اجی
مجی
جبر[1]

در این مقاله‌ی کوتاه درباره یک وبلاگِ جبر (https://algrabya.blogspot.co.uk/) که اخیراً آن را به راه انداخته‌ام، صحبت می‌کنم. وبلاگی که در آن در هر هفته، پنج‌تا فعالیت جبر می‌گذارم و درباره‌شان توضیح می‌دهم. همچنین نسخه‌ی روزانه‌ی فعالیت‌ها را روی توئیتر منتشر می‌کنم (با شناسه‌ی @ProfSmudge که نام مستعارم در کتاب‌های جیبی Maths Medicine است).

دیِتمر کوچمن

خرداد ۹۷

(نوشته شده برای ویکی‌نوشت)

فعالیت‌ها عموماً بالحاظ کردن دانش‌آموزان متوسطه‌ی اول طراحی شده‌اند، گرچه امیدوارم گروه‌های سنی دیگر و معلمان هم به آن‌ها بپردازند. من دو انگیزه از این کار دارم. من تقریباً بازنشسته هستم و باید کاری داشته باشم که بکنم! از آن مهم‌تر، گمان می‌کنم فعالیت‌های «خوب» جبر سخت پیدا می‌شوند، چه در کتاب‌های درسی و چه در توئیتر، پس سعی کردم چندتایی بنویسم. منظورم از فعالیت «خوب»، فعالیتی است که در ایجاد درک و فهم خوبی از جبر مفیدند، نه فعالیت‌هایی که بر رویه‌ها تمرکز دارند، گرچه هر وقت به دانش‌آموزان برای فهم بهتر جبر کمک کنیم، به آن‌ها در فهم بهتر رویه‌ها هم، یاری رسانده‌ایم. اگر با کلمات کایرن (۲۰۰۷) در دسته‌بندی جبر مدرسه‌ای (یعنی سه سطح تولیدی، تبدیلی و عمومی [2]) صحبت کنم، تمرکز اصلی‌ام بر سطح تولیدی است.

در طراحی فعالیت‌ها برای وبلاگ، مشخصاً بر کارهایم از ۲۰۰۸ بر روی پروژه‌ی پژوهش طراح ICCAMS [3] تکیه کرده‌ام، جایی که کمک می‌کردم منابع آموزشی با هدف دانش آموزان متوسطه‌ی اول تولید شود. با این حال سعی کرده‌ام که فعالیت‌هایی تولید کنم که خیلی شبیه فعالیت‌های ICCAMS نباشند.

جبر مدرسه معمولاً تکه‌تکه ارائه می‌شود و تأکیدش بر دستورزی با نمادهای جبری و اجرای رویه‌ها (برای حل کردن معادلات، یافتن شیب خط و مانند این‌ها)ست. متبحّر شدن در انجام این فعالیت‌ها می‌تواند توانایی‌هایی به همراه بیاورد، اما به نظر من معمولاً

---

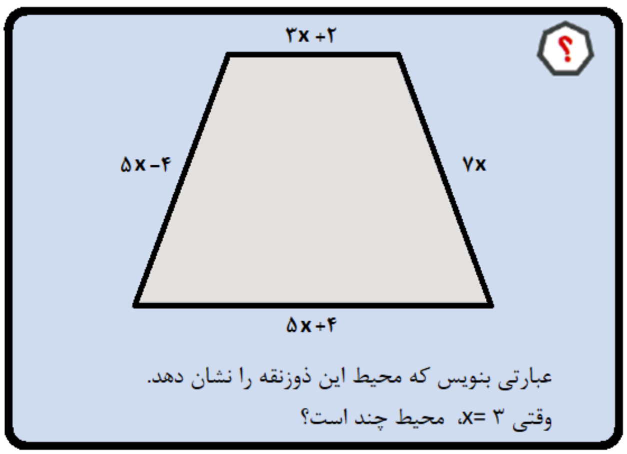
[1] کوچمن، دیتمر (خرداد ۱۳۹۷)، اجی مجی جبر، ویکی‌نوشت شماره ۳.

[2] Generational, Transformational, & Global/Meta level

[3] Increasing Competence and Confidence in Algebra and Multiplicative Structures; iccams-maths.org.

اتفاق برعکس رخ می‌دهد: معتقدم وقتی این فعالیت‌ها [نزد دانش‌آموز] بی‌هدف و بی‌معنا به‌نظر می‌رسند، دانش‌آموز را به‌شدت ناتوان می‌کنیم.

این تکلیف را در نظر بگیرید. امثالش در توئیتر و در کتاب‌های درسی فراوان‌اند، اما به نظر من بسیاری از ناکارآمدی‌های معمول در تکلیف‌های جبر مدرسه‌ای را دربردارد. نیّتِ پشتِ تکلیف این است که برای دانش‌آموزان فرصت دست‌ورزی جبری فراهم کند. استفاده‌ی گاه‌به‌گاه از چنین تکلیف‌هایی برای این هدف، شاید اشکالی نداشته باشد و شکی نیست که دانش‌آموزان هم می‌فهمند این تکلیف برای آن هدف طرح شده است. اما این تکلیف قطعاً پیام‌های دیگری به دانش‌آموزان خواهد رساند. اول از همه، اینکه جبر بی‌هدف و بی‌فایده است (آینلی و پرَت [۴]، ۲۰۰۲). چه شده است که طول ضلع‌های ذوزنقه به‌صورت این عبارت‌های جبری مختلف درآمده است؟ این مسئله معنای واضحی ندارد و به همین دلیل به‌سختی می‌توان هدفی برای یافتن محیط این شکل تصور کرد؛ نه هدف عملیِ حل کردن مسئله‌ای معنادار از «دنیای واقعی» و نه هدف جذاب کاوش بخشی جالب از ریاضی.



شرایط حتی از این هم بدتر است: زمینه‌ی هندسی‌ای که این تکلیف در آن طرح شده است، واقعاً علاقه‌ی کسی را برنمی‌انگیزد. این زمینه‌ی هندسی صرفاً ظاهرسازی‌ای است برای این حقیقت که ما از دانش‌آموز می‌خواهیم این چهار عبارت را با هم جمع کند. آیا این ظاهرسازی به جذابیت، مرتبط بودن [با بخش‌های مختلف ریاضی] یا معناداری بیشتر تکلیف، منجر می‌شود؟ گمان نمی‌کنم. از طرف دیگر، این وضعیت چه پیامی درباره‌ی ارزش و جایگاهی که برای هندسه قائل‌ایم، منتقل می‌کند؟

جا دارد بگوییم که عبارتی که برای محیط به دست می‌آید (یعنی $۲۰x + ۲$) آن‌قدر تروتمیز است که تکلیف می‌توانست نشانه‌ای بر کارایی جبر در ساده کردن اطلاعات باشد - البته اگه چنین هدفی در نظر گرفته می‌شد.

نقطه‌ی مثبت این تکلیف، شاید در قسمت دومش باشد: «اگر x برابر ۳ باشد، محیط چند است؟». این سؤال دست‌کم به بعضی از دانش‌آموزان، این ایده را منتقل می‌کند که x می‌تواند چندین مقدار بگیرد، یعنی می‌توانیم از یک حرف استفاده کنیم برای نشان دادن متغیر که - برخلاف آنچه معمولاً در جبر مدرسه‌ای دیده می‌شود - صرفاً عددی خاص که در ابتدا نامعلوم باشد، نیست.

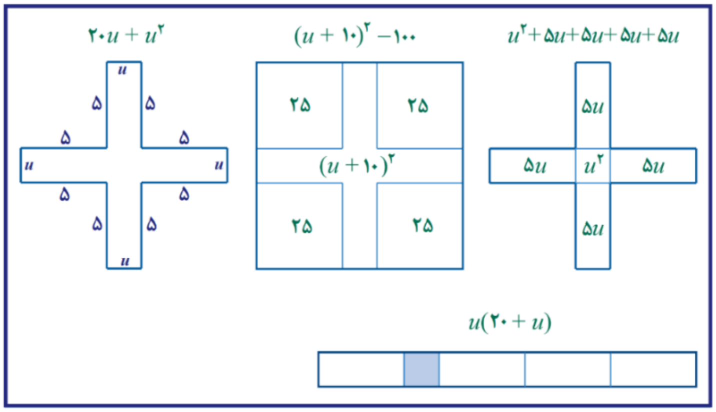
[4] Ainley & Pratt

اگر شأن هندسه را رعایت کنیم، می‌توانیم این تکلیف را نجات دهیم. برای $x = ۳$ واقعاً چه بر سر شکل می‌آید؟ آیا همچنان - همان‌طور که از شکلِ رسم‌شده برمی‌آید - متقارن است؟ آیا اصلاً ذوزنقه‌ای با قاعده‌هایی به‌طول‌های ۱۱ و ۱۹ واحد و ساق‌هایی به‌طول ۱۱ و ۱۲ واحد وجود دارد؟ می‌توان نتیجه گرفت که وجود ندارد! بدین‌ترتیب، بی‌توجهی طراحِ تکلیف به معناداری آن، بیشتر به چشممان می‌آید. اما هنوز می‌توانیم چیز خوبی از این مسئله بیرون بکشیم، اگر بررسی کنیم که به‌ازای چه xهایی، این شکل وجود دارد. می‌توانیم با عمق بیشتری هم سراغ این کار برویم، مثلاً با بررسی اینکه در اثر تغییر x به مقداری داده‌شده، چه بر سر طول هریک از ضلع‌ها و کل شکل می‌آید.

در یکی از مجموعه‌های پنج‌تایی تکلیف‌های گذاشته شده در وبلاگ، مساحت دو شکل صلیب‌مانند مقایسه می‌شد. در این دو شکل، طول‌های ضلع‌ها می‌توانند تغییر کنند. شکل زیر، دومین تکلیف از آن پنج‌تاست.

دقیقاً مثل تکلیف محیط ذوزنقه، می‌توان گفت که ما هیچ توجیهی برای وجود این دو شکل عجیب نیاورده‌ایم. از کجا آمده‌اند؟ آیا وجود دارند؟ شاید بتوانیم توجیهی عملی [برای اهمیت این تکلیف] اختراع کنیم، اما من دلیل می‌آورم که این تکلیف، پذیرفتنی است؛ زیرا جذاب است. تجسم کردن این شکل‌ها وقتی طول یکی از ضلع‌ها (یعنی u) تغییر می‌کند، چالش‌برانگیز است (البته جالب است که این تجسم بسیار آسان‌تر می‌شود وقتی شکل‌ها را گسترده‌ی مکعب‌مستطیل‌هایی بدون سقف تصور کنیم. این ایده را در نسخه‌ی ۳ بیان کرده‌ام). مقایسه‌ی مساحت شکل‌ها هم چالش‌برانگیز است: معلوم می‌شود که وقتی u تغییر می‌کند، مساحت‌ها با سرعت‌های متفاوتی تغییر می‌کنند و نسبت مساحت این دو شکل در مقدار مشخصی از u برعکس (؟) می‌شود. در مورد یکی از شکل‌ها، [رابطه‌یu با مساحت] خطی است و در مورد دیگری، از درجه‌ی ۲ است. برای فهمیدن این حقیقت، می‌توان به مکعب‌مستطیل‌های بدون سقفی که از شکل‌ها به‌دست می‌آیند فکر کرد: با تغییر u، یکی از مکعب مستطیل‌ها فقط بلندتر می‌شود اما در دیگری، قاعده (که مربع است) وسیع‌تر می‌شود (یعنی در دو جهت بزرگ می‌شود). در نسخه‌ی ۴، مساحت یکی از شکل‌ها را با عبارت $۲۵ + ۲۰u$ بیان می‌کنیم (کدام شکل؟) و از دانش‌آموز می‌خواهیم که عبارتی برای مساحت شکل دیگر بیابد. این فعالیت از این جهت هم دوست‌داشتنی است که می‌توان آن را با فکر کردن به هندسه‌ی هریک از شکل‌ها به روش‌های مختلف انجام داد

(پایین‌تر را ببینید). نتیجه‌ها ظاهراً متفاوت‌اند اما در حقیقت، عبارت‌هایی برابرند. همین، انگیزه‌ای می‌شود برای دست‌ورزی با این عبارت‌ها و رسیدن به این نتیجه که واقعاً با هم برابرند.



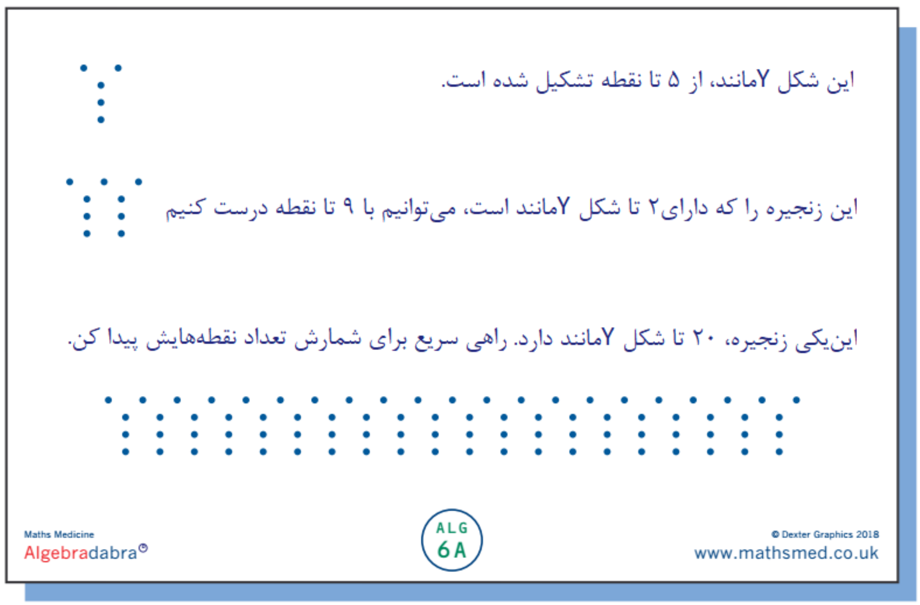
مجموعه‌ی تکلیف‌های شکل‌های صلیب‌مانند، ذاتاً «پویا»ست و ما در این موضوع تعمّد داشته‌ایم. این، همان رویکردی است که مکرراً در ICCAMS به کار گرفته‌ایم تا به دانش‌آموزان کمک کنیم که مفهوم «متغیر» را درک کنند. اما این رویکرد معمولاً در جبر مدرسه‌ای نادیده گرفته می‌شود. و همان‌طور که پیش از این گفتیم، در جبر مدرسه‌ای اغلب به کار کردن با عددی خاص (اما موقتاً نامعلوم) توجه می‌شود و نه کار کردن با متغیر. بر سر اینکه این نگاه در جبرِ مدرسه‌ای تا چه اندازه به عمومیت و ساختار مرتبط می‌شود، جای بحثی جدّی‌ست.

تابع‌ها و نمودارشان، از حوزه‌هایی‌اند که عمومیت را شامل می‌شوند. اما به این موضوع معمولاً به‌شکلی تکه‌تکه پرداخته می‌شود؛ ظاهراً بیشتر اوقات برایمان مهم نیست که این تابع مربوط به چیست و چگونه رفتار می‌کند. در عوض، وقتی نمودارْ خطی راست است (یعنی در اکثر موارد!) ما به این قاعده‌ی رویه‌ای تمرکز می‌کنیم که معادله‌ی خط می‌تواند به‌صورت $y = mx + c$ نوشته شود که m همان شیب خط است (میزان بالا رفتن بر روی میزان جلو رفتن؛همان دستور محاسبه‌ی شیب) و c نشان‌دهنده‌ی جایی است که خط، محور y ها را قطع می‌کند. یکی از کاراترین درس‌های ICCAMS، درس اجاره‌ی قایق است، که موقعیتی درباره‌ی دو قاعده برای اجاره‌ی قایق را دربردارد: یا ساعتی ۵ پوند، یا ساعتی ۱ پوند به همراه ۱۰ پوند مبلغ ورودی. «کدامشان را انتخاب می‌کنید؟» متوجه شدیم که این تکلیف، دانش‌آموزان را به خود جذب می‌کند و موقعیت برای همه‌ی آن‌ها ملموس است حتی اگر هیچ‌وقت قایقی اجاره نکرده باشند و در آینده هم نکنند. در این درس، موقعیت تلفیق می‌شود با کاربرد جدول مقادیر و عبارت‌های جبری و نمودارها و هریک از این‌ها بر بقیه نور می‌تاباند.

چون نمی‌خواستم مطالب ICCAMS را کپی کنم، در وبلاگم تکلیف‌هایی مثل «اجاره‌ی قایق» را نیاورده‌ام. اما به موضوع عمومیت در زمینه‌هایی دیگر پرداخته‌ام، به‌خصوص با استفاده از الگوهای شکلی. در بسیاری از کتاب‌ها، مثال‌هایی از الگوهای شکلی وجود دارند، گرچه وقتی به اهمیت تعمیم در جبر مدرسه‌ای توجه کنیم، می‌بینیم که برای آن‌ها نقش درخوری در نظر گرفته نشده است. معمولاً الگوهای شکلی به‌صورت الگوهای رشدْ ارائه می‌شوند؛ دنباله‌ای از سه یا چهار شکل از الگو (با نام‌های اولی، دومی، سومی) نشان داده می‌شود و سپس از ما خواسته می‌شود که شکل بعدی در الگو را بکشیم و بعد تعداد اجزاء مشخصی [نقطه‌ها، پاره‌خط‌ها، ...] را در شکلِ مثلاً بیستم یا صدم یا nام الگو پیدا کنیم. این رویکرد، جا را برای حد مشخصی از کاوش باز می‌کند که خود می‌تواند

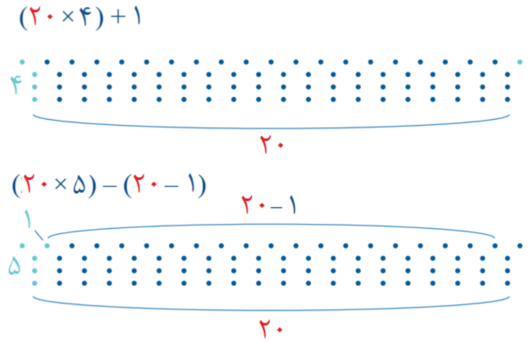
در جستجوی ساختار الگو مفید واقع شود. اما از طرف دیگر، به‌سادگی می‌تواند به رویکردی تجربی منجر شود، یعنی این روش که دانش‌آموزان جفت‌های اعداد را در جدولی فهرست کنند و بدون ارجاع به ساختار واقعی الگو، به دنبال قاعده‌ای (درون یا بین عددها) بگردند.

برای اینکه تمرکز بر ساختار حفظ شود، مشتاقم که در موقعیت‌های مناسب، از الگوها به‌صورت *عام* [۵] استفاده کنم (کوچمن، ۲۰۱۰). در تکلیف زیر، شکلی «Yمانند» تعریف و نشان داده می‌شود که چطور با استفاده از آن، شماره‌ی شکلی را در الگو پیدا کنیم. سپس، بلافاصله سراغ شکلی «دوردست» در الگو می‌رویم؛ بیستمین شکل. وقتی از دانش‌آموزان می‌خواهیم که با روشی کارا، تعداد نقطه‌های این شکل را پیدا کنند، عملاً از دانش‌آموزان می‌خواهیم که بر این شکل خاص تمرکز کنند و به آن ساختار ببخشند.



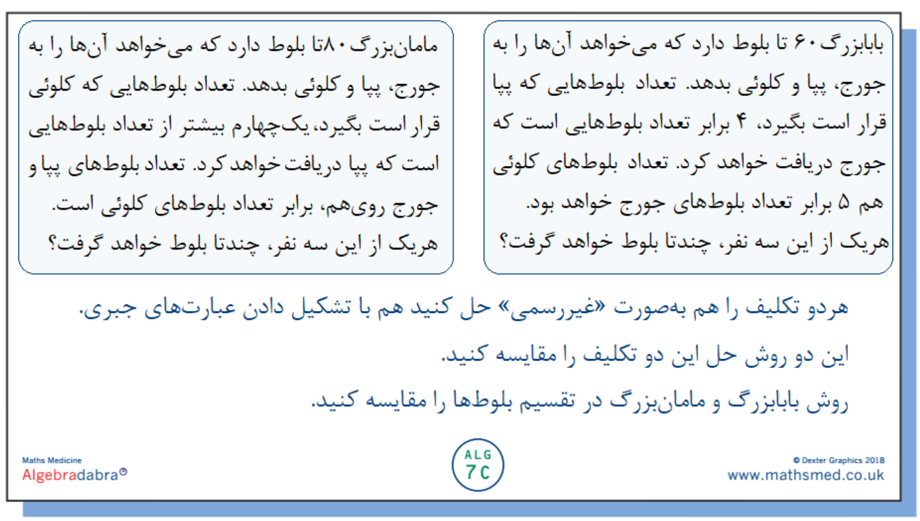
نقطه‌ی قوّت این جنس تکلیف‌ها این است که روی الگو می‌توان ساختارهایی گذاشت که در نگاه اول متفاوت‌اند اما معلوم می‌شود که معادل‌اند. مانند شکل‌های صلیب‌مانند، این وضعیتْ انگیزه‌ای است برای بیان ساختار با نمادها و دستورزی با عبارت‌های جبری، تا معادل بودنشان معلوم شود. در نسخه‌ی دوم این تکلیف، ما دو عبارت برای ساختار شکل بیستم می‌دهیم و عبارت سومی را می‌خواهیم: ۱ + (۴ × ۲۰) و (۵ × ۲۰) − (۲۰ − ۱). توجه کنید که ما داریم از یک «گزاره‌ی باز [۶]» استفاده می‌کنیم و عدد بیست در نقش شبه‌متغیر [۷] است. البته این عبارت‌ها، همان‌طور که در پایین تصویر شده است، از چینش مکانی نقطه‌ها حاصل می‌شوند.

[۵] Generic
[۶] Open sentence
[۷] Quasi variable



تا حالا، ۱۶ مجموعه تکلیف برای وبلاگ تولید کرده‌ام. نمی‌دانم آیا می‌توانم خیلی بیشتر از این ادامه دهم یا نه. البته خیلی خوب می‌شود که به ۲۰ برسم، که در آن صورت در مجموع ۵×۲۰ نسخه از مسئله‌ها وجود خواهد داشت!

این مقاله را با تکلیفی دیگر که در ادامه می‌آید، به پایان می‌برم. موقعیت این مسئله خیلی مصنوعی است، اما راهی برای نشان دادن کارایی جبر پیش پای ما می‌گذارد. داستانی که در سمت راست آمده، از بعضی جنبه‌ها شبیه تکلیف محیط است که در ابتدای مقاله ذکر کردم. اگر تصمیم بگیریم که تکلیف را با نمادگذاری جبری حل کنیم (یعنی فرض کنیم g تعداد بلوط‌های جرج را نشان می‌دهد)، به معادله‌ای می‌رسیم شامل جمع چندین جمله که می‌توانیم ساده‌اش کنیم: $۶۰ = g + ۴g + ۵g = ۱۰g$ (پس $g = ۶$ و جرج، پپا و کلوئی به‌ترتیب ۶، ۲۴ و ۳۰ بلوط می‌گیرند).


بابابزرگ ۶۰ تا بلوط دارد که می‌خواهد آن‌ها را به جورج، پپا و کلوئی بدهد. تعداد بلوط‌هایی که پپا قرار است بگیرد، ۴ برابر تعداد بلوط‌هایی است که جورج دریافت خواهد کرد. تعداد بلوط‌های کلوئی هم ۵ برابر تعداد بلوط‌های جورج خواهد بود. هریک از این سه نفر، چندتا بلوط خواهد گرفت؟

مامان‌بزرگ ۸۰تا بلوط دارد که می‌خواهد آن‌ها را به جورج، پپا و کلوئی بدهد. تعداد بلوط‌هایی که کلوئی قرار است بگیرد، یک‌چهارم بیشتر از تعداد بلوط‌هایی است که پپا دریافت خواهد کرد. تعداد بلوط‌های پپا و جورج روی‌هم، برابر تعداد بلوط‌های کلوئی است. هریک از این سه نفر، چندتا بلوط خواهد گرفت؟

هردو تکلیف را هم به‌صورت «غیررسمی» حل کنید هم با تشکیل دادن عبارت‌های جبری.
این دو روش حل این دو تکلیف را مقایسه کنید.
روش بابابزرگ و مامان‌بزرگ در تقسیم بلوط‌ها را مقایسه کنید.

Maths Medicine
Algebradabra©
ALG 7C
© Dexter Graphics 2018
www.mathsmed.co.uk

البته این داستان خیلی مصنوعی و حتی ابلهانه است، اما هدفی موجّه دارد: معمّاست. در هر صورت آشکار است که در اینجا نیازی نیست از جبر رسمی استفاده کنیم و این، معضلی است که در بسیاری از تکالیف جبر مدرسه‌ای وجود دارد؛ عموماً می‌توان آن‌ها را به‌صورت غیررسمی حل کرد. پس چرا تلاش کنیم که روش‌های رسمی را یاد بگیریم؟!

داستان دوم [سمت چپ] را نیز می‌توان به‌صورت غیررسمی حل کرد، اما این کار سخت‌تر است. این مسئله شامل «ارجاع دوری [۸]» است؛ ساختاری برای مسائل که آن را اولین بار در نوشته‌ی عالیِ میسن و ساذرلند [۹] (۲۰۱۰) در باب مرور جبر مدرسه‌ای دیدم که میتوان ردّش را تا «اصول جبر» اویلر [۱۰] (یا شاید هم در تعلیقاتی بر ترجمه‌ی فرانسوی این اثر به قلم دُ لا گرانژ [۱۱]) پی گرفت.

می‌توانیم آن را به این صورت، نمادین کنیم: $g + p + c = ۸۰$ ، $c = \frac{p}{۴} + p$ و $g + p = c$. پیچیده به نظر می‌رسد، اما دست‌کم به این ترتیب، روابط مختلف را به روی کاغذ آورده‌ایم. دیگر لازم نیست حساب و کتاب آن‌ها را در ذهنمان داشته باشیم. فقط دست‌ورزی با نمادها باقی مانده است (البته اگر مهارت این کار را داشته باشیم!)، تا جایی که مقدارهای خواسته‌شده پیدا شوند... . این روش حل ممکن است به دانش‌آموزان کمک کند که قدرت نمادگذاری (و رویه‌های جبری) را ببینند، حتی علی‌رغم اینکه حروف را به‌جای مقدارهای نامعلوم خاص به‌کار برده‌ایم و (در اینجا) نقش متغیر را ندارند.

مراجع:

Ainley, J. and Pratt, D. (۲۰۰۲). Purpose and Utility in Pedagogic Task Design, in A. Cockburn and E. Nardi (Eds) Proceedings of the Twenty Sixth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Norwich, UK, Vol ۲ ۱۷-۲٤.

Kieran, C. (۲۰۰۷). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester, Jr., (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. ۷۰۷-۷٦۲). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Küchemann, D. E. (۲۰۱۰). Using patterns generically to see structure. Pedagogies: An International Journal , ۵:۳,۲۳۳-۲۵۰.

Mason, J. and Sutherland, R. (۲۰۰۲). Key aspects of teaching algebra in schools. London, UK: QCA.

[۸] Circular reference
[۹] Mason & Sutherland
[۱۰] Euler’s Elements of Algebra
[۱۱] De Lagrange

مترجم

بهزاد اسلامی مسلم؛ معلم ریاضی متوسطه اول در مجتمع مفید

ویرایش متن، آماده و خوشگل‌سازی فایل پی- دی- اف

شراره تقی دستجردی؛ خانه‌ی ریاضیات اصفهان