نگاه سَلبی به اثبات[1]

متیو انگلیش

شهریورماه ۹۷

(نوشته شده برای ویکی‌نوشت)

اثبات، محور ریاضی و بنابراین آموزش ریاضی است. با این وجود، محققان بسیاری دریافته‌اند که دانش‌آموزان در فهمِ تفاوت بین استدلالی که می‌تواند اثبات نامیده شود و استدلالی که استدلال باقی می‌ماند، مشکلات اساسی دارند (برای نمونه هارل و سودر، ۱۹۸۸). اما آنها تنها گروهی نیستند که درگیر این مشکل‌اند: مشخص کردن شرایطی که در آن یک استدلال به عنوان یک اثبات در نظر گرفته می‌شود و شناسایی فرآیندهایی که ریاضیدانان برای رسیدن به این نظر طی می‌کنند، مسائل فلسفی دشواری هستند. در این مقاله، من ابتدا دو رویکرد موجود برای برخورد با این مسائل را به اختصار بیان می‌کنم. سپس رویکردی جدید را پیشنهاد می‌دهم که آن را *دیدگاه سَلبی*[۲] می‌نامم.

اثبات یک استدلال معتبر است.

در جست‌وجوی توصیف اثبات، اتخاذ موضعی صورتگرایانه[۳] و ادعای اینکه اثبات فقط یک استدلال ریاضی معتبر[۴] در یک زمینه‌ی نظری مشخص است، نقطه آغاز واضحی است (مانند ماریوتی، بارتولینی بوسی، بُئرو، فِری و گروئیت، ۱۹۹۷). اما اگر اعتبار، روش موفقیت‌آمیزی برای توصیف اثبات باشد، پس باید تعریف شود. رویکرد صورتگرایانه‌ی مرسوم، یک اثبات معتبر را به صورت دنباله‌ای از فرمول‌ها تعریف می‌کند که هر کدام یک اصل موضوعه[۵] است یا بر اساس قواعد استنتاج[۶] از فرمول‌های پیشین به دست آمده است. اما در عمل، اثبات‌های مجلات ریاضی و کتاب‌های درسی چنین نیستند.

---

[۱] انگلیش، متیو. (شهریور ۱۳۹۷). دیدگاه سلبی به اثبات. ویکی‌نوشت شماره ۶.

[2] Negative view
[3] Formalist position
[4] Valid mathematical argument
[5] Axiom
[6] Rules of inference

دیدگاه شاخص مشتق-نمای[7] آزونی (۲۰۰۴) تلاشی برای برخورد با این مشکل است. او بین "مشتقات" (که از اصول موضوعه شروع می‌شوند و جزئیات هر استنتاج منطقی را به تفصیل بیان می‌کنند) و "اثبات‌ها" (از آن دست استدلال‌هایی که در مجلات و کتاب‌های درسی ریاضی پیدا می‌شود) تفاوت می‌گذارد. آزونی بر این باور بود که بیشتر اثبات‌ها جزء مشتقات نبوده و بنابراین از برخی جهاتِ فنی معتبر نیستند. در عوض، پیشنهاد کرد که یک استدلال را می‌توان اثبات نامید اگر نشان دهد که بر یک مشتقِ معتبر استوار است و یک مشتق، معتبر است اگر هر گام در زنجیره منطقی‌اش، مطابق قواعد از یک زیرمجموعه گام‌های اولیه به همراه اصول موضوعه (که این مورد در اصل به صورت مکانیکی قابل بررسی است) به دست آید.

پیشنهاد آزونی در مورد اینکه ریاضیدان‌ها چگونه به این نظر می‌رسند، توضیحی نمی‌دهد: چگونه یک نفر تصمیم می‌گیرد که یک استدلال مشخص، مشتق-نماست؟ با توجه به تجربیات محدودی که ریاضیدانان با مشتقات دارند و طول بیش از حد آنها، بعید به نظر می‌رسد که هیچ توصیف روانشناختی[8] محتملی از اثبات بتواند به صراحت مشتقات را شامل شود (پلک، ۲۰۰۸). این شانس برای دانش‌آموزان، حتی ضعیف‌تر است؛ آنها سال‌ها قبل از اینکه با ایده مشتقات آشنا شوند (البته اگر اصلا با این ایده آشنا شوند)، با اثبات‌های "معتبر" مواجه می‌شوند. با این حساب، یک دانش‌آموز چگونه می‌تواند تعیین کند که یک استدلال مشتق-نماست؟ یک پاسخ محتمل این است که ادعا کنیم نه ریاضیدانان و نه دانش‌آموزان، مشتق-نمایی یک استدلال را به طور صریح ارزیابی نمی‌کنند، بلکه از روش جایگزین دیگری استفاده می‌کنند.

اما این پاسخ، یک سؤال واضح را مطرح می‌کند: اگر بتوان فرآیند نامعینی را (که صراحتاً به مشتقات مربوط نباشد) برای مشتق-نمایی به‌کار گرفت، آنگاه (الف) این فرآیند چیست؟ و (ب) آیا در مقایسه با مشتق-نمایی، توصیف اثبات به عنوان استدلالی که محک این فرآیند نامشخص را پشت سر می‌گذارد، به صرفه‌تر و از لحاظ روانشناختی محتمل‌تر نیست؟

اثبات یک استدلال قانع کننده است.

برای پاسخ به مسئله توصیف اثبات، مجموعه‌ی بزرگی از رویکردها بر دیدگاه اقناع[9] تکیه دارند. بر پایه این دیدگاه، هر استدلالی که مخاطبِ خود را قانع کند، یک اثبات است (مانند بالاشف، ۱۹۸۷؛ دیویس و هرش، ۱۹۸۳؛ هنا، ۱۹۹۱). با این آگاهی که مخاطبانِ اثبات، برای قانع شدن، از فرآیندهای بسیار متفاوتی استفاده می‌کنند (برای مثال هارل و سودر، ۱۹۹۸).

این تغییر موضع، تمرکز سؤال را از خود استدلال به سمت خواننده معطوف می‌کند. اگر خواننده قانع شد، استدلال یک اثبات خواهد بود، در غیر این صورت استدلال، اثبات محسوب نمی‌شود. اگر چه این ویژگی برای برخی جذاب است، به نظر دیگران

[7] Derivation-indicator
[8] Psychologically
[9] Conviction

یک نقطه ضعف محسوب می‌شود. برای مثال سلدن و سلدن (۲۰۰۳) اشاره کرده‌اند که اعتبار یک اثبات مستقل از خواننده است: «ریاضیدانان می‌گویند استدلالی که یک قضیه را اثبات می‌کند، قرار نیست آن را برای اسمیت یا احتمالاً برای جونز اثبات کند» (ص. ۱۱). آزونی (۲۰۰۴) مشاهده کرد که ریاضیدانان «بر سر متقاعدکننده بودن اثباتِ یک قضیه به راحتی با یکدیگر توافق می‌کنند» (ص. ۸۴) و اظهار نمود که چنین سطح بالایی از توافق، برای دیدگاه مبتنی بر اقناع، مشکل‌ساز است.

مشکل دوم این ماجرا در وجود استدلال‌هایی است که ریاضیدان‌ها را قانع می‌کند، اما ریاضیدان‌ها تمایلی ندارند که آنها را اثبات به حساب آورند. برای مثال، بررسی‌های تجربیِ فرضیه ریمان، درستی آن را بسیار موجه نشان می‌دهد (دو ساتوی، ۲۰۰۴) و به طور مشابه، استدلال‌های اکتشافی در مورد رد فرضیه پیوستار[10] قانع کننده‌اند (حداقل تا حدی، فرایلینگ، ۱۹۸۶).

می‌توان معیار قانع شدن را با معیارهای اضافی تکمیل کرد. نظریه "طرحواره‌های اثبات[11]" از هارل و سودر (۱۹۹۸) چنین رویکردی داشت. آنها در حالی که قانع شدن را اصل اثبات در نظر گرفتند، بر این موضوع نیز تأکید داشتند که دانشجویان باید تشویق شوند از طرحواره‌هایی استفاده کنند که توسط ریاضیدانان به عنوان استدلال‌های استنتاجی معتبر به اشتراک گذاشته می‌شوند. در نتیجه این رویکرد نه تنها توضیح نمی‌دهد که چرا استدلال‌های غیراستنتاجی، اثبات نیستند، بلکه به این سؤال در مورد رویکرد اعتباری نیز پاسخ نمی‌دهد: چه چیز تعیین می‌کند که یک استدلال استنتاجی، معتبر یا نامعتبر در نظر گرفته شود؟

دیدگاه سلبی

دو رویکرد فوق، یک ویژگی مشترک دارند: هر دو بر مشخصه‌های ایجابی[12] استوارند، بر آنچه اثبات است یا باید باشد (باید معتبر باشد، باید قانع‌کننده باشد و غیره). نویسنده‌ی آمریکایی نیل پستمن (۱۹۹۲) اظهار کرد که تعریف سلبیِ مفاهیمِ سخت، گاهی اوقات ثمربخش‌تر است. در اینجا، دو مثال به اختصار بحث می‌شود: سلامت و عدالت.

حرفه پزشکی مربوط به سلامتی است، اما سلامتی به چه معناست؟ چه زمان یک شخص سالم است؟ توصیف مشخصه‌های ایجابی سلامتی، واقعا دشوار است و پزشکان معمولاً از پاسخ به آن طفره می‌روند؛ در عوض می‌گویند یک مراجعه کننده سالم است اگر ناخوش و بیمار نباشد. در مقایسه با سلامتی، تعریف ایجابی بیماری سرراست است: یک شخص از بیماری «آ» رنج

---

10 Continuum Hypothesis
11 Proof schemes
12 Positive characterisations

می‌برد، اگر علائم «ب» را داشته باشد که در اثر «پ» ایجاد شده‌اند. نتایج این رویکرد سلبی بر اظهار نظر در مورد سلامتی چیست؟ من چندین مورد آن را طرح می‌کنم.

وقتی شخصی وضعیت وخیمی دارد، پزشکان متخصص، اختلاف نظر اندکی بر سر سلامتش دارند (اگر در فردی علائم فشارخون بالا در دراز مدت دیده شود، هیچ پزشکی سلامت او را تأیید نمی‌کند). در مقابل، وقتی یک نفر در وضعیت خطر کمتری است (مثلا گلودرد شدید دارد)، اگر اجباری برای دسته‌بندی فرد به "سالم" یا "بیمار" وجود داشته باشد، برخی از پزشکان دسته اول را انتخاب می‌کنند و برخی دومی را. به عبارت دیگر، وقتی شخصی به شدت بیمار است، اظهار نظر در مورد بیماری یا سلامت وی عینی[13] است (به این معنا که بین متخصصان اختلاف نظری وجود ندارد) و هنگامی که بیماری وخیم نیست، اظهار نظر وابسته به پزشک است (به این معنا که اختلاف نظر اساسی بین متخصصان وجود دارد).

دوم اینکه، افراد بسیار کمی (در صورت وجود) هستند که اصلاً هیچ مشکلی ندارند. تقریباً همه به نوعی "ناخوش"اند، خواه داشتنِ احساس درد در انگشتان باشد، خواه اندکی فشار خون بالا یا رژیم غذایی نامطلوب. پس چرا اصلاً یک پزشک متخصص از عنوان سالم برای افراد استفاده می‌کند؟ نظر من در پاسخ به این سؤال این است که یک پزشک یک فرد را سالم می‌نامد، اگر با وجود تلاش برای یافتن مشکلات پزشکی، نتواند یک بیماریِ به اندازه کافی جدی را برای زدن برچسب "بیمار"، به فرد شناسایی کند؛ اگرچه، یک «مشکل به اندازه کافی جدی»، به عوامل بسیاری وابسته است و شکی نیست که تشخیص جدیت آن در شرایط مختلف، متفاوت خواهد بود (جدی بودن مشکل گلودرد یک خواننده اُپرا نسبت به یک راننده اتوبوس که همان علائم را دارد، متفاوت خواهد بود).

سوم اینکه، یک پزشک هرگز نمی‌تواند کاملاً مطمئن باشد که فردی سالم است. همیشه این امکانِ هر چند جزئی وجود دارد که شخص معاینه شده، موردی ظریف اما جدی داشته که از قلم افتاده است. بنابراین اگر پرسیده شود که یک مراجعه کننده "بیمار" است یا "سالم"، انتظار داریم که پزشکان هنگام تشخیص بیماری، اطمینان بیشتری داشته باشند (چون مورد مشخصی پیدا کرده‌اند که از نظر آنها آن قدر جدی است که به فرد، برچسب"بیمار" اطلاق شود) در مقایسه با زمانی که تشخیص سلامتی می‌دهند (چون امکان دارد آنها موفق به پیدا کردن چنین موردی نشده باشند).

مشخصه‌های سلبی فقط در مورد دوگان بیماری/سلامتی به‌کار برده نمی‌شود؛ عدالت را در نظر بگیرید. اگرچه بر سر چیستی عدالت یا چگونگی تشخیص آن، توافقی وجود ندارد، نمونه‌های واضحی از بی عدالتی هست که همه بر سر غیرعادلانه بودن آنها توافق دارند و این مواردند که مورد توجه نظام قانونی هستند.

[13] Objective

حال چگونه این ملاحظات در پاسخ به سؤال مربوط به اثبات به ما کمک می‌کند؟ موضوعی که من مایل به بررسی آن هستم این است که آیا امکان دارد اعتبار یک اثبات با تعریف سلبی نسبت به تعریف ایجابی بهتر تبیین شود.

دیدگاه سلبی به اثبات

این تعریف را در نظر بگیرید:

(✻) یک استدلال ریاضی که مدعی برقراری یک نتیجه است، یک اثبات ریاضی نامیده می‌شود به شرط آن که افرادی که آن را ملاحظه کرده‌اند در آن هیچ اشکال مهمی پیدا نکرده باشند.

تعریف فوق (✻) بر چندین فرض استوار است:

اول اینکه همه استدلال‌های ریاضی، اشکالات بالقوه‌ای دارند. الف) امکان دارد این اشکالات واضح باشند: استدلال شامل یک استنتاج نامعتبر باشد (مثلاً، استفاده از آنچه باید اثبات شود)، یا بر اساس یک لمِ غلط باشد. ب) امکان دارد این اشکالات ظریف باشند: بین دو بخش اثبات، شکافی وجود دارد که توضیح ندارد و خواننده از چگونگی اتصال بین آنها مطمئن نیست. همان‌طور که پیش از این بحث شد، اشکالات نوع دوم برای اثبات‌های روزمره (یعنی، غیرمشتقات) حتماً اتفاق می‌افتند. اساساً، هیچ یک از چنین اشکالاتی لزوماً برای بی‌اعتبار کردنِ یک اثبات، به اندازه کافی جدی نیستند.

دوم اینکه، آنچه را که یک ریاضیدان یک اشکال جدی در نظر می‌گیرد به چند عامل ارتباط دارد: زمینه ریاضیاتی، زمینه تاریخی، زمینه اجتماعی و غیره. برای مثال پس از به اصطلاح دوره "بحران شهود[۱۴]" در اواخر قرن بیستم، بسیاری از اشکالات استدلال‌های ریاضی که پیش از آن جدی گرفته نمی‌شد، مورد بازنگری قرار گرفتند (هان، ۱۹۶۰/۱۹۳۳). به طور مشابه، زمینه اجتماعی در کنار زمینه تاریخی مهم است: شکاف رها شده در یک اثبات، ممکن است در سطح تحقیقاتی یک حذف بدیهی به حساب بیاید (حتی، اگر خوانایی متن را بالا ببرد، حذف مطلوب)، اما همان شکاف در برگه امتحانی یک دانشجو می‌تواند به اندازه کافی جدی باشد و اثبات را از اعتبار بیندازد (به عنوان مثال، وبر، ۲۰۰۸). محققان پیشین اظهار کرده‌اند که میان ریاضیدانان در مورد اعتبار اثبات‌های ادعا شده، اختلاف نظر وجود دارد (مانند دیویس و هرش، ۱۹۸۳). بنابر دیدگاه سلبی، وجود اختلاف نظرها در واقع اشاره به وجود و جدیت اشکالات احتمالی در اثبات ادعا شده دارد.

نتایج متعددی از تعریف بالا (✻) حاصل می‌شود:

[14] Crisis in intuition

اول اینکه وقتی یک ریاضیدان اعتبار یک اثبات را تأیید می‌کند، می‌توان کم و بیش نسبت به عدم وجود اشکالات جدی در آن مطمئن بود؛ اما هرگز نمی‌توان قطعا مطمئن بود که هیچ اشکال جدی‌ای وجود ندارد. مانند وقتی که پزشکی بگوید شخصی سالم است، همیشه این امکان با احتمال غیر صفر وجود دارد که یک اشکال جدی نادیده گرفته شده باشد.

دوم اینکه، وقتی یک ریاضیدان اعتبار یک اثبات را رد می‌کند، می‌توان مطمئن بود اشکالی وجود دارد که به نظر جدی می‌رسد. به عبارت دیگر، اعتبار یک اثبات برای اثبات نامعتبر می‌تواند عینی باشد (به این معنا که همه خوانندگان ذی صلاح با یکدیگر موافق خواهند بود)، اما برای اثبات‌های معتبر، وابسته به نظر شخص است (به این معنا که اثبات فقط به صورت شرطی، معتبر است: اگر شخصی در آینده در آن اشکالی پیدا کند از اعتبار می‌افتد). مشاهدات با یافته‌های تاریخی مطابقت دارد به طوری که در مواردی اعتبار "اثبات‌های" منتشر شده، بعدها رد شده است (دیویس و هرش، ۱۹۸۳؛ دی میلو و همکاران، ۱۹۷۹)، اما به ندرت پیش آمده که استدلالی که اعتبارش رد شده است، بعدها واقعاً معتبر دانسته شود.

آزمون تجربی دیدگاه سلبی

آیا می‌توان دیدگاه سلبی را به روش تجربی به بوته آزمایش گذاشت؟ من باور دارم که می‌توان. مانند پزشکان که روی بیماری یا سلامتی اظهار نظر می‌کنند، ریاضیدانی که اعتبار یک استدلال را رد می‌کند نسبت به ریاضیدانی که یک استدلال را معتبر ارزیابی می‌کند، باید اطمینان بیشتری به تصمیم خود داشته باشد. در حالت دوم، ریاضیدان یا هیچ اشکالی پیدا نمی‌کند یا چند اشکال جزئی می‌یابد که به نظرش اعتبار اثبات را زیر سؤال نمی‌برند. در هر دوی این موقعیت‌ها، خواننده نگران خواهد بود که شاید چند اشکال جدی ظریف در اثبات نادیده گرفته شده باشد. در مقابل، وقتی یک ریاضیدان معتقد است که اثباتی نامعتبر است، اشکال مشخصی وجود دارد که به اندازه کافی جدی به نظر می‌رسیده است. بنابراین انتظار می‌رود که اطمینان ریاضیدانان از درستی یک اثبات به چگونگی ارزیابی آنها از آن مرتبط باشد.

در واقع، این نتیجه‌ای است که دقیقا انگلیش، مخیا-راموس، وبر و الکاک (۲۰۱۳) بعد از آزمون این پیش‌بینی به دست آوردند. آنها از ۱۰۹ ریاضیدان خواستند که اثباتی از حسابان مقدماتی را بخوانند و ارزیابی کنند ("اعتبار" و "عدم اعتبار" آن را مشخص نمایند). از شرکت‌کنندگان خواسته شد که سطح اطمینان خود را نیز از اظهار نظرشان در یک مقیاس لیکرت پنج درجه‌ای (۱ تا ۵) گزارش کنند. دو نتیجه جالب به دست آمد. اول اینکه میان ریاضیدانان شرکت کننده در این تحقیق، توافق زیادی در مورد اعتبار اثبات کوتاهی از حسابان مقدماتی نبود: حدود یک چهارم آن را معتبر و سه چهارم نامعتبر دانستند. دوم اینکه میانگین اطمینان آنهایی که آن را نامعتبر ارزیابی کردند ۴.۱۶ از ۵ (که ۵ بیشترین اطمینان را نشان می‌دهد) بود، در حالی که میانگین اطمینان آنهایی که آن را معتبر ارزیابی کرده بودند ۳.۴۱ از ۵ بود (در سطح معناداری ۰.۰۰۱). زمانی که

این نتیجه از دیدگاه سلبی تفسیر شود، معنادار است: آنهایی که استدلال را نامعتبر ارزیابی کردند یک اشکال واضح پیدا کرده بودند و عدم اطمینانشان تنها به جدی بودن آن برمی‌گردد؛ در مقابل، آنهایی که استدلال را معتبر ارزیابی کردند به نوع دیگری عدم اطمینان داشتند: آیا اشکال جدی‌ای وجود دارد که آن را از قلم انداخته‌اند یا خیر.

من در اینجا فقط یک ایده اولیه را مطرح کردم؛ اینکه چگونه داشتن یک دیدگاه سلبی برای تفکر در مورد اثبات‌های ریاضی می‌تواند مفید باشد. برای آنکه این دیدگاه از لحاظ آموزشی یا فلسفی سودمند باشد، کار زیادی لازم است. توجه به چگونگی هماهنگی دیدگاه سلبی با دیگر دیدگاه‌های غیرسنتی نسبت به اثبات، به خصوص دیدگاه مبتنی بر گفتمان دیتیل نووایس (۲۰۱۸)، ارزشمند خواهد بود. به هر حال، وجود یافته‌های تجربیِ سازگار با پیش‌بینی‌های دیدگاه سلبی نشان می‌دهد که انجام این کار با ارزش است.

منابع

Azzouni, J. (2004), The derivation indicator view of mathematical practice. *Philosophia Mathematica*, *12*, 81-106.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 147-176.

Davis, P., & Hersh, R. (1983). *The mathematical experience*. Harmondsworth: Penguin.

Davis, P. (1972). Fidelity in mathematical discourse: Is one and one really two? *American Mathematical Monthly, 79*, 252-263.

de Millo, R. A., Lipton, R. J., & Perlis, A. J. (1979). Social processes and proofs of theorems and programs. *Communications of the ACM*, *22*, 271-280.

Dutilh Novaes, C. (2018). A Dialogical Conception of Explanation in Mathematical Proofs. In P. Ernest (Ed.), *The Philosophy of Mathematics Education Today* (pp. 81-98). Springer, New York.

du Sautoy, M. (2004). *The Music of the Primes: Why an unsolved problem in mathematics matters*. London: Harper Perennial.

Freiling, C. (1986). Axioms of symmetry: Throwing darts at the real number line. *Journal of Symbolic Logic, 51*, 190-200.

Hahn, H. (1933/1960). The crisis in intuition. In J. R. Newman (Ed.), *The world of mathematics* (Vol. 3, pp. 1956-1976). London: Allen and Unwin.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Dordrecht: Kluwer.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics III* (pp. 234-282). Providence, RI: American Mathematical Society.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., Weber, K., & Alcock, L. (2013). On mathematicians' different standards when evaluating elementary proofs. *Topics in Cognitive Science*, *5*, 270–282.

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., & Garuiti, R. (1997). Approaching geometry theorems in context: From history and epistemology to cognition. In E. Pekhonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 180-195). Lahti, Finland.

Pelc, A. (2008). Why do we believe theorems? *Philosophia Mathematica, 17*, 84-94.

Postman, N. (1992). *Conscientious objections: Stirring up trouble about language, technology and education*. New York: Vintage.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*, 4-36.

Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*, 431-459.

مترجم: فاطمه احمدپور؛ دانشجوی دکتری دانشگاه شهید باهنر کرمان و مدرس خانه ریاضیات اصفهان

ویرایش متن، آماده و خوشگل‌سازی فایل پی دی اف: شراره تقی دستجردی؛ مدرس خانه ریاضیات اصفهان