

توانمند کردن کودکان در تفکر جبری^۱



ماریا بلانتون

مهرماه ۹۷

(نوشته شده برای ویکی‌نوشت)

برای بسیاری از افراد، تجربه برخورد با جبر در ریاضیات مدرسه‌ای توأم با حس ناکامی یا حتی ترس بوده است. تمثیل جبر به «نگه‌بان دروازه» که بیش از دو دهه پیش توسط شونفلد (۱۹۹۵) به کار گرفته شد، اشاره به واقعیتی گسترده داشت، دست کم در ایالات متحده و در مدارسی که به طور سنتی به جبر می‌پرداختند، جبر فرصت‌های کار در زمینه‌های مرتبط با STEM را از تعداد زیادی از دانش‌آموزان گرفته بود. این موضوع، به‌ویژه، برای آن دسته از دانش‌آموزانی که در وضعیت اقتصادی-اجتماعی پایین هستند، احساس می‌شد (موسز و کاب، ۲۰۰۱).

انگیزه ایجاد شده برای تبدیل جبر از یک «موتور ایجاد نابرابری» به یک قدرت ریاضی (کاپوت، ۱۹۹۸) به بازتعریف مفهوم یاددهی و یادگیری جبر منجر شد که به صورت یک رویکرد درازمدت از پایه‌های دبستان آغاز می‌شود و ایده‌های غیررسمی کودکان درباره ساختارهای جبری و روابط را، به شکلی طبیعی‌تر به تفکر جبری رسمی می‌رساند.

چشم‌انداز این تحول، سؤالات مهمی را مطرح کرده که موضوع پژوهش‌های زیادی بوده است: چنین رویکردی به یاددهی و یادگیری جبر، چگونه در پایه‌های دبستان ظاهر می‌شود؟ آیا کودکان قادرند به شیوه‌ای که به‌طور سنتی در دانش‌آموزان بزرگتر دیده می‌شود، فکر کنند؟ چنین رویکردی، چه تأثیری بر آمادگی جبری دانش‌آموزان دوره متوسطه دارد؟ و با توجه به این که معلمان دبستان نقش مهمی در تغییر آموزش جبر خواهند داشت، چگونه باید برای ایجاد محیط مناسب یادگیری جبر آماده شوند تا ناکامی‌های گذشته دانش‌آموزان تکرار نشود؟

برای پاسخ دادن به این سؤالات، لازم است مشخص کنیم می‌خواهیم کودکان چه چیزی را به عنوان «جبر» یاد بگیرند. همان‌طور که کاپوت (۲۰۰۸) استدلال می‌کند، «آنچه ما فکر می‌کنیم جبر است، تأثیر زیادی بر نحوه برخورد با آن، به عنوان معلم، مدیر، پژوهشگر، آموزشگر، توسعه‌دهنده برنامه‌درسی، ارزیاب مواد آموزشی، طراح ارزشیابی، سیاست‌گذار و غیره دارد». ما از تحلیل محتوای جبر کاپوت (۲۰۰۸) به عنوان چارچوب مفهومی استفاده می‌کنیم. جبر ابتدایی حول چهار محور تفکر جبری سازمان‌دهی می‌شود: تعمیم، بازنمایی، توجیه و استدلال با ساختار و روابط ریاضی (بلانتون، بریزولا و همکاران، ۲۰۱۸).

در دهه گذشته، ما روی شناسایی مسیرهای تفکر جبری کودکان، پیرامون این محورهای اصلی کار کردیم؛ این کار را با سایر پژوهش‌های موجود در این زمینه تلفیق نموده و مداخلاتی برای کاهش اثر بازدارنده جبر در ریاضیات مدرسه‌ای برای پایه‌های دبستان طراحی کرده‌ایم. آنچه که ما در مورد توانایی تفکر جبری بچه‌ها به دست آوردیم، هم چشمگیر و هم تا حدی شگفت‌آور بود. با این که تفکر جبری برای دانش‌آموزان در هر سنی چالش‌های خودش را دارد، درگیر شدن دانش‌آموزان با این محورهای اصلی از مهدکودک – آغاز تحصیل رسمی – و پس از آن، هم ممکن و هم امیدوارکننده است. در ادامه، ابتدا برخی از یافته‌های گسترده‌تر را بیان می‌کنم و سپس روی دو فعالیت تمرکز می‌کنم که هر کدام می‌توانند مستقیماً، نقطه ورود به آموزش [جبر] باشند و بینش‌های مهمی را نسبت به تفکر جبری کودکان نشان دهند.

^۱ بلانتون، ماریا (مهرماه ۱۳۹۷)، توانمند کردن کودکان در تفکر جبری، ویکی‌نوشت شماره ۷.

ایجاد ابزارهای مؤثر در به چالش کشیدن اثر «بازدارنده» جبر

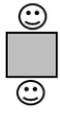
هدف اصلی ما طراحی مداخلاتی است که به واسطه آن‌ها بتوانیم اثرات پایدار آموزش ابتدایی جبر را بر درک کودکان از مفاهیم و محورهای اصلی جبر و آمادگی آن‌ها برای جبر دوره متوسطه، اندازه‌گیری کنیم. برنامه درسی ما، LEAP، شامل ۱۸ درس پی‌درپی برای هر کدام از پایه‌های ۳ تا ۵ است که دانش‌آموزان را با چهار محور اصلی تفکر جبری در حیطه‌های مهم و متفاوت موضوعات ریاضی با استفاده از ایده‌ها، موضوعات و بازنمایی‌هایی که رفته رفته، پیچیده‌تر می‌شوند، درگیر می‌کند. تأکید درس‌ها بر توسعه معنا، حین توضیحات شفاهی و کتبی دانش‌آموزان از تفکر جبریشان است.

ما (بلانتون، ایسلر و همکاران، ۲۰۱۷)، در مطالعات تجربی، دریافتیم که درک مفاهیم و محورهای اصلی جبر در دانش‌آموزانی که LEAP قسمتی از آموزش معمول کلاسشان است، به‌طور معناداری از دانش‌آموزانی که به‌طور سنتی با برنامه درسی متمرکز بر محاسبات آموزش می‌بینند، بهتر است. دانش‌آموزان همراه با LEAP به‌طور معناداری قادر بودند که علامت تساوی را به‌عنوان نماد یک رابطه تفسیر کنند، خاصیت‌های عملیات را تشخیص دهند و آن‌ها را با استفاده از نمادها برای متغیرها بازنمایی کنند، برای ادعاهای ریاضی که بسیار عمومی‌تر و پیچیده‌تر از بررسی یک مثال عددی هستند، استدلال کنند، مقادیر مجهول را در موقعیت‌های ریاضی به رسمیت بشناسند و با عبارت‌های جبری بازنمایی کنند، رابطه‌های تابعی را تعمیم دهند و با کلمات و از طریق نمادگذاری برای متغیرها، بازنمایی کنند. همچنین ما به‌طور شگفت‌آوری دریافتیم که دانش‌آموزان در بازنمایی توابع با استفاده از نماد برای متغیرها، نسبت به بازنمایی با کلمات خود، موفق‌تر عمل می‌کنند. این مطلب حاکی از آن است که استفاده از نمادها برای متغیرها می‌تواند ابزار مهمی برای استدلال جبری کودکان باشد، هر چند تردیدهایی نسبت به آن وجود دارد.

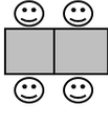
به مثال زیر که روشن‌کننده رشد توانایی دانش‌آموزان در تعمیم و بازنمایی رابطه‌ها - دو محور اصلی تفکر جبری - است، توجه کنید. در «مسئله برادی» (شکل ۱ را ببینید)، از دانش‌آموزان سؤالات متنوعی پرسیده شده است، مثلاً این که آیا می‌توانند رابطه بین تعداد میزها و تعداد دانش‌آموزانی را که می‌توانند پشت میزها بنشینند، پیدا کنند و این رابطه را با کلمات یا با استفاده از نمادها برای متغیرها، بازنمایی کنند.

برادی می‌خواهد تولدش را در مدرسه جشن بگیرد. او می‌خواهد مطمئن باشد، برای هر کسی صندلی وجود دارد. میزهایی که بچه‌ها دور آن می‌نشینند، مربعی شکل است.

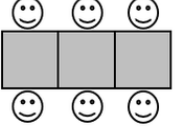
او می‌تواند دو نفر را به این شکل، دور یک میز بنشانند.



اگر او یک میز به میز اولی بچسباند، می‌تواند چهار نفر را بنشانند.



اگر او یک میز دیگر را به میز دومی بچسباند، می‌تواند شش نفر را بنشانند.



شکل ۱: مسئله برادی

در جدول ۱، بازنمایی‌های یک دانش‌آموز در طول پایه‌های ۳ تا ۵ آمده است. این جدول نشان می‌دهد که ایده‌ها به تدریج پیچیده‌تر شده‌اند و از عدم تشخیص یک الگو یا رابطه در آغاز پایه سوم، به درکی روشن و بازنمایی رابطه تابعی مربوط (با کلمات و متغیرها) در پایه پنجم رسیده‌اند. به این ترتیب او از نگاه «پیش‌متغیر / پیش‌نماد» که در آن، نه کمیتی متغیر در موقعیت‌های مسئله می‌دید و نه درکی از نمایش متغیر با استفاده از نماد داشت، گذر کرد و به این نگاه رسید که متغیرها به عنوان کمیت‌های مختلفی هستند که می‌توانند مانند یک شیء ریاضی عمل کنند (بلانتون، بریزولا، گاردینر و ساری، ۲۰۱۷).

زمان	رابطه (کلمات)	رابطه (متغیر)
ابتدای پایه سوم	من سه تا میز گذاشتم با چهار تا بچه دور هر کدام و شد ۱۲ بچه	؟
انتهای پایه سوم	تعداد میزها با ۱ شمرده می شود. تعداد آدمها با ۲ شمرده می شود.	؟
انتهای پایه چهارم	این هر بار با خودش جمع می شود.	$A \times 2$
انتهای پایه پنجم	تعداد آدمها دو برابر تعداد میزها است.	$d \times 2 = p$

جدول ۱: جوابهای یک دانش آموز به مسئله برادی در طول پایه های ۳ تا ۵

جالبترین یافته ما این است که برنامه درسی LEAP، برای دانش آموزانی که در جمعیت های در معرض خطر هستند نیز مؤثر است. دانش آموزان شرکت کننده در LEAP که از لحاظ اقتصادی محروم بودند و در مدارس متنوع از لحاظ جمعیتی تحصیل می کردند، به طور معناداری، نسبت به هماتایان خود که با برنامه درسی مرسوم محاسباتی آموزش دیده بودند، عملکرد بهتری داشتند (بلانتون، استرود و همکاران، ۲۰۱۸). این مطلب به ما نوید می دهد که LEAP (یا هر برنامه درسی جبر ابتدایی) این قابلیت را دارد که اثر بازدارنده جبر را کم کند و فرصت بیشتری را برای موفقیت در ریاضی برای همه دانش آموزان فراهم آورد.

دو فعالیت ساده که دریچه های مهم به تفکر جبری کودکان هستند

معلمان دبستان اغلب، به اندازه کافی، برای تلفیق جبر ابتدایی با تمرین های روزانه خود به روش معمول آماده نیستند. دو فعالیت زیر نمونه ای از فعالیت هایی هستند که می توانند نقطه ورود را برای معلمان مهیا کنند.

تکلیف علامت تساوی

درک رابطه ای علامت تساوی، یعنی درک آن به عنوان یک نماد که نشان می دهد دو شیء ریاضی در دو طرف آن با هم برابرند، در هر دو حوزه حساب و جبر، اساسی است. با این حال مستندات به خوبی نشان می دهند که دانش آموزان در پایه های دبستان - و بعد از آن، - اغلب این نماد را عملیاتی، یعنی به عنوان یک علامت برای انجام محاسبات سمت چپ می بینند (به طور مثال استفان، ایس، بلانتون و بریزولا، ۲۰۱۷).

ما (و دیگران) برای این که بفهمیم دانش آموزان علامت تساوی را رابطه ای می بینند یا عملیاتی، از معادله های باز استفاده کرده ایم. فعالیت ساده ای را مانند $4 + \dots = 3 + 7$ در نظر بگیرید. این فعالیت طوری طراحی شده که در دو طرف تساوی، عملگر وجود دارد و مقدار مجهول در سمت راست تساوی است. دانش آموزانی که علامت «=» را عملیاتی می بینند، مقدار مجهول را ۱۰ (که $3 + 7$ است) یا ۱۴ (که $4 + 3 + 7$ است)، به دست می آورند. دانش آموزانی که علامت تساوی را رابطه ای تفسیر می کنند، مقدار مجهول را به یکی از دو روش جمع کردن ۷ و ۳ و کم کردن ۴ از حاصل، یا تشخیص این که ۴، یکی بیشتر از ۳ است، پس مقدار مجهول باید یکی کمتر از ۷ باشد، محاسبه می کنند و عدد ۶ را به دست می آورند. زیبایی چنین فعالیت هایی فقط این نیست که جنبه های معناداری از وجود (یا عدم) تفکر جبری دانش آموزان را آشکار می کند، بلکه این فعالیت ها، برای آموزش هم ساده هستند.

علاوه بر این، ما دریافتیم که این فعالیت ها می توانند نقطه ورودی سازنده، برای توسعه حرفه ای معلمان باشند: درخواست از معلمان برای جمع آوری داده های مربوط به پاسخ های دانش آموزان به چنین فعالیت هایی، می تواند نقطه شروعی قدرتمند برای بحث درباره معنی جبری فکر کردن کودکان باشد. و سؤالاتی مانند این که کودکان چگونه به این فعالیت پاسخ دادند؟، این پاسخ چه چیزی درباره درک آن ها از تساوی را نشان می دهد؟، چگونه می توان چنین فعالیت هایی را در آموزش به کار

گرفت؟، چه ابزار واقعی یا مجازی ای می تواند نگاه رابطه ای را به این علامت، توسعه دهد؟ و چرا درک دانش آموزان از تساوی، در حساب و جبر اهمیت دارد؟، می تواند به معلمان کمک کند که معنی آموزش مفاهیم جبری به کودکان را عمیق تر درک کنند. معلمها معمولاً از این که بچه ها با چنین «فعالیت های ساده ای» به طور قابل ملاحظه ای به چالش می افتند، شگفت زده می شوند؛ همین دلیل، ما را به این رساند که همین فعالیت ها می توانند «قلاب» راحتی برای ترغیب معلمان به فکر کردن درباره جبر در پایه های دبستان باشند.

ریاضی وار کردن یک مجهول

کودکان در پایه های دبستان با فعالیت هایی که در آن ها باید روی معلوم ها، عملیاتی انجام دهند و مجهول را پیدا کنند، کاملاً آشنا هستند. فعالیت هایی مانند «اگر مارتا ۴ شکلات داشته باشد و مادرش ۶ تا دیگر به او بدهد، او روی هم چند شکلات دارد؟»، در ریاضی پایه های دبستان پرتکرار هستند و قطعاً می توانند به نحو سازنده ای برای ساختن تفکر محاسباتی دانش آموزان استفاده شوند. ولی چه اتفاقی می افتد اگر یکی از معلوم های چنین فعالیتی را به مجهول تبدیل کنیم: «اگر مارتا یک جعبه شکلات داشته باشد و مادرش ۶ تا شکلات دیگر به او بدهد، چگونه می توانی توضیح دهی که او روی هم چند شکلات دارد؟»

گرچه دست کاری انجام گرفته در این فعالیت، ساده است (تغییر یک مقدار معلوم شکلات به جعبه شکلات مارتا)، اما بیان ریاضی مسئله ای که در آن یک مجهول به عنوان قسمتی از صورت بندی مسئله آمده است، برای کودکان بسیار چالش برانگیز است.

فراوانی مطالعاتی که مشکل دانش آموزان با متغیرها (و استفاده از نماد برای متغیرها) را در جبر رسمی در پایه های بالاتر نشان می دهند، نیاز کودکان را به درگیر شدن با موقعیت های ریاضی ای مانند مسئله تغییر یافته مذکور که در آن با عملیات، روی مقدارهای کاملاً معلوم، مواجه نیستند، برجسته می کند.

در مسئله تغییر یافته شکلات های مارتا، معمولاً کودکان ابتدا عددی برای تعداد شکلات های درون جعبه مارتا تعیین می کنند (مثلاً مارتا ۵ شکلات در جعبه دارد)، هر چند که این کار شرایط مسئله را نقض می کند. دانش آموزان از طریق آموزش، متوجه می شوند که تعداد شکلات های جعبه می تواند در بازه ای (محدود) از مقادیر باشد. در نهایت، آنها تشخیص می دهند که مقدار، متغیر است و می تواند، از لحاظ نظری، هر عددی باشد (هرچند در موقعیت واقعی، انتظار داریم عدد معقولی باشد). چنین آموزش هایی که دانش آموزان را با مقادیر غیر ثابت و نامعلوم مواجه می کند، در ساختن درک آنها از مفهوم محوری «مجهول»، نقش مهمی ایفا می کنند.

دو نوع فعالیتی که در اینجا ارائه شد، می تواند نقطه شروعی آسان برای ترغیب معلمها، در زمینه یاددهی و یادگیری جبر در پایه های ابتدایی باشد. ما دریافتیم که این روند مانند یک سفر الهام بخش است که در آن، معلمان، جبر ابتدایی را نوآورانه و فراگیر می بینند و دیدگاه آن ها نسبت به دانش آموزان، یاددهی و ریاضی تغییر می کند. شاید مهم تر از آن، این است که دانش آموزان را توانمند و تشویق می کند که خود را همچون متفکرین ریاضی ببینند.

مراجع

- Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A., Sawrey, K. (۲۰۱۷). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics* 95(۲), ۱۸۱ – ۲۰۲, DOI ۱۰.۱۰۰۷/s۱۰۶۴۹-۰۱۶-۹۷۴۵-۰.
- Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N., & Stylianou, D. (۲۰۱۸). Implementing a framework for early algebra. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. (pp. ۲۷-۴۹). Hamburg, Germany: Springer International Publishing.
- Blanton, M., Isler, I., Gardiner, A., Stephens, A., Knuth, E., Stroud, R., & Strachota, S. (۲۰۱۷). *Growth in children's algebraic thinking: A grades 3-5 early algebra intervention*. Paper presented at the National Council of Teachers of Mathematics Research Conference, San Antonio, TX.

- Blanton, M., Stroud, R., Stephens, A., Gardiner, A., Knuth, E., Stylianou, D. (۲۰۱۸). *An Early Algebra Intervention for Upper Elementary Grades*. Paper presented at the National Council of Teachers of Mathematics Research Conference as part of the Symposium *Rigorous Research to Improve Learning in Elementary Math for All Students*, Washington, DC.
- Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (۲۰۱۱). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Heidelberg, Germany: Springer.
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (۲۰۰۷). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. ۲, pp. ۶۶۹–۷۰۰). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (۲۰۰۸). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. ۲۳۰-۲۷۲). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. (۱۹۹۸). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K–۱۲ curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics & Mathematical Sciences Education Board (Eds.), *The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: Proceedings of a National Symposium* (pp. ۲۰–۲۶). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.
- Kaput, J. (۲۰۰۸). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.
- Kaput, J., Carraher, D., & Blanton, M. (Eds.). (۲۰۰۸). *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Moses, R. P., & Cobb, C. E. (۲۰۰۱). *Radical equations: Math literacy and civil rights*. Boston: Beacon Press.
- Schoenfeld, A. H., (۱۹۹۰). Is thinking about 'Algebra' a misdirection? In C. Lacampagne, W. Blair & J. Kaput (Eds.), *The Algebra Colloquium. Volume 2: Working Group Papers* (pp. ۸۳-۸۶). Washington, DC: US Department of Education, Office of Educational Research and Improvement.
- Sfard, A. (۱۹۹۱). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, ۲۲(۱), ۱–۳۶. doi:۱۰.۱۰۰۷/BF۰۰۳۰۲۷۱۰
- Stephens, A. C., Ellis, A. B., Blanton, M., & Brizuela, B. M. (۲۰۱۷). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. In J. Cai (Ed.), *Third Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. ۳۸۶-۴۲۰). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.



مترجم

زهرا پندی، مجتمع آموزشی مفید

ویرایش متن، آماده و خوشگل سازی فایل پی-دی-اف

شاره تقی دستجردی؛ خانه ریاضیات اصفهان