

# پاسخی ریاضی وار به رئیس جمهور

امیر حسین اصغری

«گفتگو بین فرهنگها» بدون داشتن فرهنگ گفتگو متبلور نمی شود. کلاس درس مکانی است که می توان این فرهنگ را در آن نهادینه کرد. می توان با جایگزین کردن انتقال اندیشه بجای انتقال دانش، فرایند یکسویه انتقال دانش از معلم به دانش آموز را به فرایند چند سویه انتقال اندیشه از معلم به دانش آموز، دانش آموز به معلم و دانش آموز به دانش آموز تغییر داد، و در این رهگذر به دانش آموز فرصت اندیشیدن زبانی برای بیان اندیشه و گوشه برای شنیدن اندیشه داد.

کلاس ریاضی بهترین آزمایشگاه گفتگو است؛ و این دلیلی است بر اینکه چرا شهروندان آینده جامعه ما نیاز به آموزش ریاضی دارند. در این دیدگاه، با تغییر نگاه ما نسبت به ریاضی و آموزش آن، مسئولیت ما معلمان ریاضی نیز تغییر می کند. در این مقاله با بررسی چند مسأله ریاضی در کلاس اول، به تشریح این دیدگاه می پردازیم. اگر چه تمام مسائل زیر می توانند بار آموزشی متفاوتی را دارا باشند، ولی تأکید ما در اینجا، بر گفتگوی سازنده در کلاس است.

مثال زیر به عنوان مقدمه ای بر درس اتحادها به کار برده می شود، اگر چه همانطور که مشاهده خواهید کرد جنبه های بسیار متفاوتی را در بر می گیرد.

## نیمسال اول: کلاس ریاضی ۱ - درس اتحادها!

آقای معلم: دو عدد انتخاب کنید که اختلاف آنها دو تا باشد، آنها را در هم ضرب کنید (همزمان روی تخته)  $3 \times 5$

نتیجه را با یک جمع کنید  $16 + 15$   
[با اشاره انگشت به بعضی از دانش آموزان]  
چه شد؟

۲۵ -

۳۶ -

۴ -

۲۸ -

دانش آموز - آقا ۲۸ اشتباه است!

معلم - چرا

دانش آموز - همه اعداد به دست آمده «جذر» دارند! ۲۸ جذر ندارد.

معلم - [رو به دانش آموزی که عدد ۲۸ را به دست آورده] اعدادی که انتخاب کردی به هیچکس نگو. کسی مطمئن است که اشتباه کرده؟ بعضی از دانش آموزان دست خود را بالا می برند، فقط بعضی. [بعضی ها هم سعی می کنند به زور اعداد او را کشف کنند!]  
معلم - چرا؟

در پاسخ به این چرا بسته به اینکه درسهای قبلی کلاس چگونه داده شده باشد. مسیرهای متفاوتی طی می شود، گاهی بحثی طولانی بر سر اینکه چه وقت «حرفی» درست است در می گیرد. دو نظر زیر که عیناً نقل می شود از جمله نظراتی هستند که طرفداران پروپا قرص و زیادی در بین دانش آموزان دارد:

الف) هر حرفی درست است تا وقتی خلاف آن ثابت شود: که نتیجه عملی آن در مورد مثال بالا این است که تا وقتی دانش آموز «بیست و هشتی» اعدادش را ارائه ندهد، نظر ما درست است.

ب) هیچ چیزی درست نیست تا اینکه امتحان شود؛ که معمولاً امتحان کردن در نظر دانش آموزان همان مثالی است که خود آنها زده اند.

البته امیدواریم این حرفها قبلاً، در مثالهای دیگری که لزوم به کار بردن نمادها و نحوه به کار بردن آنها را ارائه می کند، زده شده باشد. اگر چه

از این مثال در این جهت نیز نمی توان استفاده کرد. همیشه به یاد داشته باشید که این مرحله مهمی است که به آسانی طی نمی شود، و استفاده از آن نیز معمولاً بدون اشتباه صورت نمی گیرد. در این مثال خیلی از آنها بدون توجه به اینکه آن دو عدد دو تا اختلاف دارند یکی را  $X$  و دیگری را  $Y$  می گیرند. به هر حال پس از کمی مشاوره و مشاهده، نمادها به طور مناسب اختیار می شود، یکی  $X$  و دیگری  $Y$ .

$$X(X+2)+1=X^2+2X+1$$

معلم - چه می خواهیم؟

...

- تا حالا چه کار کردیم

- دو تا عدد که اختلافشان دو تا است در هم ضرب کردیم، نتیجه را با یک جمع کردیم، می خواهیم نشان دهیم حاصل جذر دارد.

دانش آموز - جذر دارد، یعنی چه؟

مشکل دیگری از اینجا شروع می شود. اینکه  $X^2+2X+1$  جذر دارد، یعنی چه؟ و چگونه می توان آن را نشان داد؟

در اینجا، بایستی دانش آموزان خیلی آهسته و با احتیاط به این «تغییر دیدگاه» راهنمایی شوند که صورت دقیق مسأله چیست؟

معلم - برگردیم به مثالها (روی تخته)  $3 \times 5 + 1 = 16$

۱۶ جذر دارد یعنی چی؟

در اینجا است که مثالهای ما شکل دیگری به خود می گیرند.

$$3 \times 5 + 1 = 16 = 4^2$$

$$4 \times 6 + 1 = 25 = 5^2$$

پس ما می خواهیم چه چیز را نشان دهیم؟

دانش آموز - عددی وجود دارد که اگر به توان ۲ برسد،  $1 + 2x + x^2$  شود

$$(x^2 + 2x + 1) = (x+1)^2 \quad (\text{روی تخته})$$

دوباره برگردیم به مثالها.

- در مورد ۵ و ۳، چه شد؟

۴-

- در مورد ۶ و ۴؟

۵-

$$x + 2, x -$$

$$x + 1 -$$

- بنابراین حدس ما این است

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

ولی آیا این حدس درست است؟ پاسخها در اینجا هنوز هم اشاره به مثالهای عددی دارد (یک جنبه اتحاد) و سؤال - پاسخ دیگر روشن کننده جنبه دیگر اتحاد است.

- معنی طرف دوم چیست؟

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= (x+1)(x+1) \\ &= x^2 + x + x + 1 \\ &= x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

بنابراین آنچه حدس زده بودیم درست است. در هر خم مثال بالا، هزار پیچ - لزوم استفاده از نماد، نحوه استفاده از آن، چگونه حدس زدن، چگونگی بررسی حدس، درک مسئله و... نهفته است که بایستی به دانش آموز فرصت داد که آنها را به آرمی باز کند.

مثال زیر کاملاً موازی مثال بالاست. اگر چه بدون مجهز بودن به اندیشه های بالا پیچیده است. از  $1 + (3 \times 3 + 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 2) = 25$  جذر بگیرد.

دانش آموزان با توجه به مثال قبلی حدس نمی زنند که داشتن جذر کامل در اینجا اتفاقی نباشد. بنابراین با مثالهای ساده تر این حدس را بررسی می کنند.

$$1 + (1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4) = 25 = 5^2$$

$$1 + (2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5) = 36 = 6^2$$

$$1 + (3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 6) = 49 = 7^2$$

(مرتب بودن این حدسها بستگی به آموزشهای قبلی در کلاس دارد)

بنابراین حکم ما این است، حاصل ضرب چهار عدد متوالی بعلاوه یک، مربع کامل است.

$$x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = (x^2 + 5x + 6)^2$$

در حالی که نگارنده به هنگام ورود به کلاس، برای یافتن تنها یک پاسخ داشت، در پایان پاسخهای دانش آموزان برای یافتن او را به ۶ پاسخ و چند مسأله دیگر مجهز کردند.

- حاصل ضرب اولی در آخری بعلاوه یک

- حاصل ضرب دوتای وسط منهای یک

- حاصل ضرب اولی و سومی منهای دومی

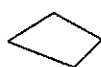
- حاصل ضرب دومی و چهارمی منهای سومی

«احساس دانش آموزان غیر قابل توصیف است.»

مثال سوم. هندسه ۲. یافتن تعداد قطرهای یک چند ضلعی محدب.

به کلاس درس گوش فرادهیم.

-(روی تخته سیاه)



- چهار ضلعی چند قطر دارد!

- دوتا



- ۱۰ ضلعی چند قطر دارد؟

جدول زیر تشکیل می شود،

تعداد ضلعها	۳	۴	۵	۶
تعداد قطرها	۰	۲	۵	۹

و آنچه معمولاً به سرعت مشاهده می شود، نحوه افزایش تعداد قطرها است.

تعداد ضلعها	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
تعداد قطرها	۰	۲	۵	۹	۱۴	۲۰	۲۷	۳۵
		+۲	+۳	+۴	+۵	+۶	+۷	+۸

و جدول با فرض درست بودن نحوه افزایش تعداد قطرها، تا یافتن پاسخ ادامه پیدا می کند. اگر تعداد قطرها یک ۱۰۰ ضلعی را بخواهیم، باید چه کار کنیم؟

- باید تعداد قطرها یک ۹۹ ضلعی را بدانیم و اینکه چه عددی به آن اضافه می شود. (در اینجا ایده های معادلات بازگشتی و یافتن جواب صریح برای آنها ظاهر می شود، اگر چه در این سطح تنها اسم بازگشتی بودن، به دلایل آشکار معنی دارد و

فرمول بندی ریاضی این مسأله به طور بازگشتی نبایستی مطرح شود)

- پس دنبال یک جواب صریح برای آن می گردیم، (با توجه به توضیحات قبلی اکنون احساسی نسبت به جواب صریح وجود دارد) - اول چند ضلعیها با تعداد ضلعهای فرد را در نظر می گیریم

تعداد ضلعها	۳	۵	۷
تعداد قطرها	۰	۵	۱۴

- آقا، زوجه ها هم شبیه آن است.

تعداد ضلعها	۴	۶	۸
-------------	---	---	---

$$4 \times \frac{1}{2}, 6 \times \frac{3}{2}, 8 \times \frac{5}{2}$$

(در اینجا دانش آموزان راهنمایی می شوند که تعداد قطرها را در دوروش - روش بازگشتی و این حدس جدید - با یکدیگر مقایسه کنند)

- خوب پس ۱۰۰۰ ضلعی چند قطر دارد.

- هنوز یک فرمول صریح نداریم.

(چون راه حل بالا از دل کلاس خارج شده، کلاس خودجوشی صورت می گیرد که جواب صریح را پیدا کنند)

$$4 \times \frac{1}{2}, 6 \times \frac{3}{2}, 8 \times \frac{5}{2}$$

کافی است صورت کسر را پیدا کنیم. همانطور که مشاهده می شود صورت کسر همیشه ۳ تا از تعداد ضلعها کمتر است.

- آقا در حالتی که تعداد ضلعها فرد باشد نیز درست است.

- خوب پس ۱۰۰۰ ضلعی چند قطر دارد؟

$$1000 \times \frac{(1000 - 3)}{2}$$

- n ضلعی چند قطر دارد؟

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

کاملاً حق با شماست! این فقط حدس است. ولی هدف ما این نبود که مثالی برای انتقال از استدلال استقرایی به استنتاجی بزنیم؛ فقط می خواستیم بگویم به کلاس گوش دهید، کلاس چیز زیادی برای آموختن دارد.