

از حساب به جبر

قسمت دوم: چگونه حساب را بهتر درس دهیم؟^۱



هانگ-هسی وو

دی‌ماه ۹۷

(نوشته شده برای ویکی‌نوشت)

در قسمت اول، ویکی‌نوشت ۹، اشاره کردیم که تاکنون تمرکز اصلی حساب در برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه‌ای بر انجام محاسبه‌های دقیق با اعداد معلوم بوده است. از طرفی، در مدرسه، تمرکز جبر مقدماتی نیز بر محاسبات است، ولی محاسبات با اعداد معلوم و نامعلوم و با تکیه بر قوانین جابجایی، شرکت‌پذیری جمع و ضرب، و توزیع‌پذیری. علاوه بر این، جبر شروع توجه به الگوهای کلی است که در مورد همه اعداد درست‌اند. اکنون در قسمت دوم، به مشکل دانش‌آموزان در گذر از حساب به جبر می‌پردازیم.

برنامه‌ی معمول ریاضیات مدرسه‌ای چندان توجهی به این مشکل ندارد. بعضی از آموزشگران، با آگاهی از سختی این گذر، پیشنهاد کرده‌اند که «تفکر جبری» در سال‌های اولیه‌ی آموزش مدرسه‌ای مورد توجه قرار گیرد (برای مثال، بلانتون، ۲۰۱۸؛ کاپوت، ۲۰۰۸؛ و کایرن، ۲۰۰۴). نمی‌توان در نیت آنها شک کرد؛ ولی همچون همه‌ی موارد دیگر در آموزش ریاضی، نیت خوب کافی نیست چرا که کیفیت چگونگی انجام آن در جزئیات نهفته است. با توجه به اینکه برنامه‌ی آموزش مدرسه‌ای جبر در آمریکا اساساً نادرست است (به وو، ۲۰۱۶) به خصوص بخش‌های ۱،۱، ۱،۲، ۱،۳، ۱،۴، ۱،۵، ۲،۷، ۸،۴ و ۴،۱۰ (نگاه کنید)^۲، اولین قدم ما این خواهد بود که در یابیم معنی «تفکر جبری» در زمینه‌ی چنین برنامه‌ی نادرستی چه می‌تواند باشد، چرا که «چگونگی درک ما از جبر، چگونگی جبرورزی ما را تعیین خواهد کرد (کاپوت، ۲۰۰۸، ص. ۸). علاوه بر این، توصیه‌های مرسوم برای تشویق به تفکر جبری در مدرسه، معمولاً با اضافه کردن عناصر جدید به برنامه‌ی جاری حساب (برای مثال، مسئله‌های موسوم به فکری) همراه‌اند و آنچه معیوب است همان گونه که بود، دست نخورده باقی می‌ماند.

ما بر این باوریم که راه حل ساده‌تر این است که روی آموزش حساب سالم متمرکز شویم به جای اینکه سعی کنیم آنچه را که هست دست‌کاری کنیم. باور ما این نیست که آموزش حساب سالم، هدف نهایی است (هر چند هیچ شکی در اهمیت آن وجود ندارد). سودمندی حساب سالم در این است که سگویی برای شروع جبر خواهد شد (هفت توصیه زیر با هدف روشن کردن این نگاه نوشته شده‌اند). علاوه بر این، قابلیت یادگرفته شدن حساب سالم بیشتر از حساب معیوب است و نیاز به یادآوری این امر نیست که دانش‌آموزانی که حساب را به درستی یادگرفته‌اند آمادگی بیشتری برای یادگیری جبر دارند.

در ادامه تلاش خواهیم کرد که از کلی‌گویی در مورد برنامه‌ی درسی حساب بپرهیزیم و فقط به موارد اساسی‌ای اشاره کنیم که باید در آموزش حساب تغییر کنند. به همین دلیل ناگزیریم که به شش کتابی^۳ که با هدف چنین تغییری نوشته شده‌اند به طور پی در پی اشاره کنیم (وو، ۲۰۱۱، ۲۰۱۶، ۲۰۱۶b، در دست انتشار). در واقع، این کتاب‌ها با هدف ایجاد تغییرات کلی و همه‌جانبه در محتوای

^۱ وو، هانگ-هسی (دی‌ماه ۱۳۹۷)، از حساب به جبر، قسمت دوم: چگونه حساب را بهتر درس دهیم؟، ویکی‌نوشت شماره ۱۰.

*مایلم از لری فرانسیس به خاطر بحث‌ها و تصحیح‌ها و از امیر اصغری برای پیشنهادهای ارزشمندش تشکر کنم.

^۲ همین حرف را می‌توان درباره کلیت برنامه‌ی درسی کنونی ریاضی در آمریکا گفت (وو، ۲۰۱۸، بخش ۲،۳ و پیوست ۲). اگر چه به نظر نمی‌رسد آمریکا تنها کشوری باشد که دارای چنین مشکلاتی در برنامه‌ی درسی است.

^۳ نسخه‌های اولیه‌ی این کتاب‌ها به طور رایگان در فضای مجازی در دسترس است (وو، ۲۰۰۰؛ ۲۰۰۱؛ ۲۰۱۰a؛ ۲۰۱۰b).

ریاضی مدرسه‌ای نوشته شده‌اند^۴. اما تمرکز نوشته‌ی حاضر فقط بر روی تغییراتی^۵ است که باید در آموزش حساب ایجاد شود تا مسیر دانش‌آموزان به جبر هموار گردد.

(۱) باید برای الگوریتم‌های استاندارد حساب، (علاوه بر تصاویر و قیاس‌ها) توضیحات ریاضی متناسب با هر پایه‌ی تحصیلی ارائه شود. به طور خاص باید بر اهمیت قوانین جابجایی و شرکت‌پذیری جمع در الگوریتم‌های استاندارد جمع و تفریق (وو ۲۰۱۱، ص. ۶۸؛ وو ۲۰۰۰، ص. ۴۶ و ص. ۴۹) و همچنین بر نقش اساسی قانون توزیع‌پذیری در الگوریتم‌های استاندارد ضرب و تقسیم طولانی (وو ۲۰۱۱، ص. ۸۵؛ وو ۲۰۰۰، ص. ۶۲، ص. ۶۶، و ص. ۸۲) تأکید کرد. پس از آشنایی با چرایی درستی الگوریتم‌ها، دانش‌آموزان درک بهتری از آنها و چگونگی عملکرد آنها پیدا خواهند کرد (وو، ۲۰۱۱، فصل ۲؛ وو ۲۰۰۰، فصل ۲). در حال حاضر، یکی از دلایلی که معلم‌ها و دانش‌آموزان این قوانین را جدی نمی‌گیرند این است که برنامه‌ی حساب هیچ استفاده‌ی ریاضی جدی‌ای از آنها نمی‌کند. در نتیجه تنها خاصیت این قوانین آن است که باید برای کسب نمره‌ی خوب در آزمون‌های سراسری حفظ شوند.

(۲) حتی در حساب، دانش‌آموزان باید تجربه‌ای از تجرید و ساختار کسب کنند. در واقع، پیغام اصلی چهار الگوریتم استاندارد این است که اگر یاد بگیریم چگونه با اعداد تک رقمی محاسبه کنیم، قادر خواهیم بود هر محاسبه‌ای را با دیگر اعداد طبیعی، هر چقدر هم که بزرگ باشند، انجام دهیم (وو ۲۰۱۱، فصل ۳ و در سراسر فصل‌های ۴ تا ۷؛ وو ۲۰۰۰، صص. ۳۸-۴۰). اگر این پیغام را به دانش‌آموزان یادآوری کرده و در موقعیت‌های مختلف به آن اشاره کنیم، آنگاه، آنها نه تنها متوجه‌ی ارزش یادگیری الگوریتم‌ها خواهند شد، بلکه تجربه‌ای از تفکر مجرد به‌دست خواهند آورد و وقتی به جبر می‌رسند کمتر شوکه خواهند شد (در واقع، اگر معلم‌ها مجبور بودند که پیغام اصلی را به طور مکرر در تدریس خود یادآوری کنند، شاید در قانع کردن دانش‌آموزان برای حفظ کردن جدول ضرب موفق‌تر می‌شدند).

(۳) به همین ترتیب، اهمیت معنای برابری کسرها (وو، ۲۰۱۱، فصل ۱۳؛ وو ۲۰۱۶، بخش ۱،۳؛ وو ۲۰۰۱، بخش ۳) باید به دانش‌آموزان تأکید و نقش آن در همه‌ی آنچه به کسرها مربوط است، پررنگ شود: نقش صریح آن در مقایسه‌ی کسرها (وو ۲۰۱۶، صص. ۳۱-۳۵؛ وو ۲۰۰۱، بخش ۵)، جمع و تفریق کسرها (وو ۲۰۱۶، بخش ۱،۴؛ وو ۲۰۰۱، بخش ۶) و ضرب و تقسیم کسرها (وو ۲۰۱۶، بخش‌های ۱،۵ و ۱،۶؛ وو ۲۰۱۰، صص. ۳۳-۳۷ و ص. ۷۲). بدون درک نقش محوری مفهوم مجرد برابری کسرها، محاسبه‌های مربوط به کسرها مهارت‌هایی جدا از هم خواهد بود و دانش‌آموزان می‌پندارند که تنها استفاده از قضیه‌ی برابری کسرها، در ساده کردن کسرهاست.

(۴) اعشاری‌های متناهی باید به عنوان دسته‌ی خاصی از کسرها (کسرهای اعشاری) تعریف و آموزش داده شوند (وو ۲۰۱۱، بخش ۱۲،۳؛ وو ۲۰۱۰، صص. ۲۰-۲۲). این روش هم از لحاظ تاریخی و هم از لحاظ آموزشی صحیح است؛ فقط از این نقطه نظر است که چهار عمل اصلی روی اعشاری‌ها و به خصوص ضرب اعشاری، واضح خواهد شد و البته که وضوح، شرط لازم برای قابل یادگیری بودن است (وو ۲۰۱۱، بخش ۱،۲، ص. ۱۴، ص. ۲۵۶، ص. ۲۶۹؛ وو ۲۰۱۱، بخش ۱،۴؛ وو ۲۰۱۰، صص. ۴۸-۴۹، ۵۶-۶۶).

^۴ هدف این است که آنچه را من ریاضیات کتاب درسی مدرسه (وو ۲۰۱۸، بخش ۲،۳ و پیوست ۲) می‌نامم به طور کلی از تمام مقاطع تحصیلی حذف کرد. شش کتاب مورد اشاره با این هدف نوشته شده‌اند که نشان بدهند می‌توان ریاضیات کتاب درسی را با ریاضیات سالم و در عین حال متناسب با مقطع تحصیلی مورد نظر جایگزین کرد.

^۵ چون این مقاله کوتاه است، به ناچار، بعضی از مفاهیم مهم در برنامه‌ی حساب مدرسه به خصوص مفاهیم سرعت ثابت (b۲۰۱۶، بخش ۲،۷) و شیب (b۲۰۱۶، بخش ۳،۴)، در اینجا مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

و ۷۶-۷۹). با درک این که دو دسته‌ی به نظر متفاوت از اعداد، اساساً یک چیز هستند، فرصت دیگری را برای دانش‌آموزان فراهم می‌کند تا اهمیت تجرید و ساختار را تجربه کنند.

(۵) باید تأکید شود که اعمال مربوط به کسرها در راستای اعمال مربوط به اعداد طبیعی قرار دارد (وو، ۲۰۱۱، صص. ۱۷۳-۱۷۴، ۲۲۱، ۲۶۲، و ۲۸۴-۲۸۶؛ وو ۲۰۰۱، صص. ۴۶، ۶۳، ۸۱-۸۲). این که درک این هم‌راستایی، قابلیت یادگیری کسرها را افزایش خواهد داد چنان آشکار است که نیاز به هیچ توضیحی نیست. آنچه به همان اندازه اهمیت دارد ولی کمتر آشکار است این موضوع است که این هم‌راستایی، تجربه‌ی دیگری از درک تجرید و ساختار را برای دانش‌آموزان فراهم می‌کند: آنچه در اعداد طبیعی یاد می‌گیرند به آنها کمک خواهد کرد که کسرها را یاد بگیرند چرا که این موضوع‌ها شبیه به هم هستند. مدتی باور بر این بود که «کسرها، اعدادی بسیار متفاوت از اعداد طبیعی هستند»؛ این باور نادرست مانعی برای یادگیری کسرها است (در سال‌های اخیر تلاش‌هایی برای کم‌رنگ کردن این باور انجام گرفته است؛ به Common Core، ۲۰۱۰ نگاه کنید).

(۶) آموزش کسرها باید به روشی متناسب با پایه‌ی تحصیلی به تجرید و عمومیت موضوع وفادار باشد. هم اکنون تقریباً باور عمومی بر این است (برای مثال Common Core، ۲۰۱۰) که از لحاظ آموزشی، مؤثرتر است که کسرها به طور مشخصی تعریف شوند، مثلاً به عنوان نقطه‌ای روی محور اعداد (جنسن، ۲۰۰۳؛ وو، ۲۰۰۱) به جای این که به دانش‌آموزان بباورانیم که یک کسر، هم یک قطعه پیتزا است، هم تقسیم است، و هم نسبت. اگر تلاش کنیم که واقعیت‌های مختلف مربوط به کسرها را به طور موجز و دقیق ارائه دهیم، دانش‌آموزان به طور طبیعی (و به تدریج) با عمومیت و استفاده از نمادها آشنا خواهند شد. می‌توان با ریاضیاتی سالم کسرها را این چنین ارائه داد^۶ (جنسن، ۲۰۰۳؛ وو، ۲۰۱۱، قسمت ۲). برای مثال، قضیه‌ی تساوی کسرها، گزاره‌ای است که بیان می‌کند برای هر کسر $\frac{m}{n}$ و برای هر عدد طبیعی c ,

$$\frac{m}{n} = \frac{cm}{cn}$$

به همین ترتیب «ضرب ضربدری» صورت و مخرج دو طرف یک تساوی را (که یکی از مهم‌ترین مهارت‌ها در کار با کسرهاست) می‌توان به این شکل بیان کرد که برای هر دو کسر، $\frac{m}{n}$ و $\frac{k}{l}$ ، رابطه‌ی $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$ هم ارز است با $ml = kn$ (و همچنین، در فرایند یادگیری این مهارت است که دانش‌آموزان معنای «هم ارز است» را یاد خواهند گرفت). فرمول جمع دو کسر *د/خواه* به شکل زیر است:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{(ml + kn)}{nl}$$

و به همین ترتیب برای فرمول‌های دیگر. دانش‌آموزانی که در معرض چنین بیان نمادینی از کلیت قرار دارند، مسیر هموارتری را به سمت جبر طی خواهند کرد.

(۷) بالاخره، ما باید همه‌ی تلاش خود را به این امر معطوف کنیم که برای هر ادعایی در حساب، *دلیلی ارائه دهیم*. در حساب می‌توان با حفظ و تمرین کردن مهارت‌ها، محاسبات را به درستی انجام داد. اما به سختی می‌توان جبر را با حفظ کردن یادگرفت. جبر حساب تعمیم‌یافته است و موضوع کلیدی آن بیان گزاره‌های کلی درباره‌ی اعداد است (بیشتر اوقات همه‌ی اعداد). استدلال تنها

^۶ روش معرفی کسرها در وو (۲۰۱۶) اندکی پیچیده‌تر است. ولی ناچار بودم آن را ذکر کنم چون همان روش، مورد استفاده‌ی استانداردهای برنامه‌ی درسی قرار گرفت.

وسيله برای پيمودن قلمرو جبر است و بنابراین ما ناچاريم از همان روز اول دانش‌آموزان را در معرض استدلال قرار دهيم (وو ۲۰۱۱، a۲۰۱۶، b۲۰۱۶).

در این دو ويکی‌نوشت کوتاه، ما تلاش کردیم که معنای جبر را به عنوان حساب تعمیم‌یافته روشن کنیم (ويکی‌نوشت ۹) و برای بهبود برنامه‌ی درسی حساب پیشنهادهایی ارائه دهيم که عبور دانش‌آموزان را از حساب به جبر هموار می‌کند (ويکی‌نوشت ۱۰). نباید تظاهر کنیم که انجام چنین اصلاحاتی آسان است چرا که نیازمند توسعه‌ی حرفه‌ای و پایدار معلمان و خلق کتاب‌های درسی خوب برای دانش‌آموزان است؛ اما باید تلاش کرد.

یک موضوع روشن است. استراتژی حذف تجرید از حساب، با این هدف طراحی شده است که به دانش‌آموزان القا کند که می‌توانند در نبرد با محاسبات پیروز شوند، بدون این که نیاز به انجام تفکر انتزاعی داشته باشند. متأسفانه این استراتژی باعث می‌شود دانش‌آموزان در مواجهه با نمادها، تجرید و تعمیم دچار شوک شوند. این استراتژی باعث شکست دانش‌آموزان در مواجهه با جبر می‌شود. اگر ما برنامه‌ی درسی حساب را اصلاح نکنیم، ما هم در همان مواجهه شکست می‌خوريم.

مراجع

- Blanton, M. L. (۲۰۱۸) Empowering Children to Think Algebraically. Retrieved from: <https://tinyurl.com/ybs^sm^h>
- Common Core (۲۰۱۰). *Common Core State Standards for Mathematics*. Retrieved from: <http://www.corestandards.org/Math/>
- Jensen, G. (۲۰۰۳). *Arithmetic for Teachers*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- Kaput, J. (۲۰۰۸). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carragher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*, ۵-۱۷. New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C. (۲۰۰۴). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, ۸, ۱۳۹-۱۵۱. Retrieved from: <https://tinyurl.com/ybsnlycr>
- Wu, H. (۲۰۰۰). Chapter ۱: Whole Numbers (Draft) (July ۱۵, ۲۰۰۰; Revised September ۱, ۲۰۰۲). <https://math.berkeley.edu/~wu/EMI^1c.pdf>
- Wu, H. (۲۰۰۱). Chapter ۲: Fractions (Draft) (June ۲۰, ۲۰۰۱; Revised September ۳, ۲۰۰۲). <https://math.berkeley.edu/~wu/EMI^2a.pdf>
- Wu, H. (۲۰۱۰a). Pre-Algebra (Draft of textbook for teachers of grades ۶-۸) (April ۲۱, ۲۰۱۰). <https://math.berkeley.edu/~wu/Pre-Algebra.pdf>
- Wu, H. (۲۰۱۰b). Introduction to School Algebra (Draft of textbook for teachers of grades ۶-۸) (August ۱۴, ۲۰۱۰).
- Wu, H. (۲۰۱۱). *Understanding numbers in elementary school mathematics*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- Wu, H. (۲۰۱۶a). *Teaching School Mathematics: Pre-Algebra*. Providence, RI: American Mathematical Society. Its Index is available at: <http://tinyurl.com/zjugv1۴>
- Wu, H. (۲۰۱۶b). *Teaching School Mathematics: Algebra*. Providence, RI: American Mathematical Society. Its Index is available at: <http://tinyurl.com/haho^۲v^6>

Wu, H. (۲۰۱۸). The content knowledge mathematics teachers need, in Mathematics Matters in Education. Essays in Honor of Roger E. Howe, Y. Li, J. Lewis, and J. Madden (eds.). Springer, Dordrecht (۲۰۱۸). ۴۳-۹۱. [https://math.berkeley.edu/~wu/Contentknowledge\A.pdf](https://math.berkeley.edu/~wu/Contentknowledge%20A.pdf)

Wu, H. (to appear). Rational Numbers to Linear Equations, Algebra and Geometry, and Pre-Calculus, Calculus, and Beyond.



☆ مترجم: امیرحسین اصغری؛ دانشیار دانشگاه جان مورس لیورپول انگلیس.

ویرایش متن، آماده و خوشگل سازی فایل پی-دی-اف: شراره تقی دستجردی؛ خانه ریاضیات اصفهان.