توجّه معلم کجاست،

توجّه دانش‌آموز کجا؟[1]

جان میسن

اردیبهشت ۹۷

(نوشته شده برای ویکی نوشت)

چکیده

در تعامل آموزشی معلم و دانش‌آموز، توجّه آنها لزوماً معطوف به یک چیز نیست و تنشی بنیادین میان ماهیت توجّه آنان وجود دارد. بخش زیادی از سوء تفاهم‌هایی را که در کلاس‌های درس رخ می‌دهد، می‌توان حاصل تفاوت‌های موجود میان این توجّه‌ها در نظر گرفت.

روش

روش من، اساساً پدیدارشناسی است. من به تجربه‌ی زیسته علاقه‌مندم و بهترین راه به اشتراک گذاشتن بینش‌های ریاضی و آموزشی‌ام را تحریک ذهن خوانندگان به وسیله فعالیت-تمرین‌هایی می‌دانم که برای خود من پرفایده بوده‌اند. سپس، این تجارب، بررسی و به تجارب دیگر و چارچوب‌های تحلیل و تمایز در تحقیق‌های موجود ربط داده خواهند شد.

طرح کلی

بعد از هر فعالیت، اضهارات کوتاهی درباره ماهیت و فرم توجّه در یادگیری ریاضی ارائه خواهد شد و سپس فعالیت‌های بعدی این امکان را فراهم خواهد کرد که تجربه‌ی شما با توضیحات من مرتبط شود.

فعالیت‌ها

فعالیت‌های زیر این امکان را فراهم خواهد کرد که متوجّه تغییر در مرکز توجّه خود یا تغییر در فرم و ماهیت چگونگی توجّه خود شوید.

مقیاس‌بندی خط اعداد

فعالیت ۱: مقایس‌بندی از صفر

یک خط اعداد در نظر بگیرید که اعداد صحیح روی آن علامت‌گذاری شده‌اند. تصوّر کنید که یک کپی شفاف انعطاف‌پذیر از آن خط روی آن قرار دارد.

عدد صفر را ثابت نگه دارید و تصوّر کنید خط انعطاف‌پذیر را با ضریب ۳ می‌کشید.

---

[1] میسن، جان (اردیبهشت ۱۳۹۷). توجّه معلم کجاست، توجّه دانش‌آموز کجا؟. ویکی نوشت شماره‌ی ۲.

عدد ۴ از خط انعطاف‌پذیر، کجای خط ثابت قرار می گیرد؟ عدد ۲- کجا قرار می‌گیرد؟
تعمیم دهید.

یادداشت

شاید ناگهان به خود بیاید و متوجّه شوید که چند لحظه‌ای است که فقط به کلمه‌های به‌کار رفته در فعالیت خیره شده‌اید. در این لحظه است که جزئیات فعالیت را تشخیص و آن را شروع می‌کنید.
شاید به این فکر کنید که یک خط بکشید و روی آن چیزهایی را که تغییر نمی‌کنند مشخص کنید. به این ترتیب، می‌توانید توجّه خود را به چیزهایی معطوف کنید که تغییر می‌کنند.
همان اتفاق ممکن است برای تصویر شما از خط اعداد بیافتد: شاید برای یک لحظیِ کوتاه به آن خیره شوید، قبل از اینکه چیز جدید و مرتبطی را تشخیص دهید و به آن خیره شوید و جزئیات دیگری را تشخیص دهید.

فعالیت ۱ – ادامه

دوباره خط اعداد را با کپی شفاف روی آن در نظر بگیرید. خط انعطاف پذیر را ۱۸۰ درجه حول نقطه‌ی صفر دوران دهید.
روش شسته و رفته‌ای بیابید که پیشبینی کند هر عدد دلخواه از خط انعطاف‌پذیر در کجای خط ثابت قرار خواهد گرفت.

یادداشت

دوران ۱۸۰ درجه حول نقطه‌ی صفر، همانند ضرب در ۱- است. توجّه کنید اگر دوباره از دوران ۱۸۰ درجه حول نقطه‌ی صفر استفاده کنید، اعداد به جای اول خود برخواهند گشت. عمل «ضربدر ۱-» اگر دوبار انجام شود هیچ اثری ندارد. به بیان دیگر ۱= (۱-)(۱-). با شروع از اینجا، می‌توان فعالیت‌های مفید دیگری را طرح کرد و توسعه داد: دوران حول نقاط مختلف، ترکیب دوران‌ها و بسیاری فعالیت‌های دیگر. فعالیت‌های زیر در همین راستا است.

فعالیت ۲: مقیاس‌بندی از نقاط دیگر

دوباره دو خط قبلی را در نظر بگیرید. این بار، ۲ را نقطه‌ی ثابت در نظر می‌گیریم ولی همچنان خط انعطاف‌پذیر را با ضریب ۳ می‌کشیم.
عدد ۴ از خط انعطاف‌پذیر کجای خط ثابت قرار می‌گیرد؟ عدد ۱- کجا؟
تعمیم دهید.

یادداشت

حداقل دو راه برای انجام این عمل وجود دارد. می‌توان به این توجّه کرد که این فاصله از ۲ است که در ۳ ضرب می‌شود. با این حساب، ۴ به ۲+۳×(۲-۴) می‌رود چرا که ما فاصله از ۲ را حساب می‌کنیم، آن را به مقیاس جدید می‌بریم و سپس محل آن را با توجّه به فاصله‌ای که از ۲ دارد علامت می‌زنیم. یا اینکه می‌توان از آنچه هم اکنون می‌دانیم استفاده کنیم: مقیاس‌بندی از صفر. در این روش، اول باید خط اعداد را طوری انتقال دهیم که ۲ روی صفر قرار بگیرد (برای این، ۲ را کم می‌کنیم). حالا، از صفر و با ضریب ۳ مقیاس‌بندی می‌کنیم (با ضرب در ۳). حالا دوباره خط را به جای خودش انتقال می‌دهیم (۲ را اضافه می‌کنیم تا صفر روی ۲ قرار بگیرد). بنابراین، ۴ به ۲+۳×(۲-۴) می‌رود. توجّه کنید که چطور ساختار استدلال با *انجام ندادن* محاسبات آشکار و با انجام دادن محاسبات پنهان

می‌شود. همچنین توجّه کنید که این کار (*ردیابی حساب*، میسن ۲۰۱۶) این امکان را فراهم می‌کند که همان مسیر را نه فقط روی ۴، بلکه روی هر عدد دیگری نیز دنبال کنیم، به این شکل که به ۴ نه به عنوان یک عدد بلکه به عنوان یک مکان نگه‌دار نگاه کنیم. اکنون اگر به جای ۴ از k استفاده کنیم، می‌دانیم که k به $(k-۲)\times ۳ + ۲$ می‌رود. به علاوه، اگر به ۲ همچون یک مکان نگه‌دار نگاه کنیم، ساختار دیگری آشکار می‌شود: مقیاس‌بندی از نقطه‌ای دلخواه. اگر مرکز مقیاس‌بندی را c بنامیم و به جای ۳ از ضریب مقیاس a استفاده کنیم می‌توانیم بگوییم: مقیاس با ضریب a از نقطه‌ی مرکزی c، نقطه‌ی k از خط را به مکان $a(k-c)+c$ می‌فرستد. دریافت و بیان رابطه‌ی میان نقطه‌ی k و مکان جدید آن بعد از مقیاس‌بندی، سؤال‌های زیاد تازه‌ای را ایجاد می‌کند. فرض کنید ضریب مقیاس‌بندی معلوم ولی مرکز آن مجهول است. اگر بدانید فقط یک نقط از خط کجا می‌رود می‌توانید مرکز مقیاس‌بندی را پیدا کنید. فرض کنید می‌دانید دو نقطه‌ی متفاوت از خط کجا می‌روند، آیا همیشه می‌توانید هم ضریب و هم مرکز مقیاس‌بندی را پیدا کنید؟

کمی درباره‌ی توجّه

هر فعالیت شما را به استفاده از دو عدد داده شده‌ی ۴ و ۱- دعوت و سپس تشویق به استفاده از مثال‌های خودتان می‌کند. هدف نه محاسبه کردن با چند مثال خاص، بلکه تجربه‌ی ساختار مسئله در هنگام کار با آن مثال‌هاست، دعوتی ضمنی برای *تشخیص رابطه‌ی* میان نقطه‌ی شروع و جایی که می‌رود. این تجربه می‌تواند منجر به *دریافت یک خاصیت* شود که مثالی از آن در اینجا تجربه می‌شود: مرکز مقیاس را از عدد اولیه کم کنید، حاصل را در ضریب مقیاس ضرب کنید، و سپس دوباره مرکز مقیاس را اضافه کنید. آنچه انجام می‌دهید، خود، مثالی از روش ریاضی *ترکیب کردن* یا به قول مزلاک (۱۹۸۳)، *میان‌بر زدن* است.
توجّه سطوح مختلفی دارد (میسن، ۲۰۰۲). در اینجا، تلاش من این است که توجّه شما را به تمایزهای میان ماهیت و فرم‌های توجّه در سطح خُرد جلب کنم:

- کلی‌گیری (خیره شدن)
- دیدن جزئیات
- تشخیص روابط
- دریافت خاصیت‌ها روی مثال‌ها
- استدلال بر اساس خواص مورد توافق

نمی‌توان قبل از دیدن جزئیات روابط بین آنها را تشخیص داد. جزئیات مختلف تشکیل دهنده‌ی کُل «گرفته شده» هستند، کُلی که به آن خیره شده‌ایم و جزئیات را در درون آن می‌بینیم. تنش میان معلم و دانش‌آموز در اینجا نهفته است.

تنش‌های بین معلم و دانش‌آموز

وقتی معلم «مثالی حل شده» را برای دانش‌آموز به نمایش می‌گذارد، معلم آگاه است که آن مثال و آن روش حل، مثالی از چیزی کلی‌تر است. بدون شک من از چینن کلیتی آگاه بودم وقتی از اعداد مختلف در *ردیابی حساب* استفاده کردم تا توجّه شما را نه به نقاط ۴ و ۱-، بلکه به رابطه‌ی میان یک عدد و محل نهایی آن تحت تبدیلی هندسی با بیانی جبری جلب کنم؛ و خود این فرایند نیز، برای من مثالی از خاصیتی کلی‌تر بود.

ولی یادگیرنده احتمالاً در سازوکار محاسبات گیر می‌کند درحالی که ذهنش درگیر «پیدا کردن جواب» است. بنابراین، توجّه او نه تنها به چیزی متفاوت، بلکه به جزئیاتی متفاوت است. تا زمانی که این تفاوت در توجّه وجود دارد، ارتباط، حتی در بهترین حالتش، شکننده است: یادگیرنده به درستی آنچه را که گفته می‌شود، نمی‌شنود و آنچه را که نوشته می‌شود، نمی‌بیند.

ادعای اصلی من این است که اگر توجّه معلم به یک چیز و توجّه دانش‌آموز به چیز دیگری باشد، بعید است که ارتباط آنها مؤثر باشد. حتی اگر توجّه هر دو آنها به یک چیز باشد (مثلاً، ۴ تحت مقیاس با ضریب ۳ و مرکز ۲ کجا قرار خواهد گرفت)، اگر ماهیت توجّه آنها متفاوت باشد، ارتباط بین آنها همچنان مؤثر نخواهد بود. منظور من از «تفاوت در ماهیت توجّه» مثلاً این است که نگاه معلم به تشخیص روابط است در حالی که دانش‌آموز یا خیره به نمودار است یا در تلاش برای دیدن جزئیاتی است که معلم به آنها ارجاع می‌دهد؛ معلم ممکن است به مثال‌ها همچون مثال‌هایی از خاصیتی کلی‌تر نگاه کند در حالی که دانش‌آموز همچنان درگیر تشخیص روابط در موقعیت جاری است، یا اینکه همچنان مشغول تمیز دادن جزئیات و شاید خیره شدن به آنها است.

معلم باید یادگیرندگان را مشاهده کند و به دقت به آنها گوش دهد. باید ردّ توجّه آنها را بگیرد و به ماهیت آن توجّه کند. فقط در این صورت است که می‌تواند آنچه را که لازم است بگوید و آن حرکتی را که لازم است انجام دهد. عجله اثری کمتر از فرصت خواهد داشت، فرصتی برای خیره شدن، دیدن جزئیات و تشخیص روابط بین جزئیات تمیز داده شده که خود ممکن است نیازمند زمانی برای خیره شدن باشند.

فعالیت‌های بیشتر

این بخش فرصتی است تا با مواجه شدن با ریاضیاتی کمی چالش‌برانگیز، تغییرات در توجّه خود را به دام بیاندازید و متوجّه پیچیدگی‌های بیان شده در بخش قبلی شوید.

واضح است ترکیب مقیاس‌بندی‌هایی که یکی بعد از دیگری انجام می‌شوند با حاصل‌ضرب ضریب‌های مقیاس‌بندی یکی است. اگر خط اعداد را با ضریب s و آنگاه با ضریب r مقیاس‌بندی کنیم، نتیجه نهایی با مقیاس‌بندی با ضریب rs معادل است.

فعالیت ۳: مقیاس‌بندی مرکب

دوباره خط اعداد با کپی شفاف روی آن را در نظر بگیرید.

ابتدا با ثابت نگه داشتن ۲، خط انعطاف‌پذیر را با ضریب ۳ بکشید.

اکنون با ضریب $\frac{۱}{۲}$ کپی شفاف را بکشید اما نقطه ثابت را نقطه متناظر با ۵، روی خط اصلی در نظر بگیرید.

عدد ۴ کجا می‌رود؟ عدد ۱- کجا؟

کدام تک مقیاس‌بندی (با کدام مرکز) اثری برابر با این دو مقیاس‌بندی خواهد داشت؟

یادداشت

به طور شهودی، تک ضریب مقیاس‌بندی باید برابر $\frac{۳}{۲}$ باشد. مرکز (نقطه‌ی ثابت) مقیاس‌بندی را پیدا کنید. خیلی کار آسانی نیست!

هشدار: راه حل لو خواهد رفت

به طور جبری، فرض کنید c مرکز مورد نظر باشد. مقیاس‌بندی از نقطه c و با ضریب $\frac{3}{7}$، نقطه‌ی n را به نقطه‌ی $(n-c)\times\frac{3}{7}+c$ می‌فرستد. به راحتی می‌توانیم این را به شکل $c\left(1-\frac{3}{7}\right)+n\times\frac{3}{7}$ بنویسیم. اولین مقیاس‌بندی n را به نقطه‌ی $(n-2)\times 3+2$ می‌فرستد و دومین مقیاس‌بندی این نقطه را به $\left((n-2)\times 3+2-5\right)\times\frac{1}{7}+5$. این را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم:

$$n\times\frac{3}{7}+2(1-3)\times\frac{1}{7}+5\left(1-\frac{1}{7}\right)$$

اما برای هر عددی که به جای n استفاده کنیم، این باید همان چیزی باشد که از تک مقیاس مورد جستجو حاصل خواهد شد، این یعنی $\left(1-\frac{3}{7}\right)c=2(1-3)\times\frac{3}{7}+5(1-\frac{1}{7})$. از این معادله c را پیدا می‌کنیم.

توجّه کنید که اعداد به‌کار رفته همه با هم فرق داشتند و محاسبات انجام نشد تا اعداد نقش مکان نگه‌دار را ایفا کنند و *ردیابی حساب* امکان‌پذیر شود. به این ترتیب، اگر اولین مرکز c_1 و اولین ضریب مقیاس‌بندی s_1 باشد و دومین مرکز c_2 و دومین ضریب مقیاس بندی s_2 ، فرمول عددی بالا را می‌توان به شکل زیر تعبیر کرد:

$$(1-s_1s_2)c=c_1(1-s_1)s_2+c_2(1-s_1)$$

با حل معادله برحسب c خواهیم داشت:

$$c=\frac{(1-s_1)(c_1s_2+c_2)}{(1-s_2s_1)}$$

با توجّه به عدم تقارن بین نقش‌های c_1 و c_2 می‌توان دید که اگر ضریب مقیاس s_1 را با مرکز c_2 و ضریب مقیاس s_2 را با مرکز c_1 به‌کار ببریم جواب نهایی متفاوت خواهد بود. به بیان فارسی، در ترکیب مقیاس‌بندی‌ها، ضرایب جابجا می‌شود ولی مراکز (اگر متفاوت باشند) جابجا نمی‌شوند.

اگر $s_1s_2=1$ چه اتفاقی می‌افتد؟ مرکز تک مقیاس‌بندی حاصل کجا خواهد بود؟

یادداشت

احتمالا خیلی وسوسه شُدید که به جای پیدا کردن یک ضریب و یک مرکز مقیاس (معادل با دو مقیاس مختلف با دو مرکز مختلف) به خواندن ادامه دهید. اگر بر این وسوسه غلبه نکرده باشید، فرصتی را از دست داده‌اید، چرا که تجربه‌ی شما از راه حل مسئله تجربه‌ای دست دوّم یا حتی شاید دست سوّم باشد (با توجّه به اینکه من برای نوشتن راه حل در اینجا ملاحظات آموزشی زیادی را در نظر داشته‌ام). بدون تجربه‌ی شخصی، پریدن در آنچه توسط دیگران انجام شده دور انداختن فرصتی مهم است، فرصتی که خود مثالی از مشاهده‌ی آموزشی کلی‌تری است ::*توضیح-به-خود* یا *روایت شخصی (*رنکل ۲۰۰۲؛ هادز، آلکاک و اینگُلز، ۲۰۱۵)، سهمی مهم در غنی‌سازی شبکه‌ی روابط ایفا می‌کند و این چیزی است که به آن «یادگیری» گویند.

فعالیت ۳ -ادامه: روایت شخصی

فرصتی برای بررسی درک شخصی خود از مسئله و قدردانی از آن: اگر ترتیب انجام مقیاس‌بندی‌ها را عوض کنیم، مرکز تک مقیاس کلی کجا خواهد بود؟ تحت چه شرایطی، مراکز این دو ترتیب مختلف برابر خواهند بود؟

این فعالیت فرصتی دیگر است برای تجربه‌ی جنبه‌های مختلف توجّه و فرصتی برای بیان آنچه شاید یکی از مهم‌ترین عمل‌های آموزشی مورد اشاره در این ویکی نوشت باشد: از فعالیت‌ها برای تشویق و تهییج یادگیرنده‌ها به بیان روایت شخصی‌اشان استفاده کنید، داستان

آنها از آنچه اتفاق می‌افتد، و از آنچه با تغییر شرایط اتفاق خواهد افتاد. آنها به شرطی چیزی را درک خواهند کرد و قدردان آن خواهند شد که بتوانند آن را در زمینه‌ای کلی‌تر قرار دهند.

منابع

Hodds, A. Alcock, L. & Inglis, M. (۲۰۱٤). Self-Explanation Training Improves Proof Comprehension. *Journal for Research in Mathematics Education*. ٤٥(۱), pp. ٦٢-۱۰۱.

Mason, J. (۲۰۰۲). *Researching Your own Practice: The Discipline of Noticing*. Routledge Falmer, London.

Mason, J. (۲۰۱٦). Overcoming the Algebra Barrier: being particular about the general, and generally looking beyond the particular, in homage to Mary Boole. In S. Stewart (Ed.) *And the Rest is Just Algebra*. Springer pp. ۹۷-۱۱۷.

Melzak, Z. (۱۹۸۳). *Bypasses: a simple approach to complexity*. New York: Wiley.

Renkl, A. (۲۰۰۲) Worked-out examples: Instructional explanations support learning by self-explanations. *Learning and Instruction*, *12*, pp. ٥۲۹–٥٥٦.

کمی در مورد ترجمه

ترجمه‌ی فوق نه به صورت جمله به جمله بلکه با توجّه به بلوک‌های معنایی انجام شده است. به این معنی که هر تعداد جمله پی در پی که یک معنی را می‌رساندند به عنوان واحد ترجمه در نظر گرفته شد. علاوه بر این، متن ترجمه شده در موارد بسیار کمی با متن اصلی تفاوت‌هایی دارد چرا که متن اولیه حدود ۴۰۰۰ کلمه بود و متن ترجمه شده با هماهنگی جان میسن به ۲۰۰۰ کلمه کاهش پیدا کرد. به همین دلیل هرازگاهی برای برقراری ارتباط بهتر بین جمله ها جمله ی کوچکی به متن اضافه شده است بدون هیچ گونه تغییری در معنای مورد نظر نویسنده.

مترجمان

- امیر حسین اصغری؛ دانشگاه لیورپول جان مورس
- مریم عادلی ساردو؛ خانه‌ی ریاضیات کرمان

ویرایش متن، آماده و خوشگل سازی فایل پی-دی-اف

شراره تقی دستجردی؛ خانه‌ی ریاضیات اصفهان