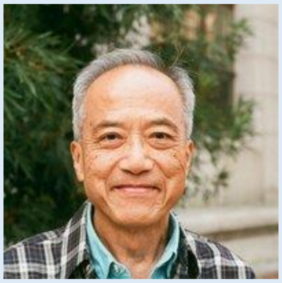

هانگ هسی وو

دی‌ماه ۹۷

(نوشته شده برای ویکی‌نوشت)

از حساب به جبر

قسمت اول: جبر حساب تعمیم‌یافته است[۱]

برنامه‌ی ریاضیات مدرسه‌ای ساختاری طبیعی دارد: از مفاهیم ساده، به پیچیده و از مفاهیم ملموس به مفاهیم مجرد و مصنوع رشد می‌کند. غیر از این نمی‌تواند باشد؛ چون مهم‌ترین کارکردش این است که دانش‌آموزان را کمک و هدایت کند تا اولین گام‌هایشان را برای یادگیری ریاضی بردارند؛ فراموش نکنیم که دانش ریاضی هم، در طول تاریخش از ساده به پیچیده رشد کرده است.

متأسفانه در روند تکامل ریاضیات مدرسه‌ای[۲]، گسست‌های نالازمی وجود دارد که یادگیری دانش‌آموزان را مختل می‌کند. یک نتیجه‌ی این گسست، ترس و دلهره‌ایست که دانش‌آموزان از یادگیری جبر دارند. موضوع این نوشته، گسستی است که در عبور از موضوع حساب به جبر در ریاضیات مدرسه وجود دارد. در اینجا منظور از "*حساب*" مباحثی است که به اعداد صحیح، اعشاری‌های با بسط متناهی و اعداد کسری مربوط می‌شود و "جبر" همان جبر *مقدماتی‌ای* است که در ریاضیات مدرسه‌ای وجود دارد و موضوعاتی را مانند اعداد گنگ، استفاده گسترده از نمادهای ریاضی، معادلات خطی یک یا دو متغیره و معادله‌ی درجه دوم، شامل می‌شود. در اینجا به مفاهیم پیچیده‌ترِ جبری مانند توابع نمایی و لگاریتمی، یا عملیات جبری بر روی *چندجمله‌ای‌ها* (اشمید و وو (۲۰۰۸)، وو (b۲۰۱۶) و وو (در دست انتشار) را ببینید) کاری نداریم؛ در عوض به دو شاخصه مهم ریاضیات مدرسه‌ای، یعنی تعمیم و تجرید می‌پردازیم. اجازه دهید به جای اینکه وقتمان را صرف تعریف دقیق مفاهیم اخیر کنیم، بحث را ادامه دهیم. مفهوم دقیق این واژه‌ها در مسیر بحث، آشکار خواهد شد.

پیام اصلی این نوشته این است که جبر مدرسه‌ای در واقع، همان *حسابِ تعمیم‌یافته* است. احتمالاً در این لحظه خواننده برداشت خودش را از عبارت *حسابِ تعمیم یافته* دارد. در ادامه‌ی متن، تا حد امکان توضیح می‌دهم منظور از *حسابِ تعمیم‌یافته* چیست. حساب با محاسبات دقیق بر روی اعداد مشخص و معلوم سروکار دارد. به طور معمول ریاضیات مدرسه‌ای طوری تدریس می‌شود که دغدغه اصلی دانش‌آموزان در ریاضی، انجام دادن تمرین‌هاست؛ به این معنی که به دست آوردن جواب درست ۶۷ − ۱۵۱ یا $\frac{۳}{۸} + \frac{۵}{۶}$ برایشان راضی کننده است و به دنبال چیزی ورای جواب نیستند. اما جبر، اولین برخورد دانش‌آموزان با ریاضیات به معنی واقعی کلمه است و تازه اینجاست که شِمایی از "تصویر اصلی" [ریاضیات] را می‌بینند. در جبر از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که بعد از انجام هر محاسبه، به این فکر کند که آیا این محاسبه، حالت خاصی از یک قانون عمومی است یا نه؛ یا اینکه آیا می‌شود این محاسبه را در زمینه‌ای گسترده‌تر دید تا شاید ویژگی‌های آن بهتر درک شود؟ حالا دانش‌آموزی که در حوزه حساب به خوبی کارش را انجام می‌داد و از نتیجه راضی بود، باید توجیه شود که *چرا* باید خودش را برای *حساب تعمیم‌یافته* آماده کند. در واقع چرا باید به این دردسر بیافتد؟

هر برنامه درسی‌ای که بخواهد گذار دانش‌آموزان را از (حوزه) حساب به جبر هموار کند، باید جوابی برای این سؤال داشته باشد. اما چه جوابی می‌توان به این سؤال داد؟

---

[۱] وو، هانگ (دی‌ماه ۱۳۹۷)، از حساب به جبر، قسمت اول: جبر حساب تعمیم یافته است، ویکی‌نوشت شماره ۹.

*مایلم از لری فرانسیس به خاطر بحث‌ها و تصحیح‌ها و از امیر اصغری برای پیشنهادهای ارزشمندش تشکر کنم.

[۲] باید تأکید کنیم که اشاره‌ی ما، به گسست برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه‌ای در آمریکا مربوط است نه به خود ریاضیات.

برای پاسخ به این سؤال، دو مسئله جبری را بررسی می‌کنیم: یکی مسئله حاصل جمع متناهی جمله از یک سری هندسی و دیگری حل یک معادله از درجه یک. امیدواریم که در خلال این بحث، ماهیت حساب تعمیم‌یافته هم مشخص‌تر شود. پیشاپیش می‌گویم بحث پیش‌رو مقداری محاسبات دقیق ریاضی در بردارد با اینکه در مقالاتی از این دست مرسوم نیست؛ اما این مقدار ریاضی برای پیشبرد بحث ضروری است. همچنین نمی‌توان از این واقعیت فرار کرد که قلب بحث‌های آموزش ریاضی، ماهیت ریاضی دارد.

فرض کنید از یک کلاس هشتمی خواسته‌ایم حاصل عبارت زیر را به دست آورد (استفاده از ماشین حساب مجاز است).

$$۱ + ۳ + ۳^{۲} + \cdots + ۳^{۱۰}$$

حساب به ما می‌گوید حاصل این جمع ۸۸۵۷۳ است و تمام. ولی آیا این مسئله یک مسئله خیلی خاص محاسباتی است؟ یا اینکه مثلاً گروهی مسئله شبیه به آن وجود دارد؟ آیا می‌توان راه حل این مسئله را جزئی از یک قانون عمومی به حساب آورد؟ هشتمی‌ها ابتدا باید متوجه *الگو* یا *ساختار* موجود در این جمع شوند: توان‌های متوالی عدد ۳ با هم جمع شده‌اند. (فرض کنیم آن‌ها می‌دانند که $۳^{۰} = ۱$ و $۳^{۱} = ۳$). اولین چیزی که به ذهن می‌رسد این است که می‌توان حاصل جمع توان‌های عدد ۳ را نه تنها تا توان ۱۰، بلکه تا هر توان طبیعی دیگری حساب کرد. بعد، چرا توان‌های عدد ۳؟ چرا توان‌های عددهای دیگر نه؟ همین که این سؤالات به ذهن می‌رسد، یعنی حساب را پشت سر گذاشته‌ایم. می‌خواهیم حاصل‌جمع توان‌های متوالی *عددی* که نمی‌دانیم چند است را تا توانی که نمی‌دانیم چند است حساب کنیم. حساب و کتاب با اعداد مشخص هیچ کمکی به ما نمی‌کند. حتی قبل از اینکه شروع به حل کنیم، با مسئله‌ای مهم‌تر روبرو می‌شویم: عبارتی که این قدر *کلی* است (حاصل‌جمع توان‌های متوالی *عددی* که *نمی‌دانیم چند است*، تا توانی که *نمی‌دانیم چند است*) را چه‌طور به شکلی خلاصه‌تر و در عین حال دقیق بیان کنیم؟ اینجا می‌توانیم به کلاس هشتمی‌ها بگوییم که ریاضیدانان قدیم بیش از هزار سال درگیر این موضوع بودند که چه‌طور چنین مسئله‌ی کلی‌ای را بیان کنند. تا اینکه حدود ۱۶۰۰ میلادی، بالاخره روشی کارا پیدا کردند تا با کمک نمادها، این گونه عبارت‌ها را بیان کنند. با این دستاورد ریاضی، مسئله را به این شکل مطرح می‌کنیم: حاصل‌جمع $۱ + r + r^{۲} + \cdots + r^{n-۱} + r^{n}$ را بیابیم وقتی که r و n عددهای دلخواه ($n \in \mathbb{N}$) باشند. با صرفنظر کردن از کار با اعداد معلوم و مشخص، تنها ابزاری که برای حل این مسئله داریم، خاصیت شرکت‌پذیری و جابجایی دو عمل جمع و ضرب و نیز خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع است که می‌دانیم برای همه اعداد درست است، و فرقی نمی‌کند که آن اعداد معلوم‌اند یا مجهول. این مسئله به کلاس هشتمی‌ها کمک می‌کند تا شاید برای اولین بار به اهمیت قوانینِ عملگرهای جمع و ضرب پی ببرند.

به جای اینکه مدت طولانی را صرف این مسئله کلی کنیم، شاید بهتر باشد که مرحله به مرحله پیش برویم و ابتدا حاصل جمع $۱ + ۳ + ۳^{۲} + \cdots + ۳^{۲۴}$ را حساب کنیم. این عبارت، حاصل‌جمع ۲۵ عددِ مشخص و معلوم است و بنابراین شبیه یک مسئله *حساب*ِ متداول است. اما از آنجا که انجام این محاسبات با دست خالی، به صبر و حوصله‌ای بیش از توانِ کلاس هشتمی‌ها نیاز دارد، پس به چیزی بیش از مهارت‌های متداولِ حساب نیاز داریم تا آن را حل کنیم. یک راه پرداختن به این مسئله این است که کل این عبارت را به صورت یک عدد ببینیم؛ نمی‌دانیم این عدد دقیقاً چند است، با این حال نام آن را S می‌گذاریم. بی‌درنگ از مزایای این نمادگذاری بهره‌مند می‌شویم. این یک قدم بسیار مهم است چون با این کار، ما دیگر درگیر محاسبات قدیمی نیستیم که می‌بایست جواب هر عملیات را به صورت عددی مشخص محاسبه می‌کردیم و قدم به قدم پیش می‌رفتیم. حالا محاسباتمان را با S به عنوان یک عدد پیش می‌بریم. از آنجا که S جمع توان‌های متوالی عدد ۳ است، انگار بد نیست ۳ را در S ضرب کنیم. با کمک خاصیت توزیع‌پذیری (ضرب نسبت به جمع) می‌بینیم که عبارتی *خیلی شبیه* به خود S به دست می‌آید. داریم:

$$۳S = ۳ \times ۱ + ۳ \times ۳ + ۳ \times ۳^{۲} + \cdots + ۳ \times ۳^{۲۳} + ۳ \times ۳^{۲۴} = ۳ + ۳^{۲} + ۳^{۳} \ldots + ۳^{۲۴} + ۳^{۲۵}$$

$$= (۱ + ۳ + ۳^{۲} + \cdots + ۳^{۲۴}) - ۱ + ۳^{۲۵} = (S - ۱) + ۳^{۲۵}$$

بنابراین

$$۳S = S + ۳^{۲۵} - ۱ \quad (۱)$$

بازهم بدون اینکه بدانیم مقدار S دقیقاً چند است، قرینه‌ی آن $(-S)$ را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم و داریم:

$$(-S) + ۳S = (-S) + S + ۳^{۲۵} - ۱$$

در سمت چپ تساوی از خاصیت پخشی (توزیع‌پذیری) استفاده می‌کنیم:

$$(-S) + ۳S = (-۱ + ۳)S = ۲S$$

به این ترتیب:

$$S = \frac{۱}{۲}(۳^{۲۵} - ۱) \quad (۲)$$

و با کمک ماشین حساب حاصل را به دست می‌آوریم: $S = ۴۲۳,۶۴۴,۳۰۴,۷۲۱$. باید به کلاس هشتمی‌ها یادآور شویم که این جواب بدون سختیِ زیاد به دست آمد.

این اولین ثمره *تفکر مجرد* بود: جوابی که به جای انجام محاسبات کورکورانه بر روی اعداد مشخص، با افزودن استدلال و به رسمیت شناختن الگوهای انتزاعی در انجام محاسبه با اعداد در حالت کلی به‌دست آمده است. برای مثال ایده ضرب کردن ۳ در S که معادله (۱) را نتیجه داد، به اندازه جوابِ نهایی، مهم و پرفایده بود. ایده از آنجا نشأت گرفت که حاصل جمع توان‌های متوالی عدد ۳ اساساً بعد از این ضرب تغییر چندانی نمی‌کند و اکثر جملات، عیناً تکرار می‌شوند. به یک معنا کاری که برای حل مسئله انجام دادیم، مطلقاً حساب است. چون کاری به جز انجام عملیات حسابی بر روی اعداد (*و تنها اعداد*) انجام نداده‌ایم. در عینِ حال با کمک قوانین جمع و ضرب، این عملیات را بر روی اعداد نامعلوم انجام داده‌ایم. پس در واقع ما *حساب تعمیم‌یافته* انجام داده‌ایم. این مثال نشان می‌دهد که اگر قدم را از محاسبه با اعداد مشخص فراتر بگذاریم و سعی در شناخت الگوهای کلی‌تر کنیم، حتی در مسئله‌های معمولیِ محاسباتی، نتایج بیشتری به‌دست خواهیم آورد. به مسئله اصلی برگردیم و حاصل $۱ + r + r^{۲} + \cdots + r^{n-۱} + r^{n}$ **را برای r و n دلخواه** $(n \in \mathbb{N})$ به‌دست آوریم. اگر $r = ۱$ باشد، حاصل عبارت $n + ۱$ است و مسئله جذابیتی ندارد. پس از این به بعد فرض کنیم $r \neq ۱$ است. اگر استدلال قبل را با دقت مرور کنیم، دیده می‌شود که اگر عدد ۳ را با r و توان ۲۴ را با n جایگزین کنیم، همه استدلال جمله به جمله درست خواهد بود. پس هرگاه $r \neq ۱$ عددی دلخواه و n عددی دلخواه و طبیعی باشد:

$$۱ + r + r^{۲} + \cdots + r^{n-۱} + r^{n} = \frac{r^{n+۱} - ۱}{r - ۱} \quad (۳)$$

این همان رابطه‌ای است که برای محاسبه *حاصل‌جمع متناهی جمله از یک دنباله هندسی* داریم. رابطه (۲) حالت خاصی از فرمول (۳) است وقتی که $r = ۳$ و $n = ۲۴$ باشد. برای اینکه طعم این تعمیم را بهتر بچشیم، بیایید جمع زیر را به دست آوریم:

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^{۲}} + \cdots + \frac{۱}{۲^{۲۷}} + \frac{۱}{۲^{۲۸}}$$

این حاصل جمع، سمت چپ تساوی (۳) است، وقتی که $r = \frac{۱}{۲}$ و $n = ۲۸$. بنابراین

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2}}+\cdots+\frac{1}{2^{27}}+\frac{1}{2^{28}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{28+1}-1}{\frac{1}{2}-1}=2-(\frac{1}{2})^{28}$$

حالا درباره تساوی (۳) می‌توانیم از خودمان بپرسیم که آیا این تساوی بخشی از یک قانون عمومی‌تر در ریاضی است یا نه. آیا می‌توانیم آن را در یک زمینه وسیع‌تر ببینیم تا آن را بهتر درک کنیم؟ به راستی که چنین است، به شرطی که برای به دست آوردن این «زمینه‌ی وسیع‌تر» از تور بزرگتری استفاده کنیم. کلاس هشتمی‌ها اتحاد مشهور $(x-y)(x+y)=x^{2}-y^{2}$ را می‌شناسند که برای هر مقدار x و y درست است. می‌توان از آن‌ها خواست که به عنوان تمرینِ خاصیت توزیع‌پذیری، نشان دهند تساوی زیر برای هر مقدار طبیعی n و هر عدد x و y درست است:

$$(x-y)(x^{n}+x^{n-1}y+x^{n-2}y^{2}+\cdots+xy^{n-1}+y^{n})=x^{n+1}-y^{n+1} \qquad (4)$$

حالا تساوی $(x-y)(x+y)=x^{2}-y^{2}$، حالت خاصی از تساوی (۴) است وقتی که قرار می‌دهیم $n=1$. حتی تساوی (۳) هم حالت خاصی از تساوی (۴) است، کافی است قرار دهیم $x=r$ ، $y=1$ و $r\neq 1$. به این ترتیب رابطه (۳) که مجموع متناهی جمله دنباله هندسی را به دست می‌دهد، ارتباط پیدا کرد با تساوی آشنای $(x-y)(x+y)=x^{2}-y^{2}$ و این تازه اول داستان است. عدد ۶۴،۳۳۹،۲۸۰،۴۹۱ را درنظر بگیرید. سخت بتوان گفت عددی به این بزرگی *اول* است یه نه (عدد اول عددی است که فقط بر خودش و یک بخش‌پذیر است). این عدد برابر است با $35^{7}-4^{7}$ و این یعنی می‌توانیم تساوی (۴) را برای آن استفاده کنیم

$$64{,}339{,}280{,}491=35^{7}-4^{7}=31\times(35^{6}+35^{5}\times 4+\cdots+35\times 4^{5}+4^{6})$$

و این یعنی عدد ما بر ۳۱ بخش‌پذیر است و در نتیجه اول نیست! به همین ترتیب، می‌توان نشان داد که اگر x و y اعداد صحیح مثبت باشند و $x-y>1$، برای $n\geq 1$، عدد $x^{n}-y^{n}$ هیچگاه اول نیست. توجه کنید که ما همچنان درگیر حساب هستیم؛ ولی با استفاده از نمادها به جای اعداد و درک، پذیرش و انجامِ تعمیم در هنگام محاسبات، جمعِ تعدادی جمله از یک دنباله‌ی هندسی، به کمک تساوی (۴)، به مسئله‌ی تعیین اول یا مرکب بودن اعداد مربوط می‌شود. باید چنین مثال‌هایی را از قدرت تعمیم، در کلاس هشتم مورد توجه قرار داد.

موضوع دیگری که در برنامه درسی جبر مهم به شمار می‌آید، حل معادله است. موضوعی که در تاریخ جبر هم نقش مهمی در پیشبرد این علم داشته است. معادله خطی $4x+1=2x-3$ را درنظر بگیرید. معمولاً در جبر مدرسه‌ای، x را متغیر در نظر می‌گیریم و با انجام کارهای زیر، معادله را حل می‌کنیم:

مرحله اول: $(-2x)+4x+1=(-2x)+2x-3$

مرحله دوم: $2x+1=-3$

مرحله سوم: $2x+1+(-1)=-3+(-1)$

مرحله چهارم: $2x=-4$

مرحله پنجم: $x=-2$

جواب ۲-، جواب درستی است، اما با کمی دقت مشخص می‌شود که *این پنج مرحله هیچ معنایی ندارد*. برای مثال مرحله اول را درنظر بگیرید. از آنجایی که x مقداری است که *تغییر* می‌کند، چگونه می‌توانیم بگوییم دو مقدار $4x+1$ و $2x-3$ که هر کدام با

تغییر x تغییر می‌کنند، با هم برابرند[۳]؟ و چطور می‌توانیم بگوییم که این دو مقدار پس از اضافه کردن $-۲x$ (چیزی که خودش مقداری متغیر است) به هر کدام، همچنان با هم برابر می‌مانند؟ در واقع برای عبور از مرحله ۱ به مرحله ۲، در هر دو طرف تساوی از خاصیت شرکت‌پذیری جمع و نیز خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع استفاده کردیم. در هر طرف تساوی جملات شامل x را با هم جمع کردیم. دانش‌آموزان این قوانین را در حساب خوانده‌اند، اما آنجا این قوانین برای اعداد درست بود. کجا برای آن‌ها توضیح داده شده است که می‌توان این قوانین را برای مقدارهای متغیر هم استفاده کرد؟ این تغییر ناگهانی از محاسبه با اعداد مشخص، به محاسبه با اعداد نامعلوم، ممکن است در درک دانش‌آموزان ناسازگاری ایجاد کند. ریاضیات قرار است طریقه استدلال کردن را به دانش‌آموزان بیاموزد یا از بَر کردن و تکرار آنچه را که می‌بینند؟

این مورد، یکی از مثال‌های بسیاری است که نشان می‌دهد ریاضیات مدرسه‌ای چه‌طور در گذر دانش‌آموز از حساب به جبر گسست ایجاد می‌کند. در اینجا مقصر اصلی رویکردی در آموزش جبر است که پای «متغیرها» را وسط می‌آورد. این رویکرد، برای ادامه کار، ناگزیر به سوء استفاده از خاصیت‌هایی می‌شود که در حساب کاربرد داشتند. این گسستِ توجیه‌ناپذیر را می‌توان با کمک ایده *حساب تعمیم‌یافته*، به صورت زیر اصلاح کرد.

اول باید مشخص کنیم که یک «معادله» چیست. معادله $۴x + ۱ = ۲x - ۳$ به این معناست که سؤالی داریم: آیا عددی چون x وجود دارد که $۴x + ۱ = ۲x - ۳$؟ چنین عددی را جواب معادله $۴x + ۱ = ۲x - ۳$ می نامیم. دقت کنید که هیچ حرفی از «متغیر» به میان نیامده است و تنها با عددها سروکار داریم. برای حل معادله، فرض کنیم چنین عددی وجود دارد. تأکید می‌کنم که x اینجا یک عدد است. پس داریم تساوی دو عدد $۲x - ۳$ و $۴x + ۱$ را بررسی می‌کنیم و مراحل ۱ تا ۵، گزاره‌های پی در پی در مورد اعداد است و هر کدام نتیجه‌ای منطقی از مرحله قبل. در آخر به این نتیجه می‌رسیم: اگر معادله $۴x + ۱ = ۲x - ۳$ جوابی داشته باشد، این جواب، ۲- است. این به ما نمی‌گوید ۲- جواب این معادله است. بلکه برای اثبات این موضوع باید در معادله x را با ۲- جایگزین کنیم و ببینیم که واقعاً دو طرف تساوی با هم برابر هستند. به این ترتیب تمام مراحل ۱ تا ۵ به عنوان عملیات حسابی بر روی اعداد معلوم یا نامعلوم قابل توضیح است. عملیاتی که از درستی آن‌ها اطمینان داریم. پس حل معادله (همان طور که مشخص شد هر نوع معادله‌ای) بخشی از *حساب تعمیم‌یافته* است.

باز هم تأکید می‌کنم که در این راه حل، هیچ «متغیری[۴]» وجود ندارد (برای توضیح بیشتر در این موضوع بخش ۳,۱ وو (b۲۰۱۶) را ببینید).

امیدوارم توضیحات قبل مشخص کرده باشد که چرا می‌گویم جبرمدرسه‌ای همان *حساب تعمیم‌یافته* است: این جبر همان حساب است در سطحی مجردتر. برنامه درسی بایستی هرجا که امکانش هست، فرآیند تجرید را در حساب مدرسه‌ای بگنجاند تا فاصله میان حساب و جبر کم شود. استفاده از نمادها هرجا که موقعیتش فراهم باشد، یکی از گام‌های تجرید است. از همه مهم‌تر این نکته است که استنتاج به کاری جاری و روزمره در حساب بدل شود، چرا که ساختار ریاضیات (در هر سطحی) بر پایه استنتاج بنا شده است. شکست برنامه درسی معمول آمریکا[۵] در برآورده کردن این پیشنیازها علت به وجود آمدن گسست بین حساب و جبر مدرسه‌ای است

---

[۳] برای مثال چون x تغییر می‌کند، می‌تواند برای مثال صفر باشد؛ در این صورت $۴x + ۱ = ۱$ و $۲x - ۳ = -۳$ و در نتیجه $-۳ = ۱$!!

[۴] تاکید می‌کنم که متغیر یک مفهوم ریاضی نیست، نقطه، سر خط! اگر دانش‌آموزان به گونه‌ای آموزش داده شوند که با نمادها درست کار کنند، نیازی نخواهند داشت که نگران این باشند که «متغیر» چیست (وو b۲۰۱۶، بخش ۱,۱).

[۵] از سال ۲۰۱۸، بیشتر مدارس آمریکا تلاش خواهند کرد که از برنامه‌ی درسی مشترکی (Common Core) استفاده کنند. اینکه نتیجه‌ی این تصمیم چه خواهد بود هنوز معلوم نیست.

و این گسست به یادگیری جبر آسیب می‌رساند. در قسمت دوم، ویکی‌نوشت ۱۰، به این امر خواهیم پرداخت که حساب را چگونه بهتر درس دهیم.

مراجع

Common Core (۲۰۱۰). *Common Core State Standards for Mathematics*. Retrieved from: http://www.corestandards.org/Math/

Schmid, W. and Wu, H. (۲۰۰۸) The major topics of school algebra (March ۳۱, ۲۰۰۸). https://math.berkeley.edu/~wu/NMPalgebra۷.pdf

Wu, H. (۲۰۱۶b). *Teaching School Mathematics: Algebra*. Providence, RI: American Mathematical Society. Its ***Index*** is available at: http://tinyurl.com/haho۲v۶

Wu, H. (to appear). *Rational Numbers to Linear Equations*, *Algebra and Geometry*, and *Pre-Calculus, Calculus, and Beyond*.

☆**مترجم:** نازنین حسن‌نیا؛ دبیر ریاضی تهران.

ویراستار: امیرحسین اصغری؛ دانشیار دانشگاه جان مورس لیورپول انگلیس.

ویرایش متن، آماده و خوشگل‌سازی فایل پی-دی-اف: شراره تقی دستجردی؛ خانه‌ی ریاضیات اصفهان.