در احاطه‌ی تابوهای ناخودآگاه:

مسائل میان‌حوزه‌ای[1]

هیمن باس

آبان ماه ۹۷

(نوشته شده برای ویکی‌نوشت)

شکستن قوانین؛ عبور از مرزها

- بعضی وقت‌ها، دانش‌آموزان در درس هندسه‌ی مقدماتی گیر می‌افتند زیرا به طور ناخودآگاه (بدون دلیل) فرض می‌کنند که اجازه ندارند شکل هندسی داده شده را با رسم خطوط کمکی تغییر دهند.
- "با شش چوب کبریت، چهار مثلث متساوی الاضلاع غیر متداخل بسازید". بسیاری از مردم در حل این معما چوب کبریتی گیر می‌کنند چون جوابش یک چهاروجهی منتظم ساخته شده با چوب کبریت‌ها در فضای سه بعدی است اما آن‌ها به طور ناخودآگاه (بدون دلیل) فرض می‌کنند که جواب باید روی سطحی که چوب کبریت‌ها بر آن قرار دارند، باقی بماند.

البته می‌توان با طرح فعالیت‌های حل مسئله‌ی مرتبط به دانش‌آموزان کمک کرد که از این موانع ناخودآگاه عبور کنند.

در این ویکی نوشت، نه درباره‌ی چنین موانعی، بلکه می‌خواهم در مورد نوعی سدِّ روانشناختی که در میان دانشجویانم (کارشناسی) کشف کرده‌ام و به نظر می‌رسد ناشی از ساختار مفهومی برنامه درسی باشد، بحث کنم.

به طور مشخص برنامه‌ی درسی به حوزه‌هایی با موضوعات مجزا تفکیک شده است؛ برای مثال، نظریه اعداد، جبر، هندسه، مثلثات، حسابان و غیره. چنین برنامه‌ی درسی‌ای معقول است و این مزیت را دارد که مجموعه‌ی منسجم و عمیقی از مفاهیم، نتایج، تکنیک‌ها و چشم‌اندازها را در هر حوزه شکل دهد. اما یکی از هزینه‌های بالقوه‌ی این نوع از برنامه‌ی درسی، از دست دادن توجه به ترکیب ارتباطاتی است که حوزه‌های مختلف را به هم وصل کرده و از مرز حوزه‌ها عبور می‌کنند. در زیر، یکی از نمودهای چنین پدیده‌ای را توصیف می‌کنم.

داستان یک مسئله

در یکی از درس‌های کارشناسی چند مفهوم پایه‌ی ترکیبیات را بیان کرده بودم و داشتم مقدماتی از نظریه اعداد را شرح می‌دادم. در نظر داشتم به دانشجویانم مسئله‌ی زیر را بدهم:

گیریم $N > ۱$ یک عدد صحیح باشد. یک شمارنده $d > ۰$ از N را یک شمارنده جداکننده گوییم اگر ب.م.م $\left(d,\frac{N}{d}\right) = ۱$. *فرمولی برای تعداد شمارنده‌های جداکننده‌ی N پیدا کنید.*

در واقع تصمیم گرفتم برای ساده کردن مسئله، جواب را به آن‌ها بدهم و از آن‌ها بخواهم که فقط آن را اثبات کنند.

[1] باس، هیمن (مردادماه ۱۳۹۸)، در احاطه تابوهای ناخودآگاه: مسائل میان‌حوزه‌ای، ویکی‌نوشت شماره ۱۱.

گیریم $N > ۱$ یک عدد صحیح باشد. یک شمارنده $d > ۰$ از N را یک شمارنده جداکننده گوییم اگر ۱ = ب .م .م $\left(d, \frac{N}{d}\right)$. نشان دهید که تعداد شمارنده‌های جداکننده‌ی N برابر با ۲^{r} است، که در آن r تعداد شمارنده‌های اول N است.

اگرچه دانشجویانم پیش‌تر شایستگی خود را در ریاضیات مرتبط با آن نشان داده بودند اما شگفت آن که هیچ کدام‌شان این مسئله را کامل حل نکردند. در جستجوی توضیحی برای این مشاهده، به سمت بررسی کار آنها کشیده شدم.

آنچه یافتم این است: آن‌ها (به درستی) این مسئله را در «دسته‌ی» مسئله‌های نظریه اعداد قرار داده بودند و به طور مؤثری منابع نظریه اعداد را برای تحلیل این موقعیت بسیج کرده بودند؛ اما در نهایت نتوانستند پی ببرند که ۲^{r} از کجا آمده است. برای فهمیدن این مطلب، بیایید با جزئیات بیشتری به مسئله نگاه کنیم.

دو نسخه از قضیه‌ی اساسی حساب وجود دارد؛ یکی، تجزیه به *عوامل اول* که می‌گوید: N به طور منحصر به فردی حاصل‌ضرب اعداد اول است، صرف نظر از ترتیب عوامل. دیگری، تجزیه به *توان‌های اول* که می‌گوید: $N = q_۱ q_۲ \bullet\bullet\bullet\ q_r$، که در آن برای $j = ۱,۲,\ldots,r$، $q_j > ۱$، توان‌هایی از اعداد اول مجزای p_j هستند. اکنون گیریم که d یک شمارنده جداکننده از N باشد. اگر یک p_j، d را بشمارد، در این صورت q_j هم باید d را بشمارد، زیرا در غیر این صورت p_j یک شمارنده مشترک d و $\frac{N}{d}$ است که با فرض ما در تناقض است. لذا d باید حاصل‌ضرب زیرمجموعه‌ای از عوامل توان اول $\{q_۱, q_۲, \bullet\bullet\bullet, q_r\}$ باشد. دست آخر، تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه‌ی r-عضوی ۲^{r} است؛ مطلبی که این دانشجویان از قبل می‌دانستند.

در نظر داشته باشید که در قدم آخر، ما از مرز نظریه اعداد به ترکیبیات گذر کرده‌ایم و این، جهش ذهنی‌ای را که دانشجویانم به طور ناخودآگاه از آن منع شده بودند، آشکار می‌کند. من این نوع مانع را *دیوارِ حوزه‌جداکن* می‌نامم.

مسائل میان‌حوزه‌ای

مسئله‌ی شرح داده شده در بالا یک مثال از چیزی است که آن را یک مسئله میان‌حوزه‌ای می‌نامم و منظورم از آن، یک مسئله ریاضی است که جواب آن ضرورتا مباحثی از دو حوزه و یا بیشتر را پیش می‌کشد. چنین مسائلی می‌توانند از نظر ریاضی غنی باشند و بنا به طبیعتشان می‌توانند روابط قابل توجهی را با حوزه‌های دیگر پیش بکشند. درسی که من از داستان بالا گرفتم این است که: (۱) مسائل میان‌حوزه‌ای این قابلیت را دارند که دانشجویان را با موانع ناشی از دیوارهای جداکننده‌ی حوزه‌ها مواجه کنند و (۲) دقیقاً به همین دلیل، یک راه طبیعی برای رفع این مانع آن است که به دانشجویان فرصت‌های کافی و گام به گام را برای درگیر شدن در مسائل میان‌حوزه‌ای، بدهیم.

برای اجرای این ایده نیاز است که منبعی غنی (غیرسطحی) از مسائل میان‌حوزه‌ای طرح کنیم. کتاب‌های درسی این کار را تسهیل نمی‌کنند چون به خاطر ساختارشان که همتراز با حوزه‌های برنامه‌ی درسی است، معمولاً فقط تعداد کمی از مسائل میان‌حوزه‌ای با اهمیت را دربردارند. این مطلب من را به این باور رساند که طراحی و اجرای یک منبع غنی از مسائل میان‌حوزه‌ای مناسب برای هر سطح، تلاش ارزشمندی برای جامعه‌ی آموزش ریاضی خواهد بود. من فهمیده‌ام که این کار هم جالب و هم چالش‌برانگیز است. اکنون با چند مثال توضیح دهنده، بحث را تمام می‌کنم.

چند مثال از مسائل میان‌حوزه‌ای

۱. **تقریب گویا.** فرض کنید یک دنباله از کسرهای گویا به $\sqrt{۲}$ میل کند. نشان دهید که دنباله‌ی مخرج این کسرها بیکران است.

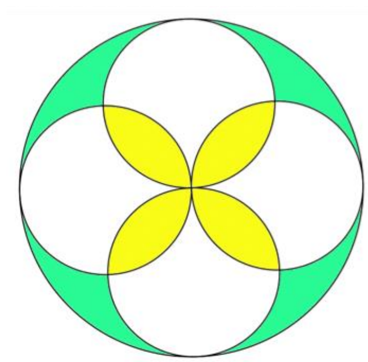
۲. **بخش‌پذیری.** نشان دهید هر حاصلضرب d عدد صحیح متوالی بر $d!$ بخش‌پذیر است.

۳. **ارزش مکانی.** (آ) عدد زیر را در مبنای ۱۰۰۰ نمایش دهید:

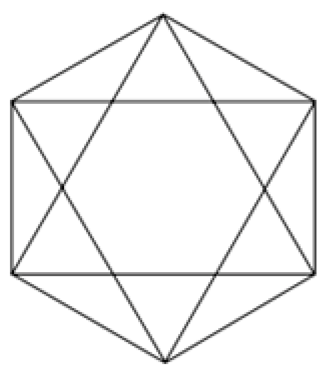
$$N = ۴۸,۵۷۴,۶۲۳,۷۹۱,۱۰۵$$

(ب) عدد N را دوباره بخوانید و آن را به جوابتان ربط دهید.

۴. **اندازه‌ی هندسی.** مساحت کدام ناحیه بیشتر است، سبز یا زرد؟



۵. **اندازه‌ی هندسی.** مساحت شش ضلعی درونی چه کسری از مساحت شش ضلعی (منتظم) بزرگتر است؟



مشتقات مراتب بالاتر یک حاصل‌ضرب. برای یک تابع مشتق‌پذیر، مشتق آن را با Df نمایش می‌دهیم. قانون حاصل‌ضرب می‌گوید که مشتق حاصل‌ضرب fg از $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$ به‌دست می‌آید. فرمولی برای مشتق مرتبه nام fg، $D^n(fg)$، پیدا کنید.

بحث روی مسائل

۱. **تقریب گویا.** اگر مخرج‌ها کراندار باشند، برای مثال محدود به d، در این صورت $D = d!$ مخرج مشترک همه‌ی این کسرهاست. بنابراین این دنباله از مضارب صحیح $\frac{۱}{D}$ تشکیل شده است. لذا هیچ دو جمله‌ی این دنباله نمی‌توانند بیشتر از $\frac{۱}{D}$ به هم نزدیک شوند. بنابراین یک دنباله از چنین کسرهایی باید در نهایت ثابت باشد و لذا یک حد گویا داشته باشد. اما $\sqrt{۲}$ گنگ است.

۲. **بخش‌پذیری.** برای اعداد صحیح d و n، ضریب دو جمله‌ای $\binom{n}{d}$ ="انتخاب d از n"، تعداد زیرمجموعه‌های d-عضوی از یک مجموعه‌ی n -عضوی است که یک عدد صحیح است. از ترکیبیات فرمول زیر را داریم:

$$\binom{n}{d} = \frac{n(n-۱)(n-۲)\bullet\bullet\bullet(n-d+۱)}{d!}.$$

صورت این کسر حاصل‌ضرب d عدد صحیح متوالی نزولی با شروع از n است. این مطلب ادعا را برای $n \geq ۰$ اثبات می‌کند. برای $n = -m < ۰$، داریم:

$$\frac{n(n-۱)(n-۲)\bullet\bullet\bullet(n-d+۱)}{d!} = (-۱)^d \frac{m(m+۱)(m+۲)\bullet\bullet\bullet(m+d-۱)}{d!} = (-۱)^d \binom{m+d-۱}{d},$$

که باز هم یک عدد صحیح است.

۳. **ارزش مکانی.** (آ) نکته این است که پی ببریم که *داریم از جواب شروع می‌کنیم*. ویرگول‌ها حداکثر سه عدد دهدهی (از ۰ تا ۹۹۹) را از یکدیگر جدا می‌کنند و اینها دقیقاً ارقام در مبنای هزار هستند. می‌توانیم بنویسیم

$$N = ۴۸ \times ۱,۰۰۰^۴ + ۵۷۴ \times ۱,۰۰۰^۳ + ۶۲۳ \times ۱,۰۰۰^۲ + ۷۹۱ \times ۱,۰۰۰ + ۱۰۵.$$

(ب) با دوباره خواندن عدد N می‌گوییم

"۴۸ **تریلیون** و ۵۷۴ **میلیارد** و ۶۲۳ **میلیون** و ۹۷۱ **هزار** و ۱۰۵."

در نظر داشته باشید که میلیون=$۱,۰۰۰^۲$؛ میلیارد =$۱,۰۰۰^۳$؛ تریلیون=$۱,۰۰۰^۴$. ما در واقع در مبنای هزار صحبت می‌کنیم.

٤. **اندازه‌ی هندسی**. گیریم G مساحت ناحیه سبز رنگ و Y مساحت ناحیه زرد رنگ باشد. قطر دایره‌های سفید، نصف قطر دایره بزرگ است؛ بنابراین مساحتشان، $\frac{۱}{۴}$ مساحت دایره‌ی بزرگ می‌شود. گیریم W مساحت ناحیه‌ی اجتماع چهار دایره‌ی سفید باشد و C مساحت دایره‌ی بزرگ. در این صورت $W = ۴(C/۴) - Y = C - Y$، در حالی که

$$G = C - W = C - (C - Y) = Y.$$

۵. **اندازه‌ی هندسی**. یک رویکرد این است که با استفاده از تقارن دورانی شکل را ببینیم. مساحت شش ضلعی منتظم بزرگ، H، به E = مجموعه‌ای از شش مثلث متساوی الساقین همنهشت که هر کدام یک ضلع روی مرز دارند، V = شش مثلث متساوی الاضلاع همنهشت که هرکدام یک رأس روی مرز دارند و h = شش ضلعی درونی افراز شده است. مثلث‌ها در E و در V مساحت برابر دارند (قاعده‌های برابر و ارتفاع‌های برابر). می‌توانیم h را با وصل کردن مرکز آن به هر یک از رأس‌هایش به W = مجموعه‌ای از شش مثلث متساوی الاضلاع همنهشت افراز کنیم. مشاهده می‌شود که مثلث‌ها در W بازتاب و لذا همنهشت با مثلث‌ها در

V هستند. پس H به مجموعه‌ای از ۱۸ مثلث افراز شده است ($E \cup V \cup W$) که همه مساحت برابر دارند و شش تا از آن‌ها (W)، h را افراز می‌کنند. و لذا مساحت h، برابر با $\frac{۶}{۱۸} = \frac{۱}{۳}$ مساحت H است.

۶. مشتقات مراتب بالاتر یک حاصل‌ضرب.

$$D^{۰}(fg) = fg,$$
$$D^{۱}(fg) = (Df)g + f(Dg),$$
$$D^{۲}(fg) = [(D^{۲}f)g + (Df)(Dg)] + [(Df)(Dg) + f(D^{۲}g)]$$
$$= (D^{۲}f)g + ۲(Df)(Dg)] + f(D^{۲}g),$$
$$D^{۳}(fg) = [(D^{۳}f)g + (D^{۲}f)(Dg)] + ۲[(D^{۲}f)(Dg) + (Df)(D^{۲}g)] + [(Df)(D^{۲}g)] + f(D^{۳}g)]$$
$$= (D^{۳}f)g + ۳(D^{۲}f)(Dg) + ۳(Df)(D^{۲}g)] + f(D^{۳}g)$$

در حالت کلی می‌توانیم مشاهده کنیم که $\mathrm{D}^n(\mathrm{fg})$ به فرم زیر است:

$$(*) \qquad \mathrm{D}^n(\mathrm{fg}) = \textstyle\sum_{۰\le d\le n} B(n,d)(D^d f)(D^{n-d} g),$$

برای ضرائب $\mathrm{B(n,d)}$ ($۰ \le \mathrm{d} \le \mathrm{n}$)، به طوری که

$$\mathrm{B}(۰,۰) = ۱،$$

$$\mathrm{B}(۱,۰) = ۱ = \mathrm{B}(۱,۱)،$$

$$\mathrm{B}(۲,۰) = ۱ = \mathrm{B}(۲,۲)،$$

$$\mathrm{B}(۲,۱) = ۲،$$

$$\mathrm{B}(۳,۰) = ۱ = \mathrm{B}(۳,۳)،$$

$$\mathrm{B}(۳,۱) = ۳ = \mathrm{B}(۳,۲)$$

این اعداد، قویا ضرایب دوجمله‌ای را پیشنهاد می‌کنند. با مشتق‌گیری از (*) به دست می‌آوریم:

$$\mathrm{D}^{n+۱}(\mathrm{fg}) = \sum_{۰\le d\le n+۱} B(n+۱,d)(D^d f)(D^{n+۱-d} g)$$

$$= \textstyle\sum_{۰\le d\le n} B(n,d)[(D^{d+۱} f)(D^{n-d} g) + (D^d f)(D^{n+۱-d} g)]$$

$$= \textstyle\sum_{۰\le d\le n+۱}[B(n,d) + B(n,d-۱)](D^d f)(D^{n+۱-d} g),$$

که در آن برای $d = ۰$ توافق می‌کنیم که $B(n, -۱) = ۰$. این ایجاب می‌کند که

$$B(n + ۱, d) = B(n, d) + B(n, d - ۱),$$

این مشابه رابطه‌ی خیام-پاسکال برای ضرایب دو جمله‌ای است؛ لذا بنا به استقرا داریم که در واقع $B(n, d) = \binom{n}{d}$.

طبیعی است بپرسیم که آیا می‌توان چنین نتیجه‌ای را به طور مستقیم از قضیه‌ی دو جمله‌ای به‌دست آورد؟ تنها راهی که من یافته‌ام استفاده از توابع دو متغیره و مشتقات جزئی است.

مترجم

محسن رحیمی پیرانفر؛ دانشجوی دکتری ریاضی دانشگاه تحصیلات تکمیلی زنجان

بازبینی متن

امیرحسین اصغری؛ دانشگاه جان مورس لیورپول

ویرایش متن، آماده و خوشگل‌سازی فایل پی- دی- اف

شراره تقی دستجردی؛ خانه‌ی ریاضیات اصفهان