. آن مکای انواع سه‌بعدی این کاشیها را یافت. این ایده‌ها درسال ۱۹۸۴ به‌توسط د. لوین[1] و پ. ج. اشتینهارت بر پایه‌های محکم ریاضی استوار گشتند؛ و شبه‌بلور پیش‌بینی شده در طبیعت را دانیل شکتمان[2] و دیگران در ترکیبی از آلومینیوم و منیزیم مشاهده کردند.

این کشف بدین‌معنی است که ابزار عادی بلورشناسی، یعنی نظریهٔ گروهها، برای بررسی همهٔ پدیده‌های «متقارن» کافی نیست. نظریهٔ گروهها به‌موفقیتهای چشمگیری نایل آمده است، ولی این حرف آخر نیست. ریاضیات باید با زمان پیش رود و نمی‌تواند برای همیشه به‌دستاوردهای گذشته‌اش دل خوش کند. مفهوم تقارن ممکن است نیاز به‌بسط داشته‌باشد؛ سایر تقارنهای «ممنوع» ممکن است در طبیعت ظاهر شوند. ریاضیدانان و فیزیکدانان با مبارزطلبیهای تازه‌ای روبه‌رو شده‌اند. جان مادوکس می‌گوید «نتیجه هرچه باشد، متخصصین بلورشناسی باید قدری ریاضیات نامأنوس را فراگیرند.» همین‌طور ریاضیدانان.

****

● فصلی با عنوان «The duellist and the monster» از کتاب زیر
Ian Stewart, *The Problems of Mathematics*, Oxford University Press (1987).

1. Levine 2. Schechtman

همبندی و حلقه‌های دود*

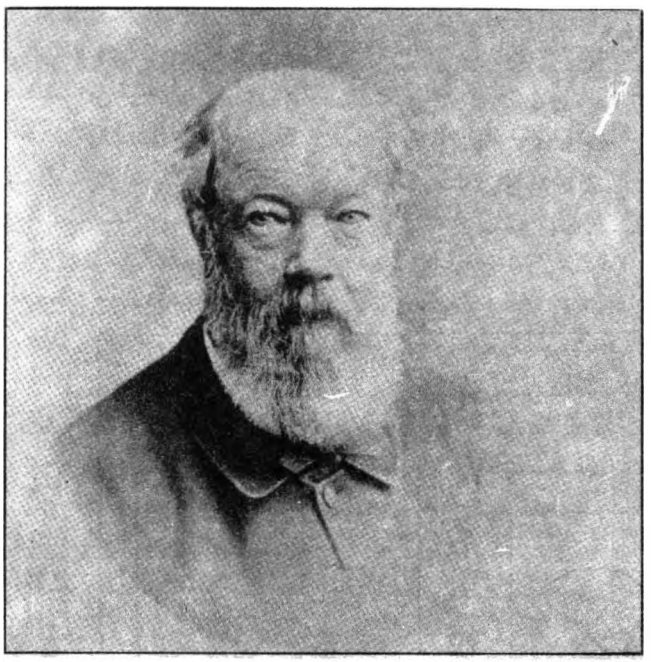
تامس آرچیبالد*
ترجمهٔ امیر اکبری مجدآباد نو

مقدمه

جیمز کلارك ماکسول در نقدی بر رساله‌ای در فلسفهٔ طبیعی اثر تامسن و تیت، نوآوری مهمی را که در رویکرد نویسندگان به ریاضیات دیده می‌شود، خاطرنشان می‌کند:

> نخستین چیزی که در نحوهٔ تنظیم این رساله مشاهده می‌کنیم اهمیتی است که به سینماتیك داده شده است... و صفحات زیادی است که تحت این عنوان به آنچه تاکنون قسمتی از هندسهٔ محض تلقی می‌شد اختصاص یافته است. به عنوان مثال، نظریهٔ خمیدگی خطها و رویه‌ها مدتهای مدید بخش مهمی از هندسه تلقی می‌شده اما در رسالات مربوط به حرکت به اندازهٔ چهارعمل اصلی یا قضیهٔ دوجمله‌ای خارج از موضوع قلمداد می‌شده است.
>
> ولی ایدهٔ راهنمای مؤلفان... این است که هندسه خود بخشی از علم حرکت محسوب می‌شود، و در آن نه‌تنها روابط بین اشکال فضایی بلکه همچنین فرایند تولید این اشکال به‌وسیلهٔ حرکت یك نقطه یا یك خط، مورد بحث قرار می‌گیرد. [۱]

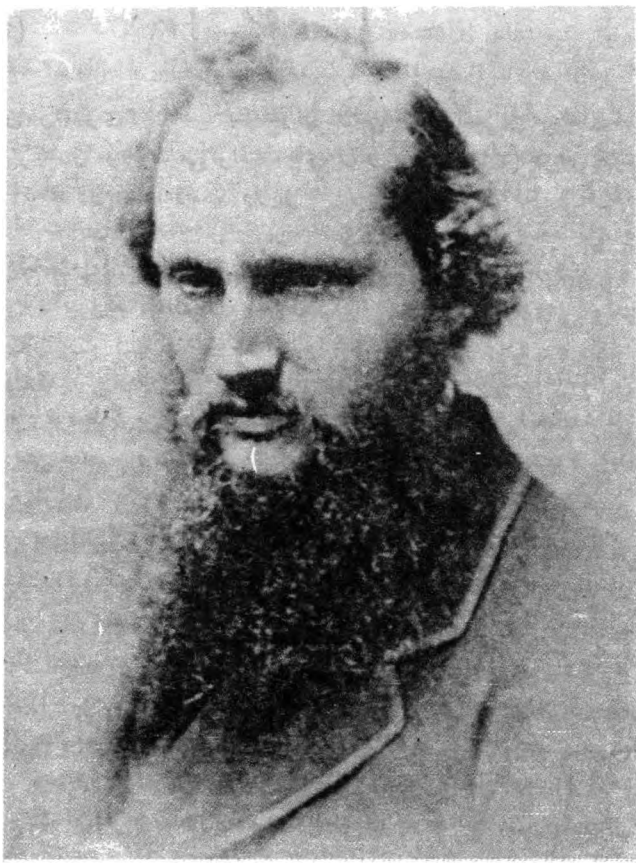
این «ایدهٔ راهنما» که موجودات هندسی را به‌مفهومی به صورت اشیاء فیزیکی درنظر گیریم، سالیان دراز در ذهن ریاضیدانان بوده است. مسائل ریاضی بیشماری ریشه درمشاهدهٔ جهان طبیعی دارند. اما، همچنین ممکن است جوابهای بعضی از مسائل با نسبت‌دادن خاصیتهای فیزیکی به اشیاء ریاضی تحت‌مطالعه، ساده شود. به‌علاوه ممکن است برخی ساختهای ریاضی که معمولا «هندسی‌محض» تلقی می‌شوند با درنظر گرفتن چنین موجودات



پیتر گوتری تیت

ریاضی-فیزیکی تولید شوند.

هدف من دراین مقاله این است که با بررسی جریان پیدایش دومین اتحادگرین (که نزد فیزیکدانها به‌قضیهٔ گرین معروف است) و تعمیمهایش درطی یك دورهٔ پنجاه ساله، از ۱۸۲۸ تا ۱۸۷۸، بعضی از جنبه‌های این تلاقی پرثمر ریاضیات و فیزیك را روشن کنم. در طی این دوره، با وجود افزایش تأکید بر دقت منطقی در



ویلیام تامسن (لرد کلوین)

بعضی محفلها، بسیاری از ریاضیدانان همچنان اثباتهای فیزیکی را برای قضایای تحلیلی معتبر می‌دانستند. در چنین اثباتهایی از خاصیتهای فرضی فیزیکی مانند تراکم‌ناپذیری به‌منظور مشخص کردن ناحیه‌هایی درفضا استفاده می‌شد. این گرایش در ریاضیات قرن نوزدهم انگلستان با قدرت بسیار بروز کرد، اگرچه درجاهای دیگر هم ناشناخته نبود.

اتحاد دوم گرین، که با آن درحساب دیفرانسیل و انتگرال برداری آشنا شده‌ایم، می‌گوید

$$\iiint (\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)\,dx\,dy\,dz$$
$$=\oint\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)da.$$

انتگرالگیری درسمت چپ روی ناحیه‌ای محدود به‌رویهٔ بسته‌ای چون S انجام می‌شود. پس انتگرال سمت راست یک انتگرال رویه‌ای روی S است، و n قائم برونسو بر S است. و سرانجام، φ و ψ دوتابع حقیقی پیوسته‌ـمشتقپذیر (میدان اسکالر) روی $\mathbf{R}^3$ هستند. این قضیه بار اول درمقاله‌ای که جورج گرین در ۱۸۲۸ منتشر کرد همراه با لمهای دیگری که گرین درمطالعه‌اش در الکترواستاتیک ومغناطیس به‌کارمی‌برد، ظاهرشد. نتایج گرین ابتدا ناشناخته ماند، ولی ویلیام تامسن (بعدها معروف به لردکلوین) دو نسخه از جزوهٔ گرین را درسال ۱۸۴۵ به‌دست آورد و ازآن پس نتایج گرین خیلی مطرح و معروف شد و درنظریهٔ ریاضی پتانسیل، یکی از مهمترین ابزارهای فیزیک ریاضی در دهه‌های بعدی، نقش اساسی پیدا کرد.

منشأ نظریهٔ پتانسیل، دسته‌ای از نتایج است که از تلاشهای دانشمندان فرانسوی فیزیک ریاضی (شاخصترین آنها، پواسون، لاپلاس وبیو[1]) برای بسط روشهای نیوتن به‌دست آمدند. لاپلاس کوشید تا بسیاری از پدیده‌های طبیعی‌را به‌عنوان نتیجهٔ نیروهایی متناسب با معکوس مجذور فاصله بین اشیاء تحت تأثیر یکدیگر، توضیح دهد. برای رسیدن به‌این هدف، لازم بود انتگرالهای نیروهای برداری محاسبه شود. لاپلاس نشان دادکه می‌توان چنین نیروهایی را به‌صورت آنچه اکنون گرادیان یک تابع اسکالر نامیده می‌شود درنظر گرفت، و بنابراین توانست محاسبات را بسیار ساده کند. چنین تابعی، که گرادیان آن یک‌نیروست، به‌عنوان پتانسیل آن نیرو شناخته می‌شود. (در ادامهٔ این مقاله همچنین پتانسیلهای سرعت‌را خواهیم دید،که توابعی هستندکه گرادیانشان، سرعتی را به دست می‌دهد.) کار گرین، همانند کار لاپلاس، هم به فیزیک ریاضی مربوط می‌شد و هم به‌نظریهٔ پتانسیل زیرا هم‌رابطهٔ بین پتانسیلها و انتگرالهایشان را بیان می‌کرد و هم کاربرد این نتایج را درمسائل فیزیکی [۲].

مفهوم پتانسیل در ابتدا یک ابزار ریاضی بود ولی در دههٔ ۱۸۵۰ تعبیری فیزیکی یافت. درحالت خاص، اگر تابعی برداری یک‌پتانسیل داشته باشد، انتگرال آن پتانسیل در امتداد یک‌خم‌فقط به نقاط انتهایی انتگرالگیری بستگی دارد، و انتگرال در امتداد خم بسته صفر است. این مطلب مبین این حقیقت است‌که تابع برداری یک دیفرانسیل‌کامل است. از نظر فیزیکی، این‌مطلب دلالت می‌کندکه نیروی توصیف شده به‌وسیلهٔ تابع، پایستاراست، بنابراین توابع پتانسیل ارتباط نزدیکی با انرژی پتانسیل‌دارند.

مقالهٔ ۱۸۲۸ گرین

مقالهٔ گرین که در ۱۸۲۸ به‌میزان محدود در ناتینگهام منتشرشد، مقاله‌ای دربارهٔ کاربردآنالیز ریاضی در نظریه‌های الکتریسیته و مغناطیس نام داشت [۳]. جورج‌گرین (۱۷۹۳–۱۸۴۱) که پسر آسیابانی بود، به‌کتابخانهٔ یکی از اشراف محلی علاقه‌مند به‌علوم دسترسی یافته بود. این فرصت و استعدادگرین، به‌او امکان دادکه برآثار اساسی لاپلاس، لاگرانژ، و پواسون تسلط پیدا کند. گرین با الهام ازکار لاپلاس درگرانش وکارپواسون در الکترواستاتیک و مغناطیس، به‌بررسی الکترواستاتیک با استفاده ازفرضیه‌های‌مشابه اما با روشهای جدید پرداخت.

آنچه بیش ازهمه موردنظرماست، قضایای ریاضی‌کلی‌گرین در ابتدای این مقاله است، که او بعداً آن قضایا را در محاسبات الکتریکی و مغناطیسی خاص به‌کار برد. دومین اتحادگرین قضیهٔ اساسی این بخش است. این قضیه، ابزار اصلی‌برای حل معادلهٔ لاپلاس و معادلهٔ پواسون به‌روش گرین است. بحث مفصل دربارهٔ این‌روش، که امروز روش توابع‌گرین نامیده می‌شود، ما را از مقصودمان بسیار دور می‌کند.

اتحادی‌که‌گرین اثبات‌کرد، با نمادگذاری جدید به‌این

1. Biot

صورت نوشته می‌شود

$$\int U\nabla^2 V\, d^3x+\oint U\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma = \int V\nabla^2 U\, d^3x+\oint V\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma. \quad (۱)$$

در اینجا U و V دوتابع دلخواه هستند که در ناحیهٔ مشتقگیری، پیوسته‌مشتقپذیرند، و در اینجا n، قائم درونسو از رویهٔ σ است. گرین از نماد δ برای بیان آنچه‌که ما با ∇^2 نمایش داده‌ایم، استفاده می‌کرد. اثبات گرین از این اتحاد، متکی است بر کاربرد انتگرالگیری جزء به‌جزء درمورد عبارت

$$\iiint\left\{\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right\}dx\,dy\,dz = \int(\nabla V)\cdot(\nabla U). \quad (۲)$$

با این فرض که U و V به‌قدر کافی مشتقپذیر باشند، می‌توانیم انتگرالگیری جزء به‌جزء را نسبت به‌هرمتغیری انجام دهیم. برای مثال قرار می‌دهیم

$$v=\frac{\partial V}{\partial x}dx \quad \text{و} \quad u=\frac{\partial U}{\partial x}dx$$

سپس با جانشانی در (۲) به‌دست می‌آوریم

$$\iint dy\,dz\left(\int\frac{dV}{dx}\frac{dU}{dx}dx\right) = \iint V(x_1)\frac{dU}{dx}\bigg|_{x=x_1}dy\,dz - \iint V(x_0)\frac{dU}{dx}\bigg|_{x=x_0}dy\,dz-\int V\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}dx\,dy\,dz.$$

سپس گرین استدلال می‌کند که اگر σ یک‌جزء رویه و n یک بردار قائم درونسو باشد، داریم

$$\iint dy\,dz\left(V(x_1)\frac{dU}{dx}\bigg|_{x_1}-V(x_0)\frac{dU}{dx}\bigg|_{x_0}\right) = -\int d\sigma\frac{\partial x}{\partial n}V\frac{dU}{dx}.$$

پس انتگرال جزئی به‌این‌صورت است

$$\iint dydz\left(\int\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}dx\right) = -\int d\sigma\frac{\partial x}{\partial n}V\frac{\partial U}{\partial x}-\int V\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

بنابراین، با انتگرالگیری نسبت به هر سه متغیر به دست می‌آید

$$\iint dx\,dy\,dz(\nabla V)\cdot(\nabla U) = -\int d\sigma V\frac{\partial U}{\partial n}-\int V\nabla^2 U. \quad (۳)$$

این برابری را اغلب به‌عنوان اولین اتحاد گرین می‌شناسند. بنابرتقارن موجود، می‌توانیم جای U و V را در (۳) عوض کنیم تا اتحاد دوم را به‌دست آوریم

$$\int d\sigma V\frac{\partial U}{\partial n}-\int V\nabla^2 U=-\int d\sigma U\frac{\partial V}{\partial n}-\int V\nabla^2 U.$$

بسیاری از باریک‌بینی‌هایی که امروزه معمول است در اثبات این اتحاد توسط گرین رعایت نشده است. اثبات کامل این اتحاد شامل بررسی صحیح رابطهٔ بین بینهایت‌کوچکها و متناهیهاست، و باید از هم‌ارزی انتگرالهای چندگانه و مکرر که گرین آن را تشخیص نمی‌داد، استفاده کنیم. گرین ممکن‌است در این زمان با پیشرفتهای آنالیز دقیق که کوشی باعث آن بوده به‌خوبی آشنا نبوده باشد، زیرا وی محدودیت دسترسی خود را به‌آخرین تحقیقات اظهار داشته است. در واقع استدلالهای او به‌هندسهٔ بینهایت کوچکها متکی است. دراین مورد، کار او به‌کار بیشتر معاصرانش، حتی در فرانسه،شباهت دارد.

دستاورد گرین‌را سالیان دراز تقریباً به‌طورکامل نادیده گرفتند. هیچ یک از افراد معدودی‌که رسالهٔ او را خریدند قادر به‌تشخیص ارزش آن نبودند و روشها و نتایج او تقریباً مهجور ماند [۴]. اگر الکتریسیته‌دان ایرلندی رابرت مورفی ذکری از کار گرین نمی‌کرد، دستاورد او ممکن بود فراموش شود. مورفی از گرین به‌عنوان مبدع اصطلاح پتانسیل یاد می‌کند، گرچه تعریف خود مورفی از پتانسیل اشتباه است و نشان می‌دهد که او واقعاً اثر گرین را ندیده بوده است [۵].

خود گرین بعدها علاقهٔ دوباره‌ای به‌کار اولیه‌اش نشان نداد. کوششهای او در این مدت صرف تحقیقات دیگر و آموزش در کیمبریج می‌شد. مقالات دیگر او از مقبولیت فوری بیشتری برخوردارشد. بخشی‌ازآنها در گزارشهای انجمن فلسفهٔ کیمبریج منتشرشد و ازطریق این‌نشریه توجه جامعهٔ علمی انگلیس‌را به‌خود جلب‌کرد. بنابراین گرین قبل از مرگش در ۱۸۴۱ شهرتی برای خودش داشت، ولی این شهرت با کشف دوبارهٔ مقالهٔ ۱۸۲۸ او فوق‌العاده افزایش یافت.

تامسن، گرین را دوباره کشف می‌کند

کسی که اولین‌بار توجه جامعهٔ علمی بین‌المللی را به‌نتایج گرین جلب کرد، ویلیام تامسن (بعدها لردکلوین) بود. او درسال ۱۸۴۲ ارجاع مورفی به‌مقالهٔ گرین را ملاحظه کرد و به‌دلایل متعددی علاقه‌اش به‌این موضوع جلب شد. خود وی مشغول تحقیق درنظریهٔ ربایش بود و مقاله‌هایی دراین باره در ۱۸۴۲ و ۱۸۴۳ منتشر کرد. مورفی به‌استفادهٔ گرین از واژهٔ پتانسیل اشاره‌کرده بود. این مفهوم را، به طوری‌که تامسن می‌گوید، گاوس نیز با موفقیت زیادی درمقالهٔ ۱۸۳۹اش دربارهٔ نیروهای عکس مجذوری به‌کار گرفته بود. بدون شك تامسن متعجب بودکه چطور گرین، که او با نامش آشنا بود، مفهوم پتانسیل‌را به‌کار برده بود، و نسبت به‌ماهیت

دقیق نتیجه‌های او کنجکاو بود.

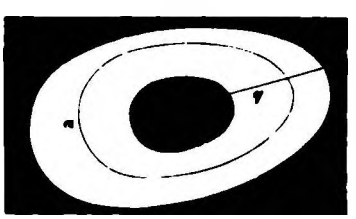
تامسن نتوانست اثر گرین را تا ۲۵ ژانویهٔ سال ۱۸۴۵ـ یعنی کمی قبل از آنکه در پی تکمیل مطالعاتش در کیمبریج به‌فرانسه سفر کند ـ ببیند. برحسب اتفاق، هاپکینز معلم تامسن دو نسخه از اثر گرین را داشت که هرگز مطالعه‌شان نکرده بود و آنها را به وسیلهٔ تامسن به‌فرانسه فرستاد. تامسن خیلی تحت تأثیر کلیت نتایج گرین قرار گرفت و بلافاصله تلاش کرد تا آنها را در تحقیقات خودش به‌کار برد. وی پس از رسیدن به فرانسه مقاله را به‌لیوویل، استورم و شال نشان داد. به‌زودی جامعهٔ ریاضی پاریس کاملا از کار گرین با خبر شد. به‌عنوان مثال، لیوویل درمقاله‌ای در ۱۸۴۸ برای گرین و گاوس از لحاظ معرفی اصطلاح پتانسیل امتیاز یکسانی قائل شد [۶]. تامسن نسخهٔ دیگر مقالهٔ گرین را به‌وسیلهٔ کیلی به آلمان فرستاد، و او هم مقاله را تحویل کرله سردبیر مجلهٔ ریاضیات محض و کاربردی داد. کرله ترجمهٔ آلمانی مقاله را در سه بخش بین سالهای ۱۸۵۰ و ۱۸۵۴ منتشر کرد و به‌این ترتیب، این اثر را محققین علاقه‌مند در آلمان به‌خوبی شناختند. بنابراین، ۲۵ سال پس از انتشار اولیهٔ مقالهٔ گرین، روشهای او به‌نوشته‌های علمی و کتابهای درسی اروپا راه یافتند [۷]. یکی از اولین اشخاصی که از دستاورد گرین استفاده کرد برنهارد ریمان (۱۸۲۶ـ۱۸۶۶) بود که آن موقع مشغول نوشتن رسالهٔ دکتریش در گوتینگن بود.

ریمان و نواحی چندگانه‌ـهمبند

بیشتر توجه ریمان به‌مقالهٔ گرین، معطوف به‌روش توابع گرین بود. گرین درحل مسائل مقدار مرزیی که شامل توابع صادق در معادلهٔ لاپلاس

$$\nabla^2\varphi = 0$$

هستند، از این‌روش استفاده کرده بود. در اینجا φ به‌صورت تابع پتانسیل نیروی الکترواستاتیک ناشی از یك چگالی بار روی یك هادی تعبیر می‌شود. ریمان پی برد که روشهای گرین می‌تواند در مطالعهٔ توابع یك‌متغیرمختلط مفید واقع شود، زیرا بخشهای‌حقیقی ومختلط چنین‌توابعی باید درمعادلهٔ لاپلاس‌صدق‌کنند. با به‌کارگیری این دیدگاه، ریمان روشهایی ابداع کرد که او را قادر می‌ساخت تابع مختلط را با استفاده از مقادیر مرزی و ناپیوستگیهایش مشخص کند. درجریان این‌کار، ریمان ایدهٔ نواحی چندگانه‌ـهمبند صفحه را معرفی کرد: یك‌ناحیه ساده‌ـهمبند است اگر یك‌برش آن را به‌دوقسمت تقسیم کند، و همبندیش مساوی تعداد برشهای لازم برای تفکیك آن است. (شکل ۱ را ببینید.) این مفهوم در رسالهٔ



شکل ۱. مثال ریمان از رویهٔ دوگانه‌ـهمبند.

دکتری ریمان آمده بود (۱۸۵۱) و با انتشار مقالهٔ او در زمینهٔ انتگرالهای آبلی (۱۸۵۷) رواج بیشتری یافت [۸]. دراینجا بود که این‌ایده موردتوجه هرمان‌فون‌هلمهولتس قرار گرفت که در تلاش به‌کارگیری ایده‌های گرین درمسیر دیگری بود.

هلمهولتس و گردابها

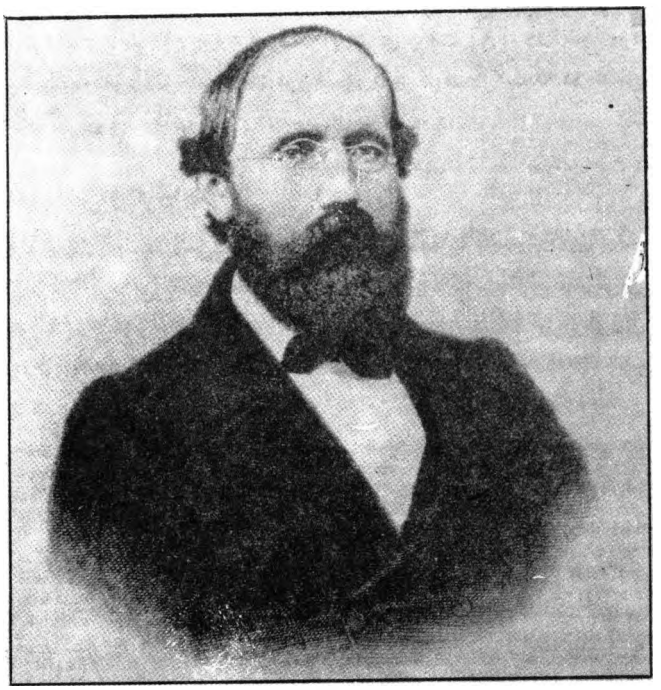
مقالهٔ ۱۸۵۸ هلمهولتس‌دربارهٔ انتگرالهایی‌ازمعادلات هیدرودینامیك که حرکت گردابی را به‌دست می‌دهند نیز عمیقاً تحت تأثیر کار گرین بود [۹]. هلمهولتس (۱۸۲۱ـ۱۸۹۴) درضمن‌مطالعهٔ فیزیولوژی گوش به‌حل مسائل مقدار مرزی در مکانیك سیالات علاقه‌مند شد. (او درآن زمان استاد علم تشریح در بن بود [۱۰].) علاوه‌براین هلمهولتس مشابهتی بین بعضی مسائل هیدرودینامیك و مسائلی در نظریهٔ الکترومغناطیس دیدکه مدت مدیدی توجهش را جلب‌کرد. تلاشهایی‌که برای یك بررسی نظری مفصل از تشابه نظریهٔ الکترومغناطیس و دینامیك سیالات صورت می‌گرفت ممکن است ملهم ازشباهت ظاهری بین پدیده‌های‌الکتریکی و هیدرودینامیکی بوده باشد. در نیمهٔ قرن نوزدهم جریان الکتریکی را عموماً به عنوان جریان یك یا دو «سیال الکتریکی» در امتداد یك هادی درنظرمی‌گرفتند. حرکت این سیال یك اثرمغناطیسی تولیدمی‌کند. آندره‌ماری‌آمپر در دههٔ ۱۸۲۰ نشان دادکه مغناطیس را می‌توان نتیجه‌ای ازجریانهای الکتریکی میکروسکوپی فرضی دریك جسم درنظرگرفت، و بنابراین وجود پدیده‌های الکترومغناطیسی باید به‌این معنی باشدکه یك جریان به‌جریانهای دیگر تبدیل می‌شود. هرگاه جریان اولیه در امتداد یك‌خط راست‌جاری‌شود، جریانهای نظیر اثرهای مغناطیسی باید مارپیچی و تشکیل‌دهندهٔ گردابهای میکروسکوپی باشند.

تحقیقات هلمهولتس و دیگران در این زمینه، با هدف دقیق ساختن این‌تصویرنسبتاً مبهم انجام‌شد. درمقالهٔ ۱۸۵۸، هلمهولتس پرسش زیر را مورد بررسی قرار داد: فرض‌کنید ظرفی سربسته داشته باشیم که با سیال بی‌اصطکاك تراکم‌ناپذیری پرشده باشد. چگونه عمل روی مرز ظرف برحرکت [سیال] در داخل ظرف تأثیر می‌گذارد؟

هلمهولتس ظاهراً به‌محض خواندن مقالهٔ گرین، ارزش قضایای گرین را در بررسی چنین مسائلی دریافت، اما به‌دلیل‌دیگر مسئولیتهای دانشگاهی، پروراندن ایده‌هایش را در این زمینه‌کنار گذاشت. ولی او درهمین اواخرمقالهٔ ۱۸۵۷ ریمان را نیزخوانده بود که برای او روشن می‌کرد قضیهٔ گرین تنها وقتی‌که نواحی مورد بررسی ساده‌ـهمبند باشند، قابل استفاده است. این بدان‌دلیل است‌که توابع دارای پتانسیل ـ که امروز آنها را میدانهای برداری پایستار می‌نامیم ـ در واقع ممکن است در نواحی چندگانه‌ـهمبند، چند مقداری باشند.

حال ببینیم که هلمهولتس‌چطور از قضیهٔ گرین‌استفاده می‌کند. او با معادلهٔ اویلر درباب دینامیك سیالات شروع می‌کند، که با نمادهای برداری می‌توان آن را چنین نوشت

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho}\nabla\vec{p} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{v} \qquad (۴)$$



برنهارد ریمان

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 . \qquad (5)$$

دراینجا ρ چگالی سیال، $\vec{p}$ فشار، و $\vec{v}$ سرعت است. هلمهولتس فرض کرد که

$$\vec{F} = \nabla V \quad (\text{که } V \text{ یك نیرو-پتانسیل است})$$

و

$$\vec{v} = \nabla \varphi \quad (\varphi \text{ یك سرعت-پتانسیل است}) .$$

از (۵) نتیجه می‌شود که φ درمعادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند زیرا $\nabla \cdot \vec{v} = \nabla^2 \varphi = 0$. سپس هلمهولتس توجه کرد که این دلالت می‌کند به

$$\nabla \times \vec{v} = \nabla \times (\nabla \varphi) = 0 .$$

هرگاه دیوارهٔ ظرف صلب باشد، این رابطه بدین‌معنی است که مؤلفهٔ سرعت عمود برمرز صفر است. بنابراین، اگر n یك قائم برونسو باشد، $\partial \varphi / \partial n$ همه‌جا متحد صفر است. اما از اتحاد اول گرین داریم

$$\int_R (\nabla U \cdot \nabla V)\, dx^3 = \int\int V \frac{\partial U}{\partial n}\, ds - \int_R V \nabla^2 U\, dx^3 .$$

هرگاه $U = V = \varphi$ داریم

$$\int_R (\nabla \varphi)^2\, dx^3 = \int\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, ds = 0$$

(به‌یاد بیاورید که $\nabla^2 \varphi = 0$.)

بنابراین $\nabla \varphi = 0$، یعنی هیچ حرکتی درسیال القا نمی‌شود. بنابراین هرحرکت یك سیال درظرفی سربسته (با درون ساده-همبند) که یك پتانسیل سرعت دارد باید منحصراً به حرکت مرز بستگی داشته باشد. هلمهولتس نشان داد که حرکت مرز چنین حرکتی را درسیال به‌طور یکتا معین می‌کند. نتیجهٔ مهم دیگر این بود که گردابها تنها به‌وسیلهٔ حرکتی که پتانسیل سرعت ندارد، قابل تولید هستند. مهمتر اینکه، اگر گردابها از ابتدا موجود باشند، تحت اثر نیروهای پایستار، پایدارند.

وقتی که گردابهایی وجود دارند، می‌توان بخشی از سیال را که بدون گرداب است به‌عنوان یك ناحیهٔ چندگانه-همبند، که گردابها «سوراخهایش» هستند، درنظر گرفت. بنابراین برای حل مسائل مقدار مرزی درچنین ناحیه‌ای، درحالت ایده‌آل باید تعمیمی ازقضیهٔ گرین داشته باشیم که با چنین حالتهایی سروکار داشته باشد. هلمهولتس برمطلوب بودن چنین تعمیمی تأکید کرد و توجه کرد که به‌این‌منظور، مفهوم ریمان ازهمبندی را می‌توان به‌سهولت به سه‌بعد تعمیم داد.

درکار هلمهولتس موجودات هندسی فوراً فیزیکی می‌شوند، به‌این دلیل که سه‌بعدی هستند. همچنین نقاط فضا به‌مولکولهای یك سیال، و سوراخها درفضا به‌گردابها نظیر می‌شوند. دراین مورد، می‌توان به‌موجودات هندسی تعبیرهای فیزیکی روشنی نسبت‌داد، و سؤالات فیزیکی (مثلا دربارهٔ جوابهای مسائل مقدار مرزی‌خاص) مسائل ریاضی مهمی را مطرح می‌کنند.

تحقیقات هلمهولتس درمیان دانشمندان انگلیسی فیزیك-ریاضی، به‌خصوص تامسن، بیشتر جلب نظر کرد تا درمیان همکاران آلمانی او. دلیل این‌امر تا حدی علاقهٔ مشترك هلمهولتس و تامسن به‌مدلهای هیدرودینامیکی برای نظریهٔ الکترومغناطیس بود؛ این علاقه ناشی از موضع آنها دربرابر تفکری بود که درآن زمان درزمینهٔ نظریهٔ الکترومغناطیس درآلمان رواج داشت. این نظریه، مبتنی بر تحقیقات همکار گاوس، ویلهلم‌وبر، پدیده‌های الکتریکی را برپایهٔ یك قانون نیروی وابسته به‌سرعت توضیح می‌داد. هم هلمهولتس و هم تامسن فکرمی‌کردند که چنین نیرویی نمی‌تواند در اصل بقای انرژی صدق کند. هلمهولتس آشکارا احساس می‌کرد که چون تحصیلات رسمی ریاضی نداشته است، معاصرین آلمانیش مهارتهای ریاضی او را جدی نمی‌گیرند. بنابراین درمیان عالمان فیزیك-ریاضی انگلیس بود که مقالهٔ هلمهولتس با بیشترین علاقه وادراك خوانده‌شد.

تیت، تامسن، حلقه‌های دود و اتمها

رهیافت هلمهولتس، هواخواهی پرشوری را در پیتر گوتری تیت (۱۸۳۷-۱۹۰۱)، یك اسکاتلندی تحصیل کردهٔ کیمبریج که در ۱۸۵۸ در بلفاست تدریس می‌کرد، برانگیخت. درآن زمان تیت درتلاش تسلط یافتن برروش کواترنیونهای ویلیام همیلتن و نشان‌دادن فایدهٔ فیزیکی این‌روش ازطریق به‌دست‌آوردن کاربردهای‌مهم بود. به این دلیل اثر هلمهولتس توجه او را جلب کرد و آن را برای استفادهٔ خودش به‌انگلیسی ترجمه کرد [۱۱].

یك توضیح معترضه دربارهٔ کواترنیونها: امروزه، این‌مجموعه از اشیاء بیشتر در درسهای جبر یا اثباتهایی درنظریهٔ جبری‌اعداد مطرح می‌شود. در این مباحث می‌توانیم ازخاصیتهای کواترنیونها به‌عنوان یك‌حلقهٔ تقسیم تعویض‌ناپذیر استفاده کنیم. این کاربردها از کاربرد مورد نظر اولیه درهندسه وآنالیز بسیار دور هستند. همیلتن

هرمان فون هلمهولتس

کواترنیونها را در ۱۸۴۳ ابداع کرد، و به‌وسیلهٔ آنها ایدهٔ عملگرها را معرفی کرد. به‌خصوص عملگر دل یا نابلا یا Δی ما برایش مهم بود. کواترنیون درنظر همیلتن و تیت، توصیف‌کنندهٔ خارج‌قسمتی بود از چیزهایی که ما بردار می‌نامیم؛ چنین خارج‌قسمتی شامل یک ۴ تایی است که امتداد و سه دورانی را که جفت دلخواهی از بردارها را برهم منطبق می‌کند، مشخص می‌کند. [۱۲]. بعداً خواهیم دید که تیت چگونه از این رهیافت برای به‌دست آوردن چیزی که «اثباتهای فیزیکی» احکام تحلیلی نامید، استفاده کرد.

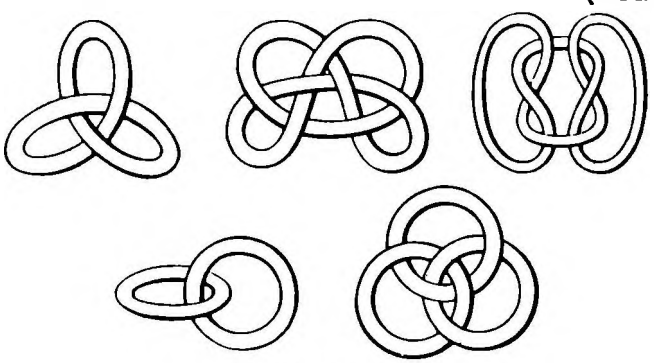
تیت در ۱۸۶۰ به ادینبورو رفت و همکاری را با ویلیام تامسن آغاز کرد که بعداً در گلاسکو ادامه یافت. از ۱۸۶۶ تا ۱۸۶۷ همکاری آنها در اوج بود و در این مدت رساله‌ای در فلسفهٔ طبیعی را (که دهها سال در بریتانیا کتاب درسی فیزیک مقدماتی محسوب می‌شد) تهیه می‌کردند. در اوایل ۱۸۶۷ تیت اثباتی تجربی از خاصیتهای پایداری گردابها به وسیلهٔ حلقه‌های دود، و نیز نظریهٔ ریاضی هلمهولتس را در باب این مسأله به‌تامسن ارائه کرد. تامسن این واقعه را در نامه‌ای به هلمهولتس چنین شرح می‌دهد:

> ولی حالا حرکات گردابی جای هرچیز دیگر را گرفته است، چون چند روز قبل تیت در ادینبورو راه بسیارخوبی برای تولید آنها به‌من نشان داد. یک‌وجه (یا درپوش) جعبه‌ای (هرجعبهٔ بسته‌بندی کهنه‌ای برای این منظورخوب است) را ببرید وسوراخ بزرگی دروجه مقابل ایجاد کنید. قسمت باز AB را با تکه پارچه‌ای مسدود کنید به‌طوری که پارچه محکم نباشد، و با دستتان به‌وسط پارچه بزنید. اگر چیزی درحال دودکردن را درجعبه قرار دهید، می‌بینید که با هرضربه حلقهٔ زیبایی خارج می‌شود.

سپس تامسن به‌شرح چیزهای بسیار جالبی که دربارهٔ این پدیده و نظریه یافته، می‌پردازد.

> دائمی بودن این دوران و رابطهٔ غیرقابل تغییری که شما ثابت کرده‌اید بین آن و بخشی از سیال، هنگامی که چنین حرکتی دریک سیال کامل انجام می‌گیرد، وجود دارد، نشان می‌دهد که اگر یک سیال کامل گذرنده از تمام فضا و متشکل از جوهر همهٔ مواد وجود داشته باشد، دوام یک حلقهٔ گردابی به‌اندازهٔ دوام اتمهای سخت جامد خواهد بود که لوکرتیوس و پیروانش (و اسلافش) آن را علت خواص دائمی اجسام می‌دانستند... بنابراین اگر دوحلقهٔ گردابی در یک سیال کامل تولید شوند، ومانند حلقه‌های یک زنجیر ازمیان یکدیگر بگذرند، هرگز نمی‌توانند با یکدیگر برخورد کنند یا یکی دیگری را بشکنند. آنها تشکیل اتمی فناناپذیر خواهند داد. [۱۳]

تامسن فوراً نظریه‌ای ریاضی دربارهٔ این اتمهای گردابی ظاهراً فناناپذیر ساخت، ونتایج او کمی کمتر از سه هفتهٔ بعد درانجمن سلطنتی ادینبورو خوانده شد. مقالهٔ او دربارهٔ حرکت گردابی، که تفصیل بیشتری از موضوع را دربرداشت در ۱۸۷۸ منتشر شد [۱۴]. در اینجا او با مسأله‌ای که هلمهولتس درمورد تعمیم قضیهٔ گرین به نواحی چندگانه‌همبند طرح کرده بود مواجه شد وآن را حل کرد. زیرا برای بررسی خواص اتمهای گردابی لازم بود که مسائل مقدارمرزی درمواردی که گردابهای پیچیده (مانند آنها که درشکل آمده‌اند) بخشی ازمرز را تشکیل می‌دهند، حل شود. (شکل ۲ را ببینید.)



شکل ۲. گره‌های ویلیام تامسن.

در این‌مقاله، تامسن صورت اولیهٔ قضیهٔ گرین‌را چنین‌نوشت:

$$\int_R \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi' \, dV = \oint \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} \, da - \int_R \varphi \nabla^2 \varphi' \, dV$$

$$= \oint \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, da - \int_R \varphi' \nabla^2 \varphi \, dV.$$

در اینجا φ و φ' باید تک‌مقداری باشند. سپس تامسن به بررسی این موضوع پرداخت که اگر φ' چندمقداری باشد، یعنی اگر R را یک‌ناحیهٔ چندگانه‌همبند درنظر گیریم، چه اتفاقی می‌افتد، و بعد مسأله را درحالت کلی بررسی کرد. فضای چندگانه‌همبند را می‌توان با برشهایی یا با تعبیهٔ آنچه تامسن سدهای متوقف‌کننده نامید، ساده‌همبند ساخت. انتگرال در امتداد یک مسیر (تقریباً)

بسته از یك طرف سد تا طرف دیگر مقدار ثابت k_i را دارد، که برای همهٔ چنین مسیرهایی یکی است؛ این گونه ثابتهای k_i برای هر سد متوقف کننده وجود دارند و انتگرال موردنظر به‌این‌صورت درمی‌آید

$$\int_R \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi' \, dV$$
$$= \oint \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d\sigma + \sum_i k_i \iint \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d\sigma' - \int_R \varphi \nabla^2 \varphi' \, dV$$
$$= \oint \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma + \sum_i k_i \iint \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma' - \int_R \varphi' \nabla^2 \varphi \, dV.$$

در اینجا $d\sigma'$ یك‌جزء از رویهٔ سد را نمایش می‌دهد.

تامسن با مجهزشدن به این سلاح توانست حرکت سیال در نواحی چندگانه‌ـهمبند را بررسی کند، و نتیجه گرفت که مؤلفهٔ قائم سرعت یك‌سیال در هرنقطه از مرز، حرکت را در داخل یك‌ناحیهٔ چندگانه‌ـهمبند معین می‌کند. (مشروط براینکه گردش سیال در هر ناحیه برما معلوم باشد.) وی سپس با توجه به‌اینکه در بعضی از رویه‌ها سدهای متوقف‌کننده باید خود را قطع کنند، و تشخیصشان مشکل است، به‌این موضوع پرداخت که بهترین تعریف مرتبهٔ همبندی چیست. بنابراین تعریفی را پیشنهاد کرد که از آنچه او «مسیرهای انطباق‌ناپذیر» می‌نامید ـ و ما رده‌های هوموتوپی مسیرهای بسته با نقطهٔ مبنا می‌نامیم ـ در آن استفاده می‌شد. او نقطه‌ای را روی رویه انتخاب کرد و ملاحظه کرد که اگر معلوم شود چند مسیر دو به‌دو انطباق‌ناپذیر روی آن رویه می‌توان رسم کرد، همبندی رویه مشخص می‌شود. مثلا، برای یك‌ناحیهٔ ساده‌ـهمبند همهٔ مسیرهای بسته روی رویه، هوموتوپیك هستند. اگرچه به این ترتیب تعریف روشنی از همبندی به‌دست آمد، استفاده از این‌روش برای به‌دست آوردن تعمیم قضیهٔ گرین ممکن نیست زیرا برای این‌کار به‌سدهای متوقف کننده نیازمندیم.

بنابراین‌علاقهٔ تامسن به اتمهای گردابی اورا مستقیماً به‌تعمیمی از قضیهٔ گرین، و به مسألهٔ تعریف مناسب همبندی هدایت کرد. روش اثبات او اساساً مشابه روش گرین است که سدهای متوقف کننده به‌آن اضافه شده، و این همان روشی است که امروزه معمولا در درسهای حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری تدریس می‌شود.

روایت کواترنیونی تیت از قضیهٔ گرین

در اواخر ۱۸۶۰، علاقهٔ تیت به‌کواترنیونها به‌جنگی صلیبی منجر شد. او در ۱۸۷۱ خطاب به انجمن بریتانیایی گفت:

> یك بررسی دکارتی را... با معادل کواترنیونیش... مقایسه کنید. مشکل بتوان گفت که فرق آنها با یکدیگر از فرق دستگاه اعشاری با مقیاس دودویی یا با حساب قدیمی یونانی، یا ازفرق بخش‌منظم دستگاه متری با «بی‌دستگاهی» نامعقول بریتانیای کبیر، بیشتر و نمایانتر است.

درهمین سخنرانی تیت خاطرنشان کرد که از نظرگاه کواترنیونی:

> فوراً به‌نظرمی‌رسد که قضیهٔ مشهورگرین چیزی نیست جز معادلهٔ مشهور پیوستگی برای‌سیالی ناهمتجانس که چگالیش در هرنقطه متناسب با یك‌پتانسیل الکتریکی، وتغییرمکان یا سرعتش متناسب و درجهت نیروی الکتریکی ناشی از پتانسیل دیگری باشد [۱۵].

ببینیم منظور او دقیقاً چه بود. تیت درمقالهٔ ۱۸۷۰اش،دربارهٔ قضیهٔ گرین و سایر قضایای وابسته، فرض کرد ناحیه‌ای فضایی چون R به‌طور یکنواخت با نقاط پرشده باشد [۱۶]. اگرنقاط درونی و بیرونی این نواحی به‌وسیلهٔ برداری نمایش داده شود، ممکن‌است افزایش یا کاهش‌خالصی درحجم ـ یعنی درتعداد نقاط ـ درناحیهٔ R حاصل شود. این به‌دوطریق قابل محاسبه است:

۱. می‌توانیم افزایش‌کل چگالی را درسراسر R بیابیم

$$\int_R \operatorname{div} \sigma \, dV \quad \left(\text{با نمادگذاری تیت} \iint S \cdot \nabla\sigma \, ds\right) \qquad (۶)$$

۲. می‌توانیم افزونی بردارهای گذرندهٔ درونسو را نسبت به‌بردارهای گذرندهٔ برونسو براوردکنیم:

$$\iint \sigma \cdot \vec{n} \, da \quad \left(\text{بانمادگذاری‌تیت} \iint s.\sigma U V \, ds\right). \qquad (۷)$$

عبارات (۶) و (۷) باید مساوی باشند تا آنچه که ما حالا قضیهٔ دیورژانس می‌نامیم از معادلهٔ پیوستگی به‌دست آید. اگرفرض کنیم که چگالی ـ مثلا، سیالی الکتریکی ـ به وسیلهٔ پتانسیل P_1 معین می‌شود وتغییرمکان متناسب با نیروی σ با پتانسیل P است، داریم

$$\nabla(PP_1) = P\nabla P_1 + P_1 \nabla P$$

و

$$\nabla^2(PP_1) = P\nabla^2 P_1 + P_1 \nabla^2 P + 2(\nabla P \cdot \nabla P_1). \qquad (۸)$$

اما بنابرقضیهٔ دیورژانس

$$\int_R \nabla^2(PP_1)\, dV = \int_R \operatorname{div}(\nabla P P_1)\, dV$$
$$= \int_{\partial R} (\nabla P P_1) \cdot \vec{n} \, da$$
$$= \int_{\partial R} (P\nabla P_1 + P_1 \nabla P) \cdot \vec{n} \, da.$$

بنابراین از (۸) داریم

$$\int_{\partial R} (P\nabla P_1 + P_1 \nabla P) \cdot \vec{n} \, da$$
$$= \int_R (P\nabla^2 P_1 \nabla^2 P)\, dV + 2\int_R \nabla P \cdot \nabla P_1 \, dV.$$

اما در اینجا سمت چپ، بنابرقضیهٔ دیورژانس، برابراست با

$$= \int_R (P\nabla^2 P_1 - P_1 \nabla^2 P)\, dV.$$

از ترکیب این دو، قضیهٔ گرین به‌شکل

$$\int_R (\nabla P \cdot \nabla P_1)\, dV = -\int_R P_1 \nabla^2 P + \int_{\partial R} P \frac{\partial P}{\partial n}\, da$$
$$= -\int_R P \nabla^2 P_1 + \int_{\partial R} P \frac{\partial P_1}{\partial n}\, da$$

به‌دست می‌آید. توجه کنید که استدلال فوق متکی است بر در نظر گرفتن نقاط هندسی به عنوان موجودات فیزیکی متحرکی که از خواص پیوستگی شبیه خواص یك سیال برخوردارند.

نظریات تیت در نقدی که به تاریخ ۱۸۹۲ بر ترمودینامیك پوانکاره نوشت، به‌خوبی تلخیص شده است:

> حدود چهل سال قبل، اعضای یك محفل ریاضی در کیمبریج، از لزوم به‌کار بردن کلمات در کتابهای درسی فیزیك-ریاضی مرتباً اظهار تأسف می‌کردند. ایده‌آل آنها دنیایی بود عاری از هرچیز به‌جز فرمول، که گرچه نمی‌توان به‌آن دست یافت ولی می‌توان بسیار به‌آن نزدیك شد. اما آدم در طی چهل سال چیزهایی یاد می‌گیرد، و از این‌رو امروز افراد باقیماندهٔ آن محفل برداشت کاملا متفاوتی از موضوع پیدا کرده‌اند. آنها برحسب تجربه آموخته‌اند که ریاضیات را، دست‌کم تا آنجایی که در تحقیقات فیزیکی مطرح می‌شود، صرفاً ابزاری کمکی برای تفکر بدانند، این یکی از بزرگترین حقایقی بود که دستاوردهای فارادی در طول زندگی علمیش، آن را به‌کرسی نشاند [۱۷].

نتیجه

سیاحت ما از گرین تا تیت ما را از نظریهٔ الکترواستاتیك و پتانسیل، از راه آنالیز مختلط و دینامیك سیالات به رده‌های هوموتوپی نگاشتها و آنالیز برداری رساند. اگرچه من فقط چندتایی از مسائل جالب مربوط به‌این مباحث را مختصراً بررسی کرده‌ام، امیدوارم نشان داده باشم که تفکر فیزیکی نه تنها درطرح مسائل ریاضی، بلکه درحل آنها نیز مهم است. خصوصاً، تفکر فیزیکی ممکن است به‌خلق بعضی مفاهیم ریاضی بینجامد که به‌خودی خود نیز سودمندند، مثلا مفهوم همبندی در رده‌بندی گرهها که تامسن آن را توصیف کرد، مفید واقع شد. تیت با حل این مسألهٔ رده‌بندی در ۱۸۷۰، به اولین نتایج اساسی درنظریهٔ گرهها دست یافت.

مراجع

1. J.Clerk Maxwell, Review of Thomson and Tait in *Nature*, vol. xx, reprinted in *Scientific Papers*, vol. 2., 777.
2. O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, Springer, Berlin, 1929.
3. George Green, *Mathematical Papers*, ed. N. Ferrers, Macmillan, London, 1871; reprint, Chelsea, New York, 1970.
4. H. Gwynedd Green, A Biography of George Green, in A. Montagu ed., *Studies and Essays in the History of Science and Learning*, Schumann, New York, 1956.
5. For information on Murphy, see W. Thomson, *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism*, Macmillan, London, 1872, 1-2 and 126.
6. J. Liouville, reprinted in [5] 174.
7. S. P. Thompson, *Life of Lord Kelvin*, Chelsea, New York, 1976, vol. 1, 113-119.
8. G. F. B. Riemann, *Gesammelte Mathematische Werke*, Teubner, Leipzig, 1892, 92-96.
9. H. Helmholtz, Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, Welche den Wirbelbewegungen entsprechen, in *Journal für Mathematik* 55 (1858), 25-55.
10. Leo Königsberger, *Hermann von Helmholtz*, Vieweg, Braunschweig, 1902, vol. 1, 307-312.
11. S. P. Thompson, *Life of Lord Kelvin*, Chelsea, New York, 1976, vol. 1, 511.
12. P. G. Tait, and P. Kelland, *Introduction to Quaternions*, Macmillan, London, 1904, 37-38.
13. S. P. Thompson, *Life of Lord Kelvin*, Chelsea, New York, 1976, vol. 1, 514-515.
14. W. Thomson, On vortex motion, *Trans. Royal Soc. Edinburgh* 25 (1869), 217-260.
15. C. G. Knott, *Life and Scientific Work of P. G. Tait*, Cambridge University Press, 1911.
16. P. G. Tait, *Scientific Papers*, Cambridge University Press, 1911, vol. 1, 136-150.
17. C. G. Knott, *Life and Scientific Work of P. G. Tait*, Cambridge University Press, 1911, p. 273.

****

• Thomas Archibald, "Connectivity and smoke-rings: Green's second identity in its first fifty years," *Mathematics Magazine*, (4) **62** (1989) 219-232.

★ تامس آرچیبالد، دانشگاه آکادیای کانادا

ایده‌های کومر در مورد آخرین قضیهٔ فرما•

پائولو ریبنبویم*
ترجمهٔ مهدی مجیدی ذوالبنین

هدف من در این سخنرانی، تشریح ایده‌های اساسی کومر دربارهٔ آخرین قضیهٔ فرما و نشان دادن این‌موضوع‌است که برخورد وی با این مسأله تا چه حد طبیعی بوده وچگونه توانسته است نظریهٔ هیأتهای دایره‌بری[1] را ابداع کند. من در زمینهٔ قضیهٔ اصلی وسایر کارهای وی بحث خواهم‌کرد و برخی از راههایی را که این مفاهیم درمطالعهٔ حساب گشوده‌اند، شرح خواهم داد.

۱. «آخرین قضیهٔ فرما» (که هنوز درحالت‌کلی اثبات نشده است) چنین حکم می‌کند:

(آ. ق. ف.): اگر $n \geqslant ۳$، آنگاه اعداد صحیح و مثبتی چون x و y و z یافت نمی‌شوند که

$$x^n+y^n=z^n .$$

درشروع بحث‌یادآوری می‌کنم که اگر $n=۲$، آنگاه‌چنین اعدادی وجود دارند. مثلا:

$$۳^۲+۴^۲=۵^۲$$

یا

$$۵^۲+۱۲^۲=۱۳^۲$$

در این گفتار، این «سه‌تاییهای فیثاغورسی» را علی‌رغم خواص جالبشان بررسی نخواهم کرد.

برای اثبات آ. ق. ف. درحالت‌کلی، اثبات‌آن برای $n=۴$ و هرنمای‌اول $p \geqslant ۳$ کفایت می‌کند. درواقع اگر n مرکب باشد، $n>۲$، آنگاه یا عامل فرد اولی دارد ویاعاملی‌که برابر ۴ است. اگر قضیه برای $n=m \cdot l$ (با ضابطهٔ $l>۱$) نادرست باشد یعنی اگر اعداد صحیح و مثبت x و y و z وجود داشته باشند که $x^n+y^n=z^n$ آنگاه $(x^l)^m+(y^l)^m=(z^l)^m$ و در نتیجه قضیه برای m نیز نادرست خواهد بود که خلاف فرض است.

فرما برای حالت $n=۴$ اثباتی پیدا کرد. وی در این اثبات معروف، روش نزول نامتناهی را به‌کار برد: بااین‌فرض‌که سه‌تایی (x, y, z) از اعداد صحیح مثبت، یك جواب معادلهٔ فرما باشد، موفق شد جواب دیگری مانند (x', y', z') پیداکند که درآن $z>z'>۰$. سپس‌از این‌جواب‌جدیدشروع‌کرد وبا تکراراروش، توانست جواب دیگری مثل (x'', y'', z'') به‌دست‌آورد‌که $z>z'>z''>۰$. ازآنجاکه z و z' و z'' و . . . اعدادی‌صحیح و مثبت‌اند، این روند را نمی‌توان به‌دلخواه ادامه داد واین تناقض است. بنابراین معادلهٔ فرما نمی‌تواند در اعداد صحیح و مثبت جواب داشته باشد.

1. cyclotomic fields

اویلر قضیه را در حالت $n=۳$ اثبات کرد. اثبات دیگری برای این حالت در میان نوشته‌های گاوس نیز پیدا شده که پس از مرگش به‌چاپ رسید. درواقع گاوس حکم قویتری را اثبات کرده بود. فرض‌کنید $\omega=(-۱+\sqrt{-۳})/۲$ یك ریشهٔ سوم یك باشد و هیأت همهٔ اعداد به‌شکل $a+b\omega$ $(a, b \in \mathbf{Q})$ را با $\mathbf{Q}(\omega)=\mathbf{Q}(\sqrt{-۳})$ نشان دهیم. (گاهی این هیأت را هیأت آیزنشتاین می‌نامند) گاوس نشان داد که در حالت $n=۳$ معادلهٔ فرما در $\mathbf{Q}(\omega)$ دارای جواب غیرصفر نیست.

وقتی‌لژاندر مقالاتی درموردآخرین قضیهٔ فرمانوشت واثبات اویلر را درکتاب نظریهٔ اعداد خودآورد، توجه ریاضیدانان فرانسوی به‌آخرین قضیهٔ فرما جلب شد.

درحدود ۱۸۲۵ تا ۱۸۲۸ لژاندر و دیریکله‌مستقل از یکدیگر و تقریباً به‌طور همزمان قضیه را درحالت $n=۵$ اثبات کردند. در۱۸۳۲ دیریکله قضیه‌را برای $n=۱۴$ نیز اثبات نمودکه‌به‌طور محسوسی ساده‌تر از حالت $n=۷$ بود. اثبات حالت اخیر در ۱۸۳۹ توسط لامه[1] صورت گرفت و در ۱۸۴۰ لبگ این اثبات را ساده‌تر کرد.

در این زمان درپاریس توجه وعلاقه‌خاصی‌نسبت به‌آ.ق.ف. ابرازمی‌شد. علاوه بر ریاضیدانانی که‌نام بردیم (ازجمله دیریکله که‌مدتی را در پاریس به‌سر برد) کوشی‌هم مجموعه‌ای از مقالات اساسی در نظریهٔ اعداد منتشر کرد. وی روی به‌اصطلاح چندجمله‌ایهای دایره‌بری کار می‌کرد و تجزیهٔ آنها به عوامل اول رامطالعه می‌نمود. به‌زبان امروزی می‌توان گفت‌که تجسسات وی مطالعهٔ حساب هیأتهای دایره‌بری بوده است. لیکن او موفق نشد کار مهمی در زمینهٔ مسألهٔ فرما انجام دهد ولی‌کومر مدت کوتاهی بعد چنین کاری انجام داد.

در ۱۸۴۷ لامه یك اثبات کلی‌برای آ. ق. ف. به‌آکادمی‌علوم پاریس ارائه کرد. جزئیات این اثبات درمجلهٔ لیوویل، مجلهٔ ریاضیات محض و کاربردی، چاپ شد. اما لیوویل متوجه شد که اثبات درست نیست. زیرا لامه (بدون هیچ توجیهی) فرض کرده بودکه تجزیهٔ چندجمله‌ایهای معینی از ریشه‌های یك به‌حاصلضرب عوامل تحویل‌ناپذیر، یکتاست. این موضوع به‌هیچ وجه بدیهی نبود و بعداً معلوم شد که نادرست است. پس‌از تلاشهای مکرر برای اصلاح اثبات، لامه دریافت که بایك مشکل اساسی مواجه است که نمی‌تواند آن را برطرف کند.

۲. با بودن چنین زمینه‌ای است که کومر کار مهمش را در

1. Lamé

مورد آخرین قضیه فرما آغاز می‌کند. وی درحدود ۱۸۳۷ اولین مقالهٔ‌خود را درمورد آ.ق.ف. به‌ازای‌نمای‌زوج $2n$ به‌زبان لاتینی منتشرکرد و مطلب زیر را اثبات نمود:

اگر $n>1$ فرد باشد و اگر اعداد صحیح و مثبت x و y و z یافت شوند که (n, xyz).م.م.ب = ۱ و $x^{2n}+y^{2n}=z^{2n}$ آنگاه لزوماً: (پیمانهٔ ۸) $n\equiv 1$.

این نتیجه، تنها یك نتیجهٔ جزئی است. اثبات آن بسیار ساده بود و بعداً اثباتهای متعدد دیگری نیز برای آن پیدا شد.

اگر نما درمعادلهٔ فرما زوج باشد، می‌توان روشهای کارگشایی از نظریهٔ صورتهای‌درجه دوم را به‌کار برد. مثلا در دسامبر ۱۹۷۷ ترجانیان[1] نشان داد: اگر p عدد اول فردی باشد، و اگر اعداد صحیح و مثبت x و y و z موجود باشندکه $x^{2p}+y^{2p}=z^{2p}$، آنگاه $2p$ یکی از دو عدد x یا y را می‌شمارد. جالب اینجاست که اثبات ترجانیان کاملا مقدماتی و کلاسیك است ودرآن، فقط از نماد ژاکوبی و خواص تقسیم‌پذیری عبارتهایی به‌صورت $(x^p\pm y^p)/(x\pm y)$ استفاده شده است.

از اینجا امکان پیداشدن یك اثبات مقدماتی برای گزارهٔ زیر به‌ازای نمای اولی چون p (که معمولا حالت اول آ. ق. ف. برای نمای p نامیده می‌شود) به‌ذهن القا می‌شود.

اگر x و y و z اعدادصحیح و مثبتی باشند که $x^p+y^p=z^p$، آنگاه p، xyz را می‌شمارد.

برای چنین اثباتی دست‌کم لازم است ازقانون تقابل برای نماد باقیماندهٔ توانی به‌پیمانهٔ p استفاده شود.

۳. اولین مقالهٔ مهم کومر دربارهٔ قضیهٔ فرما از ۱۸۴۴ درحال شکل‌گیری بود و سرانجام در ۱۸۴۷ منتشرشد. روش‌او که به‌زودی آن‌را شرح خواهیم داد، منجر به‌استفادهٔ او از هیأتهای دایره‌بُری، شد. فرض‌کنید عدد اول p نمای معادلهٔ فرما باشد. وی

$$\zeta_p=\cos(2\pi/p)+i\sin(2\pi/p)$$

یعنی یك ریشه pام اولیهٔ یك و هیأت $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ شامل همه اعداد مختلط به‌صورت

$$\alpha=a_0+a_1\zeta_p+a_2\zeta_p^2+\cdots+a_{p-2}\zeta_p^{p-2}$$
$$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{p-2}\in\mathbf{Q})$$

را درنظر گرفت. اعدادی که در آنها $a_0, a_1, \cdots, a_{p-2}\in\mathbf{Z}$، حلقهٔ $\mathbf{Z}[\zeta_p]$ از اعداد صحیح دایره‌بری (نسبت به p) را تشکیل می‌دهند. دقیقاً مانند اعداد صحیح معمولی، اگر $\alpha, \beta\in\mathbf{Q}(\zeta_p)$ (α و β غیرصفر) آنگاه α شمارندهٔ β است اگر عدد صحیح دایره‌بری γ موجود باشد به‌طوری که $\alpha\gamma=\beta$. دوعدد صحیح دایره‌بری α و β وابسته به‌هم[2]اند هرگاه α شمارندهٔ β باشد و β، α را بشمارد. عدد صحیح دایره‌بری α، اول‌است هرگاه هرشمارندهٔ آن یا به‌خودش وابسته باشد، یا به ۱. این نظریهٔ تقسیم‌پذیری، بین اعدادصحیح دایره‌بری‌وابسته به‌هم‌تمایزی قائل‌نمی‌شود. درحالت خاص، اعداد صحیح دایره‌بری وابسته به ۱، همان نقش بی‌اثر ۱ را دارند و یکه[3]های هیأت دایره‌بری $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ نامیده می‌شوند.

قضیهٔ اساسی یکتایی تجزیهٔ اعداد صحیح را می‌توان چنین بیان کرد:

الف) هرعدد صحیح دایره‌بری متعلق به $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ را می‌توان به‌حاصلضرب تعداد متناهی عدد اول دایره‌بری تجزیه کرد.

ب) هردوتجزیه‌که بدین‌شکل باشند درحد یکه‌ها یکی هستند. یعنی اگر $\alpha=\beta_1\beta_2\cdots\beta_s=\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_t$، که در آن β_i و γ_j اعداد اول دایره‌بری هستند، آنگاه $s=t$ و پس از مرتب کردن، γ_i و β_i وابسته‌اند (برای‌هر $i=1, \cdots, s$).

اثبات درستی قسمت الف واقعاً ساده است. اما کومر قبلا درسال ۱۸۴۴ دریافته‌بود که قسمت ب درحالت‌کلی برقرار‌نیست. وی توانسته بود نادرستی آن‌را برای حالت $p=23$ نشان دهد.

کومر درنامه‌ای که‌در ۱۸۴۷ به‌همراه مقاله‌اش برای لیوویل فرستاد، شرح دادکه چگونه برای اصلاح قضیهٔ یکتایی تجزیه، نوع‌جدیدی از اعدادمختلط را درنظرگرفته است. وی این اعداد را «اعداد ایده‌آل» نامید. در مقاله‌ای دیگر، کومر مفهوم اعداد ایده‌آل‌را به‌کمك مفهوم مشابهی درشیمی توضیح‌داد! درآن‌زمان، وجود برخی مواد شیمیایی که دارای رادیکالهای فلوئورند قطعی شده بود اما هنوز خود فلوئور به‌صورت مجزا به‌دست‌نیامده بود. کومر می‌گفت که‌فلوئور مانند اعداد ایده‌آل اوست و رادیکالهای حاوی فلوئورکه در طبیعت یافت می‌شوند، درحکم اعداد مختلط واقعی‌اند.

تعریف‌کومر از ایده‌آلها، برحسب خواص تقسیم‌پذیری بود. این‌دیدگاه بعداً به‌مفهوم شمارنده تبدیل شدکه درنظریهٔ توابع جبری ظاهر می‌شود.

از سوی دیگر، ددکیند درتلاش برای فهمیدن مفهوم کومر، به‌کمك زیرمجموعه‌های خاصی از $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ تعبیری از ایده‌آلها به‌دست داد. از دیدگاه ددکیند، یك ایده‌آل زیرمجموعه‌ای مانند I از $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ است که‌دارای این ویژگیها باشد: تحت‌عمل جمع بسته باشد و $0\in I$؛ اگر $\alpha\in\mathbf{Z}[\zeta_p]$ و $\beta\in I$ آنگاه $\alpha\beta\in I$؛ عنصری مانند α موجود باشدکه $\alpha\in\mathbf{Z}[\zeta_p]$ و $\alpha\neq 0$ و برای هر $\beta\in I$، $\alpha\beta\in\mathbf{Z}[\zeta_p]$. اگر $I\subset\mathbf{Z}[\zeta_p]$، ایده‌آل را صحیح ودر غیراین صورت آن را کسری می‌نامیم. ضرایب هر $\alpha\in\mathbf{Q}(\zeta_p)$ یك ایده‌آل پدید می‌آورد: $(\alpha)=\{\beta\alpha|\beta\in\mathbf{Z}[\zeta_p]\}$ که آن را ایده‌آل اصلی α می‌نامیم. شرط‌لازم‌وکافی‌برای اینکه $(\alpha)=(\beta)$ آن‌است‌که $\alpha=\beta=0$ یا $\alpha\beta^{-1}$ یکه‌ای از $\mathbf{Z}[\zeta_p]$ باشد.

بنابرتعریف، حاصلضرب ایده‌آلهای I و J ایده‌آلی است متشکل از همهٔ عناصری که از جمع تعداد متناهی عنصر به‌شکل $\alpha\beta$ ($\alpha\in I$ و $\beta\in J$) به‌دست‌می‌آیند. کومر برای تعیین محدودهٔ ایده‌آلهای‌غیرصفری که ایده‌آل اصلی نیستند (یا به‌اصطلاح کومر «اعداد ایده‌آلی» که «عدد» نیستند) رابطهٔ‌هم ارزی‌زیر راتعریف کرد: $I\sim J$ اگر عنصری مانند α وجود داشته باشد که $\alpha\neq 0$ و $\alpha\in\mathbf{Q}(\zeta_p)$ و $I=(\alpha)J$. رده‌های هم‌ارزی به‌دست آمده، «رده‌های ایده‌آلها» نامیده می‌شوند. اینکه بگوییم تنها یك ردهٔ هم‌ارزی در $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ وجود دارد، بدین‌معنی است‌که هر ایده‌آل $\mathbf{Q}(\zeta_p)$، ایده‌آل اصلی است. کومر نشان داد که از اینجا نتیجه می‌شود قضیهٔ یکتایی تجزیه برای اعضای حلقهٔ متناظر از اعداد صحیح دایره‌بری برقرار است.

از آنجاکه کومر نادرستی این قضیه را برای حالاتی مثل

1. Terjanian 2. associated 3. unit

$p=۲۳$ نشان داده بود، طبیعتاً به‌بررسی اندازهٔ مجموعهٔ رده‌های ایده‌آلها کشانده شد.

در این‌مورد، توانست نتیجه اساسی زیر را ثابت کند: در هر هیأت دایره‌بری $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ تعداد رده‌های ایده‌آلها متناهی است. این تعداد را عدد رده‌ی $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ می‌نامند و اغلب آن‌را با h_p نمایش می‌دهند.

این ایده‌ها در مجموعهٔ مقالات مهمی که بین سالهای ۱۸۴۷ تا ۱۸۵۱ انتشار یافتند، عرضه شدند. (یکی از این مقالات در ۱۸۵۱ درفرانسه و در مجلهٔ لیوویل چاپ‌شد) این‌مقالات بسیاری از قضایای اساسی نظریهٔ اعداد جبری راکه بعدها پدید آمد برای ردهٔ خاص هیأتهای دایره‌بری دربرداشتند.

۴. اکنون به‌قضیهٔ اصلی کومر می‌پردازم. من شخصاً میل‌دارم این‌قضیه‌را قضیهٔ تاریخی‌کومر بنامم زیرا بر رأس نظریه‌ای قرار گرفته‌که بسیار پیشرفته‌تر از همهٔ دانشها و فنون آن زمان به‌شمار می‌رود و همهٔ اجزای آن را خود کومر ساخته است.

درمورد داستان ادعایی اثبات آ. ق. ف. توسط کومر (قبل‌از ۱۸۴۴) که طبق‌آن گویا کومر درستی قضیهٔ یکتایی تجزیه را مفروض گرفته‌است،صحبت‌نخواهم‌کرد. این‌ماجراکه توسط هنزل[1] شایع شده، درمقاله‌ای از ادواردز (۱۹۷۵) مورد بررسی قرار گرفته است؛موضوع این‌مقاله، نامه‌ای است از لیوویل به دیریکله که اخیراً کشف شده است.

بیان‌دقیق‌قضیه اصلی کومر (۱۸۴۷) چنین‌است: آخرین قضیهٔ فرما به‌ازای‌هر نمای اول‌فردی‌که درشرایط زیرصدق کند، درست است (دراینجا این‌شرایط را به‌زبان امروزی بیان می‌کنیم.):

۱) اگر ایده‌آل I طوری باشدکه توان pام آن I^p یك ایده‌آل اصلی باشد، آنگاه I خودش یك ایده‌آل اصلی باشد.

۲) اگر ω یکه‌ای از هیأت دایره‌بری $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ باشد و اگر یك عدد صحیح معمولی $m\in\mathbf{Z}$ موجود باشد به‌قسمی‌که (پیمانهٔ p) $\omega\equiv m$، آنگاه ω توان pام یك یکه باشد.

این فرضیات،رهگشا بودند ومسأله تبدیل‌شد به‌تحقیق دراین مورد که این شرایط به‌ازای چه اعداد اولی برقرارند. او ابتدا نشان داد که شرط اول معادل شرط زیر است:

$'۱$) p، عدد رده‌ای هیأت دایره‌بری $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ را نشمارد.

سپس بااستفاده از نتایج مطالعات عمیقش در حساب هیأتهای دایره‌بری توانست نشان دهد که شرط دوم ازشرط اول نتیجه می‌شود. این‌شرط‌اکنون به «لم کومر درموردیکه‌ها» مشهور است. اثبات آن بسیار ظریف است و به‌چیزی احتیاج دارد که امروزه روشهای λ-آدیك[2] نامیده می‌شود. (که درآن λ یك عدد اول دایره‌بری از $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ است‌که p را می‌شمارد.)

هرعدد اول p که درشرط ($'۱$) صدق‌کند، یك عدداول‌منتظم[3] نامیده می‌شود. به‌عبارت دیگر کومر ثابت کرد:

اگر p یك‌عدد اول منتظم‌باشد، آ. ق. ف.به‌ازای آن درست است. در واقع آنچه کومر ثابت کرد، بیش‌از این بود: اگر p یك‌عدداول‌منتظم باشد، اعداد غیرصفری چون $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{Q}(\zeta_p)$ وجود ندارندکه $\alpha^p+\beta^p=\gamma^p$. باید گفت که اثبات کومر در مورد عدم وجود جواب در $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ اشکال داشت. هیلبرت متوجه این‌موضوع شد و اشکال را برطرف کرد.

دراینجا بابررسی اثبات کومرمی‌خواهم نشان‌دهم که استدلال وی تا چه حد طبیعی بوده است. فرض کنید x و y و z اعداد غیرصفری‌باشند به‌طوری‌که $x^p=z^p-y^p$. پس‌از تقسیم x و y و z بر بزرگترین مقسوم علیه مشترك آنها می‌توان فرض کردکه این اعداد نسبت به‌هم اول‌اند. هدف، رسیدن به‌یك تناقض است. سمت چپ معادلهٔ فوق، یك حاصلضرب است درحالی‌که طرف راست آن‌یك تفاضل است. بسیار طبیعی است‌که تفاضل را به‌یك حاصلضرب تبدیل کنیم. این‌کار را می‌توان با استفاده از $\zeta=\zeta_p$، ریشهٔ pام یك، انجام داد:

$$x^p=z^p-y^p=\prod_{j=0}^{p-1}(z-\zeta^j y).$$

چقدر خوب می‌شد اگر عوامل $(z-\zeta^j y)$ «نسبت به‌هم اول» بودند و می‌شد. نتیجه گرفت‌که هرعامل، توان pام یك‌عدد صحیح دایره‌بری است. اما این امر به این شکل‌کلی و خام صادق نیست. پس‌باید ایده‌آلها راکه قضیهٔ‌یکتایی تجزیه برای‌آنها درست است وارد کارکرد.

فرض کنید ایده‌آل I بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك ایده‌آلهای اصلی $(z-\zeta^j y)$ باشد $(j=0,1,2,\dots,p-1)$. در این صورت

$$(z-\zeta^j y)=J_j^p I \quad (j=0,1,\dots,p-1)$$

که درآن، ایده‌آلهای J_j' نسبت به‌هم اول‌اند. از قضیهٔ یکتایی تجزیه برای ایده‌آلها نتیجه می‌شود که هرکدام ازآنها یك توان pام است. بنابراین:

$$(z-\zeta^j y)=J_j^p I \quad (j=0,1,\dots,p-1)$$

اثبات‌کومر این‌طور شروع می‌شود. پس ازآن، دوحالت مورد بررسی قرار می‌گیرد: حالتی‌که p، xyz را می‌شمارد و حالتی‌که xyz بر p تقسیم‌پذیر نیست. جزئیات اثبات درکتابم آمده است. دراینجا قصد ندارم توضیحات بیشتری بدهم.

۵. هدف کومر پس از اثبات قضیهٔ اصلی روشن بود:

۱°) مشخص‌کردن و یا حداقل مطالعهٔ اعداد اول منتظم.

۲°) بررسی‌اینکه تعداد اعداد اول منتظم‌نامتناهی است یا نه.

۳°) تعمیم قضیهٔ اصلی نماهای اول غیرمنتظم[1]. (یا حداقل آنهایی‌که درشرایط اضافی مناسبی صدق می‌کنند).

بنابراین‌کومر می‌بایست مقدار عدد رده‌ای h_p را محاسبه می‌کرد. وی این‌کار را برای pهای‌کوچك قبل‌از ۱۸۵۰ کرده بود. به‌کمك نتایجی‌که ازطریق دیریکله ازآنها مطلع شده بود، توانست فرمول صریحی برای عدد رده‌ای h_p پیدا کند. وی h_p را به‌صورت حاصلضرب دوعدد صحیح مثبت نوشت:

$$h_p=h_p^-\cdot h_p^+$$

1. Hensel 2. λ-adic 3. regular

1. irregular

که آنها را به‌ترتیب عوامل اول و دوم عدد رده‌ای نامید و بعداً تعبیرحسابی آنها را پیداکرد. h_p^+ برابراست با عدد رده‌ای هیأت دایره‌بری حقیقی $\mathbf{Q}(\zeta_p+\zeta_p^{-1})$ متشکل از همهٔ اعداد حقیقی $\mathbf{Q}(\zeta_p)$. به‌همین‌دلیل h_p^+ را اغلب عدد رده‌ای حقیقی $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ می‌نامند و h_p^- عدد رده‌ای نسبی است. فرمولهای کومر اینها بودند:

$$h_p^- = \frac{1}{(2p)^{\frac{p-3}{2}}} \left|G(\eta)G(\eta^3)\dots G(\eta^{p-2})\right|$$

$$h_p^+ = \frac{2^{\frac{p-3}{2}}}{R} \prod_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} \left| \sum_{j=0}^{\frac{p-3}{2}} \eta^{2kj} \log|1-\zeta^{g^j}| \right| .$$

توضیح برخی از مقادیری که درفرمولهای فوق ظاهرشده‌اند برای کسانی که با اساس نظریهٔ اعداد جبری آشنایی ندارند، دشوار است.

— g نشاندهندهٔ یك‌ریشهٔ اولیه به‌پیمانهٔ p است.

— برای هر $j \geqslant 0$، $1 \leqslant g_j \leqslant p-1$ و $g_j \equiv g^j$ (پیمانهٔ p)

— $G(X) = \sum_{j=0}^{p-2} g_j X^j$

— η یك‌ریشه $(p-1)$ام اولیهٔ یك است.

— R ناظم[1] هیأت دایره‌بری است. یعنی $R = 2^{\frac{p-3}{2}} \det(L)$ که L ماتریس زیر است:

$$L = \begin{pmatrix} \log|\varepsilon_1^{(1)}| & \dots & \log|\varepsilon_1^{(r)}| \\ \dots & \dots & \dots \\ \log|\varepsilon_r^{(1)}| & \dots & \log|\varepsilon_r^{(r)}| \end{pmatrix}$$

که در آن:

— r_1 تعداد مزدوجهای هیأت $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ که در هیأت اعداد حقیقی قرار دارند، می‌باشد.

— $2r_2$ تعداد مزدوجهایی است که در هیأت اعداد حقیقی نیستند.

— $r = r_1 + r_2 - 1$

— $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$ یك‌دستگاه اساسی‌ازواحدهای $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ است. یعنی:

الف) اگر $\varepsilon_1^{e_1} \dots \varepsilon_r^{e_r} = 1$ (که $e_1, \dots, e_r$ اعداد صحیح‌اند) آنگاه: $e_1 = \dots = e_r = 0$.

ب) اگر ε یکهٔ $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ باشد،عدد صحیحی‌چون j باضابطهٔ $0 \leqslant j \leqslant p-1$ و اعداد صحیح $e_1, \dots, e_r$ وجود دارند به‌قسمی که:

$$\varepsilon = \zeta_p^j \varepsilon_1^{e_1} \dots \varepsilon_r^{e_r} .$$

— اگر $\alpha \in \mathbf{Q}(\zeta_p)$ آنگاه $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(r_1)}$ نشاندهندهٔ مزدوجهای حقیقی α و $\alpha^{(r_1+1)}, \alpha^{(r_1+2)}, \dots, \alpha^{(r_1+2r_2)}$ نشاندهندهٔ مزدوجهای غیرحقیقی آن هستند به‌طوری که $\alpha^{(r_1+r_2+j)}$ مزدوج مختلط $\alpha^{(r_1+r_2)}$ است (برای $j = 1, \dots, r_2$).

روی‌هم‌رفته، کشف این فرمولها که توضیح آنها مشکل‌است، بسیار دشوار بود و ملاحظه می‌کنید که برای محاسبات صریح مناسب نیستند. به‌علاوه این بیشتر به معجزه شبیه است که h_p^+ که یك عدد صحیح است (یك عدد رده‌ای است)، حاصلضربی باشد از مجموعهای حاصلضربهای لگاریتمها وعبارات مثلثاتی

$$\eta^{2kj} = \cos\frac{4kj\pi}{p-1} + i\sin\frac{4kj\pi}{p-1} .$$

بنابراین، محاسبات حتی برای مقادیر نسبتاً کوچك p نیز پرزحمت بودند. اما چیزی‌که برای کومر مهم بود، تعیین مقدار دقیق h_p نبود. بلکه فقط می‌خواست بداند آیا p، h_p را می‌شمارد یا نه. از این‌لحاظ، کومر حکم غیرمنتظره و عمیق زیررا ثابت‌کرد:

اگر p شمارندهٔ h_p^+ باشد، آنگاه h_p^- را نیز می‌شمارد.

درنتیجه p شمارندهٔ h_p است اگر و تنها اگر h_p^- را بشمارد.

با توجه به اینکه حتی امروزهم بررسی عامل h_p^+ جز با روشهای پیچیده میسر نیست، درمی‌یابیم که نتیجهٔ فوق یك پیشرفت اساسی است.

۶. با درنظر گرفتن تقسیم‌پذیری h_p^- بر p، کومر توانست مسأله را به‌مسألهٔ دیگری که مقدماتیتر است، تبدیل کند. وی معیار زیر را برای منتظم‌بودن اثبات‌کرد:

p شمارندهٔ h_p^- است اگر و تنها اگر عدد صحیح k با ضابطهٔ $1 \leqslant k \leqslant (p-3)/2$ موجود باشد به‌طوری‌که $\sum_{j=1}^{p-1} j^{2k}$ بر p^2 تقسیم‌پذیر باشد.

اویلر این مجموعها را مورد مطالعه قرارداده بود وآنها را برحسب اعداد برنولی که اولین‌بار درنظریهٔ احتمال به‌کاررفته بودند، بیان‌کرده بود. من تعریف آنها را یادآوری می‌کنم. در تقسیم x بر $e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n!$ می‌توانیم ضرایب را به‌طور متوالی به‌صورت $B_n/n!$ بنویسیم که‌در آن B_n، nامین عدد برنولی است:

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n .$$

مثلا $B_0 = 1$، $B_1 = -1/2$، $B_2 = 1/6$، $B_3 = 0$، . . . . این اعداد را می‌توان به‌صورت بازگشتی از تعریف‌فوق به‌دست‌آورد. پس اگر $B_0, \dots, B_{n-1}$ معین باشند، B_n در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$\binom{n+1}{1} B_n + \binom{n+1}{2} B_{n-1} + \dots + \binom{n+1}{n} B_1 + 1 = 0 .$$

از اینجا نتیجه می‌شود که به‌ازای $n \geqslant 1$، $B_{2n+1} = 0$ و هر B_n یك‌عدد گویاست.

وقتی می‌گوییم عدد اول p، B_{2k} را می‌شمارد، منظورمان

1. regulator

آن‌است که وقتی B_{2k} به‌صورت یک کسر تحویل‌ناپذیر نوشته شده باشد، p صورت آن‌را می‌شمارد.

کومر اولین معیار منتظم بودن را به‌حکم زیر تبدیل کرد:

p، h_p^- را می‌شمارد اگر وتنها اگر p یکی‌از اعداد B_2، B_4، B_6، ...، B_{p-3} را بشمارد.

به‌نظر می‌رسد که این معیار، بسیار عملیتر باشد زیرا حداقل از لحاظ نظری می‌توان اعداد برنولی را به‌صورت بازگشتی به‌دست آورد. درست‌است که این فرمول‌بازگشتی طول فزاینده‌ای دارد اما فرمولهای بازگشتی دیگری وجود دارندکه فنی‌تر هستند و در عوض طولشان کمتر است و محاسبات را بسیار ساده‌تر می‌کنند. علی‌رغم همهٔ اینها، مشکل واقعی این است که صورت اعداد برنولی باسرعتی عجیب‌بزرگ می‌شود و نوشتن این اعداد را بسیار دشوار می‌سازد. برای‌مثال تصور کنید که صورت B_{210} درحدود ۲۵۰ رقم دارد!

۷. همهٔ نتایج فوق، هرقدر هم عمیق و با ارزش باشند، به‌ما امکان پیش‌بینی این‌موضوع را نمی‌دهندکه یک‌عدد اول داده‌شده منتظم است یا نه. (مگر اینکه محاسبات ویژه‌ای انجام شود.) درضمن، این‌نتایج هیچ نشانه‌ای از چگونگی توزیع اعداد اول منتظم به‌دست‌نمی‌دهند. دراین‌مورد، بدون‌دادن‌توضیحات طولانی، می‌خواهم یادآوری کنم‌که کومر با دست‌خالی (یعنی بدون هیچ وسیلهٔ مکانیکی یا الکترونیکی) عدد رده‌ای $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ را برای $p \leqslant 163$ محاسبه کرد و دریافت که اولین اعداد اول غیرمنتظم عبارت‌اند از: ۳۷، ۵۹، ۶۷، ۱۰۱، ۱۰۳، ۱۳۱، ۱۴۹ و ۱۵۷.

کومر بدون در دست‌داشتن مبنای محکمی حدس زد که باید تقریباً به‌اندازهٔ اعداد اول غیرمنتظم، عدد اول منتظم وجود داشته باشد (به‌مفهومی‌که‌توضیح‌خواهم داد.) یادآوری می‌کنم‌که ینسن[1] در ۱۹۱۵ نشان داد تعداد اعداد اول غیرمنتظم (حتی آنهایی‌که به‌پیمانهٔ ۴ همنهشت ۳اند) نامتناهی است. ازطرف دیگر هرگز اثبات نشده است‌که تعداد اعداد اول منتظم نامتناهی است. در ۱۹۶۴ زیگل[2] توانست به‌کمک استدلالهایی راهگشا نشان‌دهدکه:

$$\underset{N\to\infty}{\text{حد}} \frac{\text{تعداد اعداد اول غیر منتظم } N \geqslant p}{\text{تعداد اعداد اول } N \geqslant p} = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$= ۰٫۳۹\ldots$$

این‌مقدار تا $N = 125000$ با محاسبات اخیر واگستاف[3] تطبیق می‌کند.

کومر همچنین آ. ق. ف.را برای رده‌هایی از اعداد اول غیرمنتظم که درشرایطی اضافی‌صدق می‌کردند، اثبات کرد. اینها نتایجی بسیار فنی هستندکه کومر نتوانست درآنها از اشتباه پرهیز کند. واندیور[4] این اشتباهها را تذکر داد وقسمتی از آنها را در ۱۹۲۲ و ۱۹۲۶ تصحیح کرد. ولی تلاشهای کومر در مورد حالت‌اول آ. ق. ف.موفقیت‌آمیزتر بود.وی توانست همنهشتیهای خاصی شامل اعداد برنولی پیداکند که جوابهای احتمالی معادلهٔ فرما باید در آنها صدق کنند. مقالهٔ مربوط به‌این کشف، نمونه‌ای از آثار بسیار ارزشمند کومر است که در آن روشهای حسابی و متعالی به‌صورت حیرت‌آوری باهم درمی‌آمیزند. وی براساس این همنهشتیها ثابت‌کرد که اگر حالت اول آ. ق. ف برای نمای p برقرار نباشد، آنگاه p، B_{p-3} و B_{p-5} را می‌شمارد. ضمناً این موضوع که p، B_{p-3} را می‌شمارد، قبلا به وسیلهٔ کوشی و جنوچی[1] کشف شده بود.میریمانف[2] نتیجهٔ کومر را بسط داد و ثابت‌کرد که p، B_{p-7} و B_{p-9} را نیز می‌شمارد. اخیراً موریشیما[3] ثابت‌کرده است‌که p باید B_{p-11} و B_{p-13} را نیز بشمارد.

بررسی کاملترین‌جدولها توسط واگستاف‌نشان می‌دهدکه این پدیده بسیار نادر است. در واقع، به‌ندرت اتفاق می‌افتد که p تعداد زیادی از اعداد برنولی (با اندیس حداکثر $p-3$) را بشمارد و هرگز اعداد برنولی متوالی را نمی‌شمارد. همهٔ اینها به‌ساختار پیچیدهٔ گروه رده‌های ایده‌آلها مربوط است که شاید تا حدودی ازطریق کارهای هکه[4]،شولتس[5]، ایخلر[6] و ریبت[7] روشن شده باشد.

در مورد نتیجه جالب‌توجهی که کراسنر[8] در ۱۹۳۴ به‌دست آورد، چه باید گفت؟ وی مطلب زیر را نشان داد:

فرض‌کنید $n_0 = (45!)^{88}$. اگر p عدد اولی بزرگتر از n_0 باشد، چنانچه $k(p) = [\sqrt[3]{\log p}]$ و اگر حالت اول آ. ق. ف. برای نمای p نادرست باشد، آنگاه p، $k(p)$ عدد برنولی‌متوالی B_{p-3}، B_{p-5}، ...، $B_{p-k(p)-1}$ را می‌شمارد. (عدد n_0 اهمیت خاصی‌ندارد وباکمی دقت در اثبات می‌توان آن‌را کوچکتر کرد. با این حال بازهم آنقدر بزرگ خواهد بودکه قضیه کاربرد عملی نخواهد داشت.) این قضیه که کراسنر را در ردهٔ افراد سهیم در مطالعهٔ آ. ق. ف.قرار می‌دهد، بیانگر این موضوع است‌که حالت اول قضیه، موجه است.

در خاتمه منصفانه نیست اگر نگوییم‌که کومر، حتی درنظریهٔ اعداد، دستاوردها وایده‌های تراز اول (وحتی مهمتر) دیگری نیز دارد. این ایده‌ها مربوط‌اند به‌قانون تقابل برای نماد باقیماندهٔ توانی، که به‌نظریهٔ هیأتهای رده‌ای[9] انجامیده است. به‌طوری‌که فورت‌وانگلر[10] در۱۹۱۲ و هَسه[11] در ۱۹۲۶ نشان‌دادند، این نظریه را نیز می‌توان درمطالعهٔ آ. ق. ف به‌کار گرفت.

کارهای کومر به‌وسیلهٔ ریاضیدانانی که با آ. ق. ف.سروکار داشتند (و خواهند داشت) دنبال و تکمیل شد (و خواهد شد). اما هنوز نکات بسیاری در این زمینه مانده است که باید آموخت و فهمید، و انتشار مجموعهٔ آثار کومر در ۱۹۷۵ به‌همت وِیل برای ریاضیدانان این امکان را فراهم می‌سازدکه به‌طور جدی ایده‌های غنی وی را بررسی کنند.

من در کتابم کارهای کومر و روشهای مهمتری را که درمطالعه آخرین‌قضیهٔ فرما به‌کار رفته‌اند، تحلیل کرده‌ام. این‌کتاب، دارای یک کتابشناسی مفصل است.

---

1. Jensen 2. Siegel 3. Wagstaff 4. Vandiver

1. Genocchi 2. Mirimanoff 3. Morishima
4. Hecke 5. Scholz 6. Eichler
7. Ribet 8. Krasner 9. class field
10. Furtwängler 11. Hasse

مراجع

? FERMAT, P. de. Ad problema XX commentarii in ultimam questionem Arithmeticorum Diophanti. Area trianguli rectanguli in numeris non potest esse quadratus. *Œuvres*, Vol. I,p. 340 (in Latin); Vol. III, p. 271-272 (in French). Publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry. Gauthiers-Villars, Paris, 1891, 1896.

1770 EULER, L. *Vollständige Anleitung zur Algebra*. Royal Acad. of Sciences, St. Petersburg, 1770. See also *Opera Omnia*, Ser. I, Vol. I, 484-489. Teubner, Leipzig-Berlin, 1915.

1823 LEGENDRE,A.M. Sur quelques points d'analyse indéterminée et particulièrement sur le théorème de Fermat. *Mém. de l' Acad. des Sciences, Institut de France, 6* (1823), 1-60.

1828 DIRICHLET, G.L. Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du 5e degré. *J. reine u. angew. Math., 3* (1828), 354-375.

1830 LEGENDRE, A.M. *Théorie des Nombres* (3e édition), Vol.II. Firmin Didot Frères, Paris, 1830. Reprinted by A. Blanchard, Paris, 1955.

1832 DIRICHLET, G.L. Démonstration du théorème de Fermat pour les 14e puissances. *J. reine u. angew. Math., 9* (1832), 390-393.

1839 LAMÉ, G. Mémoire sur le dernier théorème de Fermat. *C.R.Acad.Sci. Paris, 9* (1839), 45-46.

1840 LEBESGUE, V.A. Démonstration de l'impossibilité de résoudre l'équation $x^7+y^7+z^7=0$ en nombres entiers. *J. Math. Pures et Appl., 5* (1840), 276-279.

1847 CAUCHY, A. Mémoire sur les racines des équations algébriques à coefficients entiers et sur les polynômes radicaux. *C.R. Acad. Sci. Paris, 24* (1847), 407-416. Reprinted in *Œuvres Complètes*, (1), 10, 231-239. Gauthier-Villars, Paris, 1897.

1847 CAUCHY, A. Mémoire sur diverses propositions relatives à la Théorie des Nombres. *C.R. Acad. Sci. Paris, 24,* (1847), 177-183, Reprinted in *Œuvres Complètes*, (1), 10, 360-366. Gauthier-Villars, Paris, 1897.

1847 LAMÉ, A. Mémoire sur la résolution en nombres complexes de l'équation $A^n+B^n+C^n=0$. *J. Math. Pures et Appl., 12* (1847), 172-184.

1852 GENOCCHI, A. Intorno all'espressioni generali di numeri Bernoulliani. *Annali di scienze mat. e fisiche, compilati da Barnaba Tortolini, 3* (1852), 395-405.

1876 GAUSS, C.F. Zur Theorie der complexen Zahlen: (I) Neue Theorie der Zerlegung der Cuben. *Werke,* Vol. II, p. 389-391. Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1876.

1893 DEDEKIND, R. Supplement XI to the fourth edition of Dirichlet's *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Vieweg, Braunschweig, 1893. Reprinted by Chelsea Publ. Co., New York, 1968.

1905 MIRIMANOFF, D. L'équation indéterminée $x^l+y^l+z^l=0$ et le critérium de Kummer. *J. reine u. angew. Math., 128* (1905), 45-68.

1910 HECKE, E. Über nicht-reguläre Primzahlen und den Fermatschen Satz. *Nachr. Akad. d. Wiss. zu Göttingen* (1910), 420-424.

1912 FURTWÄNGLER, P. Letzter Fermatschen Satz und Eisensteins'ches Reziprozitätsgesetzt. *Sitzungsber. Akad. d. Wiss. Wien, Abt. IIa, 121* (1912), 589-592.

1915 JENSEN, K. L. Om talteoretiske Egenskaber ved de Bernoulliske tal. *Nyt Tidsskrift f. Math., B, 26* (1915), 73-83.

1922 VANDIVER, H. S. On Kummer's memoir of 1857 concerning Fermat's last theorem. *Bull. Amer. Math. Soc., 28* (1922), 400-407.

1926/ 1927/ 1930 HASSE. H. *Bericht über Neuere Untersuchungen und probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper*. Jahrsber. d. Deutschen Math. Verein., 35 (1926), 1-55; 36 (1927), 233-311; supplementary volume 6, 204 pages. Reprinted in two volumes. Physica Verlag, Würzburg, 1965.

1926 VANDIVER, H. S. Summary of results and proofs concerning Fermat's last theorem. *Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 12* (1926), 106-109.

1932 SCHOLZ, A. Über die Beziehung der Klassenzahlen quadratischer Zahlkörper zueinander. *J. reine u. angew. Math., 166* (1932), 201-203.

1932 MORISHIMA, T. Über die Fermatsche Vermutung, VII. *Proc. Imp. Acad. Japan, 8* (1932), 63-66.

1934 KRASNER, M. Sur le premier cas du théorème de Fermat. *C.R. Acad. Sci. Paris, 199* (1934), 256-258.

1964 SIEGEL, C.L. Zu zwei Bemerkungen kummers. *Nachr. Akad. d. Wiss. zu Göttingen, Math. Phys. Kl., II* (1964), 51-57. Reprinted in *Gesammelte Abhandlungen*, Vol. III, 436-442. Springer-Verlag, New York, 1966.

1965 EICHLER, M. Eine Bemerkung zur Fermatsche Vermutung. *Acta Arithm., II* (1965), 129-131, and 261.

1975 EDWARDS, H.M. The background of Kummer's proof of Fermat's last theorem for regular primes. *Arch. for History of Exact Sciences, 14* (1975), 219-236.

1976 RIBET, K. A modular construction of unramified p-extensions of $\mathbf{Q}(\mu_p)$. *Invent. Math.,34* (1976),151-162.

1977 TERJANIAN, G. Sur l'équation $x^{2p}+y^{2p}=z^{2p}$. *C.R. Acad. Sci. Paris, 285* (1977), 973-975.

1978 WAGSTAFF, S. The irregular primes to 125000. *Math. Comp., 32* (1978), 583-592.

1979 RIBENBOIM, P. *13 Lectures on Fermat's Last Theorem*. Springer-Verlag. New York. 1979.

و بالاخره، جلد اول از مجموعه مقالات ارنست ادوارد کومر که به ویراستاری آندره‌ویل به وسیلهٔ انتشارات اشپرینگر-فرلاگ در ۱۹۷۵ منتشر شد، به مقالاتی در نظریهٔ اعداد اختصاص دارد.

مقالاتی از کومر که مستقیماً با قضیهٔ فرما ارتباط دارند، اینها هستند [شمارهٔ صفحات مربوط به جلد اول مجموعه مقالات است]:

1837(pp.135-141). 1844/1847(pp.165-192),
1847(pp.203-210). 1847(pp.274-297), 1847(p.298),
1850(pp.299-322), 1850(pp.323-335), 1850(pp.336-344),
1851(pp.363-484), 1857(pp.631-638), 1857(pp.639-672),
1870(pp.919-944), 1874(pp.945-954).

****

● این مقاله، متن یك سخنرانی است که در «سمینار فلسفه و فیزیك» در اکول نرمال سوپریور پاریس به تاریخ ۵ مارس ۱۹۷۹ انجام شده و ترجمهٔ فارسی آن ازروی منبع زیر صورت گرفته است

P. Ribenboim, "Kummer's ideas on Fermat's last theorem," *L'Enseignement Mathématique,* **29** (1983) 165-177.

★ پائولو ریبنبویم، دانشگاه کوینز کانادا

اعداد «مناسب» لئونهارت اویلر*

گونتر فرای*
ترجمهٔ کریم احمدی دلیر

۱. مقدمه

لئونهارت اویلر بزرگترین و تأثیرگذارترین ریاضیدان قرن هجدهم بود و حتی تا امروز پرکارترین ریاضیدان همهٔ اعصار به شمار می‌رود. کشفیات او در ریاضیات و در بسیاری از شاخه‌های علوم به‌قدری زیاد است که مجموعهٔ آثار او درحدود ۸۰ جلد می‌شود.

اویلر درهمهٔ زندگی خود مشتاقانه بر روی مسائل نظریهٔ اعداد کار کرد. او هفتادساله و تقریباً کور بود که ضمن تفحص دربارهٔ اعداد اول بزرگ موفق به کشف اعداد مناسب شد. بین این اعداد و نظریهٔ هیأتهای رده‌ای وابستگی نزدیکی وجود دارد و مسائل حل‌نشدهٔ بسیاری درمورد آنها مطرح است.

۲. مجموعهای مربعات

فرما، اویلر و لاگرانژ به‌این نتیجهٔ اساسی، که سرآغاز واقعی نظریهٔ هیأتهای رده‌ای بود، دست یافتند: اعداد اولی که با صورتهای درجهٔ دوم دوتایی صحیح خاصی نمایش داده می‌شوند همگی در تصاعدهایی حسابی صدق می‌کنند یعنی می‌توان آنها را با شرایط همنهشتی مشخص کرد و بنابراین به‌صورتهای خطی قابل نمایش‌اند. درنتیجه، یك هیأت رده‌ای (یعنی یك توسیع آبلی) چون L روی اعدادگویای Q وجود دارد به‌قسمی که همهٔ اعداد اولی که به یك صورت نمایش داده می‌شوند قانون تجزیهٔ واحدی در L دارند.

این نتیجه را اولین بار فرما در ۲۵ دسامبر ۱۶۴۰ درنامه‌ای به‌دوستش مرسن ذکر کرد.

قضیهٔ ۱. هر عدد اول فرد چون p برابر است با مجموع مربعات دو عدد طبیعی، یعنی به‌صورت $p=x^2+y^2$ است که در آن $x,y\in \mathbf{N}=\{1,2,3,\dots\}$، اگر و فقط اگر $p\equiv 1 \pmod 4$.

به‌علاوه، این نمایش منحصربه‌فرد است و x و y نسبت به‌هم اول‌اند، $(x, y)=1$.

اویلر این قضیه را بیش‌از یك قرن بعد در سال ۱۷۵۰ ثابت کرد. در سال ۱۷۵۸، اویلر متوجه شد که عکس قضیه نیز درست است و آن را ثابت کرد.

قضیهٔ ۲. اگر عدد طبیعی فردی، چون n $(n>1)$ را فقط به‌یك‌طریق بتوان به‌صورت مجموع مربعات دوعدد صحیح نامنفی یعنی به‌صورت $n=x^2+y^2$ نمایش داد که در آن $x, y\in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی است)، و اگر علاوه‌برآن x و y نسبت به‌هم اول باشند آنگاه n یك عدد اول است.

بدین ترتیب، معیاری به‌دست می‌آید که براساس آن می‌توانیم اول بودن یا نبودن عدد طبیعی مفروض n را بیازماییم. کافی است همهٔ x^2هایی را که از $n/2$ کمترند از n کم کنیم و ببینیم آیا عدد مجذورکاملی چون y^2 دقیقاً یکبار پیدا می‌شود یا نه و آیا به‌ازای این y^2، x و y نسبت به‌هم اول‌اند یا نه.

با توجه به قضیهٔ ۱ این روش را می‌توان فقط برای اعدادی مانند n به‌کار گرفت که در ضابطهٔ $n\equiv 1 \pmod 4$ صدق کنند. به‌علاوه اویلر برای تعمیم آن درمورد nهایی که به‌شکل $n\equiv 3 \pmod 4$ هستند، نمایشهای $n=x^2+2y^2$ و $n=x^2+3y^2$ را که قبلا فرما بررسی کرده بود، وحالت کلیتر $n=ax^2+by^2$ راکه درآن a و b اعداد طبیعی دلخواه‌ونسبت به‌هم اول باشند، بررسی کرد. نتایج اویلرکه در سالهای ۱۷۷۴ و ۱۷۶۳ انتشار یافتند عبارت‌اند از:

قضیهٔ ۳. الف) عدد اول فردی چون p قابل نمایش به‌صورت x^2+2y^2 است یعنی $p=x^2+2y^2$ که درآن $x, y\in \mathbf{N}$، اگر وفقط اگر $p\equiv 1,3 \pmod 8$. این نمایش منحصر به‌فرد است و x و y نسبت به‌هم اول‌اند.

ب) برعکس، اگر $n>1$ یك عدد طبیعی فرد باشد که دقیقاً به‌یك‌طریق قابل نمایش به‌صورت $n=x^2+2y^2$ با ضابطه $x, y\in \mathbf{N}$ باشد و x و y نسبت به‌هم اول باشند، آنگاه n یك عدد اول است.

قضیهٔ ۴. الف) عدد اولی مانند p، غیراز ۲ و ۳، قابل نمایش به‌صورت x^2+3y^2 است، یعنی $p=x^2+3y^2$ که در آن $x, y\in \mathbf{N}$، اگر و فقط اگر $p\equiv 1 \pmod 3$. این نمایش منحصر به‌فرد است و x و y نسبت به‌هم اول‌اند.

ب) برعکس اگر عدد طبیعی فرد $n>1$ فقط به‌یك طریق قابل نمایش به‌صورت $n=x^2+3y^2$ باشد که در آن $x, y \in \mathbf{N}$، و اگر x و $3y$ نسبت به‌هم اول باشند آنگاه n عددی اول است.

اویلر همهٔ قسمتهای قضیهٔ ۳ را بجز آن قسمت که می‌گوید اگر $p \equiv 3 \pmod 8$ آنگاه p قابل نمایش به‌صورت $p=x^2+2y^2$ است، اثبات کرد. اما او فقط نیمهٔ اول قضیهٔ ۴ را ثابت کرد. اثبات کامل قضایای ۳ و ۴ اولین‌بار توسط لاگرانژ در سال ۱۷۷۵ ارائه شد. اویلر به‌کمك نیمهٔ دوم قضیهٔ ۴ مثلا توانست نشان‌دهد که $n=1000003=1000^2+3\times 1^2$ اول است درحالی که

$$n=10003=100^2+3\times 1^2=16^2+3\times 57^2$$

اول نیست. درحقیقت $10003=7\times 1429$، که از اینجا دوعامل آن را می‌توان به‌کمك دو نمایش مختلف پیدا کرد.

۳. اعداد مناسب

متأسفانه، به‌دست آوردن قضایایی نظیر قضایای ۲ و ۳ و ۴ درمورد حالت کلی ax^2+by^2 امکان ندارد. این مطلب با درنظر گرفتن x^2+11y^2 روشن می‌شود، زیرا $15=2^2+11\times 1^2$ تنها نمایش عدد ۱۵ به‌صورت x^2+11y^2 است اما ۱۵ یك عدد اول نیست. بنابراین اویلر به‌طرح سؤال زیرین رهنمون شد: کدام اعداد طبیعی m در ضابطهٔ (م) زیر صدق می‌کنند؟

(م) اگر $n>1$ عدد طبیعی فردی باشد که دقیقاً به‌یك طریق قابل نمایش به‌صورت $n=x^2+my^2$ باشد که در آن $x, y \in \mathbf{N}$ اعداد نامنفی‌اند، و به‌علاوه $(x, my)=1$، آنگاه n یك عدد اول است.

اگر عددی طبیعی مانند m در ضابطهٔ (م) صدق کند، یك عدد مناسب نامیده می‌شود.

اویلر اعداد مناسب را در سال ۱۷۷۸ به‌طور دقیقتر از راه زیر معرفی کرد:

تعریف ۵. یك صورت ax^2+by^2، که در آن $a, b \in \mathbf{N}$ و $(a, b)=1$، یك صورت مناسب نامیده می‌شود هرگاه در شرط زیر صدق کند:

هرعدد طبیعی $n>1$ که دقیقاً به یك‌طریق قابل نمایش به‌صورت $n=ax^2+by^2$ باشد که در آن $x, y \in \mathbf{N}$ در $(x, y)=1$ صدق کنند، الزاماً به‌شکل $n=t\,2^s$ یا $n=2tp$ یا $n=tp$ است که t یك مقسوم‌علیه $a.b$ و p یك عدد اول فرد و s یك عدد طبیعی است.

اویلر دراین‌تعریف صراحتاً امکان $n=t.2^s$ با ضابطهٔ $t\neq 1$ را ذکر نکرد اما این حالت را بایستی درنظر گرفت.

توجه‌کنید که صورت مناسب x^2+my^2 در شرط (م) صدق می‌کند زیرا اگر $n>1$ الزاماً فرد باشد، آنگاه $n=t.p$ و از شرط $(x, my)=1$ نتیجه می‌شود $t=1$ چون t یك مقسوم‌علیه m و n است و بنابراین هر عامل اول t یك مقسوم‌علیه x و my است.

پس از آن اویلر نتیجهٔ زیر را ثابت کرد:

قضیهٔ ۶. فرض کنید $a, b \in \mathbf{N}$، و $(a, b)=1$؛ در این صورت ax^2+by^2 مناسب است اگر وفقط اگر صورت x^2+aby^2 مناسب باشد.

اویلر در برهانش فرض کرد که a و b بر مجذور هیچ عددی تقسیم‌پذیر نیستند، اما بعداً خواهیم دید که این فرض لازم نیست (قضیهٔ ۱۳ را ببینید).

از این قضیه تعریف زیر حاصل می‌شود.

تعریف ۷. عدد طبیعی m مناسب نامیده می‌شود اگر صورت x^2+my^2 مناسب باشد.

چنین عدد mی برای جستجوی اعداد اول بزرگ و برای تحقیق در اینکه عدد مفروض n اول است یا نه، حقیقتاً مناسب (به‌مفهوم عادی کلمه) است.

اویلر از روش خود برای جستجوی اعداد اول چندین مثال ارائه داد (به‌بخشهای ۲ و ۸ مراجعه‌کنید).

۴. محك اویلر

سپس اویلر درصدد مشخص‌کردن همهٔ اعداد مناسب برآمد و در سال ۱۷۷۸ نتیجهٔ تجربی زیر را ارائه‌کرد:

قضیهٔ ۸. ۶۵ عدد زیر مناسب هستند: (جدول زیرصفحه)

او اضافه‌کرد که این جدول را با به‌کارگیری محك زیر که ما آن‌را «محك اویلر» می‌نامیم، «خیلی‌راحت» به‌دست آورده‌است.

قضیهٔ ۹. عدد $m \in \mathbf{N}$ مناسب است اگر و فقط اگر هرعدد طبیعی

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۲	۱۳	۱۵	۱۶	۱۸	۲۱	۲۲	۲۴	۲۵	۲۸
۳۰	۳۳	۳۷	۴۰	۴۲	۴۵	۴۸	۵۷	۵۸	۶۰
۷۰	۷۲	۷۸	۸۵	۸۸	۹۳	۱۰۲	۱۰۵	۱۱۲	۱۲۰
۱۳۰	۱۳۳	۱۶۵	۱۶۸	۱۷۷	۱۹۰	۲۱۰	۲۳۲	۲۴۰	۲۵۳
۲۷۳	۲۸۰	۳۱۲	۳۳۰	۳۴۵	۳۵۷	۳۸۵	۴۰۸	۴۶۲	۵۲۰
۷۶۰	۸۴۰	۱۳۲۰	۱۳۶۵	۱۸۴۸					

n به‌صورت

$$n=m+x^2<4m,\ x\in\mathbf{N},\ (x,m)=1$$

الزاماً به‌یکی از چهارصورت $n=p$، $n=2p$، $n=p^2$، یا $n=2^e$ باشد، که در آنها p یك عدد فرد اول است و $s\in\mathbf{N}$.

این محك، به‌نوبهٔ خود، توسط اویلر از نتیجهٔ زیر به‌دست آمد که اشارهٔ آشکاری به‌اعداد مناسب ندارد.

قضیهٔ ۱۰. اگر یك عدد مرکب $r\cdot s$ $(r>s)$ فقط به‌یك طریق قابل نمایش به‌صورت x^2+my^2 باشد که در آن $x,y\in\mathbf{N}$ و $(x,my)=1$ و $(rs,mxy)=1$، آنگاه بینهایت عدد مرکب دیگر با همین خاصیت وجود دارند. به‌ویژه، اگر این فرض برقرار باشد، همواره چنین عدد مرکبی با ضابطهٔ $rs<4m$ وجود دارد.

اویلر خودش محك مذکور در قضیهٔ ۹ را در مورد اعداد $m=11, 13, 14, 15, 60$ به‌کار برد. به‌عنوان مثال، برای $m=13$ داریم

$$13+1^2=14=2p$$
$$13+2^2=17=p$$
$$13+3^2=22=2p$$
$$13+4^2=29=p$$
$$13+5^2=38=2p$$
$$13+6^2=49=p^2$$

بنابراین $m=13$ بایستی مناسب باشد. همین‌طور برای $m=15$ داریم

$$15+1^2=16=2^4$$
$$15+2^2=19=p$$
$$15+4^2=31=p$$

و نتیجه می‌گیریم که ۱۵ مناسب است. از طرف دیگر، ۱۴ مناسب نیست زیرا

$$14+1^2=15=3\times 5.$$

همان‌طور که گروب در سال ۱۸۷۴ خاطرنشان کرد، برهان اویلر برای قضیهٔ ۹ شکافهای مهمی دارد. با این حال، گروب توانست نشان دهد که این محك حقیقتاً لازم است اما مسألهٔ کافی بودن محك، علی‌رغم اظهار گاوس در کتاب حساب دیوفانتی که «اثبات آن آسان است»، همچنان یك مسألهٔ حل نشده است. بدین ترتیب بایستی برهانی را که برای مناسب بودن ۱۳ و ۱۵ ارائه شد ناقص دانست. از طرف دیگر، گروب از نظریهٔ صورتهای درجه دوم گاوس محکی را به‌دست آورد که به محك اویلر شبیه است (به‌قضیهٔ ۱۵ نگاه کنید).

هنگامی که اویلر دید علی‌رغم کوششهای خود برای ادامهٔ محاسباتش تا ۳۰۰۰ و بعداً تا ۱۰۰۰۰، عدد مناسب دیگری بزرگتر از ۱۸۴۸ نیافته است متعجب شد، و برای درك این پدیده، توزیع اعداد مناسب را مطالعه کرد و ۱۰ خاصیت زیر را یافت:

قضیهٔ ۱۱. ۱. اگر m مناسب باشد و $m=t^2$، آنگاه $t=1,2,3,4,5$.

۲. اگر m مناسب باشد و $m\equiv 3 \pmod 4$، آنگاه $4m$ مناسب است.

۳. اگر m مناسب باشد و $m\equiv 4 \pmod 8$، آنگاه $4m$ مناسب است.

۴. اگر k^2m مناسب باشد، آنگاه m مناسب است.

۵. اگر m مناسب باشد و $m\equiv 2 \pmod 3$، آنگاه $9m$ مناسب است.

۶. اگر $m>1$ مناسب باشد و $m\equiv 1 \pmod 4$، آنگاه $4m$ مناسب نیست.

۷. اگر m مناسب باشد و $m\equiv 2 \pmod 4$، آنگاه $4m$ مناسب است.

۸. اگر m مناسب باشد و $m\equiv 8 \pmod{16}$، آنگاه $4m$ مناسب نیست.

۹. اگر m مناسب باشد و $m\equiv 16 \pmod{32}$، آنگاه $4m$ مناسب نیست.

۱۰. اگر m مناسب باشد و به‌ازای یك عدد اول p داشته باشیم $m+a^2=p^2<4m$، آنگاه $4m$ مناسب نیست.

برهانهای اویلر برای خاصیتهای ۴، ۶، ۸ و ۹ بالا، کاملا دقیق نبودند اما گروب درسال ۱۸۷۴ توانست اثبات کاملی از قضیهٔ ۱۱ ارائه دهد. گروب که در حقیقت اثباتهایی از صورتهای تعمیم‌یافتهٔ چندتا از خاصیتهای فوق به‌دست داد، نشان داد که همهٔ آنها پیامدهای ساده‌ای از نظریهٔ صورتهای درجهٔ دوم گاوس هستند.

۵. محك گاوس و محك گروب

قضیهٔ اصلی گاوس در بارهٔ اعداد مناسب، که مقالهٔ گروب مبتنی بر آن است، به‌شرح زیر است:

قضیهٔ ۱۲. الف) عدد طبیعی m مناسب است اگر و فقط اگر هرگونهٔ[1] صورتهای درجه‌دوم دوتایی صحیح اولیهٔ سره با دترمینان $d=-m$ دقیقاً شامل یك ردهٔ سره از صورتهای اولیه‌سره باشد، یا به‌عبارت دیگر

ب) عدد طبیعی m مناسب است اگر و فقط اگر هر ردهٔ سره از صورتهای درجهٔ دوم دوتایی صحیح اولیهٔ سره با دترمینان $d=-m$ یك ردهٔ مبهم سره از صورتهای اولیهٔ سره باشد.

برای ملاحظهٔ تعریف این مفاهیم و جزئیات بیشتر به [۶] یا [۷]، که مقاله‌ای در دست چاپ است، مراجعه کنید.

گاوس مسلماً اثباتی از این قضیه به‌دست داده است، اما امتیاز انتشار اثبات برای اولین بار (۱۸۷۴)، به گروب متعلق است.

از محك قضیهٔ ۱۲ فوراً قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود که قضیهٔ ۶ حالت خاصی از آن است:

قضیهٔ ۱۳. اگر a، b، a' و b' اعدادی طبیعی با ضوابط $(a,b)=1$، $(a',b')=1$ و $ab=a'b'$، باشند آنگاه صورت $F=ax^2+by^2$ مناسب است اگر و فقط اگر $F'=a'x^2+b'y^2$

1. genus

مناسب باشد.

این قضیه از محک گاوس (قضیهٔ ۱۲) نتیجه می‌شود، به‌این ترتیب که F و F' صورتهای اولیهٔ سره‌اند زیرا $(a,b)=1$ و $(a',b')=1$، و دارای دترمینان یکسان $d=-ab=-a'b'$ هستند.

محک گاوس همراه با نظریهٔ تحویل صورتهای درجهٔ دوم اساس محک زیر است، که قابل انتساب به گروب می‌باشد.

قضیهٔ ۱۴. عدد طبیعی m مناسب است اگر وفقط اگر هرعدد طبیعی n که به صورت $n=m+x^2$ با ضوابط $x<\sqrt{m/3}$ و $x\in\mathbf{N}$ باشد به شکل $n=rs$، با ضوابط $r,s\in\mathbf{N}$ و $s\geqslant r\geqslant 2x$، تجزیه نشود مگر اینکه $r=s$ یا $r=2x$.

توجه کنید که طبق محک گروب نیز ۱۳ و ۱۵ اعداد مناسب‌اند.

حال اجازه دهید که چند مثال دیگر را مورد بررسی قرار دهیم. برای $m=48$ تجزیه‌های زیر را داریم

$$48+1^2=49=7\times 7\ :\ r=s$$

$$48+2^2=52=4\times 13\ :\ r=2x$$

$$48+3^2=57$$

$$48+4^2=64=8\times 8\ :\ r=s$$

(هیچ تجزیهٔ دیگری به صورت $n=rs$ با ضابطهٔ $s\geqslant r\geqslant 2x$ وجود ندارد). بنابراین، $m=48$ مناسب است. به‌همین‌طریق $m=60$ مناسب است زیرا

$$60+1^2=61$$

$$60+2^2=64=8\times 8\ :\ r=s$$

$$60+3^2=69$$

$$60+4^2=76$$

اما $m=11$ مناسب نیست زیرا داریم $11+1^2=12=3\times 4$ و در آن $s>r>2x$.

گروب همهٔ اعداد مناسبی را که قابل قسمت بر یک مجذور $k^2\neq 1$ هستند مشخص کرد. او برای بقیهٔ این اعداد محک زیر را به‌دست آورد که شبیه محک اویلر است که به‌طوری که اشاره شد تاکنون ثابت نشده‌است.

قضیهٔ ۱۵. فرض کنید $m\in\mathbf{N}$ بریک مجذور کامل قابل‌قسمت نباشد و $m\neq 3, 7, 15$. آنگاه m مناسب است اگر و فقط اگر هرعدد طبیعی n به شکل $n=m+x^2$ با ضوابط $n\in\mathbf{N}$ و $x<\sqrt{m/3}$ به‌شکل $n=tp$، $n=2tp$ یا $n=p^2$ نیز باشد، که درآن t یک مقسوم‌علیه m و p یک عدد فرد اول است.

به‌عنوان مثال، عدد $m=120$ را بررسی می‌کنیم. به‌موجب خاصیتهای ۴ و ۷ از قضیهٔ ۱۱ نتیجه‌می‌گیریم که $m=4(4k+2)$، $k\in\mathbf{N}$ مناسب‌است اگروتنها اگر $4k+2$ مناسب باشد. بنابراین ۱۲۰ مناسب است اگر وفقط اگر ۳۰ مناسب باشد. با به‌کارگیری قضیهٔ ۱۵، نظر به‌اینکه ۳۰ غیرقابل تقسیم بر یک مجذور کامل است در می‌یابیم که

$$30+1^2=31=p$$

$$30+2^2=34=2\times 17=2p$$

$$30+3^2=39=3\times 13=tp$$

و بنابراین $m=30$ مناسب‌است. در نتیجه $m=120$ نیز مناسب است.

۶. مسالهٔ کامل‌بودن جدول اویلر

این حدس اویلر که جدولش (قضیهٔ ۸) شامل همهٔ اعداد مناسب است، همچنان یک‌حدس اثبات نشده‌است، ولی به‌نظر می‌رسد این مسأله‌درشرف حل باشد. اولین‌پیشرفت دراین‌زمینه، مرهون‌چاولا[1] است که در سال ۱۹۳۴ نشان داد فقط تعدادی متناهی عدد مناسب وجود دارد. اثبات او مبتنی بر مقاله‌ای ازهایلبرون[2] و نیز این خاصیت است که

$$\lim_{d\to\infty}\frac{h(d)}{g(d)}=\infty$$

که در آن $h(d)$ تعداد رده‌های سره و $g(d)$ تعداد گونه‌های صورتهای درجه دوم دوتایی با دترمینان d است. با استفاده از فرمول مجانبی زیگل و فرمول عدد رده‌ای تحلیلی، بریگز وچاولا (۱۹۵۲) وبعداً گراسوالد (۱۹۶۳) و واینبرگر (۱۹۷۳) گامهای دیگری در حل این مسأله برداشتند. نتیجهٔ این پیشرفتها آن است که در حقیقت این جدول‌کامل است مگر احتمالا با یک عدد بیشتر ۱

۷. کاربردها

اویلر اعداد مناسب را برای جستجوی اعداد اول یا تشخیص اول بودن اعداد مفروض به‌کاربرد و نتایج خوبی به‌دست آورد. او علاوه بر مثالهایی که قبلا در بخش ۲ ذکر شد، به‌وسیلهٔ عدد مناسب $m=232$ همهٔ اعداد اول p به‌شکل $p=1+232y^2$ با ضابطهٔ $1\leqslant y\leqslant 300$، $y\in\mathbf{N}$ را تعیین کرد. به‌علاوه، اعداد اول به‌شکل $p=40x^2+13y^2$ و $p=x^2+1848y^2$ را مورد مطالعه قرار داد و به‌ویژه همهٔ اعداد اول p به‌شکل $p=197^2+1848y^2$ با ضابطهٔ $1\leqslant y\leqslant 100$، $y\in\mathbf{N}$ را یافت. در حقیقت، ۲۲ عدد اول از این نوع وجود دارد و بزرگترین آنها عبارت است از

$$P=197^2+1848\times 100^2=18518809 0$$

تا آن‌زمان این عدد بزرگترین عدد اول شناخته شده به‌استثنای عدد اول مرسن $p=2^{31}-1$ بود که آن‌هم توسط اویلر کشف شده‌بود.

از نظریهٔ هیأتهای رده‌ای و از محک گاوس، می‌توان یکی دیگر از خاصیتهای مهم اعداد مناسب را نتیجه‌گرفت که اینک به‌شرح آن می‌پردازیم:

1. S. Chowla 2. Heilbronn

قضیهٔ ۱۶. فرض کنید m عددی طبیعی است. آنگاه همهٔ اعداد اول p به‌شکل $p=x^2+my^2$ با ضابطهٔ $x, y \in \mathbf{N}$ را می‌توان با شرایط همنهشتی نسبت به یك پیمانهٔ f مشخص کرد اگر وتنها اگر m مناسب باشد.

عدد f را هادی m می‌نامند. به‌خاطر آورید که برای $m=1, 2, 3$ به‌ترتیب $f=4, 8, 3$ را پیدا کردیم (به‌قضایای ۱، ۳ و ۴ مراجعه کنید).

ولی این‌مسیرهای تحقیق و این نتایج به‌هیچ‌وجه همهٔ امکانات نهفته در مفهوم اعداد مناسب اویلر را به‌کار نگرفته‌اند. برای اینکه کاربرد کاملا متمایزی را نام برده باشیم، به‌کاری از هیاف اشاره می‌کنیم که در سال ۱۹۶۳ نشان داد (به صفحهٔ ۵۷، [۱] مراجعه کنید.) که اعداد مناسب با مسائل مقدار ویژه درفیزیك مرتبط‌اند. میراث ریاضی اویلر حقیقتاً گنجینه‌ای لایزال است.

مراجع

1. Baltes, H.P. and Hilf, E. R.: Spectra of Finite Systems. Bibliographisches Institut, Zürich, 1976
2. Chowla, S.: An Extension of Heilbronn's Class Number Theorem. Quarterly. J. Math. (Oxford) 5 (1934), 304-307
3. Chowla, S. and Briggs, W.E.: On discriminants of binary quadratic forms with a single class in each genus. Canadian J. Math. 6 (1954), 463-470
4. Euler, L.: Opera Omnia. Series Prima. Teubner, Leipzig, 1911
5. Fermat, P.: Oeuvres. Tome 2, 212-217, Gauthier-Villars, Paris, 1894
6. Frei, G.: On the Development of the Genus of Quadratic Forms. Ann. Sci. Math. Québec 3 (1979), 5-62
7. Frei, G.: Les nombres convenables de Leonhard Euler. (To appear)
8. Gauss, C.F.: Disquisitiones arithmeticae. Leipzig, 1801 (or: Untersuchungen über höhere Mathematik. Herausgegeben von H. Maser, Springer, Berlin, 1889)
9. Grosswald, E.: Negative discriminants of binary quadratic forms with one class in each genus. Acta Arithmetica 8 (1963), 295-306
10. Grube, F.: Ueber einige Eulersche Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen. Zeitschrift für Mathematik und Physik 19 (1874), 492-519
11. Lagrange, J. -L.: Recherches d'arithmétique, 1773et 1775. Oeuvres, Tome 3, Gauthier-Villars, Paris, 1867
12. Steinig, J.: On Euler's Idoenal Numbers. Elemente der Mathematik 21 (1966), 73-88
13. Weinberger, P. J.: Exponents of the class groups of complex quadratic fields. Acta Arithmetica 22 (1973), 117-124

****

• Günther Frei, "Leonhard Euler's convenient numbers," *The Mathematical Intelligencer*, (3) 7 (1985) 55-64.

★ گونتر فرای، دانشگاه لاوال کانادا

مسأله برای حل

مسائل این شماره را چند تن از اعضای تیم ایران درالمپیادهای ریاضی سالهای قبل، طرح کرده‌اند. راه‌حلهای خود و نیز مسائلی را که طرح می‌کنید، مانند سابق به‌دفتر مجله بفرستید.

* * *

مسألهٔ ۹. اگر $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ مشتقپذیر باشد، ثابت کنید f' در زیر بازهٔ‌بازی از $[a, b]$ کراندار است.
(شهریار مختاری‌شرقی)

مسألهٔ ۱۰. اگر $\mathbf{N}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی با توپولوژی T شامل ϕ و $\mathbf{N}$ ومتممهای مجموعه‌های متناهی باشد، نشان دهید حلقهٔ توابع پیوسته از $\mathbf{R}$ با توپولوژی معمولی به $\mathbf{N}$ با توپولوژی T، متناهیاً تولید شده‌است.
(آرش رستگار)

مسألهٔ ۱۱. روی وتر دلخواهی از دایرهٔ مفروضی، $2n+1$ نقطه اختیار می‌کنیم و آنها را به‌ترتیب $A_1, \ldots, A_{2n+1}$ می‌نامیم. نقطهٔ دلخواه B_1 را روی دایره اختیار کرده آن را به A_1 وصل می‌کنیم وامتداد می‌دهیم تا دایره را در B_2 قطع کند. B_2 را به A_2 وصل کرده امتداد می‌دهیم تا دایره را در B_3 قطع کند وهمین‌طور ادامه می‌دهیم. نقطهٔ B_{2n+1} را به A_{2n+1} وصل کرده امتداد می‌دهیم تا دایره‌را در B_{2n+2} قطع کند. ثابت کنید خط B_1B_{2n+2} وتر مفروض را همواره در یك نقطهٔ ثابت قطع می‌کند (به B_1 بستگی ندارد).
(شهریار مختاری شرقی)

مسألهٔ ۱۲. مطلوب است m و nهایی متعلق به $\mathbf{N}$ به‌طوری که حلقه‌ای تعویضپذیر و یکه‌دار با n ایده‌آل وجود داشته باشد که mتای آنها ماکسیمال باشد.
(حسام حمیدی تهرانی)

مسألهٔ ۱۳. ثابت کنید برای هر $n \in \mathbf{N}$ و عدد اول p، گروهی از مرتبهٔ p^n وجود دارد که مرکز آن p، p^2 یا p^3 عضوی باشد.
(علی رجایی)

عصر جدید منطق

ضیاء موحّد*

مجموعه مقاله‌هایی که با نام ***Logic Colloquium*** منتشر می‌شود، شامل پژوهشهای منطقدانانی است که هرساله در مجمعی به نام
European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic
گردهم می‌آیند و تحقیقات خود را عرضه می‌کنند. این مجمع محل ثابتی ندارد و هزینهٔ برگزاری آن را نیز هرسال سازمانهای فرهنگی متفاوتی تأمین می‌کنند.

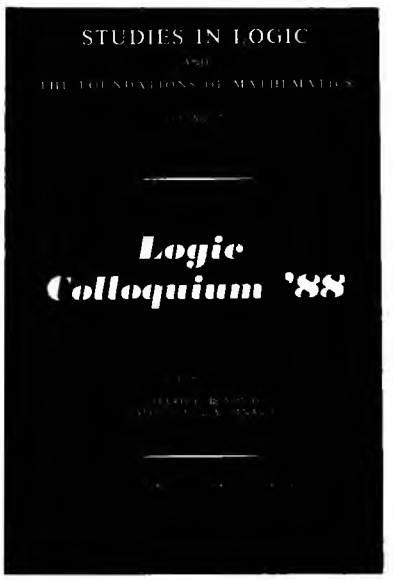
آنچه در زیر می‌خوانید براساس برخی از مباحث مجموعه مقاله‌های سال ۱۹۸۸ این مجمع و مأخذهای دیگری که به آنها در متن ارجاع داده‌ایم، نوشته شده است.

در دو دههٔ گذشته، منطق رشد چشمگیری کرده، به کشف مفهومهای تازه‌ای رسیده و کاربردهای مهمی یافته‌است. هدف از این نوشته گزارش کوتاهی از برخی از این جریانهاست و نیز آگاه کردن منطق‌آموزان از راهنماییها و توصیه‌هایی که پیشروان منطق در گردهمایی ۱۹۸۸ خود به‌آنان کرده‌اند. [۳]

سولومن ففرمن[1]، یکی از منطقدانان معروف، این سالها را سالهای «بسیار تکنولوژیکی» منطق توصیف کرده است. منظور ففرمن از «بسیار تکنولوژیکی» می‌تواند هم این باشد که منطق بسیار تخصصی شده (و این معنایی است که خود بدان اشاره کرده) [۳، ص ۳۶۱] و هم اینکه با علوم کامپیوتر پیوند عمیق یافته است. اجازه دهید درمورد این هردو توضیحی بدهیم.

منطق ریاضی نه تنها به‌تحلیل روشهای متداول استدلال در ریاضیات پرداخته بلکه خود به کشف شگردها و ساختارهای تازه‌ای برای برهان توفیق یافته است. برای مثال در دهه‌های قبل، مجموعه‌های هنکین[2] (یا هین‌تیکا[3])، روش حسابی کردن گودل و روش فورسینگ کوهن شگردهای کلی تازه‌ای در اثبات قضیه‌های منطق و ریاضی به ارمغان آوردند. کشف این‌گونه برهانها در دو دههٔ اخیر به‌ویژه در نظریهٔ مدل و نظریهٔ مجموعه‌ها ادامه یافته‌است

1. Feferman 2. Henkin 3. Hintikka



و برهانها به‌درجه‌ای از دقت و رشد رسیده‌اند که در پیشرفتگی، به گفتهٔ موسکوواکیس[1]، به‌ریاضیات محض پهلو می‌زنند. موسکوواکیس در سخنرانی اختتامی خود در گردهمایی ۱۹۸۸ اقرار کرده است که با وجود پانزده سال سابقهٔ تحقیق مداوم در نظریهٔ توصیفی مجموعه‌ها از دنبال‌کردن سخنرانیهای جان استیل در همین موضوع عاجز مانده است. موسکوواکیس این عجز را خاسته از این می‌داند که برهانها عمیقتر، ظریفتر و متعالیتر شده‌اند [۳، ص ۳۷۷]. خلاصه آنکه منطق به‌زبان و روشهایی دست یافته که فهم آن جز با تلاش و صرف وقت فراوان ممکن نیست و این یک معنای تخصصی شدن آن است. معنای دیگر این تخصصی‌شدن پیوندهای تازهٔ منطق با ریاضیات کلاسیک است. منطقدانان و ریاضیدانان در این سالها به پژوهشهای تازه‌ای در جبر، هندسهٔ دیفرانسیل، آنالیز تابعی و آنالیز همساز با ابزار منطق پرداخته‌اند. فهم کارهایی که در این زمینه‌ها می‌شود بجز منطق مستلزم اطلاع کافی از این زمینه‌ها نیز می‌باشد. اطلاع کافی از همهٔ ریاضیات کلاسیک، برای هیچ‌کس ممکن نیست و به‌همین دلیل هم هیچ‌کس نمی‌تواند به‌تنهایی از همهٔ این پژوهشها سر در آورد.

1. Moschovakis

و حالا می‌رسیم به‌پیوند منطق با علوم کامپیوتر که جنبهٔ مهم دیگری از «بسیار تکنولوژیکی»شدن آن است.

منطق و کامپیوتر: $P \neq NP$?

اگر زمانی موشکافیهای منطقدانان در بررسی زبانهای صوری را با نظر منفی به «فرمالیسم» توصیف می‌کردند، پیداشدن زبانهای گوناگون کامپیوتری و لزوم توصیف ساختار صوری و سمانتیکی آنها نشان دادکه فرمالیسم منطقدانان برشهود علمی عمیقی استوار بوده است. ازسوی دیگر علوم کامپیوتری هم با طرح مسأله‌های تازهٔ منطقی، پویایی دیگری به‌منطق بخشیدند. پیوند منطق و علوم کامپیوتری به‌همان‌گونه داد و ستدی انجامید که پیوند آنالیز و فیزیك نظری. اجازه دهید دراین مورد توضیح بیشتری بدهیم.

در دههٔ ۱۹۳۰ تا ۱۹۴۰ مسأله‌های منطق براثر چند کشف بنیادی به‌دو دستهٔ مهم تقسیم شدند: مسأله‌هایی که برای حل آنها روشهای مکانیکی و به‌اصطلاح الگوریتم قطعی وجود دارد و مسأله‌هایی که برای حل آنها چنین روشهایی وجود ندارد. برای مثال مسألهٔ صدق‌پذیری[1] برای‌منطق جمله‌ها به‌دستهٔ اول تعلق دارد وهمین‌مسأله برای‌منطق محمولها به‌دستهٔ‌دوم. منظور ازصدق‌پذیری این است که معلوم کنیم درصورت برهان

$$A_1, \dots A_n \vdash B$$

B نتیجهٔ منطقی A_1 تا A_n هست یا نه و به‌بیان‌دیگر ترکیب‌شرطی

$$A_1 \& \dots \& A_n \to B$$

قضیه‌ای از منطق هست یا نه. چنانکه می‌دانیم در منطق جمله‌ها این مسأله را به‌کمك جدولهای ارزش به روش مکانیکی می‌توان حل کرد. منطقدانان از اینکه می‌دیدند در حل مسألهٔ صدق‌پذیری برای زنجیرهٔ درست ساختی با n جمله‌نشانه کافی است جدول ارزشی با 2^n سطر ساخت و ارزش صدق و کذب آن را در هر سطر با روشی مکانیکی پیدا کرد، با خیال راحت این مسأله را حل‌شده می‌انگاشتند.

درواقع در سالهای پس‌از ۱۹۳۰ مسألهٔ اصلی این بود که دستوری کلی برای متمایزکردن مسأله‌های محاسبه‌پذیر[2] و محاسبه‌ناپذیر پیداکنند. این‌دستور کلی راآلونز و چرچ در۱۹۳۶ با آنچه به‌حدس چرچ یا گمانهٔ چرچ معروف است در اختیار منطقدانان نهاد. در این گمانه، مفهوم شهودی «محاسبه‌پذیری» با مفهوم دقیق ریاضی «بازگشتی بودن»[3] معادل، و به بیان دقیقتر، هم‌مصداق[4] فرض می‌شود: تابعی محاسبه‌پذیر است اگر و تنها اگر بازگشتی باشد. توجه کنیدکه «محاسبه‌پذیری» که همه از آن تصوری در ذهن خود داریم چیزی است و «بازگشتی‌بودن»، یا به بیان دیگر، «محاسبه‌پذیر با ماشین تورینگ‌بودن» چیز دیگر. از این‌رو منطقدانان حکمی راکه این دو مفهوم را هم مصداق می‌داند گمانه‌نامیدند (اخیراً الیوت مندلسون درمقالهٔ تأمل‌انگیزی‌استدلال کرده است که موضع این حکم چرچ برتر از گمانه و درواقع قضیه‌ای از منطق است، قضیه‌ای درشمار اصول منطقی) [۷]. اما با ورود کامپیوتر به صحنه معلوم شد که تابعهای محاسبه‌پذیر هم موجودهای چندان حسابی نیستند! برای توضیح این‌امر، در اینجا هم مانند بسیاری از موردهای دیگر، باید از منطق جمله‌ها شروع کنیم.

فرض کنید ترکیب‌شرطی‌مذکور دربالا، زنجیرهٔ درست‌ساختی از منطق جمله‌ها و دارای ۷۰ جمله‌نشانه باشد. در این صورت جدول ارزش آن 2^{70} سطر خواهد داشت و برای حل مسألهٔ صدق‌پذیری، روش مکانیکی ما باید 2^{70} سطررا بررسی کند. اگر کامپیوتر ما بتواند در هرثانیه ۱۰۰۰۰۰۰ سطر را بررسی کند، حل این‌مسأله ۳۰۰۰۰۰ قرن‌طول خواهدکشید! البته این‌تغییری‌در محاسبه‌پذیر بودن نظری آن نمی‌دهد اما آیا واقعاً این محاسبه‌پذیری را می‌توان عملی هم دانست؟ پیامدهای این محاسبه‌ناپذیری عملی برای منطق، علوم کامپیوتر، هوش مصنوعی و استدلال طبیعی سخت تأمل‌انگیز و راهگشاست. به‌نظرمن یکی‌ازساده‌ترین‌پیامدها این است که امکان وجود انسان منطقی به‌معنای دقیق کلمه محال است. آدم درست و حسابی ناگزیر از اشتباههای معقول است و اگر بخواهیم کامپیوترها را هم آدم کنیم باید به‌آنها اشتباههای معقول بیاموزیم.

محاسبه‌ناپذیر بودنِ عملیِ صدق‌پذیری یك نمونه از دهها مسأله دیگراست که‌با زندگی‌روزمره و واقعیتهای‌ملموس‌علوم‌وتکنولوژی ارتباط می‌یابند. برای مثال محاسبهٔ حداقل تعداد کارگران لازم برای مونتاژ تعداد معینی دوچرخه در روز به‌گونه‌ای که قطعه‌ها به‌ترتیب درست برهم سوار شوند و هیچ‌کارگری هم برای انجام وظیفهٔ واحدی‌که دارد بیکار نماند مسأله‌ای است‌که حل‌آن به‌مسألهٔ صدق‌پذیری بر می‌گردد [۵]. مثال دیگر مسألهٔ معروف «فروشندهٔ دوره‌گرد» است. n شهر و فاصله‌های آنها را از یکدیگر داریم. فروشندهٔ دوره‌گرد ما می‌خواهد ازهمهٔ این شهرها وازهرکدام تنها یکبار بگذرد چنانکه‌کوتاهترین مسیررا بپیماید. پیچیدگی محاسبهٔ این‌مسیر نیز ازهمان‌درجهٔ پیچیدگی[1] محاسبهٔ صدق‌پذیری‌ومحاسبهٔ تعداد حداقل کارگران است. ویژگی ریاضی تمام این مسأله‌ها در این است‌که:

> گامهایی که‌کامپیوتر برای حل هرمسأله برمی‌دارد یك تابع‌نمایی از متغیری است که می‌توان آن را طول درون‌داد یا داده دانست.

برای مثال درمسألهٔ صدق‌پذیری اگرطول هرزنجیرهٔ درست‌ساخت را تعداد جمله‌نشانه‌های متمایزآن بدانیم، این‌تابع با «2^n» نشان داده می‌شودکه تابعی است نمایی وازاین‌رو می‌گوییم محاسبهٔ‌این تابع به‌زمان‌نمایی نیاز دارد. چنانکه دیدیم با افزایش n محاسبه هم درعمل‌ناممکن‌می‌شود. ازاینجامی‌توان به‌مفهوم محاسبه‌ناپذیری عملی دست یافت.

و اما محاسبه‌پذیری عملی. با توجه به‌این نکته که رشد تابع‌نمایی از رشد هرچند جمله‌ای ثابت بزرگتر است، فرض

1. satisfiability 2. computable 3. recursiveness
4. co-extensive

۱. «پیچیدگی» را عجالتاً برای «complexity» به کار برده‌ایم ولی این لغت معنای دقیقتری دارد.

معقول این است که بگوییم:

> مسأله‌ای درعمل‌محاسبه‌پذیر است که گامهایی که کامپیوتر برای حل آن برمی‌دارد یك تابع چندجمله‌ای ازمتغیری باشد که مبین طول درون‌داد یا داده است.

دراینجاهم می‌گوییم‌محاسبهٔ چنین تابعی به‌زمان چندجمله‌ای، نیاز دارد. «محاسبه‌پذیری در زمان چندجمله‌ای» معادل دقیق ریاضی مفهوم شهودی «محاسبه‌پذیریِ عملی» است، همچنانکه «بازگشتی‌بودن» معادل صوریِ‌مفهومِ شهودیِ«محاسبه‌پذیری» بود.

تا اینجا مسأله‌های محاسبه‌پذیر را به دو دستهٔ محاسبه‌پذیر عملی و محاسبه‌ناپذیر عملی براساس‌زمان چندجمله‌ای وزمان‌نمایی تقسیم‌کردیم. اما چنانکه گفتیم زندگی ما پراز مسأله‌هایی‌است که حل قطعی آنها به زمان‌نمایی نیاز دارد و چون نمی‌توانیم از سر آنها بگذریم ناچار باید دست از الگوریتمهای‌قطعی برداریم و دراینجاست‌که مفهوم غیرقطعی‌بودن محاسبه[1] پیش می‌آید.

کشف‌اساسی دراین زمینه این‌است که مجموعهٔ بسیار بزرگ ومهم از تابعهایی راکه محاسبهٔ قطعی‌آنها به‌زمان‌نمایی نیاز دارد می‌توان با روشهای غیرقطعی در زمان چندجمله‌ای محاسبه کرد. در این محاسبه‌ها کامپیوتر می‌تواند براساس حدس و گمان عمل کند وظرفیت بیکرانی درمحاسبه‌های موازی داشته‌باشد. مثالی از یك روش غیرقطعی این‌است: می‌خواهیم عدد n را به‌حاصلضرب دوعدد b و c ($b > 1$ و $c < n$) تجزیه‌کنیم. دراین‌روش‌کامپیوتر هربار دو عدد را کاملا تصادفی انتخاب و درهم ضرب ودرستی تساوی $n = bc$ را بررسی می‌کند.

اگر مجموعهٔ الگوریتمهای قطعی را که در زمان چندجمله‌ای محاسبه می‌شوند به P و مجموعهٔ الگوریتمهای غیرقطعی راکه در زمان چندجمله‌ای محاسبه می‌شوند به NP نشان دهیم می‌توان حدس زدکه

$$P \neq NP .$$

این‌همان گمانهٔ معروف‌استفن‌کوك‌است‌که در ۱۹۷۱ مطرح‌شد[۲]. این حکم راگمانه می‌نامیم زیرا هنوز ثابت نشده است که مسائل NP در ذات خود نیاز به‌زمان قطعی‌نمایی دارند. کشف بسیار جالب درمورد مجموعهٔ NP این است‌که:

> اگرمسألهٔ صدق‌پذیری درمنطق‌جمله‌هارا بتوان در زمان چندجمله‌ای با الگوریتمی‌قطعی حل‌کرد آنگاه هرمسألهٔ دیگر از مجموعهٔ NP را هم می‌توان با الگوریتمی قطعی در زمان چندجمله‌ای حل‌کرد.

البته تمام روشهایی که تاکنون برای یافتن راه‌حل قطعی هریك از مسأله‌های NP یافته‌اند به محاسبه‌هایی در زمان‌نمایی انجامیده است. ازاین‌رو حدس می‌زنند که پیدانشدن روش قطعی در زمان چندجمله‌ای برای این مسأله‌ها خاصیت ذاتی آنهاست.

گمانهٔ‌کوك اساس نظریهٔ پیچیدگی و از موردهای بسیار مهم داد وستد منطق و علوم‌کامپیوتری است.

1. non-deterministic computation

بسیاری از طرفداران ریاضیات محض دیرزمانی است که ریاضیات‌کاربردی را زشت و ریاضیات محض را زیبا توصیف کرده‌اند. اما باگره‌خوردن منطق باعلوم‌کامپیوتری‌یعنی گره‌خوردن یکی‌از انتزاعیترین علوم، که انگیزه‌های فلسفی فراوانی هم دارد، بایکی‌از کاربردیترین علوم، این‌زیباشناسی‌نیز دگرگون‌خواهدشد.

منطق ریاضی و منطق فلسفی

در دو دههٔ‌گذشته منطقدانانی‌که گرایش ریاضی دارند روزبه‌روز منطق را ریاضیتر کرده‌اند. پیش‌ازاین، منطقدانان بزرگ‌فیلسوفان بزرگ یا برجسته‌ای‌هم بودند. ارسطو، لایب‌نیتس، فرگه و راسل مصداقهای بارز این‌حکم‌هستند. ازگودل، که بسیاری اورا تاامروز بزرگترین منطقدان می‌دانند، تنها سه هزار صفحه دستنوشته در فلسفهٔ لایب‌نیتس به جا مانده است. در منطقدانان زنده ساثول کریپکی هم به‌همین سنت متعلق است. اما امروز شاهد پاگرفتن نسل‌تازه‌ای‌ازمنطقدانان هستیم‌که بیشتر مایل‌اند خود را ریاضیدان بدانند. البته این واکنشی هم بوده است دربرابر ریاضیدانانی‌که به‌گفتهٔ کواین [۸] حتی حاضر نبودندگودل را به باشگاه ریاضی خود راه دهند. نتیجهٔ این تلاشها استقلال منطق ریاضی از فلسفه و شناخته‌شدن آن به‌عنوان شاخه‌ای از ریاضیات‌گردید.

امامنطق‌فلسفی‌هم بیکارننشست. انتشارچهار جلد قطور«راهنمای منطق فلسفی [۴] در برابر یك جلد «راهنمای منطق ریاضی[۱] کار بی‌دلیل و انگیزه‌ای نبوده است. درمنطق فلسفی ملاحظات سمانتیکی نقش بنیادی دارند. برای مثال، از دید ریاضی محض تمام نظامهای صوری منطق موجهات‌که ویژگیهای معینی را داشته باشند، به‌یك‌اندازه پذیرفتنی‌هستند. اما به‌اعتبار فلسفی ازیك‌طرف کواین را داریم‌که هیچ‌کدام را نمی‌پذیرد و از طرف‌دیگر گروه طرفداران منطق موجهات را که سالهاست برسر نظامهای مختلف باهم بگومگو می‌کنند. به‌قول‌کریپکی:

> نباید تصور کرد که فرمالیسم می‌تواند آن‌چنان نتایج فلسفی ازخود بیرون‌دهدکه خارج‌ازظرفیت استدلالهای فلسفی معمولی باشد. برای فلسفه جانشین ریاضی وجود ندارد[۶].

منظور آنکه برای ورود در این زمینه بجز اطلاع از منطق‌ریاضی ــ که هرقدر بیشترباشد بهتر است ــ اطلاع منظم فلسفی نیزباید داشت. این‌رشته نیز به‌دوران تخصصی‌خود پانهاده است.

توصیه‌هایی به‌پژوهشگران منطق

اکنون این‌سؤال پیش می‌آیدکه دراین دوران تخصصی وپیدایش گرایشهای منطقی، فلسفی و کاربردی در منطق، منطق‌آموزان باید چه راهی درپیش‌گیرند. دراین مورد بهتر است ترجمهٔ حرفهای ففرمن را در گردهمایی ۱۹۸۸ منطقدانان بیاوریم:

«در این دورهٔ "بسیار تکنولوژیکی"، دانشجوی جوانی‌که بخواهد دریکی از موضوعهای اساسی منطق (نظریهٔ مدل، نظریهٔ بازگشت، نظریهٔ مجموعه‌ها و نظریهٔ برهان) پژوهش‌کند باید خود را به‌تمامی در خدمت آموختن وسیع آن درآورد و تمام انرژی خود را در درافتادن با مسأله‌های تخصصی دشوار متمرکز سازد.

پاداش توفیق دراینجا این است که معیار موفقیت دراین حوزه‌های عالی تخصصی کاملا معلوم است واگر کسی به‌هدف بزند پیشکسوتان خبره به‌زودی خواهند فهمید. اما طرف دیگر قضیه هم این است که سرمایه‌گذاری تمام انرژی در یک موضوع کاری است وابستهٔ تصادف و اقبال.

در سالهای اخیر گروهی از منطقدانان به‌کاربردهای منطق در ریاضی(به‌ویژه جبر و آنالیز) وعلوم کامپیوتر و زبانشناسی، گرایش پیداکرده‌اند. دلیل این گرایشها معلوم است: حوزهٔ وسیعتر، آزادی بیشتر در پروراندن یک موضوع، افزایش امکانهای شغلی و سرمایه‌گذاری (دانشگاهی و غیردانشگاهی) و امکان کاربرد تواناییهای آموزشی و تخصصی درعمل. اما این گرایشها هم خطر خود را دارند. نخست، در خطرافتادن غرور حرفه‌ای است. تبحر درمنطق به‌تبحر درموضوع دیگر نمی‌انجامد و پی‌بردن به‌مسأله‌های واقعی در زمینهٔ کاربرد به تجربهٔ زیادی نیاز دارد. دیگر آنکه اهمیت نتیجه‌ها و ملاکهای توفیق در موضوعهایی که تازه درحال رشد هستند و رقابت در آنها فراوان است خیلی نامشخصتر از موضوعهای استاندارد منطق است. از این گذشته حل مسأله‌های دشوار، اگر ارتباط عمیق با کاربرد نداشته باشد، توفیقی به بار نمی‌آورد. و دیگر آنکه ممکن است همیشه به‌چشم بیگانه به آدم نگاه کنند. بنابراین دراین‌جهت رفتن هم خطرکردن است.»

ففرمن در پایان به منطقدانان جوان چنین توصیه می‌کند: «به گرایشهای رایج روز توجه داشته‌باشید اما به‌صرف اینکه اینها مد روز هستند دنبال آنها راه نیفتید. نگاهی به گذشته بیندازید که چگونه زمانی مسأله‌هایی هیجان‌انگیز به شمار می‌آمدند و بعد فراموش شدند. توصیهٔ اصلی من به‌دانشجویان این است که ببینید به‌چه مسأله‌هایی واقعاً علاقه‌مندید و واقعاً می‌خواهید برای آنها پاسخی پیداکنید. مهم نیست که این مسأله‌ها مد روز باشند یا نه و درخارج از منطق کاربردی داشته باشند یا نداشته باشند»[۱،ص ۳۶۱].

مراجع

1. J. Barwise, ed. *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland (1977).
2. S. Cook, "The complexity of theorem-proving procedures," *Proceedings of 3rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (1971) pp. 151-158.
3. R. Ferro, C. Bonotto, S. Valentini and A. Zanarado, eds. *Logic Colloquium 88,* North-Holland (1989).
4. G. Gabby and F. Guenthner, eds. *Handbook of Philosophical Logic*, Dordrecht: D. Reidel, vol. I-IV (1983-9).
5. R. L. Graham, "Combinatorial scheduling theory," *Mathematics Today*, ed. L. A. Steen, Springer-Verlag (1978) pp. 183-211.
6. F. Kripke, "Is there a problem about substitutional quantification?," *Truth & Meaning*, eds. G. Evans and J.Mc Dowell, Clarendon Press, Oxford (1976) p. 416.
7. E. Mendelson, "Second thoughts about Church's thesis and mathematical proofs," *J. Philos*, May 1990, pp. 225-234.
8. W.V. Quine, *Quiddities*, Harvard University Press (1987) p. 128.

****

* دکتر ضیاء موحّد، انجمن حکمت و فلسفه

سمینار زبان فارسی و زبان علم

مرکز نشر دانشگاهی به سبب ماهیت کار خود همواره با مسائل و مشکلات زبان علمی فارسی روبه‌روست. ویراستاران و همکاران این مرکز به کمک دانش و تجربهٔ خود برای بعضی از این مسائل راه‌حلهایی یافته‌اند و برای برخی دیگر هنوز راه‌حل مشخصی پیدا نکرده‌اند. مرکز نشر دانشگاهی تاکنون سمینارهایی برای بحث و تبادل نظر در این موارد برگزار کرده است و سمیناری که از ۲۸ تا ۳۰ اردیبهشت امسال با عنوان «زبان فارسی و زبان علم» برگزار شد، از این دست بود.

در این سمینار از تمامی دست‌اندرکاران زبان علمی فارسی دعوت به عمل آمده بود و چند میهمان نیز از کشورهای تاجیکستان و چین در آن شرکت کردند. به علاوه، عده‌ای از صاحبان حرفه‌ها و تخصصها از قبیل پزشکان، مهندسان، کارشناسان آموزش و پرورش، و همکاران رسانه‌های همگانی نیز در سمینار حضور داشتند و مسائل خود را بیان کردند. در جلسات این گردهمایی حدود ۳۰ مقاله خوانده شد که موضوع آنها از مباحث کلی مانند بحث دربارهٔ خصوصیات زبان علم گرفته تا مباحث خاص مانند بحث دربارهٔ تعدادی از واژه‌های نوساخته بود.

در پایان سمینار میزگردی تشکیل شد و در این میزگرد دربارهٔ مطالب ارائه شده در سمینار گفتگو شد. نتایجی که از این سمینار به دست آمد و در این میزگرد نیز عنوان شد، عبارت است از:

۱. برای تقویت زبان علم، ادبا باید همدلی و همراهی بیشتری با اهل علم داشته باشند.

۲. زبان علم تنها به کتابهای دانشگاهی محدود نمی‌شود و مراکز مختلفی باید در پیشبرد زبان علمی فارسی بکوشند. این مراکز عمدتاً عبارت‌اند از دانشگاهها، آموزش و پرورش، مراکز صنعتی و حرفه‌ای، و رسانه‌های همگانی.

۳. زبان امری ملی است و باید در سطح ملی به مسائل و مشکلات آن توجه شود.

سمینار «زبان فارسی و زبان علم» در مجموع سمینار موفقی بود و توانست کمابیش به اهداف اصلی خود که از جملهٔ آنها طرح موضوع زبان فارسی به عنوان زبان علم بود، دست یابد.

تجربهٔ ریاضی

فیلیپ دیویس، روبن هرش
ترجمهٔ رضا کرمی

معرفی کارِ ریاضیدانان حرفه‌ای به غیرمتخصصان آسان نیست و ریاضیدانان هم غالباً توانایی و خبرگی زیادی در این زمینه بروز نمی‌دهند. با این حال، هر از چندی یك کتاب استثنایی موفقیت خاصی در این زمینه کسب می کند که از آن جمله است کتاب *تجربهٔ ریاضی*[1] اثر فیلیپ دیویس استاد ریاضیات کاربردی در دانشگاه براون و روبن هرش استاد ریاضیات دانشگاه نیومکزیکو. این کتاب که در سال ۱۹۸۱ برای اولین بار چاپ شده اکنون به چاپ ششم رسیده و مدتی در فهرست کتابهای پرفروش سال در آمریکا بوده است. هدف مؤلفان در این اثر، معرفی تجربیات درونِ جامعهٔ ریاضی و توصیف ارتباط آن با کل میراث فرهنگی بشر است. در زیر ترجمهٔ قطعاتی از این کتاب را می‌خوانید.

فرد و فرهنگ

رابطهٔ میان فرد و اجتماع هرگز به اندازهٔ امروز مورد توجه نبوده است. گرایش به همگرایی و ادغام در مقابل گرایش به تفرقه و واگرایی، ملی‌گرایی در مقابل منطقه‌گرایی، آزادی فردی در مقابل امنیت فرد در یك جمع، همهٔ این گرایشهای متعارض، عرصهٔ تاریخ معاصر را به صحنهٔ نمایشی بدل کرده‌اند که شاید سمت و سوی تکامل تمدن ما را در چند قرن آینده رقم بزنند. افزون بر این کشمکشها، تعارض میان «دو فرهنگ» انسانی و تکنولوژیك نیز رخ نموده است.

ریاضیات به منزلهٔ یك فعالیت بشری، هر چهار مؤلفهٔ فوق را در خود جمع کرده است. از سویی از نبوغ فردی مددِ بسیار می‌گیرد. از سوی دیگر تنها به یمن تأیید ضمنی جامعه است که می‌تواند بیالد و شکوفا شود. به عنوان یك گونهٔ عمدهٔ هنری، انسانی است، حال آنکه از حیث کاربردهایش ماهیتی علمی- تکنولوژیك دارد.

در تاریخ اکتشافات علمی دو نظرگاه افراطی وجود داشته است. نخستینِ آنها نبوغ فردی را سرچشمهٔ اکتشاف می‌داند، و دومی اکتشافات علمی را زائیدهٔ عوامل اجتماعی و اقتصادی می‌پندارد. کمتر کسی یکی از این دو دیدگاه را دربست و تمام و کمال می‌پذیرد؛ در اغلب موارد آمیزه‌ای از این دو که بیشتر با تجربیات شخصی فرد وفق می‌دهد، برگزیده می‌شود.

از میان این دو نظریه، نظریهٔ اصالت فرد آشناتر و سهل‌الهضم‌تر از آن یك است و بیشتر با روحیات ما جور در می‌آید. خود ما در مقام معلم نهایت سعیمان را معطوف توجه به فرد دانشجو می‌نماییم، نه جماعت دانشجویان به عنوان یك گروه. همه روشهای تدریس به جمع، از طریق هر رسانه‌ای که صورت گیرد، از پیش فرض کرده‌اند که مخاطب آنها یك فرد است. برعکس، شنیدن واژهٔ «القای عقیده» که تداعی‌کنندهٔ نوعی پدیده گروهی است، شدیداً ما را نگران می‌کند.

ما روشهای آموزش و استراتژیهای اکتشاف ریاضی را، از آن دست که مثلا در کتابهای پولیا مطرح شده است، مطالعه می‌کنیم و می‌کوشیم اندکی از بصیرت ریاضیدانان بزرگ را به دانشجویان خود تزریق کنیم. دوست داریم زندگینامهٔ نوابغ استثنایی را بخوانیم و کارهایشان را به دقت بررسی کنیم.

یکی از قاطعترین بیانهای این نظریهٔ اصالت فرد را آلفرد آدلر در یکی از مقالات خود به دست داده است. خود آدلر ریاضیدانی حرفه‌ای است و مقالهٔ او به نثری بلیغ و در عین حال شورانگیز نوشته شده است. این مقاله بیانگر اعتقاداتی به غایت شخصی است: عقایدی رمانتیك، مالیخولیایی و بسیار بدبینانه.

در سرآغاز مقالهٔ آدلر یك شکلِ افراطیِ نخبه‌گرایی مطرح می‌شود:

> هر نسلی معدودی ریاضیدان بزرگ دارد، و الباقی حتی بود و نبودشان هم احساس نمی‌شود؛ به عنوان مدرس ریاضی پر بدك نیستند و اگر تحقیقی هم بکنند، ضرری به جایی نمی‌زند، امّا کارشان اهمیتی هم ندارد. هر ریاضیدانی یا سرامد است، یا هیچ است.

---

1. Philip J. Davis & Reuben Hersh, *The Mathematical Experience*, Birkhäuser Verlag (1981).

مطلب با توصیف این «نیکبختان اندك شمار» دنبال می‌شود:

> امّا در مورد بازشناسی ریاضیدانان خلاق از دیگران هرگز تردیدی وجود ندارد. پس کافی است فعالیتهای این چند نفر را به دقت بررسی کنیم.

بعد این «اندك شماران»ـ دستکم پنج تای آنها تا سال ۱۹۷۲ـ شناسایی می‌شوند.

نویسنده خاطرنشان می‌کند که آفرینش ریاضی گویا کار و کسبی است ویژهٔ جوانان. چرا که

> دوران خلاقیت ریاضیدان، کوتاه است. بعد از سنین بیست و پنج تا سی‌سالگی به ندرت کاری از پیش می‌رود. اگر تا آن موقع چندان کاری نشده باشد، بعد از آن هم کار چندانی صورت نمی‌گیرد. امّا اگر تا آن زمان کار بزرگی انجام شده باشد، بسا که نتایج دندانگیری باز هم حاصل آید، هرچند با پشت سر نهادن هر دهه از عمر، سطح دستاوردها پایین و پایینتر می‌آید.

آدلر حظّ وافری را که هنرمند از خلاقیت خود می‌برد، چنین توصیف می‌کند:

> یك نتیجهٔ ریاضی جدید، کاملا جدید، نتیجه‌ای که پیش از آن هرگز کسی آن را حدس نزده و حتی تصورش هم به مخیله کسی راه نیافته باشد، نتیجه‌ای که از یك فرض ابتدایی تقریباً حدسی زاده شده و از مسیر پر پیچ‌وخم اثباتهای نادرست، رهیافتهای نابجا، بیراهه‌های مأیوس‌کننده و خلاصه با ماهها یا حتی سالها کار سخت و ظریف به جان پرورده شده باشد، آری یك چنین نتیجه‌ای چنان لذتبخش است و چنان احساسی از قدرت و آسودگی خیال به آفرینندهٔ خود می‌دهد که هیچ‌چیز، یا تقریباً هیچ‌چیز دیگر در دنیا نمی‌تواند با آن برابری کند. و یك بنای نوین ریاضی، مایهٔ آنچنان فیروزی و گشایشی است که گویا نجوای جاودانگی را در گوش بشر زمزمه می‌کند.

و سرانجام، مقاله با یك ذکر مصیبت از نوع ریاضیش به پایان می‌رسد.

> همواره از اینکه زمان در گذرست آگاهیم. یك آگاهی مداوم. آگاهی از این واقعیت که خلاقیت ریاضی در همان اوان زندگی پایان می‌پذیرد. پس اگر قرار است که اصولا کاری به انجام برسد، بایستی هرچه زودتر آن را شروع کنیم و هرچه سریعتر به انجامش برسانیم. تنها مسائل بس دشوار در کانون توجه قرار می‌گیرند. اهل ریاضیات در این باره هیچ ترحمی روا نمی‌دارند: اگر مسائل آسان را حل کنید، تحقیر می‌شوید. اگر بخواهید مسائل نه چندان دشوار را حل کنید، توجه کسی را برنمی‌انگیزید. هیچ راهی نیست. باید به دشوارترین و عمیقترین مسأله‌ها پرداخت.
>
> به علاوه دستاورد ریاضیدان، خود تحرکی ایجاد می‌کند، به این معنی که هر نتیجهٔ ارزشمندی به خودی خود ریاضیدان را به یك نتیجهٔ جدید دیگر، یا حتی دو سه نتیجهٔ جدید هدایت می‌کند. و این روند به همین ترتیب پیش می‌رود و باز هم پیش می‌رود، تا اینکه بناگاه کل تحرك ایجاد شده از بین می‌رود. و اینك دوران خلاقیت ریاضیدان به‌سر آمده است. دریغا، آنچه مانده حرمان است و حسرت، و آنچه بر باد رفته، لذات گذشته است.

دریغا! پس بگذارید قهرمان سالخوردهٔ خود را بر در سرای پهلوانان اساطیری رها کنیم و بگذریم. بگذاریم تا به امیدی- شاید واهی- بر این دروازه‌های فروبسته همچنان بکوبد.

امّا برای آنکه خواننده به واسطهٔ این تصویر تیره و تار از ادامهٔ فعالیت ریاضی خود دلسرد نشود، محض اطلاع عرض می‌کنیم که بسیاری از ریاضیدانان پاره‌ای از آثار و نتایج دست اول خود را در سنینی بعد از پنجاه‌سالگی به دست آورده‌اند. مثلا پل لوی[1] که یکی از بنیانگذاران نظریهٔ نوین احتمال به شمار است، اولین مقاله‌اش را در این زمینه وقتی نوشت که در آستانهٔ چهل سالگی بود، و حتی تا شصت و چند سالگی هم به ارائهٔ کارهای عمیق و اصیل ادامه داد.

امّا چون به فرهنگ جامعه به عنوان سرچشمهٔ اصلی اکتشافات علمی نظر کنیم، به زمینه‌ای گام می‌نهیم که از موضع فردگرایانه بسی غیرقابل اتکاتر است و کمتر از آن هم به درستی درك شده است. این همان نظریهٔ «بسیارگان»[2] است، همان Zeitgeist یا «روح زمانهٔ» هگل: یعنی مجموعهٔ همهٔ اندیشه‌ها، نگرشها، تصورات، نیازها و همهٔ طرق ابراز عقیده‌ای که در یك زمان و مکان به خصوص، میان مردمان مشترك است. فصل آخر جنگ و صلح تولستوی را که در آن نگاهی مجدد به سراسر کتاب افکنده می‌شود، بخوانید و ببینید چطور نویسنده به این نتیجه می‌رسد که همهٔ آن گرایشهای تاریخی که در اروپا با انقلاب کبیر فرانسه آغاز شده بود، با وجود ناپلئون یا بی‌وجود او، ناگزیر بود راه خود را از میان حوادث بگشاید و ظهور یابد. نظریه‌پردازان مارکسیست هم همیشه خواسته‌اند از نظریهٔ اصالت فرهنگ جانبداری کنند. مثلا آثار دانشمند و مارکسیست انگلیسی جان برنال[3] را می‌توان ذکر کرد، که کوشیده تا این معنا را در عرصهٔ علوم طبیعی پیاده کند.

قلباً حس می‌کنیم که فرهنگ و محیط فرهنگی تفاوتهایی را باعث می‌شود. می‌دانیم فرهنگهایی هست که در آنها مثلا موسیقی سنفونیك رشد کرده، و فرهنگهایی هم وجود دارد که در آنها چنین نشده. امّا به همین آسانی نمی‌توان توضیحی برای تأثیر عوامل فرهنگی در پدیده‌های تاریخی به دست آورد. پروندهٔ شخصی هر فرد را بسیار آسانتر می‌توان خواند تا پروندهٔ قطور یك تمدن را. چرا کشور کوچك مجارستان در سالهای بعد از ۱۹۰۰ میلادی چنین خیل عظیمی از ریاضیدانهای تراز اول پرورده است؟ چرا از ۱۹۴۰ به بعد دولتها به حمایت از تحقیقات ریاضی پرداخته‌اند، در حالی که قبل از آن تاریخ چنین نمی‌کرده‌اند؟ چرا مسیحیان اولیه، حضرت مسیح و اقلیدس را ناسازگار می‌یافتند، در حالی که هزار سال بعد نیوتن توانست به جمع میان آن دو بپردازد و به هر دو به یکسان سر سپارد؟

آری، در مورد تاریخ معاصر که اطلاعات مربوط به آن تازه‌تر و دستیاب‌تر است یا در یادها زنده است و صحنه‌گردانان اصلی آن احتمالا هنوز در قید حیات‌اند، می‌توان به سادگی و به نحو قانع‌کننده‌ای دلایل و عوامل فرهنگی این یا آن واقعهٔ خاص را بررسی و ثبت کرد. مثلا عوامل غیرریاضی و غیرتکنولوژیکی را که در دورانی بس کوتاه به پیدایش و پیشرفت ماشینهای محاسبهٔ الکترونیکی انجامید، در نظر بگیرید. می‌شود- و به زحمتش می‌ارزد- که این عوامل را یك به یك پیدا کرد و برشمرد. امّا در مورد پیدایش نظریهٔ جبرهای تابعی چه بگوییم؟ مسلماً در این مورد کار دشوارتر است. هرچه

1. Paul Lévy 2. The Many 3. J.D. Bernal

عقب‌تر برویم، بیشتر مجبور می‌شویم دست به دامان استدلال و اطلاعات آماری شویم. یك رشتهٔ علمی جدید همین اواخر به وجود آمده به نام تاریخ‌سنجی[1]، یعنی بررسی ریاضی مدارك و اسناد تاریخی. امّا آنچه که تاکنون از آن عاید شده چیزی بیش از جعلیات پر آب و تاب، ساده‌سازیهای مفرط و سوءِتعبیرها نبوده است.

طُرفه آنکه این دیدگاه اصالت فرهنگ را نگرش افلاطونی به ریاضیات تقویت می‌کند. بله اگر $e^{\pi i}=-1$ واقعیتی مربوط به جهان خارج باشد، حقیقتی ازلی که همیشه و همه جا وجود داشته است، پس دیگر اینکه اویلر این فرمول را کشف کرده امری می‌شود تصادفی. او تنها واسطه‌ای بوده که از طریق آن، این حقیقت ازلی خود را آشکار کرده است. اگر او چنین نمی‌کرد، دیر یا زود یك نفر دیگر از خیل ریاضیدانها این نقش را باید به عهده می‌گرفت. آری، باید این حقیقت کشف می‌شد.

امّا هیچ کدام از این دو دیدگاه افراطی که برشمردیم، به‌تنهایی کافی نیست. می‌پرسیم چرا ریاضیات حداقل هشت قرن، از قرن سوم تا قرن یازدهم میلادی، [در غرب] دچار فترت شد؟ مسلماً نطفه‌های نبوغ ریاضی، در مردمان حوزهٔ مدیترانه، در این مدت هم مثل زمان ارشمیدس وجود داشته است. یا مثلا فلسفهٔ تاریخ تولستوی را در نظر بگیرید. هرچند تولستوی، ناپلئون را به عدم ضرورت تاریخی محکوم می‌کند، امّا راستش را بخواهید، آنچه که جنگ و صلح را خواندنی می‌کند، وصف نقش افراد است به عنوان موجوداتی یگانه و منفرد. مارکسیستها هم علی‌رغم علاقهٔ مفرطی که به تبیین فرهنگی قضایا دارند، نمی‌توانند انکار کنند که نقش شخص لنین در وقایع انقلاب روسیه موضوعی نیست که بتوان به آسانی از آن در گذشت.

چون نیك بنگریم، این تقابل میان دیدگاه اصالت فرد و دیدگاه اصالت فرهنگ تقابلی است کاذب، چیزی مثل مشاجره‌ای که قرنهاست بر سر تقدم ذهن بر ماده یا بالعکس راه افتاده است. بعضیها کوشیده‌اند تا این دو دیدگاه افراطی را به طرق گوناگون با هم آشتی دهند. یکی از این راهها این است که به مقیاس زمانی متوسل شویم. گفته‌اند که در کوتاه‌مدت (مثلا کمتر از ۵۰۰ سال) اصالت با فرد است، ولی در درازمدت (بیش از ۵۰۰ سال) نقش فرد دیگر چندان اهمیت ندارد، بلکه فرهنگ عمده می‌شود.

ویلیام جیمز روانشناس و فیلسوف آمریکایی عقیده‌ای بینابینی ابراز کرده که جاذبهٔ زیادی دارد. جیمز در مقاله‌ای بنام «مردان بزرگ و محیط زندگی آنها» می‌نویسد:

> جامعه بدون تلاطمی که فرد بدان می‌دهد، از جنبش باز می‌ماند و می‌گندد. امّا این تلاطم هم بدون یاری جامعه فرو می‌میرد.

این بیان ساده و بی‌تکلفی است از اعتقادی که درستیش باید بر بسیاری از کسان آشکار باشد، یعنی این معنا که هم فرد و هم جامعه هر دو مؤثرند. من که در یکی از مراکز صنعت نساجی بزرگ شده‌ام، گفتهٔ جیمز را این طور می‌فهمم: بافته‌های نساجی از دو رشتهٔ متقاطع تشکیل شده‌اند ـ تار و پود. هیچ یك هم بدون دیگری قوام و دوامی ندارد. بر همین قیاس می‌توان گفت که: تار جامعه را پود فرد می‌باید.

حال که نظر جیمز را در این نقل قول کوتاه خلاصه کردیم، سؤالی اساسی مطرح می‌شود:

> *آیا می‌توان بر مبنای نگرشی که در این گفته وجود دارد، تاریخ ریاضیات را از نو نوشت؟*

اگر چنین می‌شد، بد نبود. امّا تا حالا که چنین نشده و اصولا معلوم هم نیست که در آینده این کار انجام شود.

ریاضیات محض در مقابل ریاضیات کاربردی

این اصل را که ذهن از ماده، روح از بدن، و عالم روحانی از عالم جسمانی برتر است، خیلیها قبول دارند. ساختمان بدن انسان و این احساس که «خود» با «ذهن» یکی است و جایگاه ذهن در مغز است، شاید ریشهٔ اعتقاد به این اصل باشد. اندامهایی مثل دست و پا و چشم را می‌توان با یك اندام مصنوعی یا پیوندی تعویض کرد، بی‌آنکه این کار ظاهراً «خود» انسان را تغییر دهد یا ضرری به آن بزند. امّا اگر مغز کسی را بخواهند پیوند بزنند، یا اینکه محتویات مغز دیگری را در مغز او بریزند، آن وقت است که «خود» قربانی می‌شود و از بین می‌رود.

این عقیدهٔ مشهورِ برتری ذهن بر ماده در عالم ریاضیات هم بیان و بروزی دارد و آن این ادعاست که ریاضیات والاترین و در عین حال نابترین شکل اندیشه است که بدون هیچ کمکی از جهان خارج، یا با اندك استعانتی از آن، از کارکرد ذهن مجرد و محض نتیجه می‌شود و لازم هم نیست چیزی به جهان خارج پس بدهد.

در اصطلاح متداول امروزی میان ریاضیات «محض» و «کاربردی» تمایزی هست و احساسی ناگفته در میان اهل ریاضیات رایج است که گویا هرچه کاربرد و کاربردی است، یك وجههٔ ناپسند هم دارد. یکی از شدیدترین بیانیه‌های این محض‌زدگی را می‌توان در نوشته‌های گادفردی هراد هاردی یافت که می‌نویسد:

> من هیچ وقت کار «مفیدی» نکرده‌ام. هیچکدام از کشفیات من، مستقیم یا غیرمستقیم، در جهت مثبت یا منفی، تا به حال کوچکترین تغییری در آسایش جهانیان ایجاد نکرده‌اند. و احتمال هم نمی‌رود که چنین کنند. من البته به تعلیم سایر ریاضیدانها هم پرداخته‌ام، اما ریاضیدانهایی مثل خودم. و کار آنها هم، لااقل تا حدی که من به انجام آن کارها کمك کرده‌ام، به همان اندازهٔ کار خودم بدون فایده بوده است. با معیارهای عملی، ارزش زندگی ریاضی من هیچ است؛ و خارج از محدودهٔ ریاضیات هم به هر حال اندك است. تنها چیزی که می‌تواند مرا از محکومیت قطعی به ابتر بودن نجات دهد، این است که پذیرفته شود من چیزی شایستهٔ آفرینش خلق کرده‌ام. در اینکه من چیزی آفریده‌ام شکی نیست؛ بحث بر سر ارزش این آفریده است.
>
> پس معنای زندگانی من و همهٔ آن دیگرانی که به همان معنای مورد نظر من ریاضیدان بوده‌اند این است که: من چیزی به دانش بشری افزوده‌ام، و به دیگران کمك کرده‌ام تا آنها هم چیزهایی به آن بیافزایند؛ و این چیزها ارزشی دارند که تنها از لحاظ مرتبه و نه از لحاظ نوع با ابداعات ریاضیدانان بزرگ یا هنرمندان ریز و درشت دیگری که از خود آثاری ماندگار به جا گذاشته‌اند، تفاوت دارد.

لحن هاردی افراطی است، امّا طرز فکری را که اساس جوّ حاکم بر ریاضیات قرن بیستم را تشکیل می‌دهد، خوب بیان می‌کند، یعنی این

---

1. cliometrics

عقیده را که والاترین هدف ریاضیات دست یافتن به نوعی شاهکار هنری ماندگار است. حال اگر بر سبیل تصادف بخش زیبایی از ریاضیات محض در عالم خارج سودمند افتد، چه بهتر. امّا سودمندی خود به عنوان یك هدف در مقایسه با زیبایی و ژرفا، در درجهٔ دوم اهمیت قرار دارد.

در سالهای اخیر، در علائق و بینشهای ریاضیدانان آمریکایی چرخش قابل‌ملاحظه‌ای روی داده است. به این معنی که ریاضیات کاربردی در میان آنان دارد مُدمی شود. شکی نیست که این گرایش با وضعیت بازار کار دانشگاهی بی ارتباط نیست. واقعیت این است که در دانشگاههای آمریکا برای همهٔ دارندگان درجهٔ دکتری به اندازهٔ کافی شغل بلامتصدی وجود ندارد. بسیاری از آگهیهای استخدام به تخصصهای آمار، کامپیوتر، آنالیز عددی و یا به طور کلی به ریاضیات کاربردی مربوط می شود. در نتیجه پیداست که خیلی از ریاضیدانها به فکر این افتاده‌اند که ربطی بین تخصص خود و بعضی زمینه‌های کاربردی بیابند. به درستی معلوم نیست که آیا این چرخش در علائق، پدیده‌ای است گذرا یا ماندگار. اینکه در نظام ارزشی ریاضیدانها، که بر طبق آن سودمندی هدفی پست‌تر به شمار می‌رود، خللی راه یافته باشد، مطلبی است که برای درستی آن چندان شواهد و قرائنی نمی‌توان یافت.

اعتقاد به برتری ذهن بر ماده سایهٔ خود را بر سر تاریخنویسی ریاضیات هم گسترده است. بخش اعظم آنچه در این زمینه نوشته شده، به تحولات و موضوعات درونی، یعنی به ارتباط ریاضیات با خودش می‌پردازد. علی‌رغم اطلاعات زیادی که از موضوعات بیرونی در دست است، اغلب این اطلاعات هنوز دست نخورده باقی مانده، به آنها اهمیت کافی داده نشده و بد تعبیر شده‌اند. مثلا از نقش نجوم موضعی در تکامل نظریهٔ توابع متغیر مختلط غفلت شده، حال آنکه می‌دانیم انگیزهٔ پیشبرد این نظریه تا حد زیادی از علاقه به حل معادلهٔ موضعی کپلر در مورد حرکت سیارات ناشی شده است.

از بحث برتری و فروتری که بگذریم، باید اذعان کنیم که کار در زمینهٔ کاربردهای ریاضیات از بسیاری لحاظ، از کار در ریاضیات محض دشوارتر است. عرصهٔ کار وسیعتر است و واقعیتهای موجود پرشمارتر و گنگ‌ترند. در این حوزه دست یافتن به تعادل میان دقت منطقی و جنبه‌های زیبایی شناختی که روح ریاضیات محض است، شاید آرزویی محال باشد.

از هاردی‌ایسم تا مائوئیسم در ریاضیات

هاردی‌ایسم به معنی این اعتقاد است که باید به ریاضیات فارغ از کاربرد پرداخت. کتاب هاردی به نام *دفاعیهٔ یك ریاضیدان* بیانیهٔ کاملا شخصی این اعتقاد است.

درست بر خلاف این اعتقاد، نگرش مائوئیستی به ریاضیات بر آن است که تنها باید به آن جنبه‌هایی از ریاضیات پرداخت که از نظر اجتماعی سودمند باشد، چنانکه صدر مائو گفته است: «آنچه که ما در پی آنیم، وحدت سیاست و هنر است.»

در مرحله‌ای از دوران حکومت مائو در چین، دولت دستور توقف تحقیقات علمی را صادر کرد، و کمیته‌هایی برای بازبینی تشکیل دادند که کارشان تعیین اهمیت رشته‌ها و شاخه‌های آنها بود. معیاری که این کمیته‌ها در نظر داشتند این بود که هدف تحقیقات باید حل مسائل عملی باشد و آموزش علمی باید بر کاربردهای ملموس مبتنی باشد. فشارهایی به پژوهشگران وارد می‌شد تا از بعضی زمینه‌ها مثل توپولوژی دست بردارند. در تحقیقات علمی تأکید بر سیاست به اصطلاح «درهای باز» بود که بر طبق آن «تحقیقات علمی باید در خدمت سیاست پرولتاریایی، در خدمت کارگران، کشاورزان و سربازان در آید و با کار تولیدی عجین گردد.» می‌گفتند پژوهشگران باید از برج عاجهای خود ساخته بیرون آیند و در کارخانه‌ها و کمونهای دهقانی مشغول کار شوند؛ از سوی دیگر کارگران و کشاورزان هم باید به سوی مؤسسات علمی یورش برند و تحقیقات را سمت و سو دهند. وظیفهٔ تحقیقات این بود که دستاوردهای مدیران، محققین و کارگران، یعنی اقشار سالمند، میانسال و جوان جامعه را وحدت بخشد، شعاری که به اصل «هر سه تا، یکی» معروف شد.

در سال ۱۹۷۶ هیأتی از ریاضیدانان برجستهٔ آمریکایی از جمهوری خلق چین بازدید کرد. در خلال این بازدید، اعضای هیأت سخنرانی کردند، به سخنرانی همکارانشان گوش دادند و فرصت این را یافتند تا با ریاضیدانان چینی به طور غیررسمی گپ بزنند. گزارشی از این دیدار تحت عنوان «ریاضیات محض و کاربردی در جمهوری خلق چین» منتشر شده است. یکی از گفتگوهای جالبی را که در این گزارش آمده در اینجا نقل می‌کنیم. (طرف آمریکایی گفتگو پروفسور کوهن[1] از دانشگاه پرینستون بوده است.)

گفتگو دربارهٔ زیبایی ریاضیات: بر گرفته از بحثی در دانشگاه هوا-تونگ شانگهای.

کوهن: چرا نباید زیبایی ریاضیات را آشکار کرد؟ مگر این زیبایی نمی‌تواند الهام‌بخش دانشجویان باشد؟ مگر در علم جایی برای زیبایی وجود ندارد؟

جواب: اوّل تولید، اوّل تولید.

کوهن: اینکه جواب نشد.

جواب: واضح است که هندسه برای مقاصد عملی پدید آمد. بعد زمانی فرا رسید که دیگر هندسهٔ موجود جوابگوی نیازهای علم و صنعت نبود؛ در قرن هفدهم، دکارت هندسهٔ تحلیلی را کشف کرد. او هم پیستون و ماشین تراش را مطالعه می‌کرد، هم اصول هندسهٔ تحلیلی را. کارهای نیوتن هم نتیجهٔ توسعهٔ صنعتی بود. او گفته است: «اساس هر نظریه‌ای، عمل اجتماعی است.» وانگهی هیچ تعریفی از زیبایی نمی‌توان یافت که همگان بر آن اجماع داشته باشند. بعضیها این را زیبا می‌دانند، بعضیها آن را. سازندگی سوسیالیستی زیباست و به مردم ما انگیزه می‌بخشد. قبل از انقلاب فرهنگی بعضی از ما هم به زیبایی ریاضیات اعتقاد داشتیم، امّا از حل مسائل عملی عاجز بودیم. حالا سر و کار ما با لوله‌های آب و گاز، با خطوط انتقال نیرو و با کارخانه‌های نورد افتاده است. ما این کارها را برای مملکت

1. J.J. Kohn

خودمان انجام می‌دهیم و کارگران هم آنها را قدر می‌دانند. این احساس زیبایی است.

امّا البته کمال مطلوب در ریاضیات هم مثل بقیهٔ جنبه‌های زندگی، رسیدن به نوعی تعادل است. آیا هیچ جامعه‌ای توانسته به این تعادل دست یابد؟ هیچکس نمی‌داند. بعد از مرگ مائو عدم تعادل نگرش مائوئیستی به ریاضیات آشکار شد و بعضی اقدامات اصلاحی هم صورت گرفت. از ملاقات با ریاضیدانان چینی که در سال ۱۹۷۹ از آمریکا بازدید می‌کردند، آنچه دستگیرم شد این بود که امروزه در چین هم تحقیقات کم‌وبیش مثل بقیهٔ جاهای دنیا دنبال می‌شود.

مشرب افلاطونی، صورتگرایی و ساختگرایی

وقتی آدم هر روز در ریاضیات کار می‌کند، به نظرش می‌آید که طبیعی‌ترین چیز در دنیا همین ریاضیات است. امّا اگر لختی از کار باز ایستیم و در ماهیت و معنای کاری که می‌کنیم، تأمل کنیم، خواهیم دید که ریاضیات از رازآمیزترین پدیده‌هاست. چگونه می‌توان دربارهٔ چیزهایی که هرگز کسی آنها را به چشم ندیده سخن گفت و خواص و روابط آنها را حتی از اشیاءِ مادی دوروبر خودمان هم بهتر فهمید؟ چرا هندسهٔ اقلیدسی هنوز صادق است در حالی که فیزیك ارسطویی مدتهاست متروك شده است؟ در ریاضیات، آن چیست که می‌شناسیمش و چگونه آن را می‌شناسیم؟

در هر بحثی از مبانی ریاضیات، سه عقیدهٔ متعارف مطرح می‌شود: مشرب افلاطونی، صورتگرایی، و ساختگرایی.

به زعم افلاطونیان، اشیاءِ ریاضی واقعی هستند. وجودشان کاملا مستقل از شناخت ما از آنها، یك واقعیت عینی و خارجی است. مجموعه‌های نامتناهی، مجموعه‌های نامتناهی ناشمارا، خمینه‌های بینهایت بعدی، خمهای فضا پرکن- و خلاصه همهٔ جانورهای این باغ‌وحش ریاضی- اشیاءِ معینی با خواص معین هستند که بعضی از این خواص را می‌شناسیم و بسیاری را نمی‌شناسیم. البته این اشیاء، فیزیکی یا مادی نیستند. آنها خارج از فضا و زمان فیزیکی وجود دارند. لایتغیرند، به این معنی که خلق نشده و دگرگونی نپذیرفته یا نابود نمی‌شوند. هر پرسش معنی‌داری درباره یك شیءِ ریاضی، پاسخی معین دارد، چه ما قادر به یافتن آن باشیم، چه نباشیم. از نظرگاه افلاطونی، ریاضیدان دانشمندی است تجربی مثل زمین‌شناس؛ او نمی‌تواند چیزی از خود اختراع کند، زیرا هرچه که باید، وجود دارد. کاری که وی می‌تواند انجام دهد، حداکثر کشف چیزهاست.

رنه‌توم و کورت گودل هر دو از افلاطونیان پروپا قرص هستند. توم می‌نویسد:

> با در نظر گرفتن جمیع جهات، ریاضیدانها باید شجاعت اقرار به عمیقترین اعتقادات خود را داشته باشند. و لذا باید تصدیق کنند که صور ریاضی، مستقل از ذهنی که آنها را به تصور در می‌آورد وجود دارند... هرچند در هر لحظهٔ به خصوص ریاضیدانان تنها تصوری ناقص و جزئی از این عالم مُثُل[1] در ذهن توانند داشت.

گودل در این مورد می‌گوید:

> اگرچه اشیاءِ نظریهٔ مجموعه‌ها از قلمرو تجربهٔ حسی بسیار دورند، معذلك باید گفت ما واجد نوعی ادراك از آنها هستیم. این واقعیت که اصول موضوع خود را چونان احکام صادق بر ما تحمیل می‌کنند مؤیّد همین معناست. من دلیلی نمی‌بینم که ما به این نوع خاص از ادراك، یعنی به شهود ریاضی، کمتر از ادراك حسی اعتماد داشته باشیم... اینها هم می‌توانند جنبه‌ای از واقعیت عینی را نمایان سازند.

عالم مُثُل توم هندسی است. در حالیکه از آنِ گودل، همان جهان نظریهٔ مجموعه‌ای است. در طرف دیگر دعوا آبراهام رابینسون قرار دارد:

> دیگر نمی‌توانم خود را در موضع یك افلاطونی راستین تصور کنم. کسی که عالم بینهایت بالفعل را در برابر خود گسترده می‌بیند و بر این باور است که می‌تواند آنچه را نافهمیدنی است بفهمد.

بر خلاف مشرب افلاطونی، از دیدگاه صورتگرایی هیچ‌شیءِ ریاضی وجود ندارد. ریاضیات فقط و فقط شامل اصل موضوع، تعریف و قضیه- یا به عبارت دیگر، شامل مشتی فرمول است. به نظر صورتگرایان افراطی، قواعدی وجود دارند که برطبق آنها فرمولها از هم‌منتج می‌شوند، امّا خود این فرمولها دربارهٔ چیزی نیستند، بلکه منحصراً رشته‌هایی هستند از نمادها. البته صورتگرا هم می‌داند که گهگاه فرمولهای ریاضی در مسائل فیزیکی به کار بسته می‌شوند. وقتی به یك فرمول ریاضی تعبیر فیزیکی خاصی دهیم، این فرمول معنایی می‌یابد که ممکن است صادق یا کاذب باشد. امّا این صدق و کذب تنها به آن تعبیر فیزیکی خاص مربوط است و لاغیر. فرمول ریاضی محض، به عنوان فرمول، خود نه معنایی دارد و نه ارزش صدقی.

یکی از مواردی که این اختلاف میان دو دیدگاه را آشکار می‌کند، فرض پیوستار کانتور است. کانتور حدس زد که هیچ عدد اصلی نامتناهی بزرگتر از $\aleph_0$ (عدد اصلی مجموعهٔ اعداد صحیح) و کوچکتر از C (عدد اصلی مجموعهٔ اعداد حقیقی) وجود ندارد. کورت گودل و پال کوهن ثابت کردند که بر مبنای اصول موضوع نظریهٔ صوری مجموعه‌ها، فرض پیوستار را نه می‌توان اثبات کرد (کوهن،۱۹۶۴) و نه می‌توان رد نمود (گودل، ۱۹۳۷) . برای یك نفر افلاطونی این بدین معناست که دستگاه اصول موضوع ما در توصیف مجموعهٔ اعداد حقیقی، نارسا و ناقص است. این اصول آنقدر قوی نیستند که بتوانند حقیقت را تمام و کمال بیان کنند. فرض پیوستار یا صادق است و یا کاذب، امّا معرفت ما از مجموعهٔ اعداد حقیقی آنقدر کامل نیست که پاسخ را بدانیم.

برعکس، از نظر صورتگرا، تعبیر افلاطونی این قضیه یاوه‌ای بیش نیست. چرا که اصولا دستگاهی از اعداد حقیقی وجود *ندارد* مگر آنچه بنا به تصمیم ما و با اصول موضوعی که برای توصیفش وضع می‌کنیم، خلق می‌شود. البته اگر بخواهیم می‌توانیم این دستگاه اصول موضوع را تغییر دهیم. این تغییر می‌تواند به خاطر سهولت کاربرد یا سودمندی عملی و یا بر اساس هر معیار دیگری صورت گیرد، امّا هیچ ربطی به تطابق بهتر با واقعیت ندارد، چرا که اصولا واقعیتی در کار نیست.

صورتگرایان و افلاطونیان در مسألهٔ وجود و واقعیت در دو موضع مخالف قرار دارند، امّا در اینکه چه اصول استدلالی باید در عرصهٔ عمل ریاضی مجاز شمرده شود، با همدیگر نزاعی ندارند. جماعتی که با این

1. world of ideas

هر دو گروه مخالف هستند، ساختگرایانند. این جماعت تنها آنچه را که با ساخت‌وسازی متناهی بتوان به دست آورد، ریاضیاتِ معتبر می‌دانند. مجموعهٔ اعداد حقیقی، یا هیچ مجموعهٔ نامتناهی دیگری را نمی‌توان با چنین فرایندی به دست آورد. از اینرو به نظر ساختگرایان فرض کانتور بی‌معناست. تدارك هر پاسخی در این مورد اصولا جز اتلاف وقت چیز دیگری نیست.

واقعیاتی در مورد اشیاءِ موهوم

در هر سه دیدگاه سنتی دربارهٔ مبانی ریاضیات، پیشفرض ناگفته‌ای هست و آن اینکه ریاضیات باید منبع حقیقت تردیدناپذیر باشد.

امّا تجربهٔ واقعی همه این مکتبها ـ و نیز تجربه روزمرهٔ ریاضیدانان ـ نشان می‌دهد که حقیقت ریاضی هم مانند حقیقت در شاخه‌های دیگر معرفت، هم در معرض خطاست و هم محل اصلاح می‌تواند باشد.

صورتگرایی مدعایی دارد که تجربهٔ هر روزه ما حکم به ابطال آن می‌دهد، و پذیرش دیدگاه افلاطونی مستلزم فرض وجود یك سرزمین عجایب اسطوره‌ای است که در آن «ناشمارا» و «دسترس ناپذیر» به امید کشف شدن چشم به راه ریاضیدانی نشسته‌اند که خدا موهبت عظمای شهود را بدو عطا کرده باشد. امّا آیا واقعاً ناگزیریم بین این دو، یکی را برگزینیم؟ فلسفهٔ ریاضی می‌تواند وظیفهٔ دیگری غیر از جستجوی حقیقت تردیدناپذیر داشته باشد، یعنی وظیفهٔ باز نمود معرفت ریاضی چنانکه واقعاً هست: خطاپذیر، اصلاح‌پذیر، آزمایشی و در حال تکامل، یعنی همانند هرگونهٔ دیگر معرفت بشری. ما در عوض اینکه به عبث در انتظار یافتن بنیادهای مستحکمی برای ریاضیات باشیم، یا آنکه در نبود یك چنین بنیادهایی گمان کنیم به راه خطا افتاده‌ایم و مشروعیت خود را از دست داده‌ایم، کوشیده‌ایم در این معنا که ریاضیات واقعاً چیست باز نگریم و به عنوان بخشی از معرفت عام بشری، توصیفی از آن بدست دهیم. کوشیده‌ایم آنچه را که به هنگام کاربرد، آموزش، ابداع یا کشف ریاضیات انجام می‌دهیم، صادقانه باز نمائیم.

کانتور گفته است که جوهر ریاضیات، آزادی آن است، آزادی بناکردن ساختارهای ریاضی و آزادی فرض کردن. این جنبه‌های ریاضیات در ساختگرایی و صورتگرایی متجلی است. با این حال کانتور افلاطونی بود و به نوعی حقیقت ریاضیِ فراتر از ذهن بشر اعتقاد داشت. [به نظر او] این ساختارها و عوالم فرضی خود را به ما تحمیل می‌کنند. ما ناگزیریم عینیت آنها را به رسمیت بشناسیم: بعضی از اینها شناخته شده‌اند، بعضی اسرارآمیزند و شناختشان دشوار؛ بعضی هم شاید اصولا شناخت‌ناپذیر باشند. این است آن حقیقتی که افلاطونی می‌بیند.

وقتی به دو واقعیت متناقض دربارهٔ جهان برمی‌خوریم، که در عین حال هر دو هم از حقیقت انکارناپذیری برخوردارند، چه پیش می‌آید؟ ناگزیر می‌شویم نحوهٔ دیدمان از جهان را دگرگون کنیم. ناگزیر می‌شویم دیدگاهی بیابیم که تناقض آن دو را بدل به سازگاری کند.

به نحو دیگری هم می‌شود این مطلب را بیان کرد. وقتی امری بر خلاف عقل سلیم رخ می‌نماید و ما در هر حال ناگزیریم آن را بپذیریم و بدان بپردازیم، در چنین مواقعی یاد می‌گیریم که تصور خود را از عقل سلیم تعدیل کنیم.

دربارهٔ ماهیت ریاضیات، دو واقعیت آشکار است:

واقعیت اول اینکه ریاضیات آفریدهٔ بشر است. ریاضیدانها این را خوب می‌دانند، چون خودشان ریاضیات را می‌آفرینند.

اینکه حساب و هندسهٔ مقدماتی به نظر خداداده می‌آیند، به خاطر این است که همه جا حضور دارند و گویا همیشه هم حضور داشته‌اند. برعکس، تاریخ ساخت ابزارهای جبری که توپولوژیدانان اخیراً به کار بسته‌اند، و جدیدترین انواع عملگرهای شبه دیفرانسیلی، چنان تازه است که ما حتی نام و نشانی آفرینندگان آنها را می‌دانیم. به اصطلاح هنوز مرکب آنها خشك نشده. امّا شجره‌نامهٔ اینها هم به همان موضوعات قدیمی ریاضی باز می‌گردد. میان جدیدترین نظریه‌ها تا قدیمیترین آنها، شباهت خانوادگی انکارناپذیری وجود دارد. حساب و هندسه هم از همان سبویی برون تراویده که نظریهٔ هوموتوپی از آنجا آمده ـ یعنی از مغز بشر. هر روز هم میلیونها نفر امثال ما می‌کوشند تا کم کمك آنها را در مغز دیگر ابناءِ بشر فرو کنند.

واقعیت دوّم این است که چیزهایی که ما به جهان ارائه کرده‌ایم، همین اشکال هندسی و توابع حسابی و عملگرهای جبری، آری همینها برای ما هم که آفرینندگان آنها هستیم موجودات اسرارآمیزی هستند. اینها خواصی دارند که ما مجبوریم با کلی جان کندن و به ضرب و زور پشتکار و قریحه و نبوغ از آنها سر در آوریم؛ خواص دیگری دارند که به عبث می‌کوشیم آنها را کشف کنیم؛ و خواصی هم دارند که هرگز به مخیله‌مان هم خطور نکرده است. کلِ فعالیتی که در زمینهٔ حل مسائل ریاضی می‌شود، شاهد صدقی است بر این واقعیت دوّم.

صورتگرایی بر مبنای واقعیت اوّل بنا شده است. صورتگرایان به اینکه ریاضیات آفریدهٔ ذهن بشر است، متوسل می‌شوند. [به نظر آنها] اشیاءِ ریاضی موهوم‌اند.

اما مشرب افلاطونی بر مبنای واقعیت دوّم بنا شده است. این دیدگاه می‌گوید که ریاضیات قوانین خاص خود را دارد، و ما ناگزیریم از این قوانین پیروی کنیم. همین که مثلثی با اضلاع a و b و وتر h ساختیم، خواهیم داشت $a^2+b^2=h^2$، چه خوشمان بیاید، چه نیاید. من نوعی نمی‌دانم آیا عدد ۱۳۷۵۸۰۳۶۲۷ اوّل است یا نه، امّا این را می‌دانم که اوّل بودن یا نبودن آن به اختیار من نیست؛ قبل از نوشته‌شدن این عدد، اول بودن یانبودنش تعیین شده است.

این اشیاءِ موهوم خواص معینی دارند. واقعیاتی دربارهٔ این اشیاءِ موهوم وجود دارد.

از دیدگاه افلاطونی واقعیت اول را نمی‌توان پذیرفت چون اشیاءِ ریاضی، علی‌رغم علم یا جهل ما، همانی هستند که هستند. این اشیاء وجودی مستقل از ذهن بشر دارند.

از دیدگاه ساختگرایانه واقعیت دوم را نمی‌شود پذیرفت. چون ریاضیات آفریدهٔ ماست، هیچ چیزی در ریاضیات صادق نیست مگر آنکه آن چیز معلوم ذهن ما باشد، یا در حقیقت، مگر آنکه آن چیز به روشهای ساختنی اثبات شده باشد.

اما صورتگرا برای حل مسأله، صورت آن را پاك می‌کند! هیچ شیء

ریاضی وجود ندارد، پس هیچ مسأله‌ای هم در باب ماهیت اشیاءِ ریاضی نمی‌تواند وجود داشته باشد.

اگر بخواهیم از بند این سه مکتب سنتی برهیم، می‌توان راه خود را از این دو واقعیتی که از تجربهٔ ریاضی آموخته‌ایم، آغاز کرد:

واقعیت اول: ریاضیات آفریدهٔ ماست؛ موضوع آن اندیشه‌هایی است در ذهن ما.

واقعیت دوم: ریاضیات یك واقعیت عینی است، به این معنی که اشیاءِ ریاضی خواص معینی دارند که شاید بتوانیم آنها را کشف کنیم، شاید هم نتوانیم.

حال اگر به تجربهٔ خود باور داشته باشیم و این دو واقعیت را بپذیریم، سؤالی برایمان مطرح می‌شود و آن این است که چگونه می‌توان این دو را با هم آشتی داد و چگونه می‌توان آنها را به عنوان حقایقی سازگار، نه متناقض، در نظر آورد. یا به عبارت بهتر، باید دید آن پیشفرضهایی که ما را ناگزیر می‌کنند به‌این واقعیات به چشم حقایق ناهمخوان و متناقض بنگریم، چیستند. وقتی که این مهم انجام شد، آنگاه به منظور ارائهٔ دیدگاهی که برای قبول واقعیت تجربهٔ ریاضی به اندازهٔ کافی وسعت داشته باشد، می‌توانیم این پیشفرضها را به دور افکنیم.

همهٔ ما عادت کرده‌ایم در چارچوب فلسفه، جهان را تنها مرکب از دو جوهر بدانیم: ماده، یا جوهر مادی- یعنی آنچه که می‌توان در آزمایشگاه فیزیك آن را مطالعه کرد- و ذهن،یعنی ذهن من یا ذهن شما یعنی آن روح شخصی که در کالبد هر یك از ما جای گرفته است، امّا این دو مقوله به هیچ‌وجه بسنده نیست. همان طور که در فیزیك امروز نمی‌توان به چهار جوهری که یونانیان باستان بدان اعتقاد داشتند، یعنی به آب و آتش و هوا و خاك، بسنده کرد.

ریاضیات واقعیتی عینی است که نه ذهنی است و نه مادی. واقعیتی مثالی[1] (یعنی غیرمادی) است که عینی (یعنی خارج از آگاهی این یا آن فرد انسانی) است. در واقع، مورد ریاضیات قویترین و متقاعدکننده‌ترین حجتی است که می‌توان بر وجود یك چنین واقعیت مثالی آورد.

ماحصل کلام اینکه نباید چنان از سر و ته ریاضیات زد که جامهٔ کوچك یك فلسفهٔ خاص بر قامت او راست آید، بلکه جامهٔ مقولات فلسفی را باید بزرگ کرد تا پذیرای واقعیت تجربهٔ ریاضی ما گردد.

کار اخیر کارل پوپر چارچوبی فراهم می‌آورد که در آن می‌توان تجربهٔ ریاضی را بدون مثله‌کردن جای داد. پوپر برای تمیز بین سه سطح عمدهٔ واقعیت، نظریهٔ عوالم سه‌گانه را طرح کرده است. عالم اول همان جهان مادی است، جهان جرم و انرژی و خلاصه دنیای ابر و باد و مه و خورشید و فلك.

عالم آگاهی طی روند تکامل زیستی از جهان مادی (عالم اول) منتج می‌شود. اندیشه‌ها، عواطف و هشیاری واقعیتهای غیرمادی هستند. هرچند وجود اینها را نمی‌توان از وجود ارگانیسمهای زنده جدا انگاشت، با اینحال سنخ این پدیده‌ها با سنخ پدیده‌هایی که موضوع علوم فیزیولوژی و تشریح واقع می‌شوند، فرق دارد؛ اینها را باید در سطح دیگری تحلیل کرد. این پدیده‌ها به عالم دوّم تعلق دارند.

در مرحلهٔ بعدی تکامل، پدیده‌هایی چون آگاهی اجتماعی، سنتها، زبان، نظریه‌ها، نهادهای اجتماعی و خلاصه، همهٔ فرهنگ غیرمادی بشر به وجود می‌آید. وجود اینها را هم نمی‌توان از آگاهی فردی تك تك افراد جامعه جدا کرد، امّا این پدیده‌ها از سنخ آگاهیهای فردی نیستند. اینها را هم باید در سطح دیگری تحلیل کرد. عالم سوم به همین پدیده‌ها اطلاق می‌شود. و البته ریاضیات هم در همین عالم جای می‌گیرد.

ریاضیات نه مطالعهٔ یك واقعیت مثالیِ ازلی و ابدی است و نه بازی شطرنج گونه‌ای با نمادها و فرمولهای خود ساخته. بلکه بخشی است از پژوهشهای بشری که در مورد آن مانند سایر علوم می‌توان به اجماع دست یافت و نتایجش را همه‌می‌توانند تحقیق کنند. وجود موضوعی به نام ریاضیات یك واقعیت است، نه یك مسأله. این دقیقاً بدین معنی است که گونه‌هایی از استدلال و برهان دربارهٔ مفاهیم وجود دارند که الزام‌آور و منتج به نتیجه‌اند و صرف تصور آنها، مستلزم تصدیقشان است.

ریاضیات واقعاً موضوعی دارد، و گزاره‌های ریاضی معنی‌دار هستند. امّا معنی آنها را باید در فاهمهٔ مشترك افراد بشر جستجو کرد، نه در قلمرو واقعیتی غیر بشری و خارجی. از این نظر ریاضیات هم‌مثل یك ایدئولوژی، مذهب یا گونهٔ هنری است؛ سروکار او با معناهای بشری است و تنها در چارچوب فرهنگ انسانی است که می‌توان بدان اندیشید. به عبارت دیگر، ریاضیات یك پژوهش انسانی است. اصلا از مقولهٔ هنر و ادبیات است.

صفت ممیزه‌ای که ریاضیات را از دیگر انواع هنری و ادبی جدا می‌کند، کیفیت علم گونهٔ آن است. نتایج ریاضیات هم مثل نتایج علوم طبیعی، الزام آورند. این نتایج فراورده‌های خالص اندیشه نیستند و مثل مفاهیم نقد ادبی دائماً در معرض عدم توافق قرار ندارند.

ما همه در مقام ریاضیدان به این نکته آگاهیم که داریم چیزهای مثالی ابداع می‌کنیم، و بعد هم سعی می‌کنیم واقعیاتی‌درباره این چیزها کشف کنیم. هر فلسفه‌ای که این آگاهی را نتواند هضم کند، فلسفهٔ حقیری است. ما مجبور نیستیم وقتی از طرف فیلسوفان مورد حمله واقع می‌شویم، به سنگر صورتگرایی پناه ببریم. هیچ اجباری هم نداریم که بپذیریم اعتقادمان به عینیت ریاضیات، افلاطونی است، به این معنا که مستلزم فرض وجود واقعیتی مثالی مستقل از اندیشهٔ بشری است. کارهای پوپر و لاکاتوش نشان می‌دهد که فلسفهٔ معاصر می‌تواند حقیقت تجربهٔ ریاضی را قبول کند، یعنی ریاضیات را همان‌گونه که هست بپذیرد: خطاپذیر، اصلاح‌پذیر، و با معنی.

---

1. ideal

اخبار و گزارشها

بیست و دومین کنفرانس ریاضی کشور

دیرپاترین گردهمایی علمی ایران، کنفرانس ریاضی کشور، برای بیست و دومین سال پیاپی، این بار از ۲۲ تا ۲۵ اسفند ۱۳۶۹ در دانشگاه فردوسی مشهد برگزار شد. دانشگاه فردوسی پیشتر نیز در سال ۱۳۵۹ میزبان ریاضیدانان ایرانی و خارجی بوده است.

در مراسم افتتاحیه، پس از سخنرانی رئیس دانشگاه فردوسی و دیگر مسؤولان و قرائت پیام وزیر فرهنگ و آموزش عالی، آقای دکتر بهبودیان سخنرانی کوتاهی در تجلیل از خدمات علمی و آموزشی استادان پیشکسوت، آقایان سعادت، فاطمی، و وصال ایراد کرد. جوایز چهاردهمین مسابقهٔ دانشجویی را نیز دو نفر از این استادان، آقایان سعادت و وصال، به دانشجویان برنده: شاهین امیری شریفی (دانشگاه صنعتی شریف)، حسام حمیدی تهرانی (دانشگاه صنعتی شریف)، سعید ذاکری (دانشگاه تهران)، حمید موسوی (دانشگاه تربیت معلم)، و شهاب شهابی (دانشگاه تهران) اهدا کردند.

در روز نخست کنفرانس، طی مراسمی جایزهٔ عبدالسلام به آقای دکتر محمدرضا درفشه اعطا شد (گزارش جداگانه‌ای در این زمینه آمده است). در صبح و بعدازظهر روز ۲۴ اسفند، مسابقهٔ دانشجویی بین دانشجویان ریاضی دانشگاهها برگزار شد.

در این گردهمایی، ۸۱۸ نفر استاد و دانشجو و محقق و دبیر ریاضی از ایران و ۷۴ نفر از کشورهای دیگر شرکت کردند که ۷ نفر آنان، از استادان ایرانی خارج از کشور بودند. کلا ۱۳ سخنرانی عمومی یکساعته، ۱۶ سخنرانی چهل دقیقه‌ای و ۱۰۲ سخنرانی بیست دقیقه‌ای برگزار شد.

از برنامه‌های بسیار خوبی که در کنفرانس بیست و دوم اجرا شد، برگزاری میزگردی با عنوان «بررسی محتوای ریاضیات دبیرستانی و مشکلات ریاضی مدارس» و نیز انجام ۱۴ سخنرانی برای دبیران ریاضی بود که با اقبال فراوان مواجه شد. بعضی از سخنرانان این جلسه‌ها از استادان برجستهٔ دانشگاهها بودند.

موفقیت دانش آموزان ایرانی در المپیاد ریاضی

تیم دانش آموزان ایرانی در المپیاد جهانی ریاضی که امسال در سوئد برگزار شد، با کسب دو مدال طلا، یك مدال نقره، و دو مدال برنز، مقام هشتم را در بین پنجاه‌وشش کشور شرکت‌کننده به‌دست آورد. مقامهای اول تا سوم را شوروی، چین، و رومانی کسب کردند. در اخبار شمارهٔ مرداد سال ۶۸ *نشرریاضی* نوشتیم که تیم ایران در سه باری که [تا آن زمان] در المپیاد ریاضی شرکت کرده سیر صعودی پیموده و از مقام بیست‌وششم در اولین بار به مقام چهاردهم در سومین بار ترقی کرده است. این سیر صعودی خوشبختانه از آن به بعد هم ادامه یافته است.

اعضای تیم ایران در مسابقهٔ امسال عبارت بودند از حسین طلوع شریفی، مهدی عسکری (برنز)، آیت‌الله کریم‌زاده (نقره)، پیمان کسایی (طلا)، شهرام محسنی‌پور (برنز)، بهرنگ نوحی (طلا).

کنفرانس بین‌المللی ریاضیات کاربردی

کنفرانس بین‌المللی ریاضیات کاربردی از ۲۸ الی ۳۰ خرداد ۱۳۷۰ در دانشگاه علم و صنعت ایران برگزار شد.

در این کنفرانس که با سخنان دکتر محمدعلی نجفی وزیر آموزش و پرورش افتتاح شد، چندین سخنرانی عمومی و تخصصی و دو میزگرد دربارهٔ برنامهٔ آموزشی ریاضیات کاربردی در ایران و کشورهای خارجی برگزار گردید.

نمایشگاه بین‌المللی کتاب

چهارمین نمایشگاه بین‌المللی کتاب تهران از هفدهم تا بیست و هفتم اردیبهشت ۷۰ برپا بود. در این نمایشگاه، اضافه بر ناشران داخلی، ۱۶۰ ناشر از کشورهای عرب و مسلمان، و ۱۷۰ ناشر از اروپا و آمریکا شرکت داشتند. ناشران خارجی جمعاً ۴۲۰۰۰ عنوان کتاب عرضه کردند که ۴۹۸

عنوان آنها، یعنی ۲ر۱٪، به ریاضیات اختصاص داشت؛ از این تعداد ۷۷ عنوان به عربی و بقیه به انگلیسی بود.

در مورد نمایشگاه کتاب تهران دو نکتهٔ دیگر شایان ذکر است:

نخست دیر رسیدن کتابهای سفارشی است. برخی کتابهای نمایشگاه سوم پس از ده ماه به دست متقاضیان رسیده‌اند و برخی نیز هنوز نرسیده‌اند. گفته می‌شود که کتابها دو ماه پس از پایان نمایشگاه به کشور ارسال می‌شوند؛ لازم است که مسؤولان تدبیری برای تسریع انجام امور گمرکی بیندیشند. مورد دوم، تعداد کتابهای به نمایش درآمده است. علاقه‌مندان در این نمایشگاه بسیاری از کتابهای خارجی جدید را نمی‌بینند و تقریباً هیچ یك از ناشران اروپایی و آمریکایی با تمام کتابهای تازهٔ خود در نمایشگاه شرکت نمی‌کنند. دو دلیل برای این امر ذکر می‌شود: نمایندهٔ یکی از ناشران، علت را کوچك بودن نمایشگاه تهران نسبت به نمایشگاههای بزرگ خارجی اعلام کرده است. یکی دیگر از صاحبنظران علت را اکراه ناشران از شرکت در نمایشگاه کشوری می‌داند که عضو میثاق جهانی حق مؤلف (کپی رایت) نیست.

به هرحال برگزاری نمایشگاه بین‌المللی کتاب کار بسیار ارزنده‌ای است و تجربه نشان داده است که این نمایشگاه هرسال با کیفیتی بهتر برگزار می‌شود.

درگذشت دُرام

ژرژ دُرام[1] ریاضیدان مشهور سویسی در ۱۹ اکتبر ۱۹۹۰ (۲۷ مهر ۱۳۶۹) در سن ۸۹ سالگی در لوزان سویس درگذشت. دُرام صاحب چند اثر جاودانه است که معروفترین آنها قضیه‌ای است که به نام خود او شهرت یافته است. صورت اولیهٔ این قضیه حکم می‌کند که یك یکریختی میان فضای خطی رده‌های کوهومولوژی القا شده از p-فرمهای همواروی یك خمینه و p امین گروه هومولوژی (با ضرایب حقیقی) برقرار است. صحت این مطلب را احتمالا پوانکاره احساس کرده و مسلماً الی کارتان آن را حدس زده بود ولی دُرام بود که برای اولین بار به اثبات آن دست یافت. امروزه اثباتهای دیگری نیز برای آن پیدا شده و تعمیمهایی که به کمك نظریهٔ بافه‌ها[2] از این قضیه به دست آمده در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات راه یافته‌اند. علاوه بر این، دُرام مفهوم تابعهای تعمیم یافته (توزیع) را روی خمینه‌ها مطرح کرد و آثار مهمی در هندسهٔ ریمانی و توپولوژی از خود به جا گذاشت.

جایزه‌های ویبلن ۱۹۹۰

جایزهٔ ویبلن که در رشتهٔ هندسه اعطا می‌شود، در سال ۱۹۹۰ در گردهمایی سالانهٔ انجمن ریاضی آمریکا به اندرو کَسن[3] استاد دانشگاه کالیفرنیا در برکلی و کلیفورد تاوبز[4] استاد دانشگاه هاروارد اعطا شد. این جایزه که در سال ۱۹۶۱ به افتخار ازوالد ویبلن[5] (۱۸۸۰-۱۹۶۰) هندسه‌دان و توپولوژیدان معروف آمریکایی برقرار شد، نخست در فواصل دوساله و از سال ۱۹۶۶ در فواصل پنجساله اهدا شده‌اند. برندگان قبلی که همه از هندسه‌دانان و توپولوژیدانهای بنام معاصر هستند عبارت‌اند از: د. پاپا کریاکوپولوس[6] (۱۹۶۴)، رائول بات (۱۹۶۴)، استیون اسمیل (۱۹۶۶)، مُرتن براون و بری میزور[7] (۱۹۶۶)، رابیون کربی[8] (۱۹۷۱)، دنیس

1. de Rham
2. sheaves
3. Andrew Casson
4. Clifford Taubes
5. Oswald Veblen
6. Pappakyriakopolous
7. Barry Mazur
8. Robion Kirby

سالیوان (۱۹۷۱)، ویلیام ترستن[1] (۱۹۷۶)، جیمز سایمونز (۱۹۷۶)، میخائیل گروموف (۱۹۸۱)، شینگ-تونگ یاو (۱۹۸۱)، و مایکل فریدمن (۱۹۸۶).

اندرو کَسن در سال ۱۹۴۳ (۱۳۲۱) در لندن متولد شد و فارغ‌التحصیل دانشگاه کیمبریج است. آثار وی عمدتاً در زمینهٔ توپولوژی خمینه‌های سه‌بعدی و چهاربعدی است. در دههٔ ۶۰ پیشرفتهای عظیمی در زمینهٔ شناخت و رده‌بندی خمینه‌های ساده- همبند از بعدهای پنج و بالاتر به دست آمد ولی بررسی خمینه‌های سه‌بعدی و چهاربعدی در بیست سال اخیر است که به مرحلهٔ شکوفایی رسیده و هنوز هم مجهولات فراوانی در این زمینه وجود دارد. در سال ۱۹۷۴، کَسن اشیائی را برای خمینه‌های چهاربعدی ابداع کرد که آنها را «دستواره‌های انعطاف‌پذیر[2]» نامید و ایدهٔ او را بعداً مایکل فریدمن پیگیری نمود و در رده‌بندی توپولوژیك خمینه‌های چهاربعدی ساده- همبند به‌کار برد. مهمترین کار کَسن در سالهای اخیر، کشف ناوردای عدد صحیحی است که به کره‌های هومولوژی سه‌بعدی نسبت می‌دهد و به ناوردای کسن مشهور شده است. این عدد صحیح به پیمانهٔ ۲ تبدیل به ناوردای رُخلین[3] می‌شود که در توپولوژی ابعاد بالا کاربردهای بسیار دارد.

کلیفورد تاوبز در سال ۱۹۵۴ (۱۳۳۲) در شهر نیویورك متولد شد و تحصیلات دانشگاهی خود را در دانشگاه هاروارد گذراند. اعطای جایزه به تاوبز به مناسبت کارهای اساسی وی در نظریهٔ ینگ- میلز[4] و به‌کار گرفتن نظریهٔ پیمانه‌ای فیزیك در تحقیقات ریاضی است. پیشرفتهای درخشانی که به دست سایمن داناldسن و دیگران در دههٔ اخیر در این زمینه حاصل شده است تا حد زیادی مرهون تحقیقات تاوبز در اوائل دههٔ ۱۹۸۰ است. متقابلا، تاوبز نیز با استفاده از قضایای داناldسن و فریدمن ثابت کرد که فضای حقیقی چهاربعدی تعداد ناشمارایی ساختار مشتق‌پذیری را می‌پذیرد.

درگذشت مارشال هال

مارشال هال ریاضیدان برجستهٔ آمریکایی در ۴ ژوئیهٔ ۱۹۹۰ (۱۳ تیر ۱۳۶۹) درگذشت. وی در ۱۷ سپتامبر ۱۹۱۰ در ایالت میزوری آمریکا متولد شد و درجهٔ دکتری خود را در ۱۹۳۶ از دانشگاه ییل گرفت و در طول زندگی علمی خود در دانشگاههای مختلفی از جمله مؤسسهٔ تکنولوژی کالیفرنیا تدریس و پژوهش کرد و استاد ممتاز این دانشگاه بود. مارشال هال در سال ۱۹۷۵ به عضویت آکادمی علوم آمریکا در آمد.

حوزهٔ علائق ریاضی هال بسیار گسترده بود ولی به خصوص به نظریهٔ گروهها و کاربرد آن در جبر، هندسه، و ترکیبیات علاقه داشت و در کتاب خود دربارهٔ نظریهٔ گروهها بحث مبسوطی در این زمینه عرضه کرد. وی با الهام از کارهای فیلیپ هال (که با او نسبتی ندارد) مبنایی برای حلقه‌های لی آزاد و تعویضگرهای مراتب بالاتر در گروههای آزاد ساخت که زمینه‌ای برای پژوهشهای بعدی شد. پروژهٔ ۱۹۶۹ وی تحت عنوان جستجوی گروههای سادهٔ از مراتب کوچکتر از یك میلیون، گروه سادهٔ جدیدی از مرتبهٔ ۶۰۴۸۰۰ به دست داد که به نام او و دیوید ویلز نامیده شد. در کتاب وی دربارهٔ نظریهٔ ترکیبیات (۱۹۶۷ و ۱۹۸۶)، دستاوردهای پژوهشی او در ترکیبیات و به‌خصوص نتایج عمیقی که در مورد طرحهای ترکیبیاتی به دست آورده، خلاصه‌وار آمده است.

مارشال هال سمینارهای بین‌المللی متعددی را سازماندهی کرد و سالها

1. William Thurston
2. flexible handelbodies
3. Rokhlin invariant
4. Yang-Mills

ویراستار مجلات گوناگون بود. وی در زمان مرگ، ویراستار ارشد جورنال *آو کامبینیتوریال تبوری* و ویراستار جورنال *آو الجبرا* بود.

تأسیس انجمن ریاضی اروپا

در مهرماه سال گذشته، انجمن ریاضی اروپا با عضویت تقریباً سی انجمن ریاضی از تمامی کشورهای قارهٔ اروپا از اقیانوس اطلس تا کوههای اورال تأسیس شد.

در اساسنامهٔ این انجمن گفته می‌شود: «هدف انجمن پیشبرد و اعتلای همهٔ جنبه‌های ریاضی در کشورهای اروپاست و به ویژه آن جنبه‌هایی مورد تأکید هستند که در سطح بین‌المللی بهتر می‌توان به آنها پرداخت. بنابراین، انجمن عمدتاً به فعالیتهایی می‌پردازد که از مرزهای ملی فراتر می‌روند و به هیچ‌وجه قصد مداخله در فعالیتهای ملیِ انجمنهایِ عضو را ندارد. به‌خصوص، انجمن در سطح قارهٔ اروپا به پیشبردِ پژوهشهای ریاضی (محض و کاربردی)، کمك و راهنمایی در مورد مسائل آموزش ریاضی، تقویت ارتباط بین ریاضیدانان کشورهای مختلف، ایجاد احساس همبستگی در میان ریاضیدانان اروپا و... دست خواهد زد.»

عضویت در انجمن ریاضی اروپا برای افراد و نیز سازمانهایی که با پیشبردِ پژوهشهای ریاضی (محض و کاربردی) در اروپا سر و کار دارند، آزاد است. انجمن در اوایل تابستان ۱۹۹۲ کنگرهٔ مهمی در پاریس برگزار خواهد کرد.

مرکز مطالعات نظریِ پراگ

دانشگاه چارلز در پراگ، پایتخت چکسلواکی، مرکزی برای مطالعات نظری تأسیس می‌کند که هدف آن پژوهشهای نظریِ عالی در ریاضیات، علوم طبیعی، و علوم انسانی و زدن پلی بین این رشته‌ها و فراهم کردن امکان تحقیقاتِ میان‌رشته‌ای است. این مؤسسه همچنین در اعتلای علوم چکسلواکی در صحنهٔ بین‌المللی خواهد کوشید.

رئیس مؤسسه یك دانشمند کامپیوتر به نام ایوان هاول (برادر رئیس‌جمهوری چکسلواکی) است. فعالیت این مرکز با چند پروژه که دانشمندانی از چکسلواکی و کشورهای دیگر در آن شرکت دارند آغاز می‌شود و برای طرح‌ریزی برنامه‌های درازمدت آن یك کمیتهٔ مشورتیِ بین‌المللی تشکیل شده است.

پژوهشگران ارشد و دانشجویان پس از دکتری در دوره‌های سه ماهه تا یکساله در مرکز کار خواهند کرد و همچنین بازدیدهای کوتاه مدت و سمینارهایی برای دانشمندان ترتیب داده می‌شود که در آنها تأکید بر فعالیتهای میان‌رشته‌ای خواهد بود.

اعطای جایزهٔ عبدالسلام به دکتر محمدرضا درفشه

پروفسور عبدالسلام رئیس مرکز بین‌المللی فیزیك نظری و آکادمی علوم جهان سوم تعدادی جایزهٔ هزار دلاری از محل جایزهٔ نوبل فیزیك خود برای تشویق پژوهشگران جوان چند کشور اسلامی اختصاص داده است. این جایزهٔ سالانه در هر یك از این کشورها به تناوب در رشته‌های فیزیك، ریاضیات، شیمی و زیست‌شناسی اعطا می‌شود.

برندهٔ جایزه علی‌القاعده از میان پژوهشگران زیر چهل سال انتخاب می‌شود و مبنای گزینش، مجموعهٔ آثار پژوهشگر یا یك اثر برجستهٔ اوست. اعطای جایزهٔ عبدالسلام در ایران از سال ۱۳۶۸ آغاز شد که در آن سال آقایان دکتر حسام‌الدین ارفعی و دکتر رضا منصوری مشترکاً برندهٔ جایزه فیزیك شدند. در سال جاری، جایزه در رشتهٔ ریاضیات اعطا شد و آقای دکتر محمدرضا درفشه به عنوان برندهٔ جایزهٔ عبدالسلام اعلام گردید.

زندگینامهٔ علمی محمدرضا درفشه

محمدرضا درفشه، متولد سال ۱۳۲۹، در سال ۱۳۴۸ با رتبهٔ اول به دورهٔ کارشناسی ریاضی دانشگاه تهران راه یافت و در سال ۱۳۵۲ با رتبهٔ اول فارغ‌التحصیل شد. او پس از اخذ درجهٔ دکتری ریاضیات از دانشگاه بیرمنگام انگلستان در اواخر سال ۱۳۵۶ به ایران بازگشت، در دانشگاه شهید چمران اهواز مشغول به کار شد، و تا آخر ۱۳۶۷، به استثنای یك دورهٔ یکساله در دانشگاه نفت آبادان، در همان دانشگاه به تدریس و تحقیق اشتغال داشت. از آغاز سال ۱۳۶۸ تا کنون درفشه در گروه ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران خدمت می‌کند و در مرکز فیزیك تئوری و ریاضیات سازمان انرژی اتمی ایران نیز عضویت دارد. برخی دیگر از فعالیتهای او عبارت اند از عضویت در شورای اجرائی انجمن ریاضی ایران و عضویت در هیأت ویراستاران مجله‌های نشر ریاضی، *فرهنگ و اندیشه ریاضی*، و *بولتن انجمن ریاضی ایران*.

محور اصلی پژوهشهای علمی درفشه بررسی نمایش گروههای متناهی است. مطالعهٔ نمایشهای جایگشتی اولیهٔ یك گروه متناهی با مطالعهٔ زیرگروههای ماکسیمال آن هم‌ارز است. درفشه زیر گروههای ماکسیمال ۲ـ موضعی اولین زیر گروه سادهٔ Conway (معروف به Co1) را پیدا کرد و سپس تعدادی دیگر از زیرگروههای ماکسیمال Co1 را نیز شناسایی نمود. پس از آن درفشه به یافتن زیرگروههای ماکسیمال برخی از گروههای خطی با یاری گرفتن از ساختار غنی هندسی این گروهها مبادرت کرد. در این زمینه بررسی گروههای خطی روی هیأتهای با مشخصهٔ صفر و مشخصهٔ مثبت کاملا متفاوت است و در هر مورد درفشه به نتایج قابل توجهی دست یافته است. علاوه بر این درفشه تحقیقاتی در مورد جبرهای شرکت‌پذیر و ارتباط آن با طرحهای بلوکی دارد. پژوهش جاری وی در زمینه‌های زیر است: جدول سرشتهای گروههای خطی، نمایش پیمانه‌ای گروهها، و طرحهای بلوکی.

دیدگاه

از این پس، در بخش «دیدگاه»، نظریاتی از خوانندگان و همکاران نشر ریاضی اعم از استاد و دانشجو دربارهٔ مسائل مختلف جامعهٔ ریاضی و علمی ایران درج می‌شود. مطالب ارسالی باید برای طیف نسبتاً وسیعی از خوانندگان مجله و افراد جامعهٔ ریاضی و دانشگاهی جالب توجه باشد. هر نوشته‌ای به نام نویسندهٔ آن چاپ می‌شود و ممکن است مضمون آن بر دیدگاه نشر ریاضی منطبق نباشد.

به‌دنبال چاپ مطلبی با عنوان «ریاضیات سال اول» در شمارهٔ سوم سال سوم نشر ریاضی، نظریاتی به دفتر مجله رسید که از میان آنها نامهٔ یکی از کارشناسان پر سابقهٔ تدریس ریاضیات عمومی، در اینجا می‌آید.

ریاضیات عمومی، مشکلی دیرپای

چندی است که بررسی درس «ریاضیات عمومی» مورد توجه خاص محافل ریاضی ایران قرار گرفته است؛ دربارهٔ آن از مدرسین ریاضی نظرخواهی می‌شود، سمینار و میزگرد برگزار می‌شود، و محتوا و روش تدریس آن مورد بحث قرار می‌گیرد.

من در اینجا با توجه به مطالبی که در سمینار خرداد ماه ۶۹ (در دانشگاه صنعتی) و میزگرد اسفند ماه ۶۹ (در کنفرانس ریاضی) مطرح شده و نیز براساس تجربیات شخصی، نظراتی دربارهٔ این درس عنوان می‌کنم.

ریاضیات عمومی چیست؟

برای ریاضیات عمومی، تعاریف زیر را می‌توان آورد:

الف) ریاضیات عمومی حاوی آن بخش از ریاضیات است که برای مطالعهٔ بقیهٔ دروس (غیرریاضی) دانشگاهی مورد نیاز است.

این تعریف برای رشته‌های علوم اجتماعی و بسیاری از رشته‌های علوم تجربی مناسب است.

ب) ریاضیات عمومی پلی است بین دروس دبیرستانی و دانشگاهی.

این تعریف برای رشته‌هایی چون فیزیک، ریاضی و مهندسی، به خصوص قبل از سال ۱۳۵۷ مناسب است. (از این سال، دیپلمه‌های نظام جدید که با نظریهٔ مجموعه‌ها، جبر خطی، و تعریف اپسیلن ـ دلتایی حد آشنا بودند به دانشگاهها راه یافتند.)

ج) ریاضیات عمومی حاوی آن بخش از ریاضیات است که مورد نیاز فیزیک عمومی و محاسبات فنی در حد متعارف است. یعنی ریاضیات عمومی همان حساب دیفرانسیل وانتگرال است.

درگذشته و حال، محتوای درس ریاضیات عمومی چنین بوده و تفاوت در شیوهٔ بیان مطالب است. تعریف (ب) فقط در زمانی مناسب بوده که برنامهٔ دانشگاه به شیوهٔ نوین و برنامهٔ دبیرستان به شیوهٔ قدیمی بوده است.

بدیهی است که این مطالب را می‌توان در سطوح مختلف مطرح کرد. از اینجا به تعریف «آنالیز مقدماتی» می‌رسیم.

آنالیز مقدماتی حاوی اثبات مطالبی است که در حساب دیفرانسیل وانتگرال مطرح می‌شود.

ریاضیات عمومی درگذشته

تا حدود سال ۱۹۵۰ در سراسر جهان ریاضیات عمومی به شیوه‌ای قدیمی مطرح می‌شد. مطالب به طور بسیار شهودی مورد بحث قرار می‌گرفت. نگرش نسبت به مفاهیم این درس بسان نگرش نسبت به آنالیز در نیمهٔ دوم قرن هفدهم بود. از سال ۱۹۵۰ روش ارائهٔ مطالب در ریاضیات عمومی تغییر کرد.

در ایران هم تا سال ۱۳۴۰ ریاضیات عمومی به صورت قدیمی مطرح می‌شد. تنها مطلبی که به طور استدلالی مورد بحث قرار می‌گرفت، «دترمینان» بود که آن هم در حاشیهٔ درس جای داشت.

درگذشته نیز ریاضیات عمومی برای دانشجویان و مدرسین مشکلاتی در بر داشت. حجم مطالب بسیار زیاد بود. مسائل دشواری مطرح می‌شد (مثلا مجموعهٔ مسائل پاپولیه). درک بسیاری از مطالب پیش از آن که دروس فیزیک و مکانیک مربوط به آن تدریس شود دشوار می‌نمود، به خصوص مطالبی از آنالیز برداری. دانشجویان ناچار بودند براساس مشهودات ضعیف خود به حل مسائل بپردازند. گویی اینان وارث نابسامانی قرون هیجده و نوزدهٔ

میلادی بودند. دانشجویان علاقه‌مند به ریاضی، چه در رشته‌های فنی و چه در رشته‌های علوم، برای ادامهٔ مطالعات خود به مانعی بلند برمی‌خوردند که جز با توسل به روشهای جدید ریاضی قادر به عبور از آن نبودند.

کتاب ریاضیات عمومی پیسکونوف که هنوز هم در بازار ایران عرضه می‌شود به سبك قدیمی نگاشته شده است. از این کتاب تا سال ۱۳۵۴ بیش از پنجاه هزار نسخه در ایران فروخته شده است. کتاب پرفروش دیگری در این زمینه، کتاب گرانویل است.

آغاز تغییرات

من نمی‌توانم در مورد چگونگی تغییر درس ریاضیات عمومی نظری مستدل و همه جانبه ارائه دهم. چون تحولات برنامه‌های درسی ایران تحت تأثیر برنامه‌های درسی ایالات متحده آمریکا صورت گرفته است، فقط در مورد تغییر درس ریاضیات عمومی در آن کشور چند کلمه‌ای صحبت می‌کنم.

بی‌شك یکی از پیشگامان تغییر ریاضیات عمومی در غرب ریچارد کورانت است. اولین کتاب معروف او در مورد ریاضیات عمومی در آلمان به سال ۱۹۲۷ منتشر شد. در این کتاب برای اولین بار انتگرال قبل از دیفرانسیل آمده است. اثر معروف او به نام *آشنایی با ریاضیات عمومی و آنالیز* در سال ۱۹۶۵ در آمریکا منتشر شد.

مشکل اصلی کتاب کورانت این است که برای اثبات قضایای اساسی حساب دیفرانسیل وانتگرال مجبور شده است به مباحث متعددی از ریاضیات بپردازد که این خود سرمنشأ دشواریهای ریاضیات عمومی در عصر حاضر است. این کتاب باعث تحولاتی در آموزش ریاضیات عمومی در آمریکا شد. کتابهای معروف چون آپوستل، سیلورمن و حتی اسپیوك چیزی نیستند جز شرح وبسط و ویرایش و پیرایش کتاب کورانت.

برای ذکر تحولات آموزش ریاضیات عمومی در ایران لازم است نظری به برنامه‌ریزی آموزشی در ایران بیفکنیم.

نگاهی به برنامه‌ریزی آموزشی در ایران

اولین برنامهٔ آموزشی مدون برای دبیرستانهای ایران، که تقلیدی بود از برنامهٔ آموزشی فرانسه، در سال ۱۳۰۵ به مورد اجرا گذاشته شد. چنین اقدامی به خوبی حس جاه طلبی و در عین حال سهل اندیشی برنامه‌ریزان را به نمایش می‌گذارد، چه نه سطح فرهنگ جامعه مقتضی چنین برنامه‌ای بود و نه امکانات وزارت معارف. این اقدام باعث شد که دانش آموزان به «از برکردن» مطالب بپردازند. ولی در هر صورت این برنامه از لحاظ ریاضی پرمحتوا بوده است و دانش آموزان با مشکلات کمتری، نسبت به سایر دروس، آن را فرا می‌گرفته‌اند.

تا سال ۱۳۳۴ تجدید نظرهایی در برنامه‌های درسی در جهت کم کردن محتوا صورت گرفت ولی هیچ اقدامی برای نو کردن محتوای دروس ریاضی انجام نشد. درسال ۱۳۳۴ برنامهٔ دروس دبیرستانی، مخصوصاً ریاضیات بسیار سبك شد. حال دروس ریاضی، سبك، کم محتوا و قدیمی بود. تا سال ۱۳۵۶ فارغ‌التحصیلان دبیرستانها با این برنامه آموزش دیده بودند. تغییرات برنامهٔ آموزشی دانشگاهها با این دیپلمه‌ها آغاز و انجام یافت.

تغییرات درس ریاضیات عمومی درایران

ظاهراً اولین قدم در جهت تغییر روش و محتوای ریاضیات عمومی توسط یکی از تحصیلکردگان در فرانسه، دکتر وازگن آوانسیان، با نوشتن کتاب *مقدمه‌ای بر آنالیز نوین* برداشته شد. ایشان در کار خود موفقیتی کسب نکردند، زیرا سطح سواد دیپلمه‌های ایرانی خیلی پایینتر از فرانسه بود.

در دانشگاه تهران که حساب دیفرانسیل وانتگرال به شیوهٔ گذشته تدریس می‌شد، دروسی چون ماتریس، جبر خطی و جبر مدرن را به برنامه‌افزودند. در دانشگاه شیراز، که سعی داشتند به تقلید از دانشگاههای متوسط آمریکایی برنامه‌ای اجرا کنند شروع به تدریس کتاب ریاضیات عمومی آپوستل کردند.

دانشگاههایی هم بودند که نمی‌خواستند از روی یك کتاب خارجی تدریس کنند. مدرسین آنها سعی داشتند که خود، برنامهٔ مناسبی تهیه کنند ولی در این راه با مشکلات جدی روبرو شدند. آنچه در دانشگاه صنعتی شریف طی سالهای ۵۳ـ۱۳۴۷ گذشت تجربهٔ سودمندی بود:

سلیقهٔ مدرسین، بسیار متنوع بود. بودند کسانی که می‌خواستند مطالب را از هر لحاظ در سطحی بسیار پایین تدریس کنند و مدرسی هم بود که می‌خواست ریاضیات عمومی را در حد معمول فرانسه تدریس کند که چنین چیزی در ایران مقدور نبود. حالا که برنامه‌های درسی به تقلید از دانشگاههای متوسط آمریکایی تنظیم می‌شد به ریاضیات عمومی کمتر از گذشته توجه می‌شد و این خود مشکل آفرین بود. اغلب مدرسین در پی جزوه یا کتابی بودند که از هر لحاظ «خوب» باشد، حاوی هر مطلبی که داشان بخواهد و بشود آن را جزء «ریاضیات عمومی» دانست، باشد که البته چنین کتاب یا جزوه‌ای نمی‌تواند وجود داشته باشد. من خود به تجربه و ضمن تهیهٔ جزوات درسی سال اول (که از پاییز ۱۳۴۸ تا تیر ماه ۱۳۵۳ مورد استفادهٔ مدرسین دانشگاه صنعتی قرار گرفت) به این حقیقت رسیدم. هالموس نیز در کتاب *چگونه مطالب ریاضی را بنویسیم* می‌گوید چون در ریاضیات عمومی از مطالب مختلف ریاضی صحبت می‌شود، در این زمینه نمی‌توان کتاب خوبی نوشت. اکثر مدرسین این روحیه را داشتند. عده‌ای نیز تصور می‌کردند که هر چه حجم مطالب تدریس شده بیشتر باشد بهتر است. اکنون نیز چنین روحیه‌ای وجود دارد. کار ترجمه و معادل سازی نیز کاری بحث انگیز بود.

با توجه به اینکه برنامهٔ ریاضی مدارس ایران بی‌شباهت به برنامهٔ ریاضی مدارس معمولی آمریکا نبود و برنامه‌های درسی دانشگاهها نیز تحت تأثیر آمریکا قرار گرفته بود، روش دانشگاه شیراز عمومیت یافت.

ریاضیات عمومی پس از انقلاب فرهنگی

با بروز انقلاب اسلامی، فکر یکسان‌سازی برنامه‌های درسی دانشگاهها قوت یافت و به مورد اجرا در آمد. برنامه‌ریزان تصورمی‌کردند که هر چه حجم مطالب درسی، زیادتر و تعداد آنها بیشتر باشد بهتر است. از این رو صحبت از ۱۷۰ واحد درسی نیز شد. کتابهای مرجع را به عنوان کتاب درسی انتخاب کردند. فکر ترجمهٔ کامل و بی‌کم و کاست کتابهای خارجی که از اوایل دههٔ ۱۳۵۰ مطرح شده و تا حدی با انتشار کتابهایی از قبیل آنالیز آپوستل و ریاضیات عمومی توماس اجرا شده بود در حد وسیعتری به مرحلهٔ اجرا درآمد.

یکسان سازی برنامهٔ دروس دانشگاهها و حجم زیاد مطالب درسی به خصوص برای دانشگاههای توسعه نیافته و مناطق محروم که تظاهر به اجرای کامل برنامهٔ وزارتی می‌کنند باعث بروز مشکلات جدی شد، هر چند عملا هیچ نوع نظارتی بر اجرای برنامه‌ها و سؤالات امتحانی وجود ندارد در حالی که چنین برنامه‌ای ایجاب می‌کند که نظارت دقیقی بر اجرای آن اعمال شود.

با افزایش واحدهای درسی، از اهمیت ریاضیات عمومی کاسته شد. هر چند که دیپلمه‌های جدید (فارغ التحصیلان ۱۳۵۷ و بعد از آن) به دانشگاهها راه یافتند، کتابهای درسی ریاضیات عمومی همان کتابهای توماس و سیلورمن بود. حتی گامی به‌عقب نهادند و کتاب لایتهلد را جانشین این کتابها کردند.

بحث ما فقط برسررشتهٔ ریاضی نیست. این کتابها برای دوره‌های مهندسی نیز مناسب نیستند و با برنامهٔ کنونی دبیرستانها همخوانی ندارند. متأسفانه اکثریت استادان رشته‌های مهندسی تصوری بسیار ابتدایی از ریاضی دارند و آن را فقط ابزاری برای محاسبه می‌دانند. اینان سعی دارند که

بر حجم دروس مهندسی افزوده و از حجم دروس ریاضی بکاهند. متأسفانه عده‌ای از استادان ریاضی بدون اینکه از جوهر مهندسی اطلاعی داشته باشند به تقویت این کجروی می‌پردازند.

وضعیت کنونی

اکنون خیلی از دانشجویان دوره‌های ریاضی، فیزیك و مهندسی و بالاخص رشتهٔ ریاضی، دانشجویان ضعیفی هستند. در چندین سال متوالی، تنها دو درصد از کسانی که در رشتهٔ ریاضی دانشکده علوم‌باختران پذیرفته شدند، از ریاضیات، پنجاه درصد نمره را کسب کرده بودند. استادان ریاضی دانشگاههای توسعه یافته نیز از ضعف شاگردان خود شکایت دارند و تنگناهای آموزشی بسیاری هم وجود دارد.

در سمینار ریاضیات سال اول به خوبی نشان داده شد که استادان برداشتهای بسیار متفاوتی از ریاضیات عمومی دارند. انتقادها و پیشنهاداتی که در سمینار و میزگرد عنوان شد، عموماً غیرقابل اجراست. آنان توجه ندارند که برنامه‌ها و تنگناهای موجود، ریشهٔ عمیق اجتماعی دارد. مثلا می‌خواهند ساعات موظف تدریس استادان کاهش یابد ولی این امر فقط موجب بالا رفتن اضافه‌کاری استادان می‌شود نه کیفیت تدریس! یا می‌خواهند برای رشته‌های ریاضی «جاذبه‌های شغلی» ایجاد شود که این نیز نه تنها کار ساده‌ای نیست بلکه بسیار دشوار می‌نماید. هر زمانی بازار کاری گرم است.

یك پیشنهاد جالب آن است که فقط مدرسین مجرب را به تدریس ریاضیات عمومی بگمارند! با در نظر گرفتن این دو واقعیت که دوره‌های فوق‌لیسانس و دکتری درحال گسترش است و کمبود مدرس نیز بسیار محسوس است، در می‌یابیم که تا چه اندازه اجرای این پیشنهاد نامقدور است.

در سمینار، اختلاف سطح دانشگاهها را در نظر نگرفته‌اند. در ایران دانشکده‌هایی وجود دارد که با تعداد قلیلی مدرس، آن هم کم تجربه، به کار خود ادامه می‌دهند و هر یك چندین درس را ارائه می‌دهند. حال آن که در دانشگاههای توسعه یافتهٔ ایران، هر استاد دو وحداکثر سه درس تدریس می‌کند.

پیشنهادها

هر چند می‌دانم که پذیرش این پیشنهادها نیز مانند پیشنهادهای سایرین دشوار است ولی برای روشن شدن مشکلات آنها را عرضه می‌کنم:

الف) برای جلوگیری از طرح مسائل معترضه در سمینارهای آینده، بهتر است سمیناری در مورد بررسی موقعیت دانش ریاضی در ایران، خواستهای مدرسین ریاضی و مشکلات زندگی آنان برگزار شود.

ب) اگر بنا باشد برنامهٔ آموزشی دانشگاهها به صورت کنونی در آینده نیز اجرا شود لازم است که وزارت علوم در اجرای آن نظارت داشته باشد. در حدود سال ۱۳۶۲ در این مورد مطالبی عنوان شد ولی هیچ اقدامی صورت نگرفت.

ج) اگر بنا باشد برنامهٔ آموزشی دانشگاهها مورد تجدید نظر قرار گیرد، بهتر است براساس حداقل تهیه شود نه حداکثر.

د) اگر بنا باشد ریاضیات سال اول درآینده نیز به صورت کنونی تدریس شود، بهتر است برنامهٔ ریاضی دبیرستانها نیز مطابق برنامه سال ۱۳۳۴ اجرا شود تا دانش آموزان، حداقل محاسبات سادهٔ ریاضی را فراگیرند.

هـ) اکنون که راه ترجمهٔ کتابهای ریاضی با چند دهه کار مترجمین و نویسندگان هموار شده است، بهتر است به انتشار کتابهای متعددی اقدام شود. با وجود این چنین کتابهایی، مدرسین می‌توانند تحرك بیشتری داشته باشند و دانشجویان می‌توانند بیشتر به کتابخانه متکی باشند تا به کتاب شخصی.

و) پس از انقلاب به مذمت «جزوه» پرداختند. باید دانست که کتاب نیز می‌تواند مورد سوءِ استفاده قرار گیرد. بهتر است که مدرسین با تکیه به کتابخانه، جزوهٔ مختصری که حاوی فهرست مطالب و شمارهٔ مسائل باشد تهیه کنند. معلم می‌تواند به تناسب کلاس در محتوای این جزوه‌ها اصلاحاتی انجام دهد. باید دانست که کتابهای ریاضیات عمومی که اکنون مورد استفاده است نیز در اصل جزوه‌هایی بوده‌اند که بعداً به این صورت تدوین شده‌اند.

«کتاب جدید» یکی از کلمات پرزرق و برقی است که زیاد در محافل ریاضی از آن حرف می‌زنند. واقعاً کتاب جدیدی به این آسانی متولد نمی‌شود. از زمان اویلر تاکنون سه یا حداکثر ده کتاب ریاضیات عمومی بیشتر نوشته نشده است. سه کتابی که من می‌شناسم عبارت از کتاب خود اویلر و کتاب کورانت و حساب دیفرانسیل هانری کارتان. آنچه ما به آن کتابهای جدید می‌گوییم، جزوه‌هایی بیش نیستند که برای کلاسهای خاصی نوشته شده‌اند، از این قبیل است کتاب لایتهلد و سیلورمن.

ز) کلاسهای «پیشدانشگاهی» ریاضی برای دانشجویان رشتهٔ ریاضی چاره‌ساز هیچ دردی نیست. در یك یا دو نیمسال با سه ساعت در هفته، آن هم با تدریس مطالبی بی‌محتوا، دانشجو نمی‌تواند توان ادامهٔ تحصیل را کسب کند.

ح) هر معلمی حق دارد از شاگردانش بپرسد که آیا مطالب لازم برای فراگرفتن درس مورد نظر را می‌دانند یا خیر.

اگر چنین است، پس لازم است که قبل از مسابقهٔ ورودی، امتحان ورودی برگزار شود و افرادی که معلومات لازم را ندارند حق شرکت در کنکور را نداشته باشند.

نتیجه

در لابه‌لای تمامی مطالب این نوشته به مشکلات کنونی ریاضیات عمومی در ایران اشاره شده است. حال فقط به پیشنهاد (ح) می‌پردازیم. چیزی که در این پیشنهاد خواسته می‌شود، منطقی به نظر می‌رسد ولی اگر بخواهید در این مورد اقدامی کنید با مخالفت برنامه‌ریزان اقتصادی-اجتماعی مواجه خواهید شد. آنان به شما خواهند گفت که با این روش، اکثر دانشگاهها فاقد دانشجوی ریاضی (دبیری و غیره) خواهند شد. در نتیجه برنامهٔ توسعه آموزش و برنامه‌های دیگر با شکست مواجه خواهد شد و نیز بسیاری از مدرسین، بیکار می‌مانند.

پس مشکلات بسیارند و تنها «زمان» است که ممکن است بتواند آنها را حل کند.

هوشنگ شکرانیان
عضو هیأت علمی
دانشگاه رازی باختران

قطع سهمیه ارزی دانشجویان دورهٔ کارشناسی برای خرید کتاب و مجله

سرانجام، پس از گذشت پنج ماه از قطع سهمیهٔ ارزی برای خرید کتاب خارجی و پرداخت حق عضویت در مجامع علمی بین‌المللی، و باطل شدن «پروفورما»های بسیار و اتلاف وقت فراوان، معاون پژوهشی وزارت فرهنگ و آموزش عالی ضمن نامه‌ای مسؤولان دانشگاههای تهران را از سیاست جدید تخصیص ارز آگاه کرد. سهمیهٔ تعیین شده از این قرار است: «استادان ۱۰۰۰ دلار، دانشجویان دورهٔ دکتری ۵۰۰ دلار، دانشجویان دورهٔ کارشناسی ارشد ۳۰۰ دلار». منتظر ادامهٔ جمله نباشید. چیزی هم از قلم نیفتاده است: به دانشجویان دورهٔ کارشناسی ارزی تعلق نمی‌گیرد.

در این کهن بوم و بَر ــ که دوستش داریم ــ رسم ناخوشایندی حاکم است

و آن اینکه مسؤولان، تحقیق را ــ خاصه در علوم نظری که منافع اقتصادی آنی ندارد ــ امری تجملی می‌انگارند که تنها در اوقات فراغت از کار و تلاش، آن هم به‌طور تفننی، می‌توان به آن پرداخت و چنین است که هرگاه دولت تصمیم به حذف هزینه‌های غیرضرور می‌گیرد نخستین چیز، بودجهٔ چنین اموری است که کم می‌شود. از علوم نظری که بگذریم در کشوری که تنها ۲ر۰ درصد از تولید ناخالص ملی خود را خرج پژوهش می‌کند ــ برای مقایسه، کافی است بدانیم این مقدار در آمریکا ۸ر۲ درصد و در پاکستان ۳ر۰ درصد است ــ طبیعی است که در نبودِ کارگاه و آزمایشگاه و مانند اینها، تنها وسیلهٔ دانش‌اندوزی مثلا مهندسان آینده که بیشترشان با درجهٔ کارشناسی وارد جامعه می‌شوند، کتاب است؛ با حذف سهمیهٔ ارزی خرید کتاب، البته در کوتاه‌مدت در هزینه‌ها صرفه‌جویی می‌شود اما همینکه بخواهیم طرحی عمرانی را اجرا کنیم باید چندین برابر همین پول را ــ به دلار ــ به مهندسان آلمانی و سوئدی و فرانسوی بدهیم تا برایمان نیروگاه و سد و مترو بسازند. خارجیها هم باید نان بخورند! (البته از سهمیهٔ ارزی سوءاستفاده هم می‌شود. مثلا در خبر است که دانشجویان دانشگاه آزاد اسلامی هنگام ثبت‌نام باید سهمیهٔ ارزی خود را به دانشگاهشان واگذار کنند. جلوگیری از چنین مواردی، آسان است.)

می‌گویند چندصد سال پیش، کسی که حج بر او واجب بود به علتی نتوانست به‌موقع از شهرش ــ ری ــ به قصد مکه حرکت کند، تا اینکه دیگر هفته‌ای بیش به گاهِ حج نمانده بود. کولبارزادره بر دوش گرفت و پیاده به‌راه افتاد. کسی به او گفت که اگر می‌خواهی هفت روزه به مکه برسی باید اسبی، استری، شتری، چیزی فراهم کنی که این‌گونه که تو می‌روی، به حج سال بعد هم نخواهی رسید. مرد مسافر گفت (احتمالا با چنین عبارتی) که «ای مرد! من آن مایه شتاب دارم که درنگ نتوانم کردن تا چارپایی برگیرم، توکل باید»! حالا حکایت ماست: دولت آن‌قدر در بازسازی شتاب دارد که فرصت خرج کردن برای پژوهش را ندارد.

کاوهٔ لاجوردی
دانشجوی دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

«پدیدهٔ هشترودی»
تکرارشدنی نیست

دوست و همکار عزیزمان دکتر رضا منصوری که یکی از سیاستگذاران علمی کشور و عهده‌دار مسؤولیتهای گوناگونی در ارتباط با علم و تحقیق و آموزش عالی است، به لحاظ وظیفه‌ای که در پاسداری از اصالت علم دارد، اخیراً به جهاد عظیمی علیه «مارگیری» و مارگیران برخاسته است[1]. جدیدترین صحنهٔ این پیکار مقدس، سرمقاله‌ای است که ایشان در شمارهٔ زمستان ۶۹ مجلهٔ فیزیك به چاپ رسانده و ظاهراً انگیزهٔ این کار، ناخشنودی، نگرانی، و حتی احساس خطر از عنوان قلابی «مرد سال فیزیك» است که چندی پیش بعضی از رسانه‌های همگانی نثار آقای دکتر حسابی کردند. این موضوع تاکنون با سکوت جامعهٔ فیزیك روبه‌رو بود و اکنون هم که دکتر منصوری وظیفهٔ اجتماعی خود دیده‌اند که این سکوت محترمانه را بشکنند، به جای اینکه نیش قلم خود را متوجه مجرمان قضیه کنند، مرحوم دکتر هشترودی را که پانزده سال است از جهان رخت بربسته، و به طور غیرمستقیم کل جامعهٔ ریاضی ایران را، به گونه‌ای ناجوانمردانه زیر رگبار تهمت و ناسزا گرفته‌اند. ایشان که به حزم و احتیاط شهرت دارند، شاید انتظار نداشتند که کسی خارج از جامعهٔ فیزیك سرمقاله‌شان را بخواند و فقط می‌خواستند با خوارشمردن دیگران نوعی احساس غرور و دلگرمی در داخل جامعهٔ فیزیك ایجاد کنند. به این کلمات توجه کنید: «جامعهٔ فیزیك ایران خرسند بود از اینکه چنین شخصیتی نداشته است، و در حوزهٔ کار خود «هشترودیگری» را باب نکرده است...» یا «از حسابی ما هشترودی دیگری نسازید.» آقای دکتر منصوری، آسوده بخوابید! جامعهٔ فیزیك ایران نه در گذشته کسی با جمیع استعدادها و جاذبه‌های مرحوم دکتر هشترودی داشته است، نه در حال حاضر به نظر می‌رسد که چنین ستاره‌ای داشته باشد، و نه شرایط علمی و اجتماعی حاضر پذیرای تکرار «پدیدهٔ هشترودی» است.

هشترودی که بود و پدیدهٔ هشترودی چیست؟ بیش از نیم قرن پیش، زمانی که علم جدید هنوز به صورت یك شایعه در محافل متجدد ایران مطرح بود، محسن هشترودی رسالهٔ دکتری پرمایه‌ای را زیر نظر یکی از بزرگترین ریاضیدانان جهان گذراند. پس از بازگشت به ایران دیری نپایید که دوران خلاقیت هشترودی به عنوان یك محقق ریاضی به سر رسید و همان طور که آقای دکتر منصوری می‌فرمایند، دکتر هشترودی نه محقق دیگری تربیت کرد و نه یك مکتب ریاضی بنیان گذاشت. آری، کاوهٔ آهنگر هم بساط سلطنت را در ایران برنچید، و شیخ بهایی هم قانون جاذبه را کشف نکرد. آنان که در شرایط امروز از عدم امکانات برای پژوهشگران و نارساییهای محیط علمی و اجتماعی می‌نالند، بد نیست لحظه‌ای ایرانِ نیم قرن پیش را با انزوایش از لحاظ ارتباطات علمی، فقر مادی، و بدوی بودن محیط علمیش در ذهن خود مجسم

---

۱. ر. ك. مجلهٔ فیزیك، سال ۸، شمارهٔ ۱ و ۲، بهار و تابستان ۶۹

کنند. آیا بی‌انصافی نیست که کسی را از بابت تربیت نکردن محقق یا ایجاد نکردن مکتب علمی به باد انتقاد بگیریم در حالی که نمی‌توانیم حتی یك نمونهٔ خلاف ارائه کنیم؟ آیا اصلا زمینهٔ فرهنگی ایرانِ نیم قرن پیش مناسب بنانهادن تحقیقات در علوم پایهٔ نظری بود؟ شاید آقای دکتر منصوری در این مورد با ما اختلاف نظری نداشته باشند و هدف اصلی ایشان کارهایی باشد که دکتر هشترودی کرده نه آنچه که وی انجام نداده است. از نظر دکتر منصوری، کل فعالیت مرحوم هشترودی در ایران، در «ولنگاری علمی» که مضر به حالِ پیشبرد علم است خلاصه می‌شود. درست است که مرحوم هشترودی، به خصوص در اواخر عمر، حرفهای بسیاری می‌زد که پایه و اساس علمی نداشت و مایهٔ برداشتهای غلط بود و خوراك جراید بازاری، ولی خیلی بی‌انصافی است که در بررسی تأثیر این مرد فقط این انحرافها و جنبه‌های منفی را در نظر بگیریم یا تصور کنیم که حرفهای مبالغه‌آمیز هشترودی مانع قابل توجهی بر سر راه پیشرفت علم در این مملکت بوده است. علی‌الاصول، حرف بی‌اساس عمر درازی ندارد مگر اینکه پاسخگوی نیازهای مبرم روانی باشد یا به زور سرنیزه به مردم تزریق شود. جنبهٔ اول در مورد حاضر مطرح نبود و در مورد جنبهٔ دوم نیز، مرحوم هشترودی نه لیسنکوی فرصت‌طلب بود که با حمایت رژیم حاکم افکاری را در قالب یك ایدئولوژی به مردم تحمیل کند و نه متولی برنامه‌ریزیِ علمی که در نشستهایی پشت درهای بسته، آیندهٔ علمی کشور را ترسیم کند. میدان برای پاسخ‌دادن به حرفهای هشترودی همیشه باز بود و اگر کسی قدم پیش نگذاشت به خاطر فقر علمی مستولی بر جامعهٔ ما بود نه قدرت قهری یا نفوذ شیطانی هشترودی. در اینجا به یاد مصاحبه‌ای می‌افتم که حدود ده سال پیش با دکتر وحدتی از پیشکسوتان دانشکدهٔ علوم داشتیم. ایشان می‌گفت که در سالهای پس از جنگ جهانی دوم، همهٔ دانشکده‌های دانشگاه تهران، به استثنای دانشکدهٔ علوم، استادانی داشتند که در صحنهٔ قدرت و سیاست و ارتباطات مملکت افراد با نفوذ و صاحب شهرتی بودند. تنها استاد دانشکدهٔ علوم که ممکن بود به عنوان یك چهرهٔ ملی مطرح شود مرحوم دکتر هشترودی بود. فقط او بود که هم سوابق علمی موجهی داشت و هم از چنان جاذبه‌های جنبی و نفوذ کلامی برخوردار بود که می‌توانست بدون خودفروشی یا آلوده‌شدن به سیاست روز برای دانشکدهٔ علوم کسب وجهه کند. از این‌رو نه تنها همقطارانش مقاومتی در مقابل رشد پدیدهٔ هشترودی نکردند بلکه در هر فرصتی خود به این ستاره‌سازی دامن زدند. توجه کنید که پدیدهٔ هشترودی مختص به جامعهٔ ریاضی نبود بلکه به همهٔ جامعهٔ علمی ما تعلق داشت و یك پدیدهٔ اجتماعی بود. اینکه امروز آقای دکتر منصوری بیایند و جامعه‌های ریاضی و فیزیك را، یکی را به خاطر داشتن هشترودی و دیگری را به لحاظ نداشتن چنین شخصیتی در مقابل هم قرار دهند، نه تنها تحریف و جعل تاریخ است، بلکه دور از شأن یك سیاستگذار علمی مملکت است (که باید همهٔ علوم و نه فقط فیزیك را در نظر داشته باشد).

در اینجا لازم است جنبه‌های مثبت پدیدهٔ هشترودی نیز ناگفته نماند. صدای هشترودی رساترین صدایِ تبلیغِ علم و ریاضیات در زمانی بود که علم جدید در این مملکت هیچ پایگاهی نداشت. جزئیات آنچه هشترودی می‌گفت مهم نبود، مهم هیجانی بود که در دل جوانان علم‌طلب مملکت به پا می‌کرد. شاید بتوان گفت که هر فردِ نسلِ ما که به دنبال ریاضیات و فیزیك (بله، فیزیك هم) رفت، به طور مستقیم یا غیر مستقیم زیر نفوذ هشترودی بود. منبع اصلی تغذیهٔ علمی نسل ما ترجمه‌های کتابهایِ علمیِ همگانی و چند نشریهٔ ادواری به همین سبك بود که اگر با مترجمان، سردبیران و ناشران آنها گفتگو کنید، تقریباً همهٔ خود را مدیون نفوذ هشترودی و حمایت معنوی او می‌دانند. هشترودی همه جا بود و خوب یابد، آیینه‌ای بود از تقلای یك جامعهٔ بدوی علمی برای نزدیك شدن به دروازه‌های پر تلألو و ناآشنای علم نو.

پدیدهٔ هشترودی امروز دیگر در جامعهٔ علمی ما تکرار شدنی نیست. اکنون به آن درجه از سواد و فرهنگ علمی رسیده‌ایم که اگر هشترودی جوانی در صحنه ظاهر شود به جای آنکه به «هشترودیگری» بپردازد، محقق تربیت خواهد کرد و مکتب علمی پایه خواهد گذاشت. ترس و نگرانی دکتر منصوری باید متوجه ابتذالهای نوعِ جدید و مارگیران نوعِ «های‌تك» باشد. خطری که امروز ما را تهدید می‌کند خطر کیش شخصیت نیست بلکه خطر قدرت‌یابیِ انبوه متخصص نمایان بی‌نام و نشانی است که منافعی مادی و صنفی در عالِم جلوه‌دادن خود به صاحبان کیسه و دیوانسالاران دارند. موضوعی که آقای دکتر منصوری مطرح کرده‌اند در این شرایط یك موضوع انحرافی است و گاهی فکر می‌کنم پوست خربزه‌ای بیش نباشد که بعضی جلوی پای ایشان گذاشته‌اند.

آنچه ما را متأثر کرده، تراوش این گونه کلمات درشت از قلم یکی از صدیقترین و پرکارترین خدمتگزاران علم ایران در زمان حاضر است. کسانی که منصوری را از نزدیك می‌شناسند از او متانت، انصاف، بیطرفی و اجتناب از شعارهای ساده‌اندیشانهٔ به اصطلاح جهان سومی را انتظار دارند. به هر حال این بحث را باید یك گفتگوی درونیِ جامعهٔ علمی ایران برای درك بهترِ تاریخ اخیر گسترش علم در مملکت تلقی کرد. نااهلانی که بخواهند از این صحبتها بهره‌برداری کنند، از تلاش خود طرفی نخواهند بست.

سیاوش شهشهانی
دانشگاه صنعتی شریف

آیا هنوز هم باید درگذشتگان را از گورشان بیرون کشید و شلاق زد؟

چند سال پیش، در یکی از برنامه‌های تلویزیونی، مردی آراسته در «لباس تقوا» ظاهر شد؛ ضمن صحبت از کتابهای موجود در کتابخانه‌ای، باد در غبغب انداخت و مرحوم سعید نفیسی را از دل خاك بیرون کشید و بی آنکه لزومی داشته باشد، شاید برای کسب وجهه، یا به هر علّتی، او را مورد نکوهش قرار داد. همهٔ بینندگان آن برنامه، عمل ناپسند آن مرد را سرزنش کردند و امید داشتند که این عمل نبش قبر دوباره تکرار نشود، امّا متأسفانه، شد منتها به نحوی دیگر...

در *مجلّهٔ فیزیك، سال ۸*، شمارهٔ ۴، زمستان ۱۳۶۹، سرمقاله‌ای زیر عنوان «خطر قهرمان‌سازی و رسانه‌های همگانی»، ظاهراً خطاب به رسانه‌ها، درج شده است که در آن ضمن تجلیل بجا و منصفانه از استاد دکتر حسابی و هشدار صحیح به رسانه‌های عمومی، عملا شادروان دکتر محسن هشترودی با نسبتهایی غیرمنصفانه نظیر «ولنگار»، «شعبده‌باز»، «خیالباف»، «ساده‌انگار»، «مخرّب جامعه» و... آماج حمله قرار گرفته است. نویسندهٔ محترم مقاله، که خود یکی از استادان سرشناس کنونی کشور است و مسلّماً نیازی به کسب وجهه از این راه ندارد، با داوری غیرمنصفانهٔ خود مردی را به زیر شلّاق کشیده است که هنوز هم شاگردان و دوستانش او را جزو مفاخر این سرزمین می‌شمارند. نگارنده معتقد است که این داوریِ حساب نشده و شتابزده، نتیجهٔ عدم شناخت نویسندهٔ محترم از شخصیّت شادروان دکتر هشترودی است. اگر ایشان نیز مانند من و امثال من، در نخستین سالهای تدریس آن شادروان، در کلاسهایش که نمونهٔ بهترین و فرح‌انگیزترین کلاسهای درس ریاضی بود، حضور یافته بود هرگز با این واژه‌های نامناسب از ایشان پذیرائی نمی‌کرد. این داوری ایشان هر علّتی داشته باشد از نظر دوستداران و شاگردان آن شادروان غیر قابل قبول است. نگارندهٔ این مقاله که در سالهای ۱۳۲۱ و ۱۳۲۲ افتخار درك محضر آن شادروان را داشته‌ام می‌توانم به جرأت بگویم که در آن سالها هیچ یك از دروس به اندازهٔ درس ایشان برای ما دانشجویان گیرا و قابل استفاده نبود. دروس نامبرده معمولا هفته‌ای دو جلسه از ۲ی بعد ازظهر شروع می‌شد و هیچ وقت زودتر از ساعت ۶ به پایان نمی‌رسید. استاد فقید علاوه بر درس خود مسائلی را با دانشجویانش در میان می‌گذاشت که دنبالهٔ تحقیقات شخصی خودش بود تا دانشجویانش نحوهٔ برخورد با مسائل را فرا گیرند و بیاموزند که چگونه باید با آنها دست و پنجه نرم کنند. باید تصدیق کرد که ۴ ساعت متوالی و منظّم درس گفتن به گونه‌ای که دانشجویان خسته نشوند، کاری است دشوار و تنها از کسی ساخته است که به اصطلاح خیلی «پرمایه» باشد! در آن سالها دکتر هشترودی به‌ندرت کلاسهای درسش را تعطیل می‌کرد و یا هنگام درس از متن درس خارج می‌شد. تنها گاهی در تحلیل آن مسائل، پیامدهای اجتماعی آنها را نیز به اجمال مورد بحث قرار می‌داد. آنچه مسلّم است این است که به گفتهٔ دانشجویان پس از ما، این سیره تا سال ۱۳۲۸ به همین نحو ادامه داشته است. در این سال استاد فقید ریاست دانشکدهٔ علوم را قبول کرد و به قول خودش مرتکب بزرگترین اشتباه شد، به این نیّت که شاید بتواند اصلاحاتی در زمینهٔ آموزش ریاضی پدید آورد، و در نتیجه پیشنهادِ کار در مرکز تحقیقات فرانسه، کلّژدوفرانس، را رد کرد ـ که اگر پذیرفته بود مطمئناً شخصیتی پیدا می‌کرد جهانی، خیلی برتر از دانشمند یك بعدی مورد نظر نویسندهٔ محترم مقاله. ثمرهٔ کارهای استاد فقید، تا آنجا که من اطّلاع دارم کتابهای زیر بوده است

1. Les espaces d'éléments à connexion projective normale
2. Sur les espaces de Riemann de Weyl et de Schouten
3. Les Connexions normales affines et Weyliennes
4. Les invariants differentielles

کتابی هم در نظریّهٔ اعداد ظاهراً در سال ۱۳۴۹ منتشر کرده است که از انتشارات مرکز آمار ایران است. مطالب این کتابها در زمان خود، به ویژه در ایران، کاملا بکر و از اهمیّت بسزائی برخوردار بود. ضمناً، به‌قرار اطّلاع، سلسله مقالاتی در جبر از ایشان به جا مانده است که شاگردان ایشان مشغول تنظیم و چاپ آنها هستند.

داوری دربارهٔ شادروان هشترودی یا هر فرد دیگری نظیر او باید با معیار زمان خود او، مثلا برای شادروان ۵۰ سال قبل، صورت گیرد. در این برهه از زمان شمارِ افرادی که در ایران با علوم جدید آشنایی داشته‌اند از تعداد انگشتان دست تجاوز نمی‌کرد. در آن زمان ـ که نویسندهٔ محترم شاید هنوز متولد نشده بوده است ـ حتی نام نسبیّت اینشتین، نظریّهٔ کوانتوم و نظریّه‌های دیگر به گوش کمتر کسی خورده بود. این شادروان هشترودی بود که با بیان گرم و سادهٔ خویش چشم و گوش نسل جوان را به این مباحث تازه باز کرد! و از این رو به عنوان شخصی که چون ریاضی می‌داند همه‌چیز می‌داند شناخته شد و فرا گرفتن ریاضیات یکی از فرایض درك و فهم تلقی گردید. بنابراین اگر در آن زمان، استاد فقید، اینشتین کشورش شناخته شده باشد جای شگفتی نیست! شادروان به سیاق دانشمندان قدیمیِ ما طالب علم در همهٔ زمینه‌ها بود: در ادبیّات، در هنر، در فلسفه، در عرفان و در نجوم. برای فضل‌فروشی کتاب نمی‌خواند، خواندن را دوست داشت. طلبه‌ای یك بعدی نبود که یك علمِ تنها سیرابش کند، به هر چشمه‌ای که می‌رسید جرعه‌ای می‌نوشید ـ تکرار کنم نه برای خودنمایی بلکه برای سیراب کردن روح تشنه‌اش. جامع‌الاطراف بودن، مرد سخنرانی بودن،...، و مرد مصاحبه بودنِ استاد فقید، در نظرِ نویسندهٔ محترم صفاتی مذموم قلمداد شده است. «... دانشمند در جهان کنونی کسی نیست که همه چیز را بداند، بلکه فقط چیزهایی را بسیار خوب می‌داند، و در آنچه ادّعا می‌کند جدّی است و در آنچه نمی‌داند بی‌ادّعا. در چنین

دورانی مردم نقیض این نظر را در گفتار و کردار مردی که در نظر ایشان عالمترین دانشمند زمان بود، می‌دیدند...».

در زمان ما و از دیدشما خصایص یك دانشمند این است، ولی آیا در آن زمان نیز همین بوده است؟ حتّی در این دوران آیا نظر دیگران هم همین است؟ شادروان ریاضی را بسیار خوب می‌فهمید، و در آنچه می‌گفت مطلقاً ادّعائی نداشت. به نقایص خود بیش از هر کس دیگر واقف بود. هرگز مردم نقیض خصایل دانشمندی را در گفتار و کردار او نمی‌دیدند. از همکاران خود بپرسید تا ببینید چه اندازه در این طرز تفکّر خود در اقلیّت هستید!

از سوی دیگر، فکر می‌کنم که جامع‌الاطراف بودن زمانی مذموم است که یا شخص خود را اعلم در هر چیز بداند و یا ادّعائی دربارهٔ چیزی داشته باشد. در حالی که شادروان با آن همه وسعت اطّلاعات- که نتیجهٔ تسلّط کامل او به زبانهای عربی و فرانسه، و مطالعهٔ فراوان و پیوسته، و حافظهٔ بسیار قوی او بود- بی‌اندازه فروتن و کم مدّعا بود، حتّی نسبت به دانشجویانش. نویسندهٔ محترم حتّی یك نفر را نمی‌تواند پیدا کند که بگوید از او شنیده است که ایشان از خود تعریف می‌کرده است! شادروان هشترودی نه می‌خواست «نهادی بنا نهد» یا «مکتبی تأسیس کند» و نه ادّعای این کار را داشت. برخلاف عقیدهٔ نویسندهٔ محترم از پایه‌گذاری «هشترودیگری» یا هر مکتب دیگر به نام خودش گریزان بود.

به نظر من، داوری دربارهٔ افراد، علاوه بر توجّه به زمان و مکان، با رعایت همهٔ خصوصیّات آنان باید صورت گیرد. یکی از خصوصیّات برجستهٔ دکتر هشترودی علاقهٔ شدید او به نسل جوان بود. واقعاً جوانها را دوست داشت. ما به عنوان دانشجو این علاقه را حس می‌کردیم و به همین دلیل هم او را بی‌اندازه دوست داشتیم و احترام می‌گزاردیم. چنانکه هنوز هم دوستش داریم و احترامش می‌گزاریم، و به خود حق می‌دهیم که به عنوان خوشه‌چینان خرمن دانش او از حریم او پاسداری کنیم!

آقای استاد! هرگز از خود پرسیده‌اید که چرا برخی از مردان بزرگ سالها پس از مرگشان بازمورد احترام و علاقهٔ مردم خود می‌مانند و چرا خیلی از افرادی که مقامهائی علمی یا اجتماعی دارند حتّی در زنده بودگی‌شان نیز مورد اعتنای مردم نیستند؟ آقای استاد! اگر شایستگی واقعی افراد نباشد، رسانه‌های گروهی فقط تا مدّتی می‌توانند آنها را، آن‌هم به زور، در زنده‌بودگی‌شان سرپا نگه دارند و پس از مرگ به فراموشی سپرده می‌شوند! شادروان هشترودی را، برخلاف نوشتهٔ شما، رسانه‌های گروهی بزرگ نکردند. او خودش بزرگ بود، خیلی بزرگتر از آن که شما تصوّر می‌کنید! به همین دلیل شما برای درس دادن به زنده‌ها و هشدار دادن به رسانه‌ها، مع‌الأسف، مثال خوبی انتخاب نفرموده‌اید!

رابطهٔ استاد فقید با شاگردانش خیلی فراتر از رابطهٔ استاد و شاگردی بود. هرچه از دستش برمی‌آمد برای دانشجویان خود انجام می‌داد. در گره‌گشایی از کارهای آنان از هیچ کوششی فروگذار نمی‌کرد. به شهادت شاگردانش، با پای پیاده به دنبال آنها راه می‌افتاد تا مشکل آنها را نزد فلان یا بهمان رئیس اداره حل کند. شادروان یك انسان بود، انسانی نمونه که در عین حال در مقابل زورمداران می‌ایستاد... یکی از علل اینکه در جلسات سخنرانی شادروان هرگز جای خالی برای نشستن علاقه‌مندان نمی‌ماند و نیمی از شنوندگان همیشه ایستاده به سخنان او گوش می‌دادند و لازم نبود به زور دانشجویان را برای «نیمه پُر کردن» سالن بیاورند، همین انسانیّت او بود که در اکثر گفته‌هایش منعکس می‌شد...

تعداد شاگردان معروف اِلی کارتان، بدون شك، خیلی بیش از سه بوده است. نگارنده افتخار آشنایی با چرن و لیشنرو ویچ را نداشته است، ولی از کلاس درس شاگرد برجستهٔ دیگر او، پروفسور یانو ریاضیدان ژاپونی، استاد دانشگاه توکیو- که نامش برای آنانی که با هندسهٔ دیفرانسیل سروکار دارند بیگانه نیست- بهره گرفته است، و آن در سال ۱۳۴۰ بود که نامبرده به عنوان استاد مدعوّ همراه پروفسور پَن (چینی) از دانشگاه اوکلاهما برای یك دوره تدریس یك ماهه در زمینهٔ یافته‌های جدید هندسهٔ دیفرانسیل به انگلستان دعوت شده بود. هنگامی که این استاد از ایرانی بودن من اطّلاع حاصل کرد پرسید: استاد هشترودی را می‌شناسی؟ جواب دادم: بله، افتخار شاگردی او را داشته‌ام. با احترامی خاص ادامه داد: مردی واقعاً مستعد و سریع‌الانتقال بود با اطّلاعاتی وسیع در همهٔ زمینه‌ها. ما همیشه به او فیلسوف می‌گفتیم. مردی بود بسیار کتابخوان و علم دوست. الحق یکی از بهترین شاگردان کارتان بود. تا زمانی که ریاضیّات را کنار نگذاشته بود با او مکاتبه داشتم. حیف شد که ریاضیّات را رها کرد. مطمئناً حال به دنبال فلسفه رفته است. او از کتاب دست‌بردار نیست...

ولی، با این همه، استاد فقید حتّی در همان سالها نیز ریاضیّات را به زمین نگذاشته بود و مرتّباً مطالعه می‌کرد. فقط، ظاهراً، توجّهش از محافل علمی غربی به محافل علمی شرقی کشیده شده بود. حتماً همهٔ شرکت‌کنندگان در دوّمین کنفرانس ریاضی کشور که در دانشگاه نوپای «آریامهر» آن روزی و «صنعتی شریف» امروزی با حضور مدعوّینی نظیر سوبولف و دیودونه برگزار شد به خاطر دارند که وقتی آقای دکتر ضرغامی، یکی از سخنرانان برجستهٔ کنفرانس، ضمن سخنرانی به مسأله‌ای که- به زعم ایشان- تا آن موقع حل نشده بود اشاره کرد، شادروان هشترودی بلافاصله راه‌حلّ آن مسأله را، که توسّط یکی از ریاضیدانان شوروی به دست آمده بود، یادآوری کرد و همه- بالأخص سخنران- را شگفت‌زده.

در مورد صحبتهای آن شادروان دربارهٔ «هوشمندان برون‌زمینی» هم باید جوّ آن دوران را در نظر گرفت. در آن سالها که مقارن سالهای سفر انسان به فضا بود در محافل علمی سراسر جهان، به ویژه اتحاد جماهیر شوروی، بازار گمانه و حدس‌زنی دربارهٔ فضا و احتمال وجود هوشمندان برون‌زمینی بسیار گرم بود و این حدسها در مجلات مختلف مطرح می‌شد که طبعاً مبنای خیلی دقیق علمی نمی‌توانست داشته باشد و شادروان هشترودی هم گاه در سخنرانیهایش آنها را به صورت فرضیه مطرح می‌کرد.

عقب‌ماندگی علوم در ایران را ناشی از پدیدهٔ «هشترودیگری» دانستن و منکر سهیم بودن وی در پیشرفت ریاضیّات در ایران و ابراز خرسندی از نداشتن شخصیّتی مثل شادروان هشترودی در فیزیك،

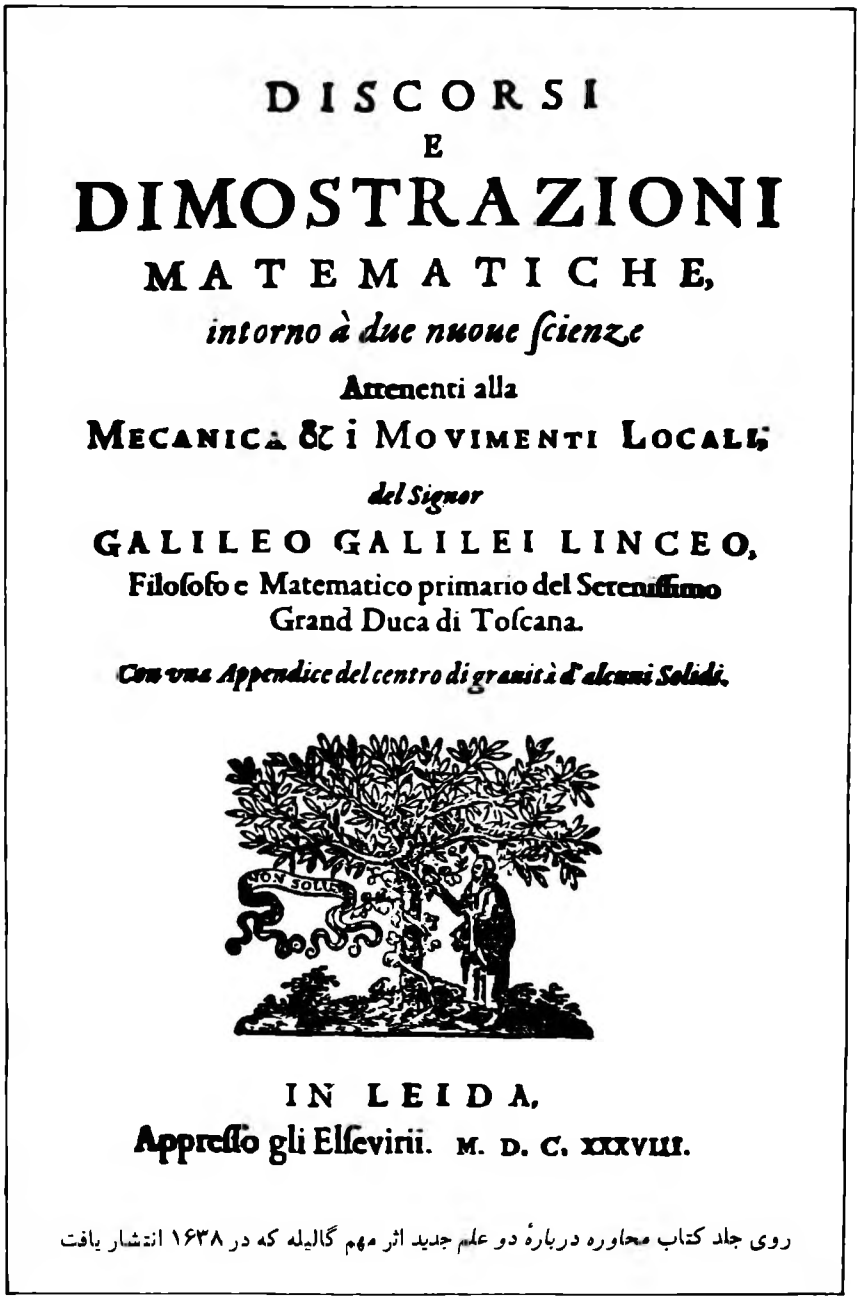
کمال بی‌انصافی است!! استاد محترم نوشته‌اند:... «ما» خرسندیم که در فیزیك شخصیّتی مانند هشترودی نداریم... استاد عزیز: فکر می‌کنید چند تن از این «ما»ها در میان استادان فیزیك هستند که با شما همعقیده‌اند؟ مطمئن باشید که تعدادشان از شمار انگشتان دستهای خود شما تجاوز نمی‌کند!... به گفتهٔ استاد دکتر جناب، شادروان دکتر هشترودی خیلی خیلی جلوتر از زمان خودش بود...

شادروان هشترودی- خیلی پیش از سنّ کهولت- بر اثر درگذشت نابهنگام دختر جوانش دچار فشار روحی شدیدی شد که پیری او را زودرس‌تر کرد و از آن به بعد به تدریج به بیماری بدل شد که برای گذران زندگی تلاش می‌کرد، و این هشترودی اگر ملاك داوری در مورد وی بوده باشد، جای تأسف بسیار است!

در پایان مقال، سؤالی که از این استاد محترم دارم این است: چه لزومی دیده‌اید حرمت مردی نیکنام را که ۱۵ سال پیش از این دنیا رخت بر بسته بشکنید و با نکوهش وی- ولو به حقیقت- پیام خود را به گوش مردم و رسانه‌ها برسانید؟ شخص بی‌عیب وجود ندارد؛ سنگ بنائی را نگذارید که روزی آیندگان شما را هم، که امروزه از نامی نیك برخوردارید، از دل خاك بیرون کشند و با آنچه داشته و نداشته‌اید یکجا بشویند. دنیا دار مکافات است! فاعتبروا یا اولی الابصار!

م. هـ شفیعیها

استاد بازنشستهٔ دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران



DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue ſcienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

روی جلد کتاب محاوره دربارهٔ دو علم جدید اثر مهم گالیله که در ۱۶۳۸ انتشار یافت

NASHR-I RYAZY

A Mathematics Journal of Iran University Press

Volume 4, Number 1 & 2, August 1991

Nashr-i Ryazy is published by Iran University Press, three times a year: April, August, and December. The main objectives of the Journal are to present:

- new advances in mathematics;
- cultural, philosophical, and historical aspects of mathematics, as well as its applications;
- educational problems of mathematics, specifically those concerning higher education in Iran.

Some of the articles in each issue are written by Iranian mathematicians, and some are translations of expository articles selected from foreign sources.

The annual subscription rates including air mail postage are: Middle East £ 18, Europe & Asia £ 20, North America & Far East £ 25.

To subscribe, please send your name, address, and a check to Iran University Press, 85 Park Avenue, Tehran 15134, Iran.

ISSN 1015-2857

مرکز نشر دانشگاهی منتشر کرده است