[کارولین کایرن](#)

۱۹ بهمن ۱۳۹۶

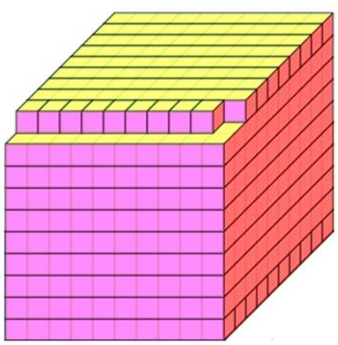
(نوشته شده برای **ویکی نوشت**)

کلیدی برای رشد تفکر جبری:

جسنجو، استفاده و بیان کردن ساختار

۱. تذکرات مقدماتی

جبر دبیرستانی شامل کار کردن با عبارت‌های کلی است. برای موفقیت در انجام تبدیلات جبری و معنی بخشیدن به آنها، توانایی دیدن ساختار در عبارت‌های کلی ضروری است. با وجود این‌که مدت‌هاست که درک و ایجاد این عبارت‌ها ،«تعمیم»، همچون قلب ریاضیات مدرسه‌ای در نظر گرفته شده‌است، توجه بیش از اندازه به خودِ فرایند تعمیم، تا حد زیادی باعث کم توجهی به فرایند دیدن ساختار شده‌است.



اعداد ساختارمند تر از آن هستند که ظاهر آنها نشان می‌دهد.

دیدن ساختار نیازمند *عبور از صورت اشیای ریاضی* است. برای مثال، $x^6 - 1$ را می‌توان به شکل $(x^3)^2 - 1$ یا $(x^2)^3 - 1$ دید و بر آن اساس هر کدام را تجزیه کرد. یا این‌که، عدد ۹۸۹ را می‌توان به صورت‌های مختلفِ ساختاری، همچون، $9 \times 109 + 8$، $9 \times 110 - 1$ و یا حتی $9 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 9 \times 10^0$ دید و نوشت. همان‌طور که مثال اخیر نشان می‌دهد، عبور از صورت اشیای ریاضی می‌تواند به معنای توسعه‌ی آگاهی از راه‌های ممکن و مختلف درک ساختار اعداد به کمک عمل‌های حساب باشد؛ با این تعبیر، حساب پیشنیازی برای جبر دبیرستانی خواهد بود. اما، همان‌طور که آرکاوی[۱] و همکارانش (۲۰۱۷) گفته‌اند، تجارب دانش‌آموزان در یادگیری حساب، به ندرت کمکی به فهم آنها از ساختار اعداد می‌کند. همچنین، به قول میسن[۲] (۲۰۱۶)، نگاه ساختاری، جنبه جنبه‌ای از تفکر جبری است که اغلب نادیده گرفته می‌شود (توجه کنید که هم حساب و هم جبر نیازمند تفکر جبری است).

این مقاله برای حمایت از دیدگاه ساختاری و تاکید بر اهمیت آن در رشد تفکر جبری نوشته شده‌است. بخش دوم مقاله منظور از تفکر جبری را روشن خواهد کرد؛ بخش سوم، در مورد مفهوم ساختار از دیدگاه ریاضی و دیدگاه‌های نظری دیگر است؛ و بالاخره بخش آخر، بخش چهارم، پیشنهاداتی برای نمایان کردن ساختار با هدف رشد تفکر جبری ارایه می‌دهد.

---

[۱] Arcavi
[۲] Mason

۲. تفکر جبری، هم در حساب، هم در جبر

به طور سنتی، جبر در مدرسه در دوره متوسطه و به دانش‌آموزان ۱۲ تا ۱۸ ساله آموزش داده می‌شود. هدف آموزش جبر در این دوره، عمدتا صورت‌بندی و انجام عملیات روی عبارت‌های چندجمله‌ای و گویا، نمایش مساله‌های کلامی با استفاده از عبارت‌های جبری، معادلات، متغیرها و مجهولات، و حل معادله‌های جبری با استفاده از اصول پذیرفته‌شده و خاصیت‌های تساوی بوده‌است. اما در طول دهه‌های اخیر، دیدگاه در مورد چیستی جبر مدرسه‌ای تغییر کرده و ایده‌های متفاوتی در مورد آن مطرح شده‌است. برای مثال، آرکاوی و همکارانش (۲۰۱۷، ص. ۲-۳) اهداف جبر مدرسه‌ای را «بیان تعمیم و ایجاد ارتباط، حل مساله، جستجوی خاصیت‌های اشیاء ریاضی، اثبات قضایا و محاسبات» می‌دانند.
استیسی و چیک[۳] (۲۰۰۴، ص. ۱۶)، جبر مدرسه‌ای را «راهی برای بیان تعمیم، دست‌ورزی با نمادها و حل معادلات، مطالعه توابع، راهی برای حل دسته‌های مشخصی از مسائل و روشی برای مدل کردن موقعیت‌های واقعی» می‌بینند. لنگ[۴] و همکارانش (۲۰۱۴) فقدان تعریفی جامع از جبر مدرسه‌ای را مورد تاکید قرار می‌دهند. آنها شواهدی را فراهم می‌کنند که نشان می‌دهد درس‌های جبر، نه تنها از کشوری به کشوری دیگر، حتی در یک کشور نیز متفاوت است. این میزان از گوناگونی، نه فقط در محتوا، بلکه در این‌که آیا تمرکز اصلی بر رَویه‌ها باشد یا ساختارها و یا ترکیبی از هر دوی آنها، نیز مشاهده می‌شود.

در ۱۹۷۷، فرودنتال[۵] تفکر جبری را علاوه بر حل معادلات خطی و درجه دو، به عنوان مشخصه‌ی جبر مدرسه‌ای درنظر گرفت. برای او تفکر جبری شامل توصیف روابط و رویه‌های حل مسائل به شکلی کلی بود. این جنبه از تفکر جبری که در آن زمان کاملا نو بود، ابعاد جدیدی به آموزش جبر بخشید و نه تنها فرایندهای تفکر جبری را وارد دوره متوسطه کرد، بلکه راهی برای توسعه آن به دوره ابتدایی فراهم کرد.

همان‌طور که کایرن[۶] و همکارانش (۲۰۱۶) اشاره کردند، در طول بیش از ۲۰ سال گذشته، علاقه برای رشد تفکر جبری به‌طور پیوسته افزایش یافته‌است، چنان‌که هم اکنون روابط ریاضی، الگوها و ساختارهای حسابی در مرکز توجه آموزش ریاضی دوره ابتدایی قرار دارد. به علاوه، فرایندهای استدلالی مورد استفاده توسط دانش‌آموزان ۵ تا ۱۲ ساله در هنگام ساختن این روابط، الگوها و ساختارها، کاملا مورد توجه است، فرایندهایی همچون دیدن (روابط و ساختارها)، ساختار بخشیدن، حدس زدن، تعمیم دادن، نمایش دادن و توجیه کردن. قابل ذکر است که برای کمک به بیان تعمیم توسط دانش‌آموزان خردسال‌تر، می‌توان به جای نماد های حرفی-عددی (برای مثال a و b یا ۱، ۲، ۳و ...) از کلمه‌های زبان طبیعی، مصنوعات یا دیگر علائم ریاضی استفاده کرد (برای مثال، رادفورد[۷] (۲۰۱۸) را ببینند).

به‌طور خلاصه، درک کنونی ما از تفکر جبری، هم در حساب و هم در جبر، به‌طور مشخصی گوناگون است. با وجود این می‌توان گفت که تفکر جبری از طرفی شامل فعالیت‌های نماد-محور با اشیاء ریاضی و روابط بین آنها و از طرف دیگر شامل فرایندهای تفکر ریاضی زیربنایی آنها است. اما، در این گستره مفاهیم معاصر، به اندازه‌ای که به فرایند تعمیم توجه شده به جستجو و بیان ساختار توجه نشده‌است.

[۳] Stacey & Chick
[۴] Leung
[۵] Freudental
[۶] Kieran
[۷] Radford

۳. در مورد ساختار

بدون شک، ساختار یکی از ایده‌های بزرگ ریاضیات است و در همه جای آن دیده می‌شود. شاید به نظر برسد که در مورد معنی واژه *ساختار* تفاهم جمعی وجود دارد؛ ولی چنین نیست. بعضی از محققین دیدن ساختار را مقدمه عمل تعمیم می‌دانند. برای مثال بلانتون[۸] و همکارانش (۲۰۱۱) می‌گویند، «تعمیم، فرایند تشخیص ساختارها و روابط، در موقعیت‌های ریاضی است ... این می‌تواند تشخیص روابط بین کمیت‌هایی باشد که در ارتباط با یکدیگر تغییر می‌کنند، یا این‌که جدا کردن و بیان ساختارهای حسابی بر مبنی مشاهده مکرر چگونگی رفتار عمل های حساب (ص. ۹).

اما برعکس، میسن و همکارانش (۲۰۰۹) تشخیص عمومیت را بخشی از فعالیت ساختاری می دانند:

> *ما ساختار ریاضی را به معنی تشخیص عمومیت نهفته در روابط بین اجزا در مثال‌های یک موقعیت می‌دانیم؛ این اجزا می‌توانند اشیاء ریاضی باشند مانند: اعداد و مثلث‌ها، مجموعه‌ها و توابع بین آنها، روابط بین مجموعه‌ها، و حتی روابط بین روابط در یک سلسه مراتب پی‌درپی. می‌شود به ساختار همچون فهرستی از خاصیت‌های مورد توافقی که هم چون اصل پذیرفته شده اند و مبنای استنتاج خواص دیگرند اندیشید ... وقتی که یک رابطه همچون مثالی از خاصیتی کلی‌تر دیده شود، آن رابطه(جزئی از) ساختار می‌شود (ص. ۱۰).*

میسن و همکارانش (۲۰۰۹)، توجه به خاصیت‌ها را هسته‌ی اصلی تفکر ساختاری می‌دانند، تفکری که با عادت ذهن ریاضی فرد به استفاده، تصریح و مرتبط کردن خاصیت‌ها تعریف می‌شود. تا زمانی که رابطه بین دو یا بیش از دو شئ به عنوان مثالی از برخی خاصیت‌های کلی دیده نشود، آن رابطه به خودی خود به تفکر ساختاری مربوط نمی‌شود. آنها ادعا می‌کنند که «احترام به ساختار ریشه در احساس عمومیت دارد که این خود مبتنی است بر خواص اساسی حساب همچون جابجایی، شرکت پذیری، توزیع پذیری و درک خواص ۰ و ۱ به عنوان عناصر خنثی جمع و ضرب، همراه با درک این‌که جمع و تفریق وارون یکدیگرند، همچنان که ضرب و تقسیم وارون یکدیگرند(ص. ۱۵).

فرودنتال (۱۹۸۳ و ۱۹۹۱)، در تعریفش از ساختار، پای را فراتر از خواص اصلی حساب می‌نهد. او تاکید می‌کند که دستگاه اعداد شمارشی دارای *ساختار ترتیبی* است به‌طوری که جمع می‌تواند از این ترتیب در ساختار استخراج شود؛ هر جفت از اعداد، عدد سومی را که همان حاصل‌جمع است، مشخص می‌کنند. روابط این دستگاه به صورت $a+b=c$ است که فرودنتال آن را *ساختار جمعی* می‌نامد. *ساختار ضربی* اعداد طبیعی چیزی بیش از انجام عمل ضرب توصیف می‌شود. روابط پیچیده‌ای چون $a.b=c$ و $a.b.c=d$ که به ترتیب ممکن است با $a.b={d}/{c}$ و ${c}/{b}=a$ بیان شود و انواع دیگر روابط مانند جابجایی، شرکت-پذیری، توزیع‌پذیری و معادل بودن $a.b=c$ با ${c}/{b}=a$ در ساختار ضربی قرار می‌گیرند. از نقطه نظر فرودنتال، ساختار اعداد طبیعی همچنین اجازه می‌دهد که c را در رابطه $a.b=c$ ببینیم و آنگاه درمورد تجزیه آن به عوامل ضربی سوال کنیم. سپس می‌توان c را به عوامل اولش تجزیه و به این عوامل همچون ابزار ایجاد ساختار نگاه کرد. با پیوند برقرار کردن بین ساختار ترتیبی و ساختار ضربی، خاصیت دیگری منتج می‌شود: بزرگ کردن یک عامل ضربی، کوچک شدن عامل دیگر را موجب می‌شود.

به‌طور خلاصه، منظور فرودنتال از ساختار، ساختار واحدی که دربرگیرنده همه چیز باشد نیست؛ ساختار ترتیبی، ساختار جمعی، ساختار ضربی، ساختار بر اساس مقسوم علیه‌ها، ساختار بر اساس مضارب و غیره، ساختارهای متفاوت، اما در عین حال مرتبطی هستند که هر یک خواصی دارند - در حقیقت، علاوه بر خاصیت‌های اصلی حساب که به عنوان خاصیت‌های میدان شناخته می-

[۸] Blanton

شود، خواص *زیادی* مبتنی بر این ساختارها وجود دارد. فرودنتال همچنین از اصطلاح *ابزار ایجاد ساختار* استفاده می‌کند که به معنی ایجاد ساختارهای متفاوت و در عین حال معادلی است که می‌تواند از ساختارهای اولیه استخراج شود. در جایی که هدف رشد تفکر جبری است، نقطه نظرهای فرودنتال، به طور چشم‌گیری افق‌های وسیعی را برای طبقه‌بندی ساختارها و فعالیت‌های ساختاری در حساب و جبر پیش روی می‌گذارد.

۴. توجه به ساختار در تحقیقات مربوط به تفکر جبری

در دفاع از درنظرگرفتن گستره‌ای وسیع‌تر برای معنی ساختار و نقش آن در تفکر جبری، هم اکنون وقت آن است که نگاهی دوباره به ادبیات یادگیری جبر بیاندازیم و به دنبال ایده‌هایی بگردیم که می‌تواند به تفکر ساختاری کمک و یا حتی آن را در مسیر درست قرار دهد. هاچ و دریفس[۹] (۲۰۰۴) در تحقیقشان، *ساختار جبری* را چنین تعریف می‌کنند:

> *هر عبارت یا جمله جبری، نمایش دهنده‌ی ساختاری جبری است. پوسته بیرونی یا صورت آنها، خبر از نظمی درونیشان می‌دهد یا در صورت لزوم می‌تواند به چنین آگاهی‌ای تبدیل شود. نظم درونی با روابط بین کمیت‌ها و عملگرهایی که مولفه‌های آن ساختار هستند، تعریف می‌شود (ص. ۵۰).*

یکی از مثال‌هایی که آنها ارائه می‌دهند عبارت $۳۰x^۲ - ۲۸x + ۶$ است. دیدن این عبارت به شکل یک ساختار درجه دو، دانش‌آموزان را به سمت تبدیل آن به عبارتی برابر (متحد)، که متشکل از حاصل‌ضرب دو عبارت خطی است رهنمون می‌کند. تعریف هاچ و دریفس، توجه ما را به نظم درونی و اجزای ساختاری تشکیل دهنده‌ی آن سوق می‌دهد. وارن[۱۰] (۲۰۰۳) در مقاله‌ای در مورد نقش ساختارهای حسابی در گذر از حساب به جبر، توجه ما را به خواص مربوط به هم‌ارزی و برابری جلب می‌کند. لینچفسکی و لیونه[۱۱] (۱۹۹۹) عبارت «حس ساختار» را ابداع و نشان دادند که مشکلات دانش‌آموزان با ساختارهای جبری ریشه در فقدان درک آنها از ساختارهای حسابی دارد. برای کمک به ایجاد و رشد حس ساختار، آنها ما را به طراحی فعالیت‌هایی دعوت می‌کنند که تجربه تجزیه عبارت‌های حسابی و ترکیب مجدد آنها به عبارت‌هایی هم ارز را برای دانش‌آموزان فراهم می‌کند.

تعدادی از تحقیقات اخیر در مورد توسعه تفکر جبری در دوره ابتدایی بر جنبه‌های ساختاری فعالیت‌هایی همچون تجزیه و ترکیب مجدد اعداد و جایگزین کردن اعداد مختلف در عمل‌های حساب تاکید کرده‌اند (برای مثال مقالات مرجعی که توسط کایرن (۲۰۱۸) ویرایش شده را ببینید). در مطالعات دیگر، از فعالیت‌های الگویابی و موقعیت‌های تابعی برای جلب نظر دانش‌آموزان به جنبه‌های ساختاری استفاده شده‌است.

علاوه بر فعالیت‌های ساختار-محور که توسط لینچفسکی و لیونه و دیگران توصیه شده، استار[۱۲] و همکارانش (۲۰۱۵) بر اهمیت جستجو کردن، به کار بردن و بیان کردن ساختار توسط دانش‌آموزان در دروس جبر دوره متوسط تاکید کرده‌اند؛ توجه کنید که توصیه‌های آنها کمی با آنچه تاکنون خوانده‌ایم متفاوت است:

> *به دانش‌آموزان خود بیاموزید که از ساختارهای جبری استفاده کنند. برای این کار می‌توانید: (۱) آنها را به استفاده از زبانی که منعکس کننده‌ی ساختار ریاضی است تشویق کنید؛ (۲) دانش‌آموزان را تشویق کنید که در هنگام حل مسئله‌ها*

[۹] Hoch & Dreyfus
[۱۰] Warren
[۱۱] Linchevski & Livneh
[۱۲] Star

با پرسیدن سوال‌های مناسبی از خود به دنبال ساختار باشند؛ (۳) به آنها بیاموزید که نمایش‌های جبری مختلف می-توانند اطلاعات مختلفی را درباره یک مسئله جبری منتقل کنند.

به‌طور خلاصه، توجه فزاینده به اهمیت تجربه‌ی ساختارها در حساب و جبر، در کنار توجه همیشگی به اهمیت تعمیم، نوید دهنده نگاهی کلی‌تر به رشد تفکر جبری است. نگاهی به دو جهت مخالف ولی مکلمل که یکی به تعمیم توجه دارد و دیگری به «*عبور از صورت اشیای ریاضی*»و بیرون کشیدن اجزای ساختاری.

منابع

Falkner, K. P., Levi, L., and, Carpenter, T. P. (۱۹۹۹), Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics*, ٦, ٢٣٢-٣٦.

Arcavi, A., Drijvers, P., & Stacey, K. (۲۰۱۷). *The learning and teaching of algebra: Ideas, insights, and activities*. London: Routledge.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. J. (۲۰۱۱). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades ۳-۵. In B. J. Dougherty & R. M. Zbiek (Eds.), Essential understandings series.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Freudenthal, H. (۱۹۷۷). What is algebra and what has it been in history? *Archive for history of exact sciences,* ۱۶ (۳), ۱۸۹-۲۰۰.

Freudenthal, H. (۱۹۸۳). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, NL: Reidel.

Freudenthal, H. (۱۹۹۱). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht, NL: Kluwer Academic.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (۲۰۰۴). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of ۲۸th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. ۳, pp. ۴۹-۵۶). Bergen, NO: PME.

Kieran, C. (Ed.). (۲۰۱۸). *Teaching and learning algebraic thinking with ۵- to ۱۲-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. New York: Springer.

Kieran, C., Pang, J. S., Schifter, D., & Ng, S. F. (۲۰۱۶). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching.* New York: Springer Open eBooks. Accessed: ۲۴ January ۲۰۱۸: http://www.springer.com/us/book/۹۷۸۳۳۱۹۳۲۲۵۷۵.

Leung, F. K. S., Clarke, D., Holton, D., & Park, K. (۲۰۱۴). How is algebra taught around the world? In F. K. S. Leung, K. Park, D. Holton, & D. Clarke (Eds.), *Algebra teaching around the world* (pp. ۱-۱۵). Rotterdam, NL: Sense Publishers.

Linchevski, L., & Livneh, D. (۱۹۹۹). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics,* ۴۰, ۱۷۳-۱۹۶.

Mason, J. (۲۰۱۶). *How early is too early for thinking algebraically?* Invited panel presentation at Topic Study Group ۱۰ of ۱۳th International Congress on Mathematical Education (ICME۱۳), Hamburg, Germany.

Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (۲۰۰۹). Appreciating mathematics structure for all. *Mathematics Education Research Journal* ۲۱ (۲), ۱۰-۳۲.

Radford, L. (۲۰۱۸). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with ۵- to ۱۲-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. ۱-۲۳). New York: Springer.

Stacey, K., & Chick, H. (۲۰۰۴). Solving the problem with algebra. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The ۱۲th ICMI Study* (pp. ۱-۲۰). Boston, MA: Kluwer Academic.

Star, J. R., Caronongan, P., Foegen, A., Furgeson, J., Keating, B., Larson, M. R., Lyskawa, J., McCallum, W. G., Porath, J., & Zbiek, R. M. (۲۰۱۵). *Teaching strategies for improving algebra knowledge in middle and high school students* (NCEE ۲۰۱۴-۴۳۳۳). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance (NCEE), Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. Retrieved from the NCEE website: http://whatworks.ed.gov

Warren, E. (۲۰۰۳). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal,* ۱۵ (۲), ۱۲۲-۱۳۷.

کمی در مورد ترجمه

ترجمه فوق نه به صورت جمله به جمله بلکه با توجه به بلوک‌های معنایی انجام شده‌است. به این معنی که هر تعداد جمله پی‌درپی که یک معنی را می‌رساندند به عنوان واحد ترجمه درنظرگرفته شد. علاوه بر این، مترجمان، از ادبیات به‌کار رفته در متن مقاله آگاهی کامل داشتند به همین دلیل هر از گاهی با وفاداری به معنی مورد نظر نویسنده، چند کلمه (دو یا سه) به متن اضافه کردند تا خواندن آن برای خواننده راحت‌تر شود و نیاز به پانوشت‌های مکرر نباشد.

مترجمان


شراره تقی دستجردی؛ خانه ریاضیات


امیر حسین اصغری؛ دانشگاه لیورپول جان مورس